MECÂNICA DOS MATERIAIS

Ferdinand P. Beer / E. Russel Johnston, Jr. / John T. DeWolf / David F. Mazurek

QUINTA EDIÇÃO

Mc Graw Hill

bookman

EDITORA AFILIADA

M486 Mecânica dos materiais [recurso eletrônico] / Ferdinand P. Beer ... [etal.] ; tradução técnica José Benaque Rubert, Walter Libardi. – 5. ed. – Dados eletrônicos. – Porto Alegre : AMGH, 2011.

Editado também como livro impresso em 2011.
ISBN 978-85-8055-008-5

1. Engenharia mecânica. 2. Mecânica dos materiais. I. Beer, Ferdinand P.

CDU 621

Catalogação na publicação: Ana Paula M. Magnus – CRB 10/2052

5ª Edição

MECÂNICA DOS MATERIAIS

FERDINAND P. BEER
Professor (falecido) da Lehigh University

E. RUSSELL JOHNSTON, JR.
University of Connecticut

JOHN T. DEWOLF
University of Connecticut

DAVID F. MAZUREK
United States Coast Guard Academy

Tradução Técnica

José Benaque Rubert
Professor Doutor do curso de Engenharia
Mecânica da Universidade Federal de São Carlos

Walter Libardi
Professor Doutor do Departamento de
Engenharia da Universidade Federal de São Carlos

Versão impressa
desta obra: 2011

AMGH Editora Ltda.

2011

Obra originalmente publicada sob o título
Mechanics of Materials, 5th edition
ISBN 0-07-352938-9 / 978-0-07-352938-7

© 2008, The McGraw-Hill Companies, Inc., New York, NY, 10020

Preparação do original: *Ronaldo Guimarães Galvão*
Capa: *Rosana Pozzobon (arte sobre capa original)*
Imagem da capa: *www.graeme-peacock.com*
Editora sênior: *Arysinha Jacques Affonso*
Editora assistente: *Luciana Cruz*
Produção editorial: *Triall Composição Editorial Ltda*
Diagramação: *Triall Composição Editorial Ltda*

Reservados todos os direitos de publicação, em língua portuguesa, à
AMGH Editora Ltda (AMGH EDITORA é uma parceria entre
ARTMED Editora S.A. e MCGRAW-HILL EDUCATION)
Av. Jerônimo de Ornelas, 670 – Santana
90040-340 Porto Alegre RS
Fone (51) 3027-7000 Fax (51) 3027-7070

É proibida a duplicação ou reprodução deste volume, no todo ou em parte,
sob quaisquer formas ou por quaisquer meios (eletrônico, mecânico, gravação,
fotocópia, distribuição na Web e outros), sem permissão expressa da Editora.

São Paulo
Av. Embaixador Macedo Soares, 10.735 – Pavilhão 5 – Cond. Espace Center
Vila Anastácio 05095-035 São Paulo SP
Fone (11) 3665-1100 Fax (11) 3667-1333

SAC 0800 703-3444

IMPRESSO NO BRASIL
PRINTED IN BRAZIL

Autores

Muitas pessoas perguntam a nós, editores dos livros escritos por Ferd Beer e Russ Johnston, como é possível que eles tenham escrito um livro juntos, um deles estando em Lehigh e o outro na Universidade de Connecticut.

A resposta a essa pergunta é simples. O primeiro emprego de Russ Johnston como professor foi no Departamento de Engenharia Civil e Mecânica da Universidade de Lehigh. Lá ele encontrou Ferd Beer, que havia chegado àquele departamento dois anos antes e era o responsável pelos cursos de mecânica. Nascido na França e educado naquele país e na Suíça (ele tem um título de mestre da Sorbonne e um título de doutor no campo de mecânica teórica da Universidade de Genebra), Ferd chegou aos Estados Unidos depois de ter servido ao exército francês no início da Segunda Guerra Mundial e lecionado durante quatro anos no Williams College no programa Williams-MIT Joint Arts and Engineering. Nascido na Filadélfia, Russ obteve seu bacharelado em engenharia civil na Universidade de Delaware e o título de doutor no campo de engenharia estrutural do MIT.

Ferd ficou maravilhado ao descobrir que o jovem professor, que havia sido contratado principalmente para ministrar cursos de graduação em engenharia estrutural, estava não só disposto, mas também ansioso por ajudá-lo a reorganizar os cursos de mecânica. Ambos acreditavam que esses cursos deveriam ser ministrados a partir de princípios básicos e que os vários conceitos envolvidos seriam mais bem compreendidos e lembrados pelos estudantes se lhes fossem apresentados de modo gráfico. Juntos eles escreveram preleções em estática e dinâmica, às quais depois acrescentaram problemas que acharam que interessariam aos futuros engenheiros, e assim foi produzido o manuscrito da primeira edição de *Mechanics for Engineers* (Mecânica para Engenheiros). Na segunda edição de *Mechanics for Engineers* e na primeira edição de *Vector Mechanics for Engineers* (Mecânica Vetorial para Engenheiros), Russ Johnston estava no Worcester Polytechnic Institute e nas edições seguintes, na Universidade de Connecticut. Durante esse tempo, tanto Ferd quanto Russ haviam assumido funções administrativas em seus departamentos e ambos estavam envolvidos em pesquisa, consultoria e supervisão de alunos — Ferd na área de processos estocásticos e vibrações aleatórias e Russ

na área de estabilidade elástica e análise estrutural e projeto. No entanto, seus interesses em melhorar o ensino nos cursos de mecânica básica não ficaram esquecidos e ambos ministraram partes desses cursos enquanto continuavam revisando seus textos e começaram juntos a redigir o manuscrito da primeira edição de *Mechanics of Materials* (Mecânica dos Materiais).

As contribuições de Ferd e Russ para os cursos de engenharia lhes valeram muitas homenagens e prêmios. Eles receberam o Western Electric Fund Award pela excelência na instrução de estudantes de engenharia pelas suas respectivas seções regionais da American Society for Engineering Education, e ambos receberam o Distinguished Educator Award da Divisão de Mecânica da mesma sociedade. Em 1991, Russ recebeu o Outstanding Civil Engineer Award da Connecticut Section da American Society of Civil Engineers e, em 1995, Ferd recebeu o título honorário de Doctor of Engineering pela Lehigh University.

John T. DeWolf, Professor de Engenharia Civil na Universidade de Connecticut, juntou-se a Beer e Johnston como autor na segunda edição de *Resistência dos Materiais*. John é formado em engenharia civil pela Universidade do Havaí e mestre e doutor em engenharia estrutural pela Cornell University. Seus interesses em pesquisa são na área de estabilidade elástica, monitoramento de pontes e análise e projeto estrutural. Ele é membro do Connecticut Board of Examiners for Professional Engineers e foi designado Teaching Fellow em 2006 na Universidade de Connecticut.

David F. Mazurek, docente de Engenharia Civil na Academia da Guarda Costeira dos Estados Unidos, é um novo autor nesta edição. David detém o grau de B.S. em engenharia oceânica e o grau de M.S. em engenharia civil do Instituto de Tecnologia da Flórida, o grau de Ph.D. em engenharia civil da Universidade de Connecticut. Serviu na Comissão 15 – Estruturas de Aço, da Associação Americana de Manutenção de Vias e Engenharia Ferroviária ao longo dos últimos dezessete anos. Seus interesses profissionais incluem engenharia de pontes, perícia em estruturas e projeto para resistência à explosão.

Prefácio

OBJETIVOS

O objetivo principal de um curso básico de mecânica é desenvolver no estudante de engenharia a habilidade para analisar um dado problema de maneira simples e lógica e aplicar alguns princípios fundamentais e bem compreendidos na sua solução. Este texto é destinado ao primeiro curso em mecânica dos materiais — ou mecânica dos sólidos ou resistência dos materiais — oferecido aos estudantes de engenharia nos dois primeiros anos do curso de graduação. Os autores esperam que o livro auxilie os professores a atingir esse objetivo nesse curso em particular, da mesma maneira que seus outros livros-texto *Mecânica Vetorial para Engenheiros* ajudam na estática e na dinâmica.

ABORDAGEM GERAL

Neste livro, o estudo da mecânica dos materiais está fundamentado na compreensão de alguns conceitos básicos e no uso de modelos simplificados. Essa abordagem torna possível desenvolver todas as fórmulas necessárias de uma maneira racional e lógica e indicar claramente as condições sob as quais elas podem ser aplicadas com segurança na análise e no projeto das estruturas reais de engenharia e componentes de máquinas.

Os Diagramas de Corpo-livre São Usados Extensivamente. Em todo o texto, os diagramas de corpo-livre são usados para determinar forças externas ou internas. O uso de "equações-figura" também ajudará os estudantes a entender a sobreposição de forças e as tensões e as deformações resultantes.

Conceitos de Projeto São Discutidos no Texto Sempre que For Conveniente. No Capítulo 1 pode-se encontrar uma discussão sobre a aplicação do fator de segurança no projeto, no qual são apresentados os conceitos de projeto por tensão admissível e projeto por fator de resistência e carga.

Seções Opcionais Oferecem Tópicos Avançados ou Especiais. Tópicos como tensões residuais, torção de elementos não circulares e de paredes delgadas, flexão em vigas curvas, tensões de cisalhamento em elementos não simétricos e critérios de falha foram incluídos em seções opcionais para

serem aplicados em cursos com ênfase em assuntos diversos. Para preservar a integridade do assunto, esses tópicos são apresentados na sequência apropriada, nos pontos apropriados. Assim, mesmo quando não são abordados no curso, eles são facilmente visíveis e podem ser consultados com facilidade pelos estudantes, caso seja necessário, em um curso posterior ou na prática da engenharia. Para maior facilidade, todas as seções opcionais foram indicadas por asteriscos.

ORGANIZAÇÃO DOS CAPÍTULOS

Espera-se que os estudantes que utilizarão este livro já tenham passado por um curso de estática. No entanto, o Capítulo 1 se destina a lhes proporcionar uma oportunidade de revisar os conceitos aprendidos naquele curso, embora os diagramas de força cortante e o momento fletor sejam discutidos em detalhe nas Seções 5.2 e 5.3. As propriedades dos momentos e centroides de áreas são descritas no Apêndice A; esse material pode ser utilizado para reforçar a discussão da determinação das tensões normal e de cisalhamento em vigas (Capítulos 4, 5 e 6).

Os quatro primeiros capítulos são dedicados à análise das tensões e das deformações correspondentes em vários elementos estruturais, considerando sucessivamente a força axial, a torção e a flexão pura. Cada análise é fundamentada em alguns conceitos básicos, ou seja, as condições de equilíbrio das forças aplicadas no elemento, as relações existentes entre tensão e deformação específica no material e as condições impostas pelos apoios e carga dos elementos. O estudo de cada tipo de carregamento é complementado por um grande número de exemplos, problemas resolvidos e problemas propostos, tudo destinado a melhorar a compreensão do estudante sobre o assunto.

O conceito de tensão em um ponto é introduzido no Capítulo 1, no qual mostramos que uma força axial pode produzir tensões de cisalhamento e tensões normais, dependendo da seção considerada. O fato de que as tensões dependem da orientação da superfície na qual elas são calculadas é enfatizado novamente nos Capítulos 3 e 4, nos casos de torção e flexão pura. No entanto, a discussão sobre as técnicas de cálculo — como, por exemplo, o círculo de Mohr — utilizadas para a transformação de tensão em um ponto é adiada até o Capítulo 7, depois que os estudantes já tiveram oportunidade de resolver problemas que envolvem uma combinação de carregamentos básicos e já descobriram por si mesmos a necessidade dessas técnicas.

A discussão no Capítulo 2 sobre a relação entre tensão e deformação específica em vários materiais inclui materiais compostos reforçados com fibras. Além disso, o estudo de vigas sob forças transversais é apresentado em dois capítulos separados. O Capítulo 5 é dedicado à determinação das tensões normais em uma viga e ao projeto de vigas com base na tensão normal admissível e no material utilizado (Seção 5.4). O capítulo começa com uma discussão sobre os diagramas de cisalhamento e o momento fletor (Seções 5.2 e 5.3) e inclui uma seção opcional sobre a utilização das funções de singularidade para a determinação da força cortante e momento fletor em uma viga (Seção 5.5). O capítulo termina com uma seção opcional sobre vigas não prismáticas (Seção 5.6).

O Capítulo 6 é dedicado à determinação das tensões de cisalhamento em vigas e elementos de paredes delgadas sob cargas transversais. A fórmula para o fluxo de cisalhamento, $q = VQ/I$, é deduzida pela maneira tradicional. Aspectos mais avançados do projeto de vigas, como, por exemplo, a determinação

das tensões principais na junção da mesa e da alma de uma viga *W*, estão no Capítulo 8, um capítulo opcional que pode ser estudado após discutir as transformações de tensões no Capítulo 7. O projeto de eixos de transmissão está nesse capítulo pela mesma razão, bem como a determinação de tensões sob forças combinadas que podem agora incluir a determinação das tensões principais, planos principais e tensão de cisalhamento máxima em um dado ponto.

Os problemas estaticamente indeterminados são discutidos primeiro no Capítulo 2 e considerados durante todo o texto para as várias condições de carregamento encontradas. Assim, é apresentado aos estudantes, logo no início, um método de solução que combina a análise de deformações com a análise convencional de forças utilizadas em estática. Dessa forma, eles estarão totalmente familiarizados com esse método fundamental no fim do curso. Além disso, essa abordagem ajuda os estudantes a descobrir que as tensões são, elas mesmas, estaticamente indeterminadas e só podem ser calculadas considerando-se a distribuição correspondente das deformações específicas.

O conceito de deformação plástica é introduzido no Capítulo 2, no qual ele é aplicado à análise de elementos sob força axial. Problemas que envolvem a deformação plástica de eixos circulares e de vigas prismáticas são também considerados em seções opcionais dos Capítulos 3, 4 e 6. Embora parte desse material possa ser omitida, dependendo da escolha do professor, sua inclusão no corpo do texto ajudará os estudantes a descobrir as limitações da suposição de uma relação tensão-deformação linear e também serve para alertá-los contra o uso não apropriado da torção elástica e fórmulas de flexão.

A determinação da deflexão de vigas é discutida no Capítulo 9. A primeira parte do capítulo é dedicada ao método de integração e ao método de superposição, com uma seção opcional (Seção 9.6) fundamentada na utilização das funções de singularidade. (Essa seção deverá ser utilizada somente se a Seção 5.5 for estudada antes.) A segunda parte do Capítulo 9 é opcional e apresenta o método momento-área em duas lições.

O Capítulo 10 é dedicado a colunas e contém material sobre o projeto de colunas de aço, alumínio e madeira. O Capítulo 11 apresenta os métodos de energia, incluindo o teorema de Castigliano.

CARACTERÍSTICAS PEDAGÓGICAS

Cada capítulo começa com uma seção introdutória, que apresenta a sua finalidade e os seus objetivos, descrevendo em termos simples o material a ser estudado e sua aplicação na solução dos problemas de engenharia.

Seções dos Capítulos. O corpo do texto foi dividido em unidades, com uma ou várias seções teóricas seguidas de problemas resolvidos e um grande número de problemas propostos. Cada unidade corresponde a um tópico bem definido e geralmente pode ser estudado em uma lição.

Exemplos e Problemas Resolvidos. As seções teóricas incluem muitos exemplos destinados a ilustrar o material que está sendo apresentado e facilitar seu entendimento. Os problemas resolvidos mostram algumas das aplicações da teoria na solução de problemas de engenharia. Preparados de maneira muito semelhante aos problemas propostos, os problemas resolvidos se destinam à dupla finalidade de ampliar o texto e demonstrar o tipo de trabalho organizado e ordenado que os estudantes devem cultivar em suas próprias soluções.

Listas de Problemas Propostos. A maioria dos problemas são de natureza prática e devem interessar aos estudantes de engenharia. No entanto, eles se destinam principalmente a ilustrar o material apresentado no texto e ajudar os estudantes a entender os princípios básicos utilizados em mecânica dos materiais. Os problemas foram agrupados de acordo com as partes da matéria que eles ilustram e organizados em ordem crescente de dificuldade. Problemas que requerem atenção especial foram indicados com asteriscos. As respostas dos problemas estão no fim do livro (exercícios com número em itálico não apresentam respostas).

Revisão e Resumo do Capítulo. Cada capítulo termina com uma revisão e resumo do material apresentado no capítulo. Foram incluídas notas nas margens para ajudar os estudantes a organizar seu trabalho de revisão, e há referências cruzadas para ajudá-los a encontrar as partes que requerem atenção especial.

Problemas de Revisão. Há uma série de problemas de revisão incluídos no fim de cada capítulo. Esses problemas fornecem aos estudantes outra oportunidade para aplicar os conceitos mais importantes desenvolvidos no capítulo.

Problemas para Computador. A disponibilidade de computadores pessoais permite que os estudantes de engenharia resolvam um grande número de problemas difíceis. No fim de cada capítulo há um grupo de problemas para serem resolvidos em um computador. O desenvolvimento do algoritmo necessário para resolver um dado problema ajudará os estudantes de duas maneiras diferentes: (1) ajudará a melhor entender os princípios mecânicos envolvidos; (2) proporcionará a eles a oportunidade de aplicar as habilidades adquiridas no curso de programação de computadores na solução de problemas reais de engenharia.

MATERIAL SUPLEMENTAR*

Instructor's Solutions Manual. *O Instructor's Solutions Manual*, destinado aos docentes e que acompanha esta 5ª edição, dá continuidade à tradição de soluções com excepcional precisão e atualizadas de modo que facilite a referência. O manual também sugere roteiros desenvolvidos para auxiliar o docente na criação de atividades para seus cursos. Os vários tópicos cobertos pelo texto são relacionados na Tabela I, assim como o tempo necessário de dedicação a cada tópico. A Tabela II fornece uma rápida descrição de todos os grupos de problemas e classifica-os em cada grupo de acordo com a unidade a que se referem. No manual também encontram-se exemplos de programação de aulas.

McGraw-Hill's ARIS – Assessment, Review, and Instruction System. O ARIS é um tutorial completo *on-line*, um guia eletrônico para orientar nas tarefas extra-classe e um sistema de gerenciamento de curso projetado para permitir que o docente possa criar e avaliar tarefas propostas aos estudantes, editar questões e algoritmos, importar seu próprio conteúdo, criar e compartilhar materiais do curso com outros docentes, divulgar informações e datas de avaliações. O ARIS gera tarefas extraclasse, questionários e testes, atribui notas e gera relatórios automaticamente. Os estudantes se beneficiam

* N. de R.: Os materiais aqui mencionados dizem respeito à edição publicada nos EUA, tendo o acesso vendido em separado, por vezes. Consulte o *site* www.bookman.com.br para averiguar os materiais disponíveis no Brasil.

pela prática ilimitada utilizando os problemas algorítmicos. Outros recursos disponíveis no ARIS incluem arquivos de PowerPoint e imagens deste texto. Visite o site em www.mhhe.com/beerjohnston.

Hands-On Mecânica. Hands-On Mecânica é um website concebido para os docentes interessados em utilizar modelos pedagógicos tridimensionais de apoio em suas aulas. Desenvolvido através de uma parceria entre a McGraw-Hill e o Departamento de Engenharia Civil e Mecânica na United States Military Academy em West Point, este site não só fornece instruções detalhadas sobre como construir ferramentas de ensino em 3-D, materiais encontrados em qualquer laboratório ou loja de ferragens local, mas também provê acesso a uma comunidade, na qual os educadores podem compartilhar ideias, melhorar práticas e submeter suas próprias demonstrações para publicação no site. Visite o sítio www.handsonmechanics.com para saber como você pode utilizar estes recursos em sala de aula.

AGRADECIMENTOS DOS AUTORES

Agradecemos às empresas que forneceram as fotografias para esta edição. Queremos também reconhecer os esforços e a paciência de nossa fotógrafa Sabina Dowell.

Agradecemos também a Dennis Ormand da FineLine Illustrations de Farmingdale, New York, pelas ilustrações artísticas que muito contribuíram para a eficácia do texto.

Nossos agradecimentos especiais ao Professor Dean Updike, do Departamento de Engenharia Mecânica e Mecânica da Lehigh University, por sua paciência e cooperação verificando as soluções e as respostas de todos os problemas dessa edição.

Somos gratos também pela ajuda, pelos comentários e pelas sugestões oferecidos por muitos usuários das edições anteriores de *Resistência dos Materiais*.

E. Russell Johnston, Jr.
John T. DeWolf
David F. Mazurek

NOTA DOS REVISORES TÉCNICOS DA EDIÇÃO BRASILEIRA

No original em inglês os autores mantiveram um equilíbrio entre dois sistemas de unidades: o Sistema Internacional de Unidades (SI) e o Sistema de Unidades Inglesas. Metade dos exemplos, exercícios resolvidos e exercícios propostos operam no Sistema Internacional, os demais no Sistema de Unidades Inglesas.

Decidiu-se para esta edição que os exemplos, exercícios resolvidos e exercícios propostos seriam operados somente no Sistema Internacional. Assim, tratamos de transformar todos os exemplos e exercícios no Sistema de Unidades Inglesas para o Sistema Internacional de Unidades. Essa escolha se deve ao fato de que além desse sistema ter muitas vantagens sobre os demais, ele está sendo gradualmente adotado em vários países e é o sistema legal vigente no Brasil (Decreto n. 81.621 de 03.05.1978).

Dada a grande quantidade de problemas propostos na edição original, optamos por fazer a conversão de unidades sem arredondamentos e assim aproveitar a totalidade das respostas dadas ao final do livro. Dessa forma o leitor notará que em alguns problemas, por exemplo, a mesma propriedade mecânica que no sistema Inglês vale $11{,}2 \times 10^6$ psi, foi convertida para o SI e adotado o valor de 77,2 GPa em lugar de adotar o arredondamento usual para 80 GPa.

Do ponto de vista do leitor, acreditamos que há vantagens na conversão de unidades dos problemas resolvidos e propostos dessa edição, pois deixar ao aluno a tarefa de convertê-las, pouco ou nada acrescentaria ao estudo e compreensão do conteúdo.

Sumário

1
INTRODUÇÃO — O CONCEITO DE TENSÃO
21

1.1 Introdução 22
1.2 Um breve exame dos métodos da estática 22
1.3 Tensões nos elementos de uma estrutura 25
1.4 Análise e projeto 26
1.5 Carga axial e tensão normal 27
1.6 Tensão de cisalhamento 29
1.7 Tensão de esmagamento em conexões 31
1.8 Aplicação à análise e projeto de estruturas simples 32
1.9 Método de solução do problema 34
1.10 Precisão numérica 35
1.11 Tensão em um plano oblíquo sob carregamento axial 43
1.12 Tensão sob condições gerais de carregamento; componentes de tensão 44
1.13 Considerações de projeto 47
Revisão e resumo do Capítulo 1 58

2
TENSÃO E DEFORMAÇÃO — CARREGAMENTO AXIAL
66

2.1 Introdução 67
2.2 Deformação específica normal sob carregamento axial 68
2.3 Diagrama tensão-deformação 70
*2.4 Tensões e deformações específicas verdadeiras 75
2.5 Lei de Hooke; módulo de elasticidade 76
2.6 Comportamento elástico e comportamento plástico de um material 77
2.7 Carregamentos repetidos; fadiga 79

2.8 Deformações de elementos sob carregamento axial 81
2.9 Problemas estaticamente indeterminados 90
2.10 Problemas que envolvem mudanças de temperatura 94
2.11 Coeficiente de Poisson 104
2.12 Carregamento multiaxial; lei de Hooke generalizada 105
*2.13 Dilatação; módulo de compressibilidade volumétrica 107
2.14 Deformação de cisalhamento 109
2.15 Outras discussões sobre deformação sob carregamento axial; relação entre E, ν e G 112
*2.16 Relações de tensão-deformação para materiais compósitos reforçados com fibras 115
2.17 Distribuição de tensão e deformação específica sob carregamento axial; princípio de Saint-Venant 124
2.18 Concentrações de tensão 127
2.19 Deformações plásticas 129
*2.20 Tensões residuais 133
Revisão e resumo do Capítulo 2 141

3
TORÇÃO
151

3.1 Introdução 152
3.2 Discussão preliminar das tensões em uma barra de seção circular 154
3.3 Deformações em uma barra de seção circular 156
3.4 Tensões no regime elástico 159
3.5 Ângulo de torção no regime elástico 170
3.6 Eixos estaticamente indeterminados 173
3.7 Projeto de eixos de transmissão 185
3.8 Concentração de tensões em eixos circulares 187
*3.9 Deformações plásticas em eixos circulares 192
*3.10 Eixos circulares feitos de um material elastoplástico 194
*3.11 Tensão residual em eixos circulares 197
*3.12 Torção de elementos de seção não circular 206
*3.13 Eixos vazados de paredes finas 209
Revisão e resumo do Capítulo 3 218

4
FLEXÃO PURA
228

4.1 Introdução 229
4.2 Barra simétrica em flexão pura 231
4.3 Deformações em uma barra de seção simétrica em flexão pura 233
4.4 Tensões e deformações no regime elástico 236
4.5 Deformações em uma seção transversal 240
4.6 Flexão de barras constituídas de vários materiais 250
4.7 Concentrações de tensão 254
*4.8 Deformações plásticas 263

*4.9 Barras constituídas de material elastoplástico 266
*4.10 Deformações plásticas de barras com um único plano de simetria 270
*4.11 Tensões residuais 270
4.12 Carregamento axial excêntrico em um plano de simetria 280
4.13 Flexão assimétrica 290
4.14 Caso geral de carregamento axial excêntrico 296
*4.15 Flexão de barras curvas 305
Revisão e resumo do Capítulo 4 318

5
ANÁLISE E PROJETOS DE VIGAS EM FLEXÃO 327

5.1 Introdução 328
5.2 Diagramas de força cortante e momento fletor 331
5.3 Relações entre força, força cortante e momento fletor 342
5.4 Projeto de vigas prismáticas em flexão 352
*5.5 Usando funções de singularidade para determinar força cortante e momento fletor em uma viga 363
*5.6 Vigas não prismáticas 374
Revisão e resumo do Capítulo 5 383

6
TENSÕES DE CISALHAMENTO EM VIGAS E BARRAS DE PAREDES FINAS 391

6.1 Introdução 392
6.2 Força cortante na face horizontal de um elemento de viga 394
6.3 Determinação das tensões de cisalhamento em uma viga 396
6.4 Tensões de cisalhamento τ_{xy} em tipos comuns de vigas 397
*6.5 Discussões adicionais sobre distribuição de tensões em uma viga retangular estreita 400
6.6 Cisalhamento longitudinal em um elemento de viga de modo arbitrário 408
6.7 Tensões de cisalhamento em barras de paredes finas 410
*6.8 Deformações plásticas 412
*6.9 Carregamento assimétrico em barras de paredes finas; centro de cisalhamento 422
Revisão e resumo do Capítulo 6 434

7
TRANSFORMAÇÕES DE TENSÃO E DEFORMAÇÃO 442

7.1 Introdução 443
7.2 Transformação do estado plano de tensão 445
7.3 Tensões principais e tensão de cisalhamento máxima 448
7.4 Círculo de Mohr para o estado plano de tensão 456

7.5 Estado geral de tensão 466
7.6 Aplicação do círculo de Mohr na análise tridimensional da tensão 468
*7.7 Critérios de escoamento para materiais dúcteis em estado plano de tensão 471
*7.8 Critério de fratura para materiais frágeis em estado plano de tensão 473
7.9 Tensões em vasos de pressão de paredes finas 482
*7.10 Transformação do estado plano de deformação 490
*7.11 Círculo de Mohr para o estado plano de deformação 493
*7.12 Análise tridimensional de deformação 495
*7.13 Medidas de deformação específica e rosetas de deformação 498
Revisão e resumo do Capítulo 7 506

8
TENSÕES PRINCIPAIS SOB DETERMINADO CARREGAMENTO
515

*8.1 Introdução 516
*8.2 Tensões principais em uma viga 517
*8.3 Projeto de eixos de transmissão 520
*8.4 Tensões sob carregamentos combinados 528
Revisão e resumo do Capítulo 8 541

9
DEFLEXÃO DE VIGAS
549

9.1 Introdução 550
9.2 Deformação de uma viga sob carregamento transversal 552
9.3 Equação da linha elástica 553
*9.4 Determinação direta da linha elástica com base na força distribuída 558
9.5 Vigas estaticamente indeterminadas 560
*9.6 Utilizando funções de singularidade para determinar a inclinação e a deflexão de uma viga 569
9.7 Método da superposição 578
9.8 Aplicação da superposição para vigas estaticamente indeterminadas 580
*9.9 Teoremas do momento de área 589
*9.10 Aplicação em vigas em balanço e em vigas com carregamentos simétricos 591
*9.11 Diagramas de momento fletor por partes 593
*9.12 Aplicação dos teoremas do momento de área às vigas com carregamentos assimétricos 602
*9.13 Deflexão máxima 604
*9.14 Aplicação dos teoremas de momento de área em vigas estaticamente indeterminadas 606
Revisão e resumo do Capítulo 9 614

10
COLUNAS
626

10.1 Introdução 627
10.2 Estabilidade de estruturas 628
10.3 Fórmula de Euler para colunas biarticuladas 630
10.4 Extensão da fórmula de Euler para colunas com outras condições de extremidade 634
*10.5 Carregamento excêntrico e fórmula da secante 645
10.6 Projeto de colunas submetidas a uma força centrada 656
10.7 Projeto de colunas submetidas a uma força excêntrica 672
Revisão e resumo do Capítulo 10 682

11
MÉTODOS DE ENERGIA
689

11.1 Introdução 690
11.2 Energia de deformação 690
11.3 Densidade de energia de deformação 692
11.4 Energia de deformação elástica para tensões normais 694
11.5 Energia de deformação elástica para tensões de cisalhamento 697
11.6 Energia de deformação para um estado geral de tensão 700
11.7 Carregamento por impacto 713
11.8 Projeto para carregamento por impacto 715
11.9 Trabalho e energia em razão de uma única carga 716
11.10 Deformação provocada por uma única carga pelo método do trabalho e da energia 718
*11.11 Trabalho e energia devido a várias cargas 729
*11.12 Teorema de Castigliano 731
*11.13 Deflexões pelo teorema de Castigliano 732
*11.14 Estruturas estaticamente indeterminadas 736
Revisão e resumo do Capítulo 11 746

APÊNDICES
755

A Momentos de áreas 756
B Propriedades típicas de materiais mais usados na engenharia 766
C Propriedades de perfis de aço laminado 768
D Deflexões e inclinações de vigas 774

Crédito de fotos 775

Respostas aos problemas 777

Índice 789

Lista de Símbolos

a	Constante; distância
A, B, C, . . .	Forças; reações
$A, B, C, \ldots$	Pontos
$A, \mathcal{A}$	Área
b	Distância; largura
c	Constante; distância; raio
C	Centroide
$C_1, C_2, \ldots$	Constantes de integração
C_P	Coeficiente de estabilidade da coluna
d	Distância; diâmetro; altura
D	Diâmetro
e	Distância; excentricidade; dilatação
E	Módulo de elasticidade
f	Frequência; função
F	Força
F.S.	Coeficiente de segurança
G	Módulo de rigidez; módulo de elasticidade transversal
h	Altura; distância
H	Força
H, J, K	Pontos
$I, I_x, \ldots$	Momentos de inércia
$I_{xy}, \ldots$	Produtos de inércia
J	Momento polar de inércia
k	Constante de mola; fator de forma; módulo de compressibilidade volumétrica; constante
K	Coeficiente de concentração de tensão; constante de mola de torção
l	Comprimento; vão
L	Comprimento; vão
L_e	Comprimento efetivo
m	Massa
M	Conjugado, momento
$M, M_x, \ldots$	Momento fletor
M_D	Momento fletor, carga permanente (LRFD)
M_L	Momento fletor, carga externa (LRFD)
M_U	Momento fletor, limite de carga (LRFD)
n	Número; relação de módulos de elasticidade; direção normal
p	Pressão
P	Força; carga concentrada
P_D	Carga permanente (LRFD)
P_L	Carga externa (LRFD)
P_U	Limite de carga (LRFD)
q	Força de cisalhamento por unidade de comprimento; fluxo de cisalhamento
Q	Força
Q	Momento estático
r	Raio; raio de giração
R	Força; reação
R	Raio; módulo de ruptura
s	Comprimento
t	Espessura; distância; desvio tangencial
T	Torque
T	Temperatura
u, v	Coordenadas retangulares
u	Densidade de energia de deformação
U	Energia de deformação; trabalho
v	Velocidade
V	Força cortante
V	Volume; cisalhamento
w	Largura; distância; força por unidade de comprimento
W, W	Peso; força; carga; módulo de resistência à flexão
x, y, z	Coordenadas retangulares; distância; deslocamentos; deflexão
$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$	Coordenadas do centroide
Z	Módulo de resistência à flexão
α, β, γ	Ângulos
α	Coeficiente de expansão térmica; coeficiente de influência
γ	Deformação de cisalhamento; peso específico
γ_D	Coeficiente de carga, carga permanente (LRFD)
γ_L	Coeficiente de carga, carga externa (LRFD)
δ	Deformação; deslocamento
ϵ	Deformação específica normal
θ	Ângulo; inclinação
λ	Cosseno diretor
ν	Coeficiente de Poisson
ρ	Raio de curvatura; distância; densidade
σ	Tensão normal
τ	Tensão de cisalhamento
ϕ	Ângulo; ângulo de torção ou de rotação; coeficiente de resistência
ω	Velocidade angular

CAPÍTULO

1

Introdução — O conceito de tensão

Este capítulo é dedicado ao estudo das tensões que ocorrem em muitos dos elementos contidos nesta escavadeira, como, por exemplo, elementos de barra, eixos, parafusos e pinos.

1.1. Introdução

O principal objetivo do estudo da mecânica dos materiais é proporcionar ao futuro engenheiro os meios para analisar e projetar várias máquinas e estruturas portadoras de carga.

Tanto a análise quanto o projeto de uma dada estrutura envolvem a determinação das *tensões* e *deformações*. Este primeiro capítulo é dedicado ao conceito de *tensão*.

A Seção 1.2 apresenta um rápido exame dos métodos básicos da estática e sua aplicação na determinação das forças nos elementos conectados por pinos que formam uma estrutura simples. A Seção 1.3 apresentará o conceito de *tensão* em um elemento estrutural e mostrará como essa tensão pode ser determinada a partir da *força* nesse elemento. Após uma breve discussão da análise e projeto de engenharia (Seção 1.4), você estudará sucessivamente as *tensões normais* em uma barra sob carga axial (Seção 1.5), as *tensões de cisalhamento* originadas pela aplicação de forças transversais equivalentes e opostas (Seção 1.6) e as *tensões de esmagamento* criadas por parafusos e pinos em barras por eles conectadas (Seção 1.7). Esses vários conceitos serão aplicados na Seção 1.8 para a determinação das tensões nas barras de estrutura simples considerada anteriormente na Seção 1.2.

A primeira parte do capítulo termina com uma descrição do método que você deverá utilizar na solução de determinado problema (Seção 1.9) e com uma discussão da precisão numérica apropriada aos cálculos de engenharia (Seção 1.10).

Na Seção 1.11, examinaremos novamente um elemento de barra sob carga axial, será observado que as tensões em um plano *oblíquo* incluem as componente *de tensões normal e de cisalhamento*, ao passo que na Seção 1.12 você notará que são necessários *seis componentes* para descrever o estado de tensão em um ponto de um corpo, sob as condições mais generalizadas de carga.

Finalmente, a Seção 1.13 será dedicada à determinação do limite de resistência de um material através de ensaios de corpos de prova e a seleção de *coeficiente de segurança* aplicados ao cálculo da *carga admissível* de um componente estrutural feito com esse material.

1.2. Um breve exame dos métodos da estática

Nesta seção você examinará os métodos básicos da estática enquanto determina as forças nos elementos de uma estrutura simples.

Considere a estrutura mostrada na Fig. 1.1, projetada para suportar uma carga de 30 kN. Ela consiste em uma barra *AB* com uma seção transversal retangular de 30 × 50 mm e uma barra *BC* com uma seção transversal circular com diâmetro de 20 mm. As duas barras estão conectadas por um pino em *B* e são suportadas por pinos e suportes em *A* e *C*, respectivamente. Nosso primeiro passo será desenhar um *diagrama de corpo livre* da estrutura, separando-a de seus suportes em *A* e *C* e mostrando as reações que esses suportes exercem na estrutura (Fig. 1.2). Note que o croqui da estrutura foi simplificado omitindo-se todos os detalhes desnecessários. Muitos de vocês devem ter reconhecido neste ponto que *AB* e *BC* são *barras simples*. Para aqueles que não perceberam, vamos proceder à nossa análise, ignorando esse fato e assumindo que as direções

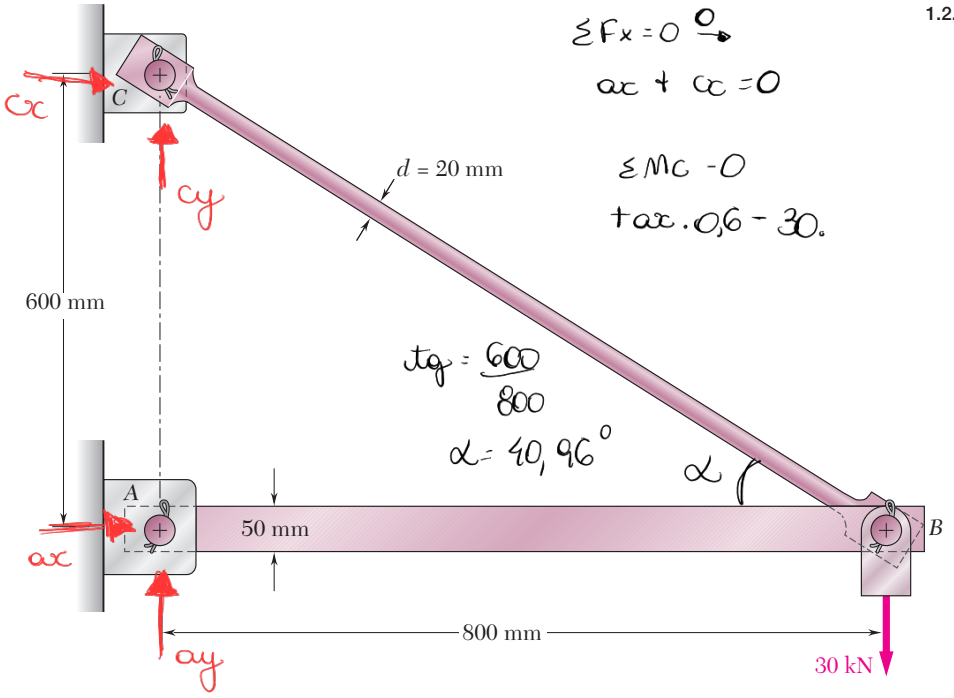


Fig. 1.1

das reações em A e C são desconhecidas. Cada uma dessas reações, portanto, será representada por duas componentes: $\mathbf{A}_x$ e $\mathbf{A}_y$, em A, e $\mathbf{C}_x$ e $\mathbf{C}_y$, em C.

Escrevemos as três equações de equilíbrio a seguir:

$+\circlearrowleft \Sigma M_C = 0$: $\quad A_x(0{,}6\text{ m}) - (30\text{ kN})(0{,}8\text{ m}) = 0$

$$A_x = +40\text{ kN} \tag{1.1}$$

$\pm\rightarrow \Sigma F_x = 0$: $\quad A_x + C_x = 0$

$$C_x = -A_x \qquad C_x = -40\text{ kN} \tag{1.2}$$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0$: $\quad A_y + C_y - 30\text{ kN} = 0$

$$A_y + C_y = +30\text{ kN} \tag{1.3}$$

Encontramos duas das quatro incógnitas, mas não podemos determinar as outras duas a partir dessas equações e tampouco obter uma equação independente adicional a partir do diagrama de corpo livre da estrutura. Precisamos agora desmembrar a estrutura. Considerando o diagrama de corpo livre da barra AB (Fig. 1.3), temos a seguinte equação de equilíbrio:

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: \qquad -A_y(0{,}8\text{ m}) = 0 \qquad A_y = 0 \tag{1.4}$$

Substituindo A_y de (1.4) em (1.3), obtemos $C_y = +30$ kN. Expressando os resultados obtidos para as reações em A e C na forma vetorial, temos

$$\mathbf{A} = 40\text{ kN}\rightarrow \qquad \mathbf{C}_x = 40\text{ kN}\leftarrow,\ \mathbf{C}_y = 30\text{ kN}\uparrow$$

Notamos que a reação em A é dirigida ao longo do eixo da barra AB e provoca compressão nessa barra. Observando que as componentes C_x e C_y da reação em C são, respectivamente, proporcionais às componentes horizontal e vertical da distância de B a C, concluímos que a reação em C é igual a 50 kN e dirigida ao longo do eixo da barra BC, provocando tração nessa barra.

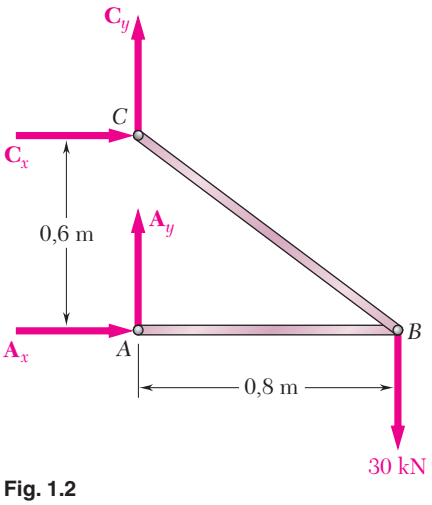


Fig. 1.2

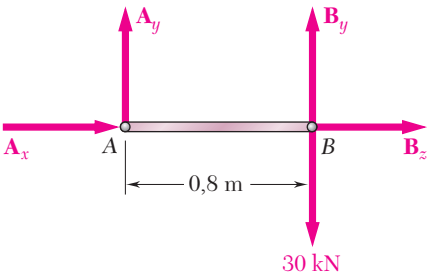


Fig. 1.3

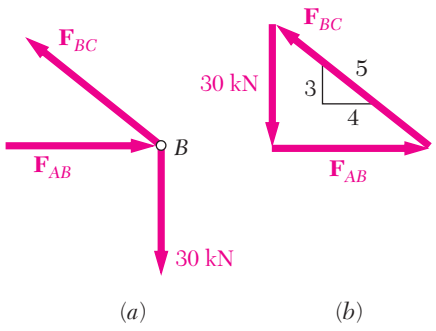


Fig. 1.4

Esses resultados poderiam ter sido previstos reconhecendo que *AB* e *BC* são barras simples, ou seja, elementos submetidos apenas a forças em dois pontos, sendo esses dois pontos *A* e *B* para a barra *AB*, e *B* e *C* para a barra *BC*. Sem dúvida, para uma barra simples, as linhas de ação das resultantes das forças agindo em cada um dos dois pontos são iguais e opostas e passam através de ambos os pontos. Utilizando essa propriedade, poderíamos ter obtido uma solução mais simples considerando o diagrama de corpo livre do pino *B*. As forças no pino *B* são as forças $\mathbf{F}_{AB}$ e $\mathbf{F}_{BC}$ exercidas, respectivamente, pelas barras *AB* e *BC* e a carga de 30 kN (Fig. 1.4*a*). Podemos expressar que o pino *B* está em equilíbrio e desenhar o triângulo de forças correspondente (Fig. 1.4*b*).

Como a força $\mathbf{F}_{BC}$ está dirigida ao longo da barra *BC*, sua inclinação é a mesma de *BC*, ou seja, 3/4. Então temos a proporção

$$\frac{F_{AB}}{4} = \frac{F_{BC}}{5} = \frac{30\text{ kN}}{3}$$

da qual obtemos

$$F_{AB} = 40\text{ kN} \qquad F_{BC} = 50\text{ kN}$$

As forças $\mathbf{F}'_{AB}$ e $\mathbf{F}'_{BC}$ exercidas pelo pino *B*, respectivamente, na barra *AB* e haste *BC* são iguais e opostas a $\mathbf{F}_{AB}$ e $\mathbf{F}_{BC}$ (Fig. 1.5).

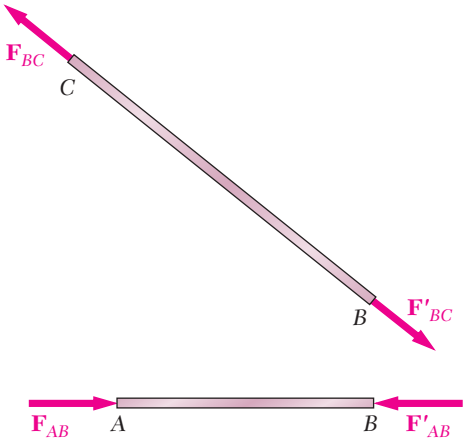


Fig. 1.5

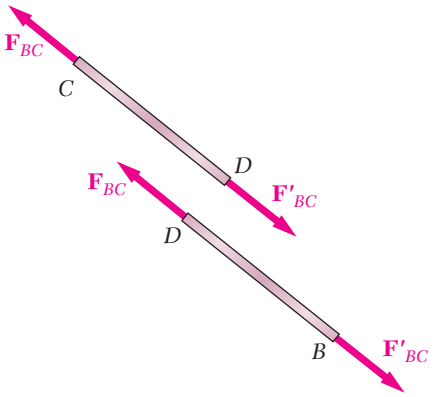


Fig. 1.6

Conhecendo as forças nas extremidades de cada um dos elementos, podemos agora determinar suas forças internas. Cortando a barra BC em algum ponto arbitrário D, obtemos duas partes *BD* e *CD* (Fig. 1.6). Para restaurar o equilíbrio das partes BD e CD separadamente, quando em B aplica-se uma carga externa de 30 kN, é necessário que na seção em D exista uma força interna de 50 kN. Verificamos ainda, pelas direções das forças $\mathbf{F}_{BC}$ e $\mathbf{F}'_{BC}$ na Fig. 1.6, que a barra está sob tração. Um procedimento similar nos permitiria determinar que a força interna na barra *AB* é 40 kN e que a barra está sob compressão.

1.3. Tensões nos elementos de uma estrutura

Embora os resultados obtidos na seção anterior representem uma primeira e necessária etapa na análise da estrutura apresentada, eles não nos dizem se aquela carga pode ser suportada com segurança. Se a barra *BC*, por exemplo, vai se quebrar ou não sob essa carga, depende não somente do valor encontrado para a força interna F_{BC}, mas também da área da seção transversal da barra e do material do qual ela é feita. Sem dúvida, a força interna F_{BC} realmente representa a resultante das forças elementares distribuídas sobre toda a área A da seção transversal (Fig. 1.7), e a intensidade média dessas forças distribuídas é igual à força por unidade de área, F_{BC}/A, na seção. Se a barra vai ou não se quebrar sob o efeito dessa carga, depende da capacidade do material em resistir ao valor correspondente F_{BC}/A da intensidade das forças internas distribuídas. Tudo depende então da força F_{BC}, da área A da seção transversal e do material da barra.

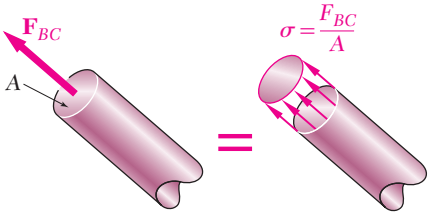


Fig. 1.7

A força por unidade de área, ou intensidade das forças distribuídas sobre uma determinada seção, é chamada de *tensão* naquela seção e é representada pela letra grega σ (sigma). A tensão na seção transversal de área A de uma barra submetida a uma carga axial **P** (Fig. 1.8), é obtida dividindo-se o valor da carga P pela área A:

$$\sigma = \frac{P}{A} \tag{1.5}$$

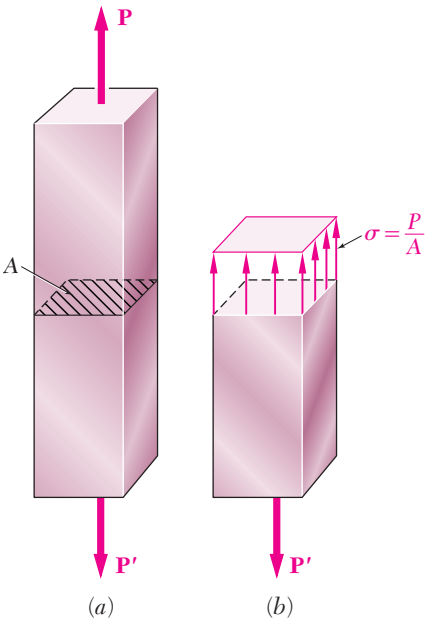


Fig. 1.8

Será utilizado um sinal positivo para indicar uma tensão de tração (barra tracionada) e um sinal negativo para indicar tensão de compressão (barra comprimida).

Como nessa discussão são utilizadas as unidades métricas do Sistema Internacional (SI), com P expressa em newtons (N) e A, em metros quadrados (m^2), a tensão σ será expressa em N/m^2. Essa unidade é chamada de *pascal* (Pa). No entanto, considerando-se que o pascal é um valor extremamente pequeno, na prática, deverão ser utilizados múltiplos dessa unidade, ou seja, o quilopascal (kPa), o megapascal (MPa) e o gigapascal (GPa). Temos

$$1 \text{ kPa} = 10^3 \text{ Pa} = 10^3 \text{ N/m}^2$$

$$1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ Pa} = 10^6 \text{ N/m}^2$$

$$1 \text{ GPa} = 10^9 \text{ Pa} = 10^9 \text{ N/m}^2$$

Quando são utilizadas as unidades inglesas, a força P geralmente é expressa em libras (lb) ou quilolibras (kip) e a área da seção transversal A em polegadas quadradas (in^2). A tensão σ será então expressa em libras por polegada quadrada (psi) ou quilolibras por polegada quadrada (ksi).

1.4. Análise e projeto

Considerando novamente a estrutura da Fig. 1.1, vamos supor que a barra *BC* seja feita de aço com uma tensão máxima admissível $\sigma_{adm} = 165$ MPa. A barra *BC* pode suportar com segurança a carga à qual ela está submetida? O valor da força F_{BC} na barra já foi calculada como 50 kN. Lembrando que o diâmetro da haste é 20 mm, utilizamos a Equação (1.5) para determinar a tensão criada na haste pela carga. Temos

$$P = F_{BC} = +50\text{ kN} = +50 \times 10^3\text{ N}$$

$$A = \pi r^2 = \pi\left(\frac{20\text{ mm}}{2}\right)^2 = \pi(10 \times 10^{-3}\text{ m})^2 = 314 \times 10^{-6}\text{ m}^2$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{+50 \times 10^3\text{ N}}{314 \times 10^{-6}\text{ m}^2} = +159 \times 10^6\text{ Pa} = +159\text{ MPa}$$

Como o valor obtido para σ é menor que o valor da tensão admissível do aço utilizado σ_{adm}, concluímos que a barra *BC* pode suportar com segurança a carga à qual ela está submetida. Para completar, nossa análise daquela estrutura também deverá incluir a determinação da tensão de compressão na barra *AB*, bem como uma investigação das tensões produzidas nos pinos e seus mancais. Isso será discutido mais adiante neste capítulo. Deveremos determinar também se as deformações produzidas pela carga são aceitáveis. O estudo das deformações sob cargas axiais será discutido no Capitulo 2. Uma consideração adicional necessária para elementos comprimidos envolve sua *estabilidade*, ou seja, sua capacidade para suportar uma dada carga sem apresentar mudança brusca de configuração. Isso será discutido no Capítulo 10.

O papel do engenheiro não se limita à análise das estruturas e das máquinas existentes sujeitas a uma determinada condição de carga. Mais importante ainda para o engenheiro é o *projeto* de novas estruturas e máquinas, o que implica a seleção dos componentes aptos a executar cada função específica. Como exemplo de projeto, vamos voltar à estrutura da Fig. 1.1 e supor que será utilizado o alumínio, que tem uma tensão admissível $\sigma_{adm} = 100$ MPa. Como a força na barra *BC* ainda será $P = F_{BC} = 50$ kN sob a carga dada, devemos ter então, da Equação (1.5),

$$\sigma_{adm} = \frac{P}{A} \qquad A = \frac{P}{\sigma_{adm}} = \frac{50 \times 10^3\text{ N}}{100 \times 10^6\text{ Pa}} = 500 \times 10^{-6}\text{ m}^2$$

e, como $A = \pi r^2$,

$$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = \sqrt{\frac{500 \times 10^{-6}\text{ m}^2}{\pi}} = 12{,}62 \times 10^{-3}\text{ m} = 12{,}62\text{ mm}$$

$$d = 2r = 25{,}2\text{ mm}$$

Concluímos que uma barra de alumínio com 26 mm ou mais de diâmetro será adequada.

1.5. Carga axial e tensão normal

Conforme indicamos, a barra *BC* do exemplo considerado na seção anterior é uma barra simples e, portanto, as forças $\mathbf{F}_{BC}$ e $\mathbf{F}'_{BC}$ que atuam em suas extremidades *B* e *C* (Fig. 1.5) estão dirigidas ao longo do eixo da barra *BC*. Dizemos que a barra está sob *carga axial*. Um exemplo real de estrutura formada por barras sob carga axial é a ponte em treliça mostrada na Fig. 1.9.

Fig. 1.9 Essa ponte em treliça consiste em barras simples que podem estar sob tração ou compressão.

Retornando à barra *BC* da Fig. 1.5, lembramos que o corte que traçamos através da seção D da barra para determinar sua força interna e a tensão correspondente era perpendicular ao eixo da barra; a força interna era, portanto, normal ao plano da seção (Fig. 1.7) e a tensão correspondente é descrita como *tensão normal*. Assim, a Fórmula (1.5) nos dá a *tensão normal em um elemento sob carga axial*:

$$\sigma = \frac{P}{A} \tag{1.5}$$

Devemos notar também que, na Fórmula (1.5), σ é obtido dividindo-se a intensidade *P* da resultante das forças internas distribuídas sobre a seção transversal pela área *A* da seção transversal; ela (a tensão σ) representa, portanto, o *valor médio* da tensão sobre a seção transversal e não a tensão em um ponto específico da seção transversal.

Para definirmos a tensão em um determinado ponto *Q* da seção transversal, devemos considerar uma pequena área ΔA (Fig. 1.10). Dividindo a intensidade de $\Delta\mathbf{F}$ por ΔA, obtemos o valor médio da tensão sobre ΔA. Fazendo ΔA aproximar-se de zero, obtemos a tensão no ponto *Q*:

$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \tag{1.6}$$

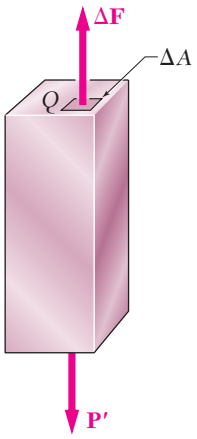


Fig. 1.10

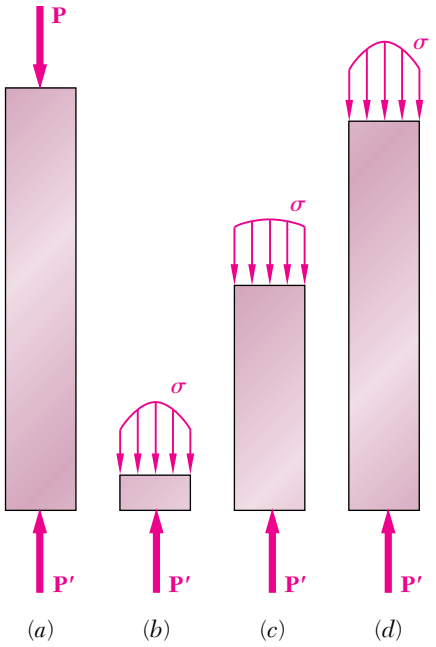


Fig. 1.11

Em geral, o valor obtido para a tensão σ em um determinado ponto Q da seção é diferente do valor da tensão média determinada pela Fórmula (1.5) e encontra-se que σ varia através da seção. Em uma barra esbelta submetida a cargas concentradas **P** e **P′** iguais e de sentidos opostos (Fig. 1.11*a*), essa variação é pequena em uma seção distante dos pontos de aplicação das cargas concentradas (Fig. 1.11*c*), mas é bastante significativa nas vizinhanças desses pontos (Fig. 1.11*b* e *d*).

Pela Equação (1.6), vê-se que a intensidade da resultante das forças internas distribuídas é

$$\int dF = \int_A \sigma \, dA$$

Mas as condições de equilíbrio de cada uma das partes da barra mostrada na Fig. 1.11 exigem que essa intensidade seja igual à intensidade P das cargas concentradas. Temos, portanto,

$$P = \int dF = \int_A \sigma \, dA \tag{1.7}$$

o que significa que a resultante sob cada uma das superfícies de tensão na Fig. 1.11 deve ser igual à intensidade P das cargas. Essa, no entanto, é a única informação que a estática nos fornece, relativamente à distribuição das tensões normais nas várias seções da barra. A distribuição real das tensões em uma determinada seção é *estaticamente indeterminada*. Para saber mais sobre essa distribuição, é necessário considerar as deformações resultantes do modo particular de aplicação das cargas nas extremidades da barra. Isso será discutido no Capítulo 2.

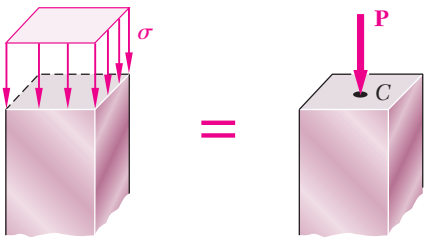


Fig. 1.12

Na prática, consideraremos que a distribuição das tensões normais em uma barra sob carga axial é uniforme, exceto nas vizinhanças imediatas dos pontos de aplicação das cargas. O valor σ da tensão é então igual a $\sigma_{\text{méd}}$ e pode ser obtido pela Fórmula (1.5). No entanto, devemos perceber que, quando assumimos uma distribuição uniforme das tensões na seção, ou seja, quando assumimos que as forças internas estão distribuídas uniformemente através da seção, segue-se da estática elementar† que a resultante **P** das forças internas deve ser aplicada no centroide C da seção (Fig. 1.12). Isso significa que *uma distribuição uniforme da tensão é possível somente se a linha de ação das cargas concentradas* **P** *e* **P′** *passar através do centroide da seção considerada* (Fig. 1.13). Esse tipo de carregamento é chamado de *carga centrada* e consideraremos que ele ocorre em todos os elementos de barra retos, encontrados em treliças e estruturas, conectados por pinos, como aquela da Fig. 1.1. No entanto, se um elemento de barra estiver carregado axialmente por uma carga excêntrica como mostra a Fig. 1.14*a*, percebemos, pelas condições de equilíbrio da parte da barra mostrada na Fig. 1.14*b*, que as forças internas em uma determinada seção devem ser equivalentes a uma força **P**

†Ver BEER, Ferdinand P.; JOHNSTON JR., E. Russell. *Resistência dos Materiais*. 4. ed. McGraw-Hill: Nova York, 1987, ou, também dos mesmos autores, *Mecânica Vetorial para Engenheiros*. 6. ed. McGraw-Hill: São Paulo, 2006.

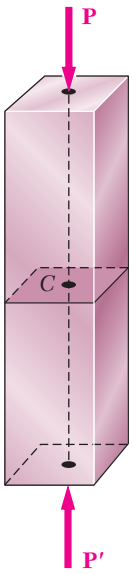


Fig. 1.13

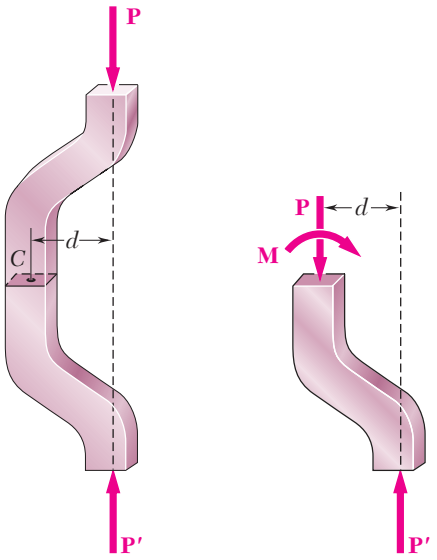


Fig. 1.14

aplicada no centroide da seção e um conjugado **M**, cuja intensidade é dada pelo momento $M = Pd$. A distribuição das forças, bem como a distribuição correspondente das tensões, *não pode ser uniforme*. Assim como a distribuição de tensões não pode ser simétrica como mostra a Fig. 1.11. Esse caso será discutido detalhadamente no Capítulo 4.

1.6. Tensão de cisalhamento

As forças internas e as tensões correspondentes discutidas nas Seções 1.2 e 1.3 eram normais à seção considerada. Um tipo muito diferente de tensão é obtido quando forças transversais **P** e **P′** são aplicadas à barra *AB* (Fig. 1.15). Ao passar um corte na seção transversal *C* entre os pontos de aplicação das duas forças (Fig. 1.16*a*), obtemos o diagrama da parte *AC* mostrada na Fig. 1.16*b*. Concluímos que devem existir forças internas no plano da seção e que a resultante dessas forças é igual a **P**. Essas forças internas elementares são chamadas de *forças de cisalhamento* e a intensidade *P* de sua resultante é a

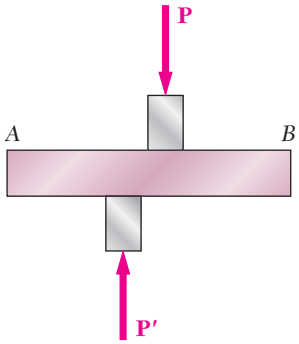


Fig. 1.15

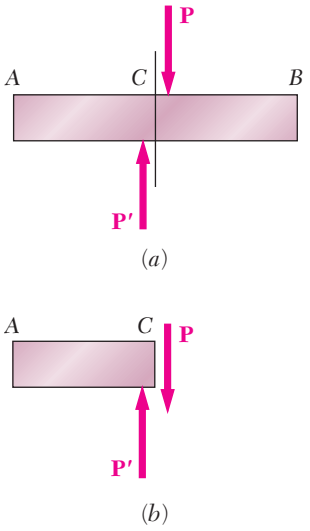


Fig. 1.16

força cortante na seção. Ao dividir a força cortante P pela área A da seção transversal, obtemos a *tensão média de cisalhamento* na seção. Indicando a tensão de cisalhamento pela letra grega τ (tau), temos

$$\tau_{\text{méd}} = \frac{P}{A} \tag{1.8}$$

Deve-se enfatizar que o valor obtido é um valor médio da tensão de cisalhamento sobre a seção toda. Ao contrário do que dissemos antes para as tensões normais, a distribuição da tensão de cisalhamento por meio da seção *não pode* ser considerada uniforme. Conforme veremos no Capítulo 6, o valor real τ da tensão de cisalhamento varia de zero na superfície da barra até um valor máximo $\tau_{\text{máx}}$, que pode ser muito maior que o valor médio $\tau_{\text{méd}}$.

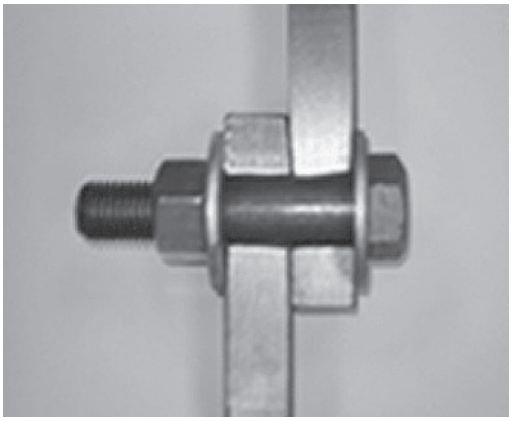


Fig. 1.17 Vista em corte de uma conexão com um parafuso em cisalhamento.

As tensões de cisalhamento são encontradas comumente em parafusos, pinos e rebites utilizados para conectar vários elementos estruturais e elementos de máquinas (Fig. 1.17). Considere as duas placas A e B, conectadas por um parafuso CD (Fig. 1.18). Se as placas estiverem submetidas a forças de tração de intensidade F, serão desenvolvidas tensões na seção EE' do parafuso. Desenhando os diagramas do parafuso e da parte localizada acima do plano EE' (Fig. 1.19), concluímos que a força cortante P na seção é igual a F. A tensão de cisalhamento média na seção é obtida de acordo com a Fórmula (1.8), dividindo-se a força cortante $P = F$ pela área A da seção transversal:

$$\tau_{\text{méd}} = \frac{P}{A} = \frac{F}{A} \tag{1.9}$$

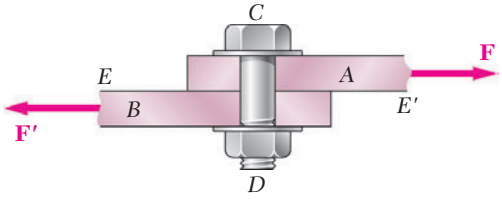


Fig. 1.18

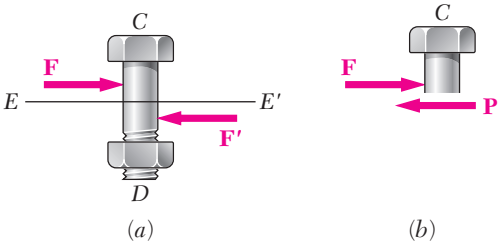


Fig. 1.19

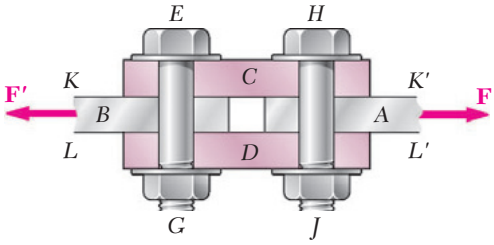


Fig. 1.20

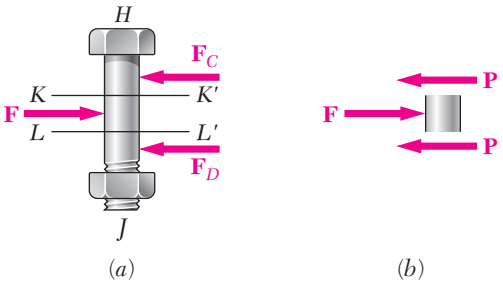


Fig. 1.21

Podemos dizer que o parafuso que acabamos de considerar encontra-se em c*isalhamento simples*. No entanto, podem ocorrer diferentes situações de carga. Por exemplo, se forem utilizadas chapas de ligação *C* e *D* para conectar as placas *A* e *B* (Fig. 1.20), o cisalhamento ocorrerá no parafuso *HJ* em cada um dos dois planos *KK′* e *LL′* (e similarmente no parafuso *EG*). Dizemos que os parafusos estão na condição de *cisalhamento duplo*. Para determinar a tensão de cisalhamento média em cada plano, desenhamos os diagramas de corpo livre do parafuso *HJ* e da parte do parafuso localizada entre os dois planos (Fig. 1.21). Observando que a força cortante *P* em cada uma das seções é $P = F/2$, concluímos que a tensão média de cisalhamento é

$$\tau_{\text{méd}} = \frac{P}{A} = \frac{F/2}{A} = \frac{F}{2A} \tag{1.10}$$

1.7. Tensão de esmagamento em conexões

Parafusos, pinos e rebites criam tensões ao longo da *superfície de esmagamento*, ou de contato, nos elementos que eles conectam. Por exemplo, considere novamente as duas placas *A* e *B* conectadas por um parafuso *CD* que discutimos na seção anterior (Fig. 1.18). O parafuso exerce na placa *A* uma força **P** igual e oposta à força **F** exercida pela placa no parafuso (Fig. 1.22). A força **P** representa a resultante das forças elementares distribuídas na superfície interna de um meio-cilindro de diâmetro *d* e de comprimento *t* igual à espessura da placa. Como a distribuição dessas forças e as tensões correspondentes são muito complicadas, utiliza-se na prática um valor nominal médio σ_e para a tensão, chamado de *tensão de esmagamento*, obtido dividindo-se a carga *P* pela área do retângulo que representa a projeção do parafuso sobre a seção da placa (Fig. 1.23). Como essa área é igual a *td*, onde *t* é a espessura da placa e *d* o diâmetro do parafuso, temos

$$\sigma_e = \frac{P}{A} = \frac{P}{td} \tag{1.11}$$

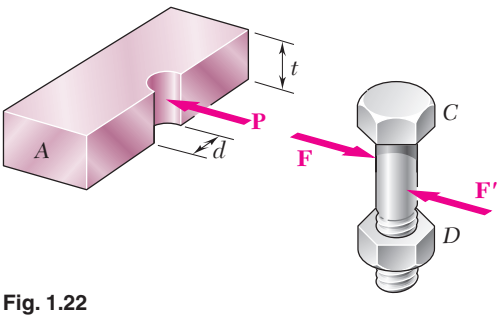


Fig. 1.22

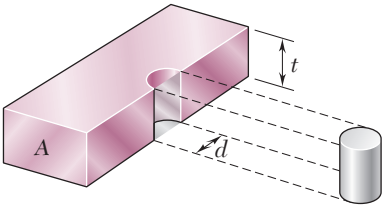


Fig. 1.23

1.8. Aplicação à análise e projeto de estruturas simples

Estamos agora em condições de determinar as tensões nos elementos e conexões de várias estruturas simples bidimensionais e, portanto, em condições de projetar essas estruturas.

Como exemplo, vamos voltar à estrutura da Fig. 1.1 que consideramos na Seção 1.2 e vamos especificar os suportes e conexões em *A*, *B* e *C*. Como mostra a Fig. 1.24, a barra *BC* com diâmetro de 20 mm tem extremidades achatadas com seção transversal retangular de 20 × 40 mm, ao passo que a barra *AB* tem uma seção transversal retangular de 30 × 50 mm e está presa com uma articulação na extremidade *B*. Ambos os elementos são conectados em *B* por um pino a partir do qual é suspensa a carga de 30 kN, por meio de um suporte em forma de U. A barra *AB* é suportada em *A* por um pino preso em um suporte duplo, enquanto a barra *BC* está conectada em *C* a um suporte simples. Todos os pinos têm 25 mm de diâmetro.

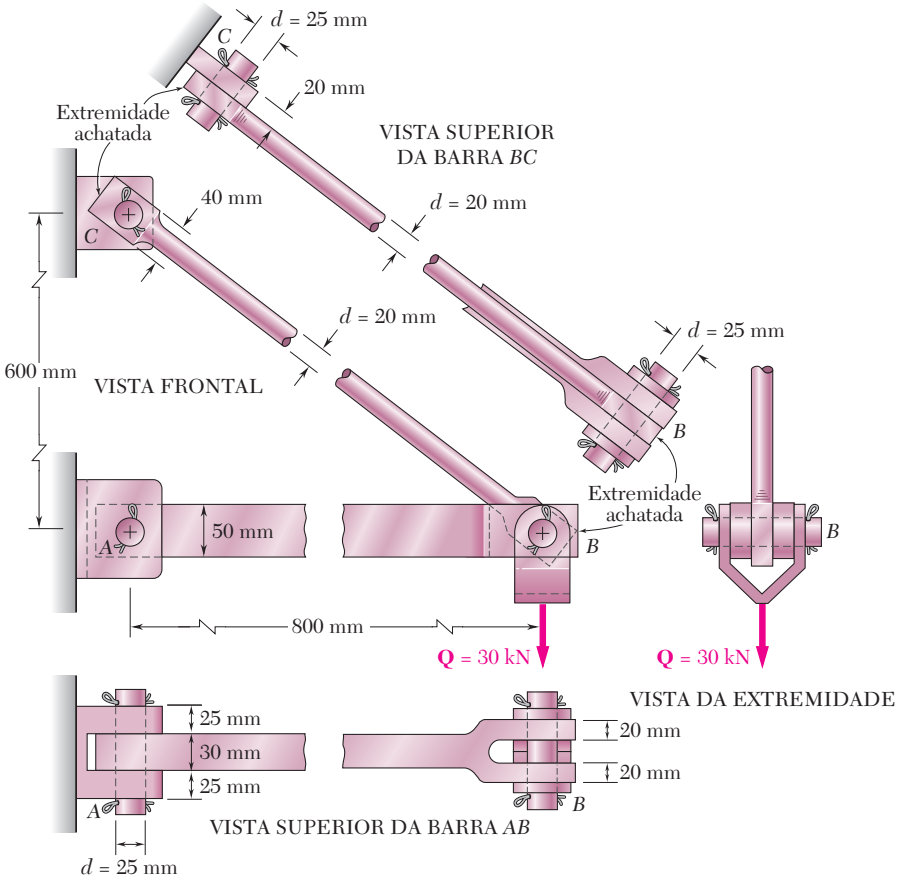


Fig. 1.24

a. Determinação da tensão normal nas barras *AB* e *BC*. Conforme determinamos nas Seções 1.2 e 1.4, a força na barra *BC* é $F_{BC} = 50$ kN (tração) e a área de sua seção transversal circular é $A = 314 \times 10^{-6}$ m^2; a tensão normal média correspondente é $\sigma_{BC} = +159$ MPa. No entanto, as partes

achatadas da barra também estão sob tração, e na seção mais estreita, na qual está localizado um furo, temos

$$A = (20\text{ mm})(40\text{ mm} - 25\text{ mm}) = 300 \times 10^{-6}\text{ m}^2$$

O valor médio correspondente da tensão é, portanto,

$$(\sigma_{BC})_{\text{ext}} = \frac{P}{A} = \frac{50 \times 10^3\text{ N}}{300 \times 10^{-6}\text{ m}^2} = 167\text{ MPa}$$

Note que esse é um *valor médio*: próximo ao furo, a tensão realmente terá um valor muito maior, como veremos na Seção 2.18. Está claro que, sob uma carga crescente, a barra falhará próximo de um dos furos e não na sua parte cilíndrica; seu projeto, portanto, poderia ser melhorado aumentando-se a largura ou a espessura das extremidades achatadas da barra.

Voltando nossa atenção agora para a barra *AB*, recordaremos da Seção 1.2 que a força na barra é $F_{AB} = 40$ kN (compressão). Como a área da seção transversal retangular da barra é $A = 30\text{ mm} \times 50\text{ mm} = 1{,}5 \times 10^{-3}\text{ m}^2$, o valor médio da tensão normal na parte principal da barra entre os pinos *A* e *B* é

$$\sigma_{AB} = -\frac{40 \times 10^3\text{ N}}{1{,}5 \times 10^{-3}\text{ m}^2} = -26{,}7 \times 10^6\text{ Pa} = -26{,}7\text{ MPa}$$

Observe que as seções de área mínima em *A* e *B* não estão sob tensão, pois a barra está em compressão e, portanto, *empurra* os pinos (em vez de *puxá-los* como faz a barra *BC*).

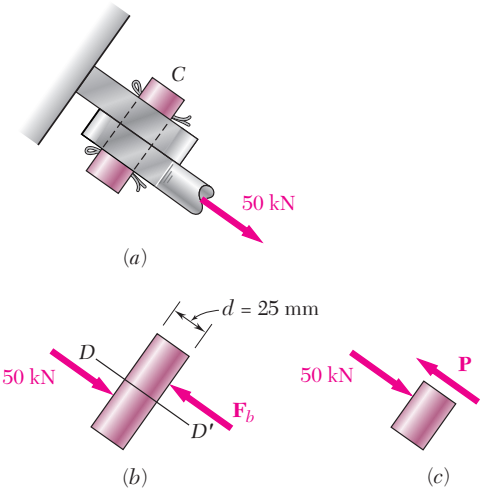


Fig. 1.25

b. Determinação da tensão de cisalhamento em várias conexões. Para determinarmos a tensão de cisalhamento em uma conexão, por exemplo um parafuso, pino ou rebite, primeiro mostramos claramente as forças aplicadas pelas várias barras que ela conecta. Assim, no caso do pino *C* em nosso exemplo (Fig. 1.25*a*), desenhamos a Fig. 1.25*b*, mostrando a força de 50 kN, aplicada pela barra *BC* sobre o pino, e a força igual e oposta aplicada pelo suporte. Desenhando agora o diagrama da parte do pino localizada abaixo do plano *DD′* em que ocorrem as tensões de cisalhamento (Fig. 1.25*c*), concluímos que a força cortante naquele plano é $P = 50$ kN. Como a área da seção transversal do pino é

$$A = \pi r^2 = \pi\left(\frac{25\text{ mm}}{2}\right)^2 = \pi(12{,}5 \times 10^{-3}\text{ m})^2 = 491 \times 10^{-6}\text{ m}^2$$

concluímos que o valor médio da tensão de cisalhamento no pino *C* é

$$\tau_{\text{méd}} = \frac{P}{A} = \frac{50 \times 10^3\text{ N}}{491 \times 10^{-6}\text{ m}^2} = 102\text{ MPa}$$

Considerando agora o pino em *A* (Fig. 1.26), notamos que ele está na condição de cisalhamento duplo. Desenhando os diagramas de corpo livre do pino e da parte do pino localizada entre os planos *DD′* e *EE′* em que ocorrem as tensões de cisalhamento, concluímos que $P = 20$ kN e que

$$\tau_{\text{méd}} = \frac{P}{A} = \frac{20\text{ kN}}{491 \times 10^{-6}\text{ m}^2} = 40{,}7\text{ MPa}$$

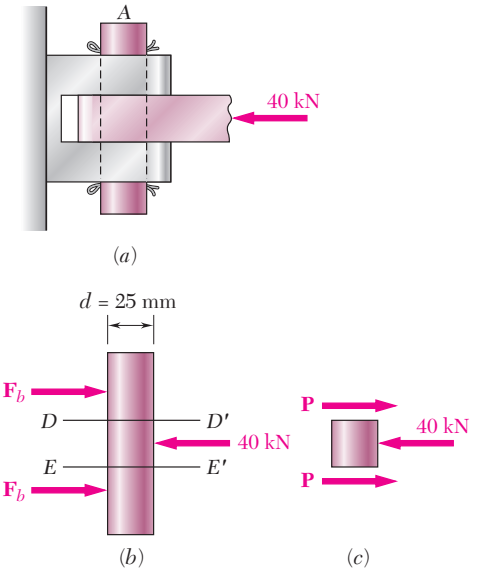


Fig. 1.26

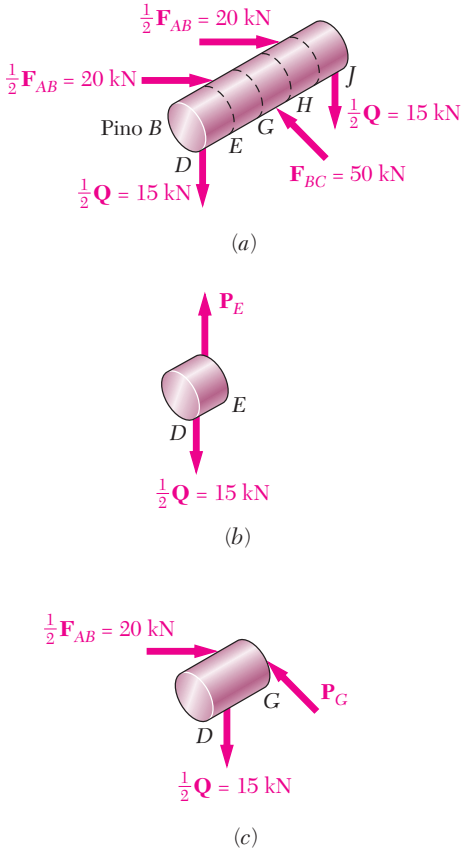


Fig. 1.27

Considerando o pino em B (Fig. 1.27a), verificamos que ele pode ser dividido em cinco partes que estão sob a ação de forças aplicadas pelas barras e suporte. Considerando sucessivamente as partes DE (Fig. 1.27b) e DG (Fig. 1.27c), concluímos que a força cortante na seção E é $P_E = 15$ kN, enquanto a força cortante na seção G é $P_G = 25$ kN. Como a carga do pino é simétrica, concluímos que o valor máximo da força cortante no pino B é $P_G = 25$ kN e que a maior tensão de cisalhamento ocorre nas seções G e H, em que

$$\tau_{\text{méd}} = \frac{P_G}{A} = \frac{25 \text{ kN}}{491 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 50{,}9 \text{ MPa}$$

c. Determinação das tensões de esmagamento. Para determinarmos a tensão de esmagamento nominal em A na barra AB, utilizamos a Fórmula (1.11) da Seção 1.7. Da Fig. 1.24, temos $t = 30$ mm e $d = 25$ mm. Lembrando que $P = F_{AB} = 40$ kN, temos

$$\sigma_e = \frac{F}{td} = \frac{40 \text{ kN}}{(30 \text{ mm})(25 \text{ mm})} = 53{,}3 \text{ MPa}$$

Para obtermos a tensão de esmagamento no suporte em A, utilizamos $t = 2(25 \text{ mm}) = 50$ mm e $d = 25$ mm:

$$\sigma_e = \frac{P}{td} = \frac{40 \text{ kN}}{(50 \text{ mm})(25 \text{ mm})} = 32{,}0 \text{ MPa}$$

As tensões de esmagamento em B na barra AB, em B e C na barra BC e no suporte em C são encontradas de forma semelhante.

1.9. Método de solução do problema

Você deve abordar um problema em resistência dos materiais da mesma maneira como abordaria uma situação real de engenharia. Utilizando sua experiência e intuição, você terá mais facilidade para entender e formular o problema. No entanto, uma vez definido claramente o problema, não há lugar em sua solução para divagações. A solução deverá ser com base nos princípios fundamentais da estática e nos princípios que você aprenderá neste curso. Cada passo a executar deverá ser justificado com base no que acabamos de dizer, não restando lugar para "intuição". Depois de obtida a resposta, ela deverá ser verificada. Aqui novamente, você pode utilizar o seu bom senso e a experiência pessoal. Se não estiver completamente satisfeito com o resultado obtido, verifique cuidadosamente a formulação do problema, a validade dos métodos utilizados em sua solução e a precisão dos seus cálculos.

O *enunciado* do problema deverá ser claro e preciso. Deverá conter os dados fornecidos e indicar as informações necessárias. Deve-se incluir também um desenho simplificado que mostre todas as grandezas essenciais envolvidas. A solução da maioria dos problemas que você encontrará, necessitará que

primeiro sejam determinadas as *reações nos apoios* e as *forças e conjugados internos*. Isso vai requerer o desenho de um ou vários *diagramas de corpo livre*, como fizemos na Seção 1.2, a partir dos quais você escreverá as *equações de equilíbrio*. Essas equações podem ser resolvidas em função das forças desconhecidas, a partir das quais serão calculadas as *tensões* e *deformações* correspondentes.

Após obter a resposta, ela deverá ser *cuidadosamente verificada*. Erros de *raciocínio* frequentemente podem ser detectados ao rastrear as unidades envolvidas nos cálculos feitos e verificando se as unidades obtidas para a resposta são compatíveis. Por exemplo, no projeto da barra discutida na Seção 1.4, encontramos, após especificar as unidades nos nossos cálculos, que o diâmetro necessário para a barra estava expresso em milímetros, que é a unidade correta para uma medida de comprimento; se tivéssemos encontrado uma outra unidade, saberíamos que algum engano foi cometido.

Erros de *cálculo* geralmente podem ser detectados substituindo-se nas equações os valores numéricos obtidos que ainda não foram utilizados, e verificando se a equação é satisfatória. Nunca é demais destacar a importância do cálculo correto na engenharia.

1.10. Precisão numérica

A precisão da solução de um problema depende de dois itens: (1) a precisão dos dados fornecidos e (2) a precisão dos cálculos executados.

A solução não pode ser mais precisa do que o menos preciso desses dois itens. Por exemplo, se a carga de uma viga for 75 000 N com um possível erro de 100 N para mais ou para menos, o erro relativo que mede o grau de precisão dos dados é

$$\frac{100\ \text{N}}{75\,000\ \text{N}} = 0{,}0013 = 0{,}13\,\%$$

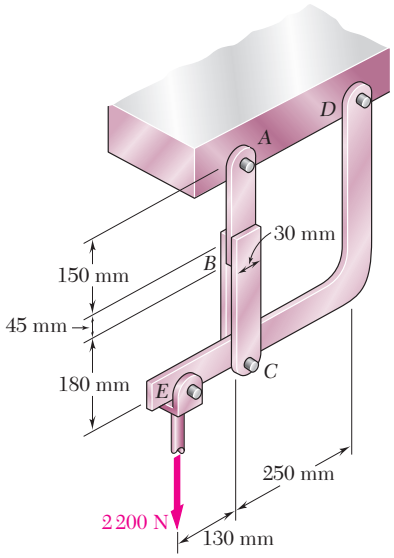
Ao calcular a reação em um dos apoios da viga, não teria significado expressá-la como 14 322 N. A precisão da solução não pode ser maior do que 0,13%, não importa quanto precisos sejam os cálculos, e o erro possível na resposta pode ser de até (0,13/100)(14 322 N) ≈ 20 N. A resposta adequada deverá ser dada como 14 320 ± 20 N.

Em problemas de engenharia, raramente os dados são conhecidos com uma precisão maior do que 0,2%. Portanto, não se justifica dar as respostas desses problemas com uma precisão maior que 0,2%. Uma regra prática é utilizilar quatro algarismos para representar números começados com um "1" e três algarismos em todos os outros casos. A menos que seja indicado o contrário, os dados fornecidos em um problema deverão ser considerados conhecidos com um grau comparável de precisão. Por exemplo, uma força de 40 N deverá ser lida como 40,0 N e uma força de 15 N deverá ser lida como 15,00 N.

As calculadoras de bolso e os computadores são amplamente utilizados pelos engenheiros e estudantes de engenharia. A velocidade e precisão desses dispositivos facilitam os cálculos numéricos nas soluções de muitos problemas. No entanto, os estudantes não devem utilizar mais algarismos significativos do que os necessários meramente porque são facilmente obtidos. Conforme mencionamos, uma precisão maior que 0,2% raramente é necessária ou significativa na solução prática dos problemas de engenharia.

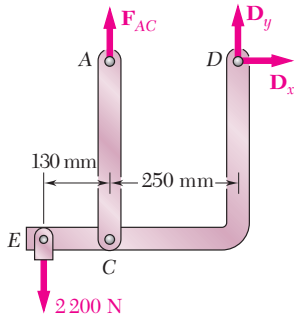
PROBLEMA RESOLVIDO 1.1

No suporte mostrado na figura, a parte superior do elemento *ABC* tem 9,5 mm de espessura e as partes inferiores têm 6,4 mm de espessura cada uma. É utilizada resina epóxi para unir as partes superior e inferior em *B*. O pino em *A* tem 9,5 mm de diâmetro e o pino usado em *C* tem 6,4 mm de diâmetro. Determine (*a*) a tensão de cisalhamento no pino *A*, (*b*) a tensão de cisalhamento no pino *C*, (*c*) a maior tensão normal no elemento *ABC*, (*d*) a tensão de cisalhamento média nas superfícies coladas em *B* e (*e*) a tensão de esmagamento no elemento em *C*.



SOLUÇÃO

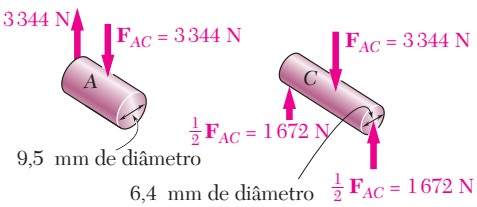
Corpo livre: todo o suporte. Como o elemento *ABC* é uma barra simples, a reação em *A* é vertical; a reação em *D* é representada por suas componentes $\mathbf{D}_x$ e $\mathbf{D}_y$. Assim, temos



$$+\circlearrowleft \Sigma M_D = 0: \qquad (2\,200\ \text{N})(380\ \text{mm}) - F_{AC}(250\ \text{mm}) = 0$$

$$F_{AC} = +3\,344\ \text{N} \qquad F_{AC} = 3\,344\ \text{N} \qquad \textit{tração}$$

***a.* Tensão de cisalhamento no pino *A*.** Como este pino tem 9,5 mm de diâmetro e está sob cisalhamento simples, temos

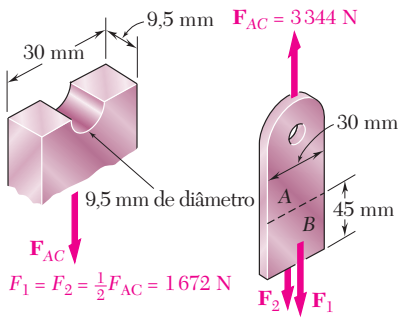


$$\tau_A = \frac{F_{AC}}{A} = \frac{3\,344}{\frac{1}{4}\pi(9{,}5\ \text{mm})^2} \qquad \tau_A = 47{,}2\ \text{MPa} \blacktriangleleft$$

***b.* Tensão de cisalhamento no pino *C*.** Como este é um pino de 6,4 mm de diâmetro e está sob cisalhamento duplo, temos

$$\tau_C = \frac{\frac{1}{2}F_{AC}}{A} = \frac{1\,672\ \text{N}}{\frac{1}{4}\pi(6{,}4\ \text{mm})^2} \qquad \tau_C = 52{,}0\ \text{MPa} \blacktriangleleft$$

***c.* Maior tensão normal no membro *ABC*.** A maior tensão é encontrada onde a area é menor; isso ocorre na seção transversal *A* em que está localizado o furo de 9,5 mm. Temos



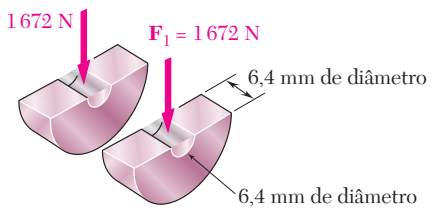
$$\sigma_A = \frac{F_{AC}}{A_{\text{útil}}} = \frac{3\,344\ \text{N}}{(9{,}5\ \text{mm})(30\ \text{mm} - 9{,}5\ \text{mm})} = \frac{3\,344\ \text{N}}{194{,}75\ \text{mm}^2}$$

$$\sigma_A = 17{,}2\ \text{MPa} \blacktriangleleft$$

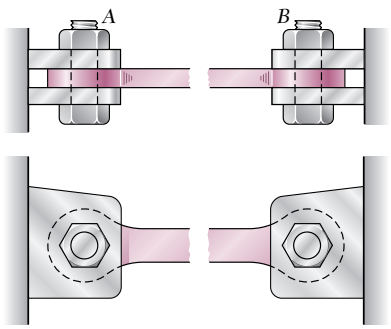
***d.* Tensão de cisalhamento média em *B*.** Notamos que existe ligação em ambos os lados da parte superior do membro ABC e que a força de cisalhamento em cada lado é $F_1 = (3\,344\ \text{N})/2 = 1672\ \text{N}$. A tensão de cisalhamento média em cada superficie é então

$$\tau_B = \frac{F_1}{A} = \frac{1\,672\ \text{N}}{(30\ \text{mm})(45\ \text{mm})} \qquad \tau_B = 1{,}24\ \text{MPa} \blacktriangleleft$$

***e.* Tensão de esmagamento no membro ABC em *C*.** Para cada parte do vínculo, $F_1 = 1672\ \text{N}$ e a área de contato nominal é (6,4 mm) (6,4 mm) = 40,96 mm^2,



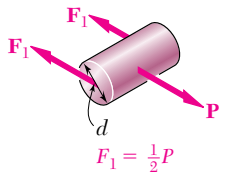
$$\sigma_e = \frac{F_1}{A} = \frac{1\,672\ \text{N}}{40{,}96\ \text{mm}^2} \qquad \sigma_e = 40{,}8\ \text{MPa} \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESOLVIDO 1.2

A barra de ligação de aço mostrada na figura deve suportar uma força de tração de intensidade $P = 120$ kN quando é rebitada entre suportes duplos em A e B. A barra será feita a partir de uma chapa de 20 mm de espessura. Para a classe do aço a ser utilizado, as tensões máximas admissíveis são: $\sigma = 175$ MPa, $\tau = 100$ MPa, $\sigma_e = 350$ MPa. Projete a barra determinando os valores necessários de (*a*) o diâmetro d do parafuso, (*b*) a dimensão b em cada extremidade da barra e (*c*) a dimensão h da barra.

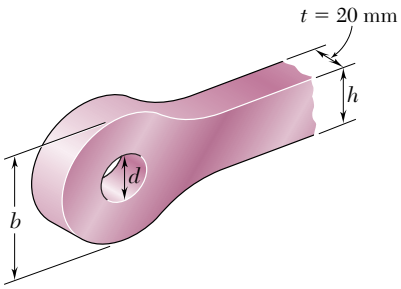
SOLUÇÃO



***a.* Diâmetro do parafuso.** Como o parafuso está sob cisalhamento duplo, $F_1 = \frac{1}{2}P = 60$ kN.

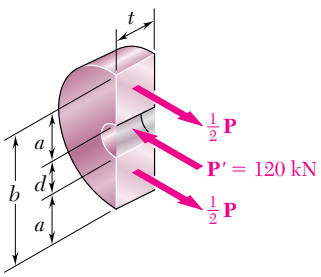
$$\tau = \frac{F_1}{A} = \frac{60\text{ kN}}{\frac{1}{4}\pi d^2} \qquad 100\text{ MPa} = \frac{60\text{ kN}}{\frac{1}{4}\pi d^2} \qquad d = 27{,}6\text{ mm}$$

Utilizaremos $d = 28$ mm ◀



Neste ponto verificamos a tensão de esmagamento entre a chapa de 20 mm de espessura e o parafuso com 28 mm de diâmetro.

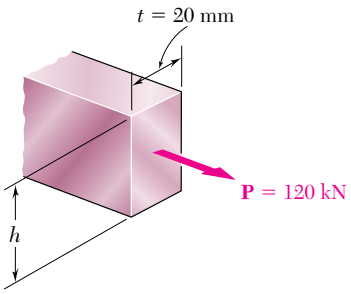
$$\tau_e = \frac{P}{td} = \frac{120\text{ kN}}{(0{,}020\text{ m})(0{,}028\text{ m})} = 214\text{ MPa} < 350\text{ MPa} \qquad \text{OK}$$



***b.* Dimensão *b* em cada extremidade da barra.** Vamos considerar uma das partes extremas da barra. Lembrando que a espessura da chapa de aço é $t = 20$ mm e que a tensão de tração média não deve exceder 175 MPa, temos

$$\sigma = \frac{\frac{1}{2}P}{ta} \qquad 175\text{ MPa} = \frac{60\text{ kN}}{(0{,}02\text{ m})a} \qquad a = 17{,}14\text{ mm}$$

$$b = d + 2a = 28\text{ mm} + 2(17{,}14\text{ mm}) \qquad b = 62{,}3\text{ mm}$$ ◀



***c.* Dimensão *h* da barra.** Lembrando que a espessura da chapa de aço é $t = 20$ mm, temos

$$\sigma = \frac{P}{th} \qquad 175\text{ MPa} = \frac{120\text{ kN}}{(0{,}020\text{ m})h} \qquad h = 34{,}3\text{ mm}$$

Utilizaremos $h = 35$ mm ◀

PROBLEMAS

1.1 Duas barras cilíndricas de seção transversal cheia *AB* e *BC* são soldadas uma à outra em *B* e submetidas a um carregamento conforme mostra a figura. Determine a intensidade da força **P** para a qual a tensão normal de tração na barra *AB* é duas vezes a intensidade da tensão de compressão da barra *BC*.

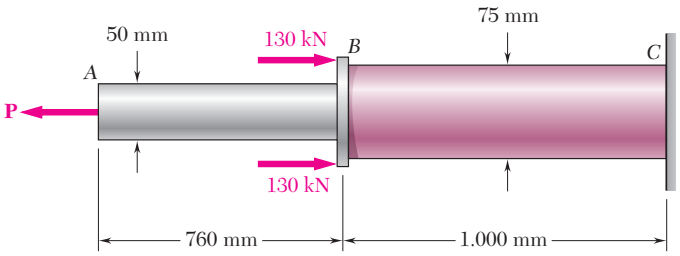


Fig. P1.1

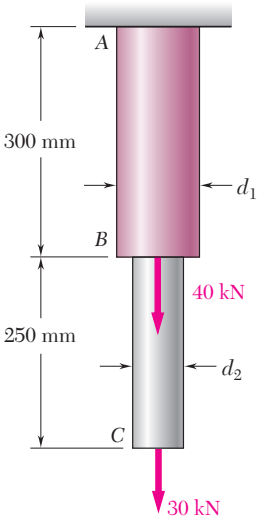


Fig. P1.3 e P1.4

1.2 No Problema 1.1, sabendo que $P = 177{,}9$ kN, determine a tensão normal média no ponto médio da (*a*) barra *AB* e (*b*) barra *BC*.

1.3 Duas barras cilíndricas de seção transversal cheia *AB* e *BC* são soldadas uma à outra em *B* e submetidas a um carregamento conforme mostra a figura. Sabendo que a tensão normal média não pode exceder 175 MPa na barra *AB* e 150 MPa na barra *BC*, determine os menores valores admissíveis de d_1 e d_2.

1.4 Duas barras cilíndricas de seção transversal cheia *AB* e *BC* são soldadas uma à outra em *B* e submetidas a um carregamento conforme mostra a figura. Sabendo que $d_1 = 50$ mm e $d_2 = 30$ mm, calcule a tensão normal média no ponto médio da (*a*) barra *AB* e (*b*) barra *BC*.

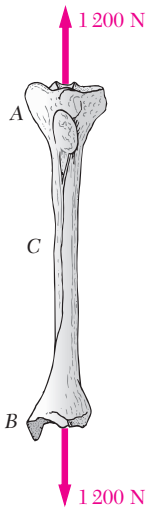


Fig. *P1.5*

1.5 Um medidor de deformação localizado em *C* na superfície do osso *AB* indica que a tensão normal média no osso é 3,80 MPa, quando o osso está submetido a duas forças de 1200 N como mostra a figura. Supondo que a seção transversal do osso em *C* seja anular e sabendo que seu diâmetro externo é 25 mm, determine o diâmetro interno da seção transversal do osso em *C*.

1.6 Duas chapas de aço precisam ser unidas por meio de parafusos de aço de alta resistência de 16 mm de diâmetro que se encaixam dentro de espaçadores cilíndricos de latão. Sabendo que a tensão normal média não deve exceder 200 MPa nos parafusos e 130 MPa nos espaçadores, determine o diâmetro externo dos espaçadores que resulte no projeto mais econômico e seguro.

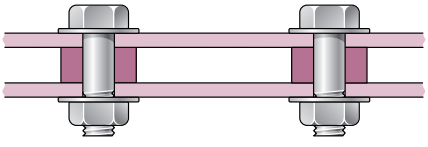


Fig. *P1.6*

1.7 Cada uma das quatro barras verticais tem uma seção transversal retangular uniforme de 8 × 36 mm e cada um dos quatro pinos tem um diâmetro de 16 mm. Determine o valor máximo da tensão normal média nos vínculos que conectam (*a*) os pontos *B* e *D* e (*b*) os pontos *C* e *E*.

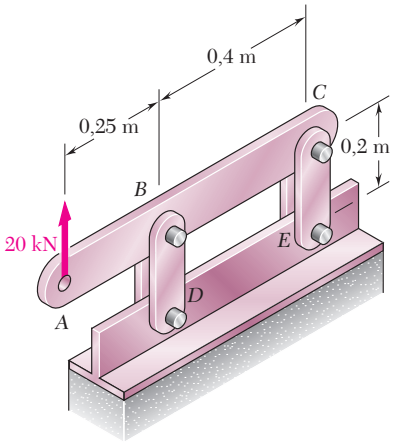


Fig. P1.7

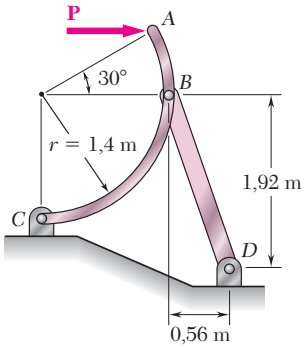


Fig. P1.8

1.8 Sabendo que a porção central da barra *BD* tem uma área de seção transversal uniforme de 800 mm^2, determine a intensidade da carga **P** para a qual a tensão normal naquela parte de *BD* é 50 MPa.

1.9 Sabendo que o elemento *DE* tem 25,4 mm de largura e 3,2 mm de espessura, determine a tensão normal na parte central daquele vínculo quando (*a*) $\theta = 0$ e (b) $\theta = 90°$.

1.10 A barra *AC* tem seção transversal retangular uniforme com 1,6 mm de espessura e 6,4 mm de largura. Determine a tensão normal na parte central da barra *AC*.

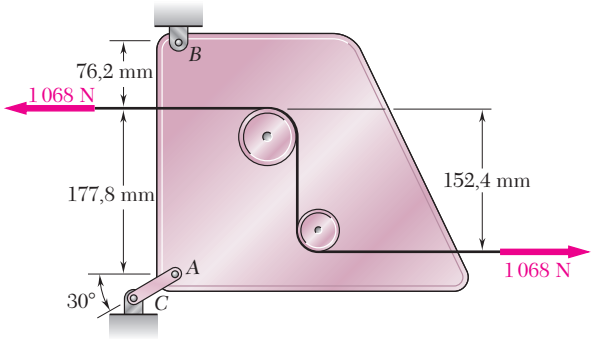


Fig. ***P1.10***

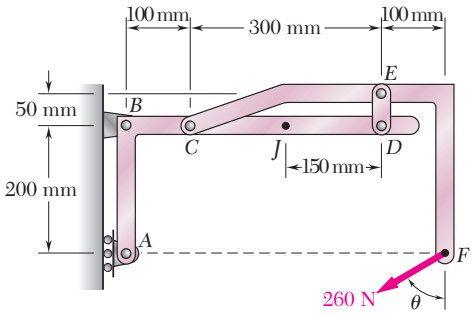


Fig. ***P1.9***

1.11 A barra rígida *EFG* é suportada pelo sistema de treliça mostrado na figura. Sabendo que a componente *CG* é uma haste circular sólida de 19,0 mm de diâmetro, determine a tensão normal em *CG*.

1.12 A barra rígida *EFG* é suportada pelo sistema de treliça mostrado na figura. Determine a área da seção transversal do componente *AE* para a qual a tensão normal na componente é 103 MPa.

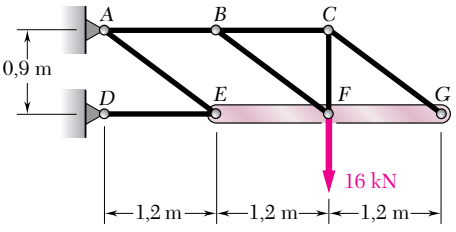


Fig. P1.11 e P1.12

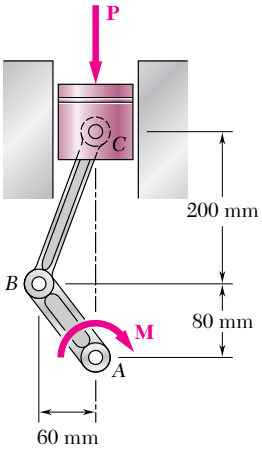


Fig. P1.13

1.13 O conjugado **M** de intensidade 1 500 N · m é aplicado à manivela de um motor. Para a posição mostrada, determine (*a*) a força **P** necessária para manter o sistema do motor em equilíbrio e (*b*) a tensão normal média na biela *BC*, que tem uma seção transversal uniforme de 450 mm^2.

1.14 A barra de um reboque aeronáutico está posicionada por um único cilindro hidráulico conectado a um pino de aço de 25 mm de diâmetro a duas guias para direção *DEF*. A massa de todo o conjunto é de 200 kg e seu centro de gravidade está localizado no ponto G. Para a posição mostrada, determine a tensão normal na barra.

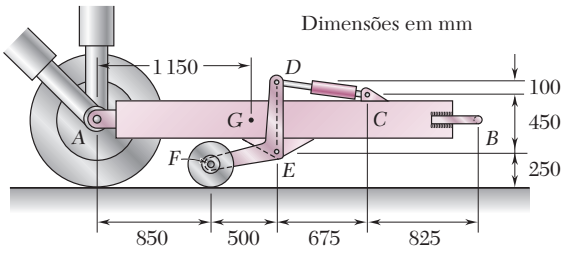


Fig. P1.14

1.15 As componentes de madeira *A* e *B* devem ser unidas por cobrejuntas de madeira compensada que serão totalmente coladas às superfícies em contato. Como parte do projeto da junção, e sabendo que a folga entre as extremidades das componentes deve ser 6 mm, determine o comprimento *L* mínimo permitido para que a tensão de cisalhamento média na cola não exceda 700 kPa.

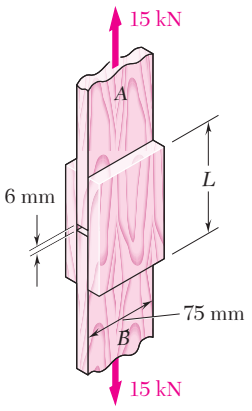


Fig. P1.15

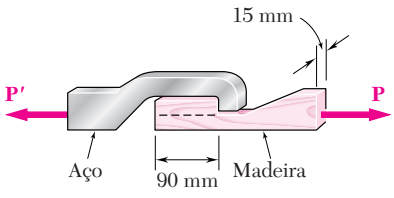


Fig. P1.16

1.16 Quando a força **P** alcançou 8 kN, o corpo de prova de madeira mostrado na figura falhou sob cisalhamento ao longo da superfície indicada pela linha tracejada. Determine a tensão de cisalhamento média ao longo daquela superfície no instante da falha.

1.17 Duas pranchas de madeira, cada uma com 12 mm de espessura e 225 mm de largura, são unidas pela junta de encaixe mostrada na figura. Sabendo que a madeira utilizada rompe por cisalhamento ao longo das fibras quando a tensão de cisalhamento média alcança 8 MPa, determine a intensidade **P** da carga axial que romperá a junta.

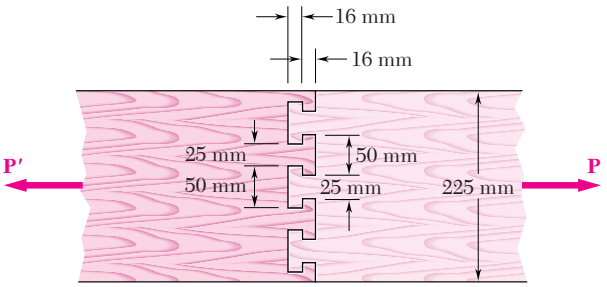


Fig. *P1.17*

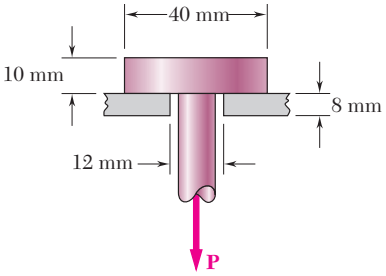


Fig. P1.18

1.18 Uma carga **P** é aplicada a uma barra de aço suportada por uma chapa de alumínio na qual foi feito um furo de 12 mm conforme mostra a figura. Sabendo que a tensão de cisalhamento não deve exceder 180 MPa na barra de aço e 70 MPa na chapa de alumínio, determine a máxima carga **P** que pode ser aplicada à barra.

1.19 A força axial na coluna que suporta a viga de madeira mostrada na figura é $P = 75$ kN. Determine o menor comprimento L admissível para a chapa de contato para que a tensão de contato na madeira não exceda 3,0 MPa.

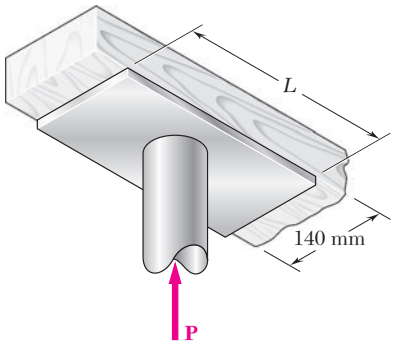


Fig. P1.19

1.20 A carga **P** aplicada ao pino de aço é distribuída para o suporte de madeira por uma arruela anelar. O diâmetro do pino é de 22 mm e o diâmetro interno da arruela é de 25 mm, sendo este ligeiramente maior que o diâmetro do orifício. Determine o menor diâmetro externo d admissível da arruela, sabendo que a tensão normal axial no pino de aço é de 35 MPa e a tensão média de contato entre a arruela e a madeira não pode exceder 5 MPa.

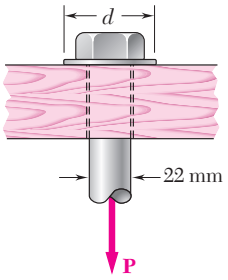


Fig. P1.20

1.21 Uma carga axial de 40 kN é aplicada a uma coluna curta de madeira suportada por uma base de concreto em solo estável. Determine (*a*) a tensão de contato máxima na base de concreto e (*b*) o tamanho da base para que a tensão de contato média no solo seja de 145 kPa.

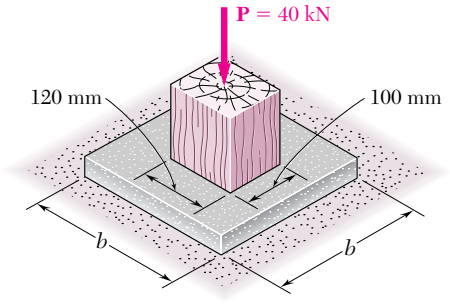


Fig. P1.21

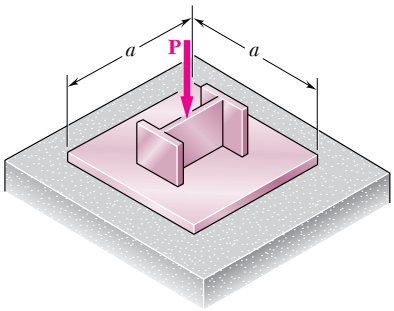


Fig. *P1.22*

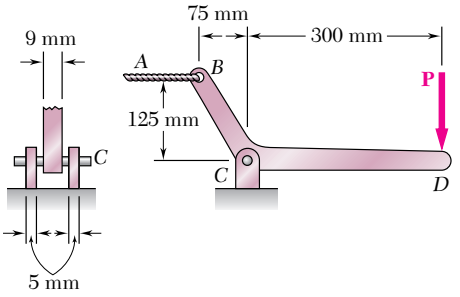


Fig. P1.23 e *P1.24*

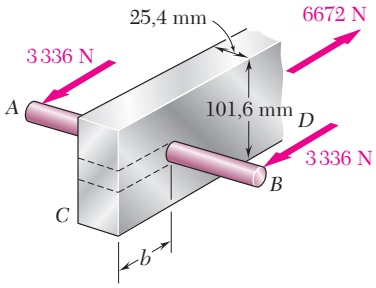


Fig. P1.25

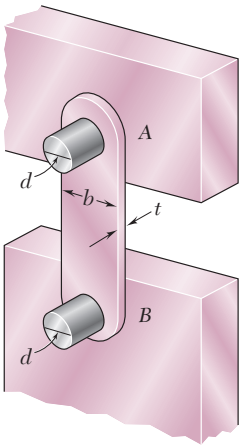


Fig. *P1.28*

1.22 Uma carga axial **P** é suportada por uma coluna curta W200 × 59 com seção transversal de área $A = 7\,650$ mm^2 e distribuída a uma fundação de concreto por uma placa quadrada como mostra a figura. Sabendo que a tensão normal média na coluna não pode exceder 200 MPa e que a tensão de esmagamento na fundação de concreto não deve exceder 20 MPa, determine a dimensão a da chapa que proporcionará o projeto mais econômico e seguro.

1.23 Um pino com diâmetro de 6 mm é utilizada na conexão C do pedal mostrado na figura. Sabendo que $P = 500$ N, determine (a) a tensão de cisalhamento média no pino, (b) a tensão de esmagamento nominal no pedal em C e (c) a tensão de esmagamento nominal em cada lado do suporte em C.

1.24 Sabendo que uma força **P** de intensidade 750 N é aplicada ao pedal mostrado na figura, determine (a) o diâmetro do pino C para o qual a tensão de cisalhamento média no pino é 40 MPa, (b) a tensão de esmagamento correspondente no pedal em C e (c) a tensão de esmagamento correspondente em cada lado do suporte em C.

1.25 Uma barra de aço AB de 15,88 mm de diâmetro está encaixada em um furo redondo próximo à extremidade C de uma vigota de madeira CD. Para o carregamento mostrado, determine (a) a tensão normal média máxima na madeira, (b) a distância b para a qual a tensão de cisalhamento média é 690 kPa nas superfícies indicadas pelas linhas pontilhadas e (c) a tensão de esmagamento média na madeira.

1.26 Um sistema constituído de barras e cilindro hidráulico controla a posição dos garfos de uma empilhadeira. A carga suportada pelo sistema mostrado na figura é 6 670 N. Sabendo que a espessura do elemento BD é 15,88 mm, determine (a) a tensão de cisalhamento média no pino de 12,5 mm de diâmetro em B e (b) a tensão de esmagamento em B no elemento BD.

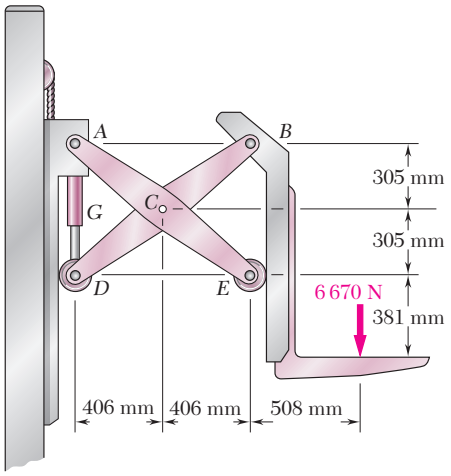


Fig. P1.26

1.27 Para a montagem e carregamento do Problema 1.7, determine (a) a tensão de cisalhamento média no pino B, (b) a tensão média de contato em B sobre o elemento BD e (c) a tensão de contato média em B sobre o elemento ABC, sabendo que esse membro tem 10 × 50 mm e seção retangular uniforme.

1.28 O vínculo AB, com largura $b = 50$ mm e espessura $t = 6$ mm, é utilizado para suportar a extremidade de uma viga horizontal. Sabendo que a tensão normal média no vínculo é −140 MPa e que a tensão de cisalhamento média em cada um dos dois pinos é 80 MPa, determine (a) o diâmetro d dos pinos e (b) a tensão de esmagamento média no vínculo.

1.11. Tensão em um plano oblíquo sob carregamento axial

Nas seções anteriores, vimos que forças axiais aplicadas em um elemento de barra (Fig. 1.28*a*) provocavam tensões normais na barra (Fig. 1.28*b*), enquanto forças transversais agindo sobre parafusos e pinos (Fig. 1.29*a*) provocavam tensões de cisalhamento nas conexões (Fig. 1.29*b*). A razão pela qual se observou uma relação entre forças axiais e tensões normais, por um lado, e forças transversais e tensões de cisalhamento, por outro lado, era porque as tensões estavam sendo determinadas apenas em planos perpendiculares ao eixo do elemento ou conexão. Conforme será visto nesta seção, forças axiais provocam tensões normais e tensões de cisalhamento em planos que não são perpendiculares ao eixo do elemento. Da mesma forma, forças transversais agindo sobre um parafuso ou um pino provocam tensões normais e tensões de cisalhamento em planos que não são perpendiculares ao eixo do parafuso ou pino.

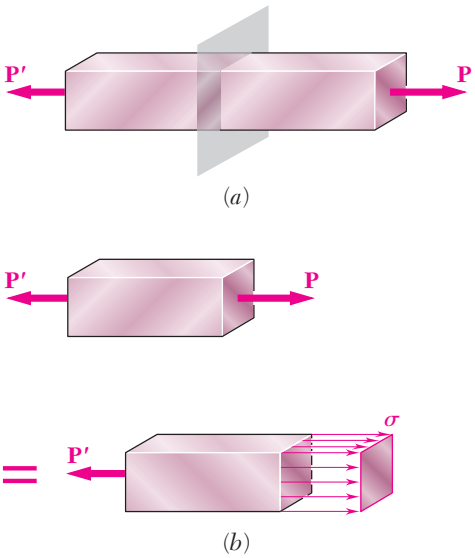


Fig. 1.28

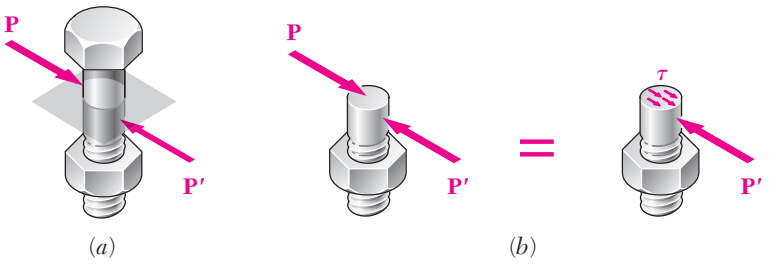


Fig. 1.29

Considere a barra da Fig. 1.28, que está submetida às forças axiais **P** e **P′**. Se cortarmos a barra por um plano formando um ângulo θ com um plano normal (Fig. 1.30*a*) e desenharmos o diagrama de corpo livre da parte do componente localizada à esquerda da seção (Fig. 1.30*b*), verificaremos, pelas condições de equilíbrio do corpo livre, que as forças distribuídas agindo na seção serão equivalentes à força **P**.

Decompondo **P** nas suas componentes **F** e **V**, respectivamente normal e tangencial à seção (Fig. 1.30*c*), temos

$$F = P\cos\theta \qquad V = P\operatorname{sen}\theta \tag{1.12}$$

A força **F** representa a resultante das forças normais distribuídas sobre a seção e a força **V**, a resultante das forças tangenciais (Fig. 1.30*d*). Os valores médios das tensões normal e de cisalhamento correspondentes são obtidos dividindo-se, respectivamente, F e V pela área A_θ da seção:

$$\sigma = \frac{F}{A_\theta} \qquad \tau = \frac{V}{A_\theta} \tag{1.13}$$

Substituindo F e V de (1.12) em (1.13) e observando da Fig. 1.30*c* que $A_0 = A_\theta \cos\theta$, ou $A_\theta = A_0/\cos\theta$, em que A_0 indica a área de uma seção perpendicular ao eixo da barra, obtemos

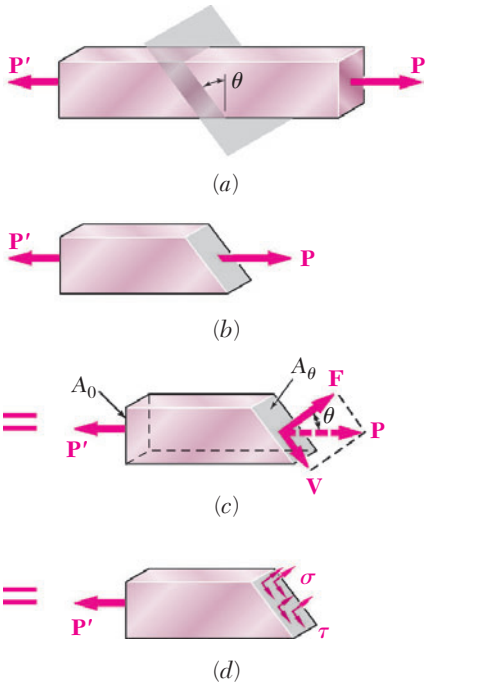


Fig. 1.30

$$\sigma = \frac{P\cos\theta}{A_0/\cos\theta} \qquad \tau = \frac{P\operatorname{sen}\theta}{A_0/\cos\theta}$$

ou

$$\sigma = \frac{P}{A_0}\cos^2\theta \qquad \tau = \frac{P}{A_0}\operatorname{sen}\theta\cos\theta \tag{1.14}$$

Notamos na primeira das Equações (1.14) que a tensão normal σ é máxima quando $\theta = 0$, ou seja, quando o plano da seção é perpendicular ao eixo do elemento, e que ela se aproxima de zero à medida que θ se aproxima de 90°. Verificamos que o valor de σ quando $\theta = 0$ é

$$\sigma_m = \frac{P}{A_0} \tag{1.15}$$

como vimos anteriormente na Seção 1.3. A segunda das Equações (1.14) mostra que a tensão de cisalhamento τ é zero para $\theta = 0$ e $\theta = 90°$ e que para $\theta = 45°$ ela alcança seu valor máximo

$$\tau_m = \frac{P}{A_0}\operatorname{sen}45°\cos45° = \frac{P}{2A_0} \tag{1.16}$$

A primeira das Equações (1.14) indica que, quando $\theta = 45°$, a tensão normal σ' também é igual a $P/2A_0$:

$$\sigma' = \frac{P}{A_0}\cos^2 45° = \frac{P}{2A_0} \tag{1.17}$$

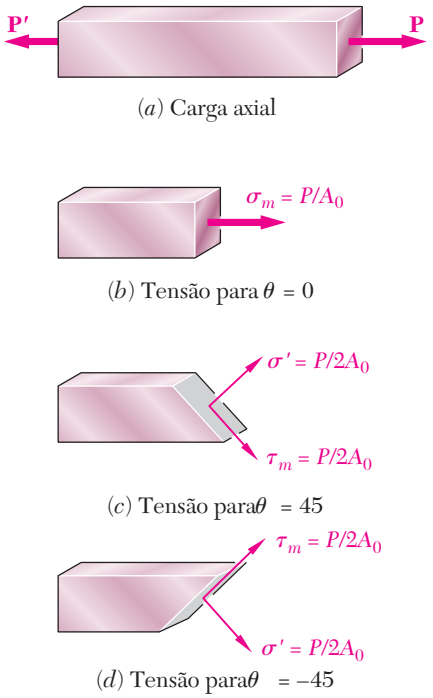


Fig. 1.31

Os resultados obtidos nas Equações (1.15), (1.16) e (1.17) são mostrados graficamente na Fig. 1.31. Notamos que a mesma carga pode produzir uma tensão normal $\sigma_m = P/A_0$ e nenhuma tensão de cisalhamento (Fig. 1.31*b*), ou uma tensão normal e de cisalhamento da mesma intensidade $\sigma' = \tau_m = P/2A_0$ (Fig. 1.31*c* e *d*), dependendo da orientação da seção.

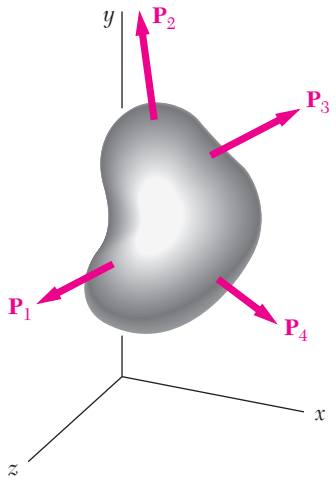


Fig. 1.32

1.12. Tensão sob condições gerais de carregamento; componentes de tensão

Os exemplos das seções anteriores estavam limitados a elementos sob carregamento axial e conexões sob carregamento transversal. Muitos elementos estruturais e de máquinas estão sob condições de carregamento mais complexas.

Considere um corpo sujeito a várias cargas $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ etc. (Fig. 1.32). Para entendermos a condição de tensão criada por essas cargas em algum ponto Q interno ao corpo, vamos primeiro passar um corte através de Q, utilizando um plano paralelo ao plano yz. A parte do corpo à esquerda do corte está sujeita a algumas das cargas originais, e as forças normais e cortantes distribuídas na seção. Vamos indicar por $\Delta\mathbf{F}^x$ e $\Delta\mathbf{V}^x$, respectivamente, as forças normal e cortante agindo sobre uma pequena área ΔA que circunda o ponto Q (Fig. 1.33*a*).

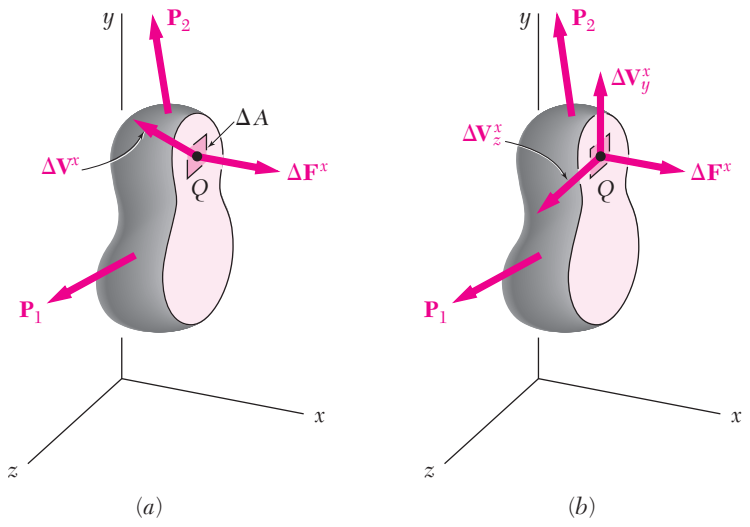


Fig. 1.33

Note que é utilizado o índice superior x para indicar que as forças $\Delta\mathbf{F}^x$ e $\Delta\mathbf{V}^x$ agem sobre uma superfície perpendicular ao eixo x. Enquanto a força normal $\Delta\mathbf{F}^x$ tem uma direção bem definida, a força cortante $\Delta\mathbf{V}^x$ pode ter qualquer direção no plano da seção. Decompomos então $\Delta\mathbf{V}^x$ nas duas componentes de força, $\Delta\mathbf{V}_y^x$ e $\Delta\mathbf{V}_z^x$, em direções paralelas aos eixos y e z, respectivamente (Fig. 1.33*b*). Dividindo agora a intensidade de cada força pela área ΔA e fazendo ΔA aproximar-se de zero, definimos as três componentes de tensão mostradas na Fig. 1.34:

$$\sigma_x = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F^x}{\Delta A}$$

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta V_y^x}{\Delta A} \qquad \tau_{xz} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta V_z^x}{\Delta A} \tag{1.18}$$

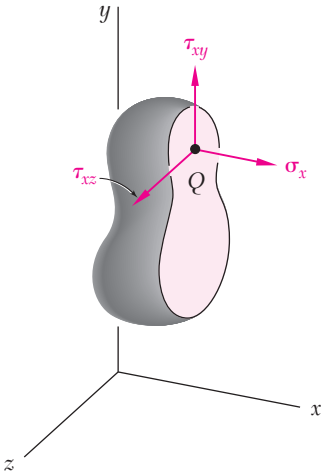


Fig. 1.34

Notamos que o primeiro índice em σ_x, τ_{xy} e τ_{xz} é utilizado para indicar que as tensões em consideração são aplicadas *em uma superfície perpendicular ao eixo x*. O segundo índice em τ_{xy} e τ_{xz} identifica *a direção da componente*. A tensão normal σ_x é positiva, se o sentido do vetor correspondente apontar para a direção positiva de x, isto é, se o corpo estiver sendo tracionado, e negativa em caso contrário. Analogamente, as componentes da tensão de cisalhamento τ_{xy} e τ_{xz} são positivas, se os sentidos dos vetores correspondentes apontarem, respectivamente, nas direções positivas de y e z.

A análise acima também pode ser feita considerando-se a parte do corpo localizada à direita do plano vertical através de Q (Fig. 1.35). As mesmas intensidades, mas com sentidos opostos, são obtidos para as forças normal e cortante $\Delta\mathbf{F}^x$, $\Delta\mathbf{V}_y^x$ e $\Delta\mathbf{V}_z^x$. Portanto, os mesmos valores são também obtidos para as componentes de tensão correspondentes, mas, como a seção na Fig. 1.35 agora está voltada para o lado *negativo do eixo x*, um sinal positivo para σ_x indicará que o sentido do vetor correspondente aponta na *direção negativa de x*. Analogamente, sinais positivos para τ_{xy} e τ_{xz} indicarão que os sentidos dos vetores correspondentes apontam, respectivamente, nas direções negativas de y e z, como mostra a Fig. 1.35.

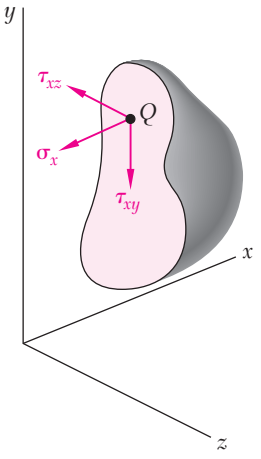


Fig. 1.35

Passando um corte através de Q paralelo ao plano zx, definimos da mesma maneira as componentes da tensão σ_y, τ_{yz} e τ_{yx}. Finalmente, um corte através de Q paralela ao plano xy resulta nas componentes σ_z, τ_{zx} e τ_{zy}.

Para facilitar a visualização do estado de tensão no ponto Q, consideraremos um pequeno cubo de lado a centrado em Q e as tensões que atuam em cada uma das seis faces desse cubo (Fig. 1.36). As componentes de tensão mostradas na figura são σ_x, σ_y e σ_z, que representam as tensões normais nas faces perpendiculares, respectivamente, aos eixos x, y e z e às seis componentes de tensão de cisalhamento τ_{xy}, τ_{xz} etc. Recordamos que, de acordo com a definição das componentes de tensão de cisalhamento, τ_{xy} representa a componente y da tensão de cisalhamento que atua na face perpendicular ao eixo x, enquanto τ_{yx} representa a componente x da tensão de cisalhamento que atua na face perpendicular ao eixo y. Note que somente três faces do cubo são realmente visíveis na Fig. 1.36 e que componentes de tensão iguais e opostas atuam nas faces ocultas. Embora as tensões que atuam nas faces do cubo diferem ligeiramente das tensões em Q, o erro envolvido é pequeno e desaparece na medida em que o lado a do cubo aproxima-se de zero.

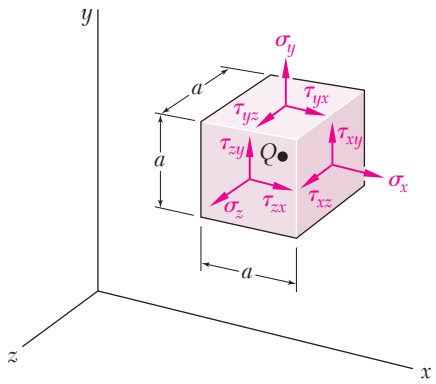


Fig. 1.36

Vamos deduzir agora relações importantes entre as componentes de tensão de cisalhamento. Consideremos o diagrama de corpo livre do pequeno cubo centrado no ponto Q (Fig. 1.37). As forças normal e cortante que atuam nas várias faces do cubo são obtidas multiplicando-se as componentes de tensão correspondentes pela área ΔA de cada face. Escreveremos primeiro as três equações de equilíbrio a seguir:

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma F_z = 0 \tag{1.19}$$

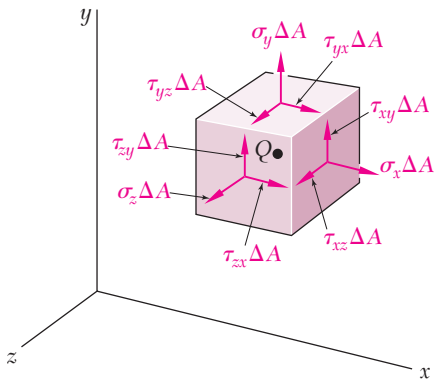


Fig. 1.37

Como há forças iguais e opostas às forças mostradas na Fig. 1.37 que atuam nas faces ocultas do cubo, está claro que as Equações (1.19) ficam satisfeitas. Considerando agora os momentos das forças em relação aos eixos Qx', Qy' e Qz' desenhados a partir de Q em direções, respectivamente, paralelas aos eixos x, y e z, temos as três equações adicionais

$$\Sigma M_{x'} = 0 \qquad \Sigma M_{y'} = 0 \qquad \Sigma M_{z'} = 0 \tag{1.20}$$

Utilizando a projeção no plano $x'y'$ (Fig. 1.38), notamos que somente as forças de cisalhamento têm momentos, em relação ao eixo z, diferentes de zero. Essas forças formam dois conjugados, um de momento anti-horário (positivo) $(\tau_{xy}\,\Delta A)a$, e outro de momento horário (negativo) $-(\tau_{yx}\,\Delta A)a$. Da última das três Equações (1.20) resulta, então,

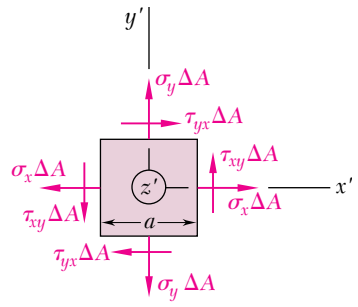


Fig. 1.38

$$+\circlearrowleft \Sigma M_z = 0: \qquad (\tau_{xy}\,\Delta A)a - (\tau_{yx}\,\Delta A)a = 0$$

da qual concluímos que

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \tag{1.21}$$

A relação obtida mostra que a componente y da tensão de cisalhamento aplicada à face perpendicular ao eixo x é igual a componente x da tensão de ci-

salhamento aplicada sobre a face perpendicular ao eixo y. Das duas Equações restantes (1.20), determinamos de maneira semelhante as relações

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \qquad \tau_{zx} = \tau_{xz} \tag{1.22}$$

Concluímos das Equações (1.21) e (1.22) que são necessárias somente seis componentes de tensão para definir o estado de tensão em um determinado ponto Q em lugar das nove componentes consideradas originalmente. Essas seis componentes são σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz} e τ_{zx}. Notamos também que, em um determinado ponto, *o cisalhamento não pode ocorrer apenas em um plano*; deve sempre existir uma tensão de cisalhamento igual em outro plano perpendicular ao primeiro. Por exemplo, considerando novamente o parafuso da Fig. 1.29 e um pequeno cubo no centro Q do parafuso (Fig. 1.39*a*), vemos que tensões de cisalhamento de igual intensidade devem estar atuando nas duas faces horizontais do cubo e nas duas faces perpendiculares às forças **P** e **P**′ (Fig. 1.39*b*).

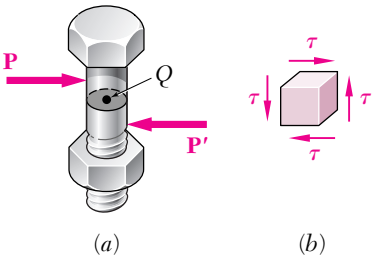


Fig. 1.39

Antes de concluirmos nossa discussão sobre as componentes de tensão, vamos considerar novamente o caso de um elemento sob carga axial. Se considerarmos um pequeno cubo com faces, respectivamente, paralelas às faces do elemento e lembrando os resultados obtidos na Seção 1.11, verificaremos que o estado de tensão no elemento pode ser descrito como mostra a Fig. 1.40*a*; as únicas tensões são as normais σ_x que atuam nas faces do cubo perpendiculares ao eixo x. No entanto, se o pequeno cubo for girado de 45° em torno do eixo z de modo que sua nova orientação corresponda à orientação das seções consideradas na Fig. 1.31*c* e *d*, concluímos que as tensões normal e de cisalhamento de igual intensidade estão atuando nas quatro faces do cubo (Fig. 1.40*b*). Observamos então que a mesma condição de carregamento pode levar a diferentes interpretações do estado de tensão em um determinado ponto, dependendo da orientação do elemento considerado. Discutiremos mais sobre esse assunto no Capítulo 7.

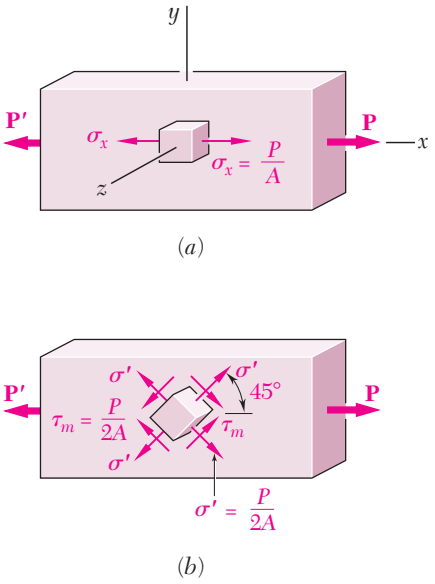


Fig. 1.40

1.13. Considerações de projeto

Nas seções anteriores você aprendeu a determinar as tensões em barras, parafusos e pinos sob condições simples de carregamento. Nos próximos capítulos você aprenderá a determinar tensões em situações mais complexas. No entanto, em aplicações de engenharia, a determinação das tensões raramente é o objetivo final. Ao contrário, o conceito de tensões é utilizado pelos engenheiros como auxílio na sua mais importante tarefa, ou seja, o projeto de estruturas e máquinas que executarão determinada função com segurança e economia.

a. Determinação do limite de resistência de um material. Um elemento importante a ser considerado por um projetista é como o material selecionado se comportará sob um carregamento. Para um determinado material, isso é determinado executando-se testes específicos em corpos de prova preparados com aquele material. Por exemplo, um corpo de prova de aço pode ser preparado e colocado em uma máquina de ensaios de laboratório para ser submetido à força axial de tração centrada conhecida, conforme descrito na Seção 2.3. À medida que se aumenta a intensidade da força, são medidas várias alterações no corpo de prova, como, alterações em seu comprimento e diâmetro. Eventualmente, pode-se atingir a máxima força a ser aplicada ao

corpo de prova e este se romper ou começar a suportar menos carga. Essa força máxima é chamada de *carga-limite* do corpo de prova, também denominada P_L. Como a carga aplicada é centrada, podemos dividir o valor da carga-limite pela área da seção transversal original da barra para obter o *limite da tensão normal* do material utilizado. Essa tensão, também conhecida como *limite de resistência à tração* do material, é

$$\sigma_L = \frac{P_L}{A} \tag{1.23}$$

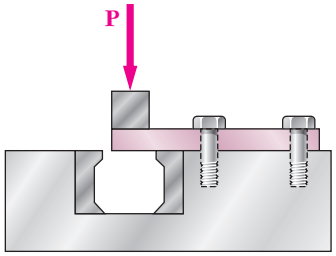


Fig. 1.41

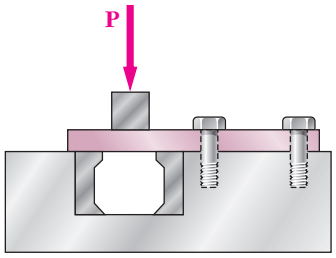


Fig. 1.42

Há disponíveis vários procedimentos de ensaio para determinar o *limite da tensão de cisalhamento*, ou *limite de resistência em cisalhamento*, de um material. O procedimento mais comumente utilizado envolve a torção de um tubo circular (Seção 3.5). Um procedimento mais direto, embora menos preciso, consiste em prender uma barra retangular ou redonda e, com uma *ferramenta de corte* (Fig. 1.41), aplicar uma carga P crescente até ser obtida a *carga-limite* P_L para cisalhamento simples. Se a extremidade livre do corpo de prova se apoiar em ambas as superfícies de corte (Fig. 1.42), será obtida a carga-limite para cisalhamento duplo. Em qualquer dos casos, o limite da tensão de cisalhamento τ_L é obtido dividindo-se o valor da carga-limite pela área total sobre a qual ocorreu o corte. Lembramos que, no caso de cisalhamento simples, essa é a área da seção transversal A do corpo de prova, enquanto em cisalhamento duplo ela é igual a duas vezes a área da seção transversal.

b. Carga admissível e tensão admissível; coeficiente de segurança. A carga máxima que um elemento estrutural ou um membro de máquina poderá suportar sob condições normais de utilização é consideravelmente menor que o valor da *carga-limite*. Essa carga menor é conhecida como *carga admissível* e, às vezes, como *carga de trabalho* ou *carga de projeto*. Somente uma fração do limite da capacidade de carga do elemento é utilizada quando aplicada à carga admissível. A parte restante da capacidade de carga do elemento é mantida na reserva para garantir seu desempenho com segurança. A relação entre a carga-limite e a carga admissível é utilizada para definir o *coeficiente de segurança*.† Temos

$$\text{Coeficiente de segurança} = C.S. = \frac{\text{carga-limite}}{\text{carga admissível}} \tag{1.24}$$

Uma definição alternativa do coeficiente de segurança é dada com base no uso de tensões:

$$\text{Coeficiente de segurança} = C.S. = \frac{\text{limite de tensão}}{\text{tensão admissível}} \tag{1.25}$$

As duas expressões dadas para o coeficiente de segurança nas Equações (1.24) e (1.25) são idênticas quando existe uma relação linear entre a carga e a tensão. No entanto, na maioria das aplicações de engenharia, essa relação deixa de ser linear à medida em que a carga se aproxima de seu valor-limite e o coeficiente de segurança obtido da Equação (1.25) não proporciona uma

†Em alguns campos da engenharia, principalmente na engenharia aeronáutica, é usada a *margem de segurança* em lugar do coeficiente de segurança. A margem de segurança é definida como o coeficiente de segurança menos um; ou seja, margem de segurança $= C.S. - 1{,}00$.

verdadeira avaliação da segurança de um determinado projeto. Contudo, o *método de projeto da tensão* admissível, com base no uso da Equação (1.25), é amplamente utilizado.

c. Seleção de um coeficiente de segurança apropriado. A seleção do coeficiente de segurança a ser utilizado para várias aplicações é uma das mais importantes tarefas da engenharia. No entanto, se for escolhido um coeficiente de segurança muito pequeno, a possibilidade de falha se tornará grande e inaceitável; em contrapartida, se for escolhido um coeficiente de segurança desnecessariamente grande, o resultado será um projeto antieconômico e não funcional. A escolha do coeficiente de segurança apropriado para uma aplicação requer senso de engenharia com base em muitas considerações, como as seguintes:

1. *Variações que podem ocorrer nas propriedades do elemento sob consideração*. A composição, a resistência e as dimensões do elemento estão todas sujeitas a pequenas variações durante a fabricação. Além disso, as propriedades do material podem ser alteradas e as tensões residuais introduzidas com o aquecimento ou deformação que podem ocorrer durante a fabricação, a armazenagem, o transporte ou a construção.
2. *Número de cargas que podem ser esperadas durante a vida da estrutura ou máquina*. Para a maioria dos materiais, a tensão-limite diminui na medida em que o número de operações de carga aumenta. Esse fenômeno é conhecido como *fadiga* e, se for ignorado, pode resultar em falha súbita (ver a Seção 2.7).
3. *Tipo de carregamento planejado para o projeto ou que pode ocorrer no futuro.* Poucas são as cargas que podem ser conhecidas com exatidão total — a maioria das cargas de projeto é estimativa de engenharia. Além disso, alterações futuras ou mudanças no uso podem introduzir alterações na carga real. Coeficientes de segurança maiores são também necessários para carregamentos dinâmicos, cíclicos ou impulsivos.
4. *Tipo de falha que pode ocorrer.* Materiais frágeis falham subitamente, em geral sem uma indicação prévia de que o colapso é iminente. Não obstante, materiais dúcteis, como o aço utilizado em estruturas, normalmente passam por uma deformação substancial chamada de *escoamento* antes de falhar, proporcionando assim um aviso de que existe sobrecarga. No entanto, a maioria das falhas por flambagem ou por perda de estabilidade é súbita, seja o material frágil ou não. Quando existe a possibilidade de falha súbita, deverá ser utilizado um coeficiente de segurança maior que aquele utilizado quando a falha é precedida por sinais óbvios de aviso.
5. *Incerteza em virtude de métodos de análise.* Todos os métodos de análise são realizados com base em certas hipóteses simplificadoras cujos resultados fazem as tensões calculadas aproximarem-se das tensões reais.
6. *Deterioração que pode ocorrer no futuro em razão da falta de manutenção ou devido às causas naturais imprevisíveis.* Um coeficiente de segurança maior é necessário em locais em que as condições como corrosão e envelhecimento são difíceis de controlar ou até de descobrir.
7. *Importância de um determinado elemento para a integridade de toda a estrutura.* Contraventamentos e elementos secundários podem, em muitos casos, ser projetados com um coeficiente de segurança menor que aquele utilizado para elementos principais.

Além dessas considerações, há uma outra referente ao risco de vida e de danos materiais que uma falha poderia produzir. Nos casos em que uma falha não causaria risco de vida e somente risco mínimo de danos materiais, pode ser considerado o uso de um coeficiente de segurança menor. Finalmente, há a consideração prática de que, a menos que seja utilizado um projeto cuidadoso, com um coeficiente de segurança baixo, uma estrutura ou máquina pode não executar a função para a qual ela foi projetada. Altos coeficientes de segurança, por exemplo, podem ter um efeito inaceitável no peso de um avião.

Para a maioria das aplicações estruturais e de máquinas, coeficientes de segurança são definidos por especificações de projeto ou normas técnicas redigidas por comitês de engenheiros experientes que trabalham em conjunto com sociedades profissionais, com indústrias ou com agências federais, estaduais ou municipais. Exemplos de tais especificações de projeto e normas técnicas são

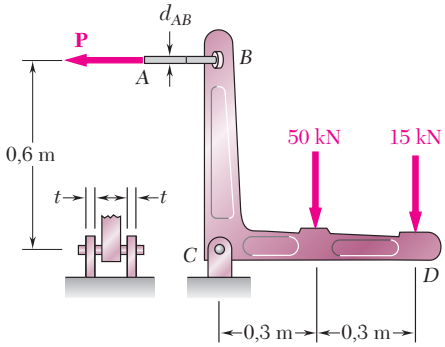
1. *Aço*: American Institute of Steel Construction, Especificações para Construção com aço Estrutural
2. *Concreto*: American Concrete Institute, Código de Requisitos para Construção em Concreto Estrutural
3. *Madeira*: American Forest and Paper Association, Especificações Nacionais para Construção em Madeira
4. *Pontes rodoviárias*: American Association of State Highway Officials, Especificações Padrão para Pontes Rodoviárias

***d. Coeficiente de projeto para carga e resistência.** Conforme vimos, o método da tensão admissível exige que todas as incertezas associadas com o projeto de uma estrutura ou elemento de máquina sejam agrupadas em um único coeficiente de segurança. Um método alternativo de projeto, que está ganhando aceitação principalmente entre engenheiros estruturais, torna possível, com o uso de três diferentes coeficientes, distinguir entre as incertezas associadas com a própria estrutura e aquelas associadas com a carga que ela deve suportar por projeto. Esse método, conhecido como *Load and Resistance Factor Design — LRFD* (Coeficiente de Projeto para Carga e Resistência), permite ao projetista distinguir melhor entre incertezas associadas a *carga externa*, P_E, ou seja, com a carga a ser suportada pela estrutura, e a *carga permanente,* P_P, ou seja, com o peso da parte da estrutura contribuindo para a carga total.

Quando utilizado esse método de projeto, deverá ser determinado primeiro o *limite de carga*, P_L, da estrutura, ou seja, a carga na qual a estrutura deixa de ser útil. O projeto proposto é então aceitável se for satisfeita a seguinte inequação:

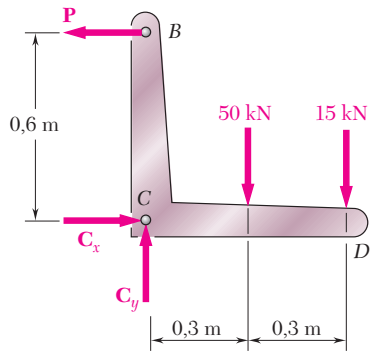
$$\gamma_P P_P + \gamma_E P_E \leq \phi P_L \tag{1.26}$$

O coeficiente ϕ é conhecido como *coeficiente de resistência*: ele está relacionado às incertezas associadas com a própria estrutura e normalmente será menor que 1. Os coeficientes γ_P e γ_E são chamados de *coeficientes de carga*; eles estão relacionados às incertezas associadas, respectivamente, com a carga permanente e a carga externa e normalmente serão maiores que 1, com γ_E geralmente maior que γ_P. Embora sejam incluídos alguns exemplos ou problemas propostos utilizando LRFD neste capítulo e nos Capítulos 5 e 10, será utilizado neste texto o método de projeto da tensão admissível.



PROBLEMA RESOLVIDO 1.3

São aplicadas duas forças ao suporte *BCD* mostrado na figura. (*a*) Sabendo que a barra de controle *AB* deve ser feita de aço e ter um limite de tensão normal de 600 MPa, determine o diâmetro da barra para o qual o coeficiente de segurança com relação à falha seja igual a 3,3. (*b*) Sabendo que o pino em *C* deve ser feito de um aço com um limite de tensão de cisalhamento de 350 MPa, determine o diâmetro do pino *C* para o qual o coeficiente de segurança com relação ao cisalhamento seja também igual a 3,3. e (*c*) Determine a espessura necessária para as barras de apoio em *C*, sabendo que a tensão de esmagamento admissível do aço utilizado é 300 MPa.



SOLUÇÃO

Corpo livre: o suporte inteiro. A reação em *C* é representada por seus componentes $\mathbf{C}_x$ e $\mathbf{C}_y$.

$$+\circlearrowleft \Sigma M_C = 0: \quad P(0{,}6\text{ m}) - (50\text{ kN})(0{,}3\text{ m}) - (15\text{ kN})(0{,}6\text{ m}) = 0 \qquad P = 40\text{ kN}$$

$$\Sigma F_x = 0: \qquad C_x = 40\text{ kN}$$

$$\Sigma F_y = 0: \qquad C_y = 65\text{ kN} \qquad C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} = 76{,}3\text{ kN}$$

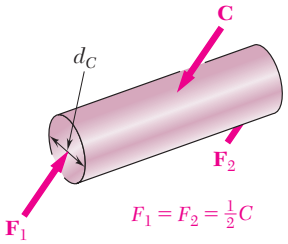
***a*. Barra de controle *AB*.** Como o coeficiente de segurança deve ser 3,3, a tensão admissível é

$$\sigma_{\text{adm}} = \frac{\sigma_L}{C.S.} = \frac{600\text{ MPa}}{3{,}3} = 181{,}8\text{ MPa}$$

Para $P = 40$ kN, a área da seção transversal necessária é

$$A_{\text{nec}} = \frac{P}{\sigma_{\text{adm}}} = \frac{40\text{ kN}}{181{,}8\text{ MPa}} = 220 \times 10^{-6}\text{ m}^2$$

$$A_{\text{nec}} = \frac{\pi}{4} d_{AB}^2 = 220 \times 10^{-6}\text{ m}^2 \qquad d_{AB} = 16{,}74\text{ mm} \blacktriangleleft$$



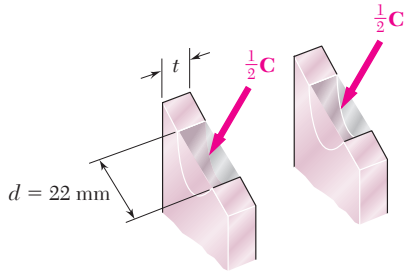
***b*. Cisalhamento no pino *C*.** Para um coeficiente de segurança de 3,3, temos

$$\tau_{\text{adm}} = \frac{\tau_L}{C.S.} = \frac{350\text{ MPa}}{3{,}3} = 106{,}1\text{ MPa}$$

Como o pino está sob corte duplo, temos

$$A_{\text{nec}} = \frac{C/2}{\tau_{\text{adm}}} = \frac{(76{,}3\text{ kN})/2}{106{,}1\text{ MPa}} = 360\text{ mm}^2$$

$$A_{\text{nec}} = \frac{\pi}{4} d_C^2 = 360\text{ mm}^2 \qquad d_C = 21{,}4\text{ mm} \quad \text{Utilizamos: } d_C = 22\text{ mm} \blacktriangleleft$$

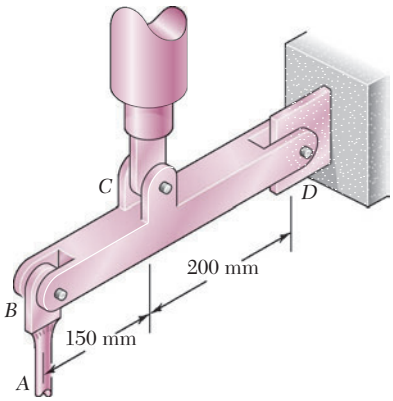


O próximo pino maior disponível tem um diâmetro de 22 mm e deverá ser utilizado.

***c*. Esmagamento em *C*.** Utilizando $d = 22$ mm, a área nominal de esmagamento de cada barra é $22t$. Como a força aplicada em cada suporte é $C/2$ e a tensão de esmagamento admissível é 300 MPa, temos

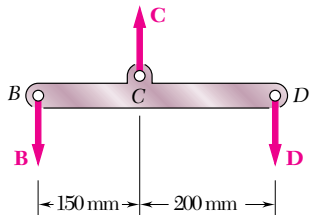
$$A_{\text{nec}} = \frac{C/2}{\sigma_{\text{adm}}} = \frac{(76{,}3\text{ kN})/2}{300\text{ MPa}} = 127{,}2\text{ mm}^2$$

Assim, $22t = 127{,}2$ $\qquad t = 5{,}78$ mm $\qquad$ Utilizamos: $t = 6$ mm ◀



PROBLEMA RESOLVIDO 1.4

A viga rígida *BCD* está presa por parafusos a uma barra de controle em *B*, a um cilindro hidráulico em *C* e a um suporte fixo em *D*. Os diâmetros dos parafusos utilizados são: $d_B = d_D = 9{,}5$ mm, $d_C = 12{,}7$ mm. Cada parafuso age sob cisalhamento duplo e é feito de um aço para o qual o limite da tensão de cisalhamento é $\tau_L = 275$ MPa. A barra de controle *AB* tem um diâmetro $d_A = 11$ mm e é feita de um aço para o qual o limite da tensão de tração é $\sigma_L = 414$ MPa. Se o coeficiente de segurança mínimo deve ser 3,0 para toda a estrutura, determine a maior força ascendente que pode ser aplicada pelo cilindro hidráulico em *C*.



SOLUÇÃO

O coeficiente de segurança com relação à falha deve ser 3,0 ou mais em cada um dos três parafusos e na barra de controle. Esses quatro critérios independentes serão considerados separadamente.

Corpo livre: viga *BCD*. Primeiro determinamos a força *C* em função das forças *B* e *D*.

$$+\circlearrowleft \Sigma M_D = 0: \quad B(350\text{ mm}) - C(200\text{ mm}) = 0 \quad C = 1{,}750B \qquad (1)$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: \quad -D(350\text{ mm}) + C(150\text{ mm}) = 0 \quad C = 2{,}33D \qquad (2)$$

Barra de controle. Para um coeficiente de segurança de 3,0, temos

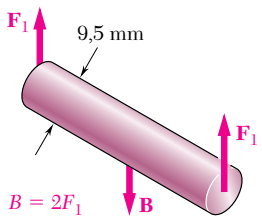
$$\sigma_{\text{adm}} = \frac{\sigma_L}{C.S.} = \frac{414\text{ MPa}}{3{,}0} = 138\text{ MPa}$$

A força admissível na barra de controle é

$$B = \sigma_{\text{adm}}(A) = (138\text{ MPa})\tfrac{1}{4}\pi\,(11\text{ mm})^2 = 13{,}11\text{ kN}$$

Utilizando a Equação (1), determinamos o maior valor admissível *C*:

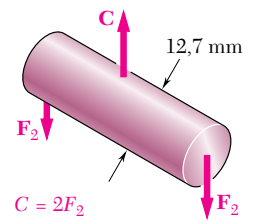
$$C = 1{,}750B = 1{,}750(13{,}11\text{ kN}) \qquad C = 22{,}94\text{ kN} \triangleleft$$



Parafuso em *B*. $\tau_{\text{adm}} = \tau_L/C.S. = (275\text{ MPa})/3 = 91{,}67$ MPa. Como o parafuso está sob corte duplo, o valor admissível da força **B** aplicada no parafuso é

$$B = 2F_1 = 2(\tau_{\text{adm}}A) = 2(91{,}67\text{ MPa})(\tfrac{1}{4}\pi)(9{,}5\text{ mm})^2 = 13{,}00\text{ kN}$$

Da Equação (1): $C = 1{,}750B = 1{,}750(13{,}00\text{ kN}) \qquad C = 22{,}75\text{ kN} \triangleleft$



Parafuso em *D*. Como esse parafuso é igual ao parafuso *B*, a força admissível é $D = B = 13{,}00$ kN. Da Equação (2):

$$C = 2{,}33D = 2{,}33(13{,}00\text{ kN}) \qquad C = 30{,}29\text{ kN} \triangleleft$$

Parafuso em *C*. Temos novamente $\tau_{\text{adm}} = 91{,}67$ MPa e escrevemos

$$C = 2F_2 = 2(\tau_{\text{adm}}A) = 2(91{,}67\text{ MPa})(\tfrac{1}{4}\pi)(12{,}7\text{ mm})^2 \quad C = 23{,}22\text{ kN} \triangleleft$$

Resumo. Encontramos separadamente quatro valores máximos admissíveis para a força *C*. Para satisfazermos a todos esses critérios, devemos escolher o menor valor, ou seja:

$$C = 22{,}75\text{ kN} \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

1.29 A carga **P** de 6 227 N é suportada por dois elementos de madeira de seção transversal uniforme unidos pela emenda colada mostrada na figura. Determine as tensões normal e de cisalhamento na emenda colada.

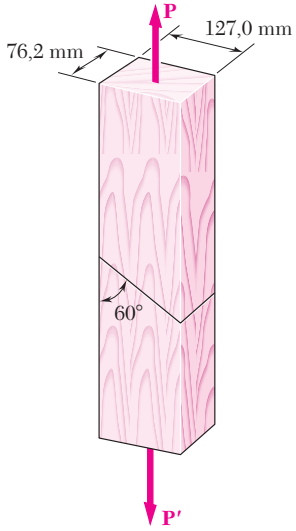


Fig. P1.29 e *P1.30*

1.30 Dois elementos de madeira de seção transversal retangular uniforme são unidos por uma emenda colada como mostra a figura. Sabendo que a máxima tensão de cisalhamento admissível na emenda é 500 kPa, determine (*a*) a maior carga **P** que pode ser suportada com segurança e (*b*) a tensão de tração correspondente na emenda.

1.31 Dois elementos de madeira de seção transversal retangular uniforme são unidos por uma emenda colada como mostra a figura. Sabendo que $P = 11$ kN, determine as tensões normal e de cisalhamento na emenda colada.

1.32 Dois elementos de madeira de seção transversal retangular uniforme são unidos por uma emenda colada como mostra a figura. Sabendo que a máxima tensão de tração admissível na emenda é 560 kPa, determine (*a*) a maior carga **P** que pode ser aplicada com segurança e (*b*) a tensão de cisalhamento correspondente na emenda.

1.33 Uma carga **P** centrada é aplicada ao bloco de granito mostrado na figura. Sabendo que o valor máximo resultante da tensão de cisalhamento no bloco é 17,24 MPa, determine (*a*) a intensidade de **P**, (*b*) a orientação da superfície na qual ocorre a tensão de cisalhamento máxima, (*c*) a tensão normal que atua na superfície e (*d*) o valor máximo da tensão normal no bloco.

1.34 Uma carga **P** de 1 070 kN é aplicada ao bloco de granito mostrado na figura. Determine o valor máximo resultante da (*a*) tensão normal e (*b*) tensão de cisalhamento. Especifique a orientação do plano no qual ocorre cada um desses valores máximos.

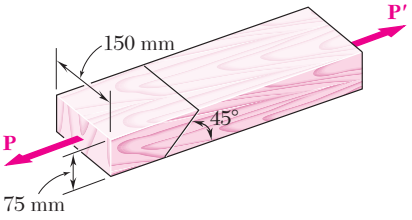


Fig. P1.31 e P1.32

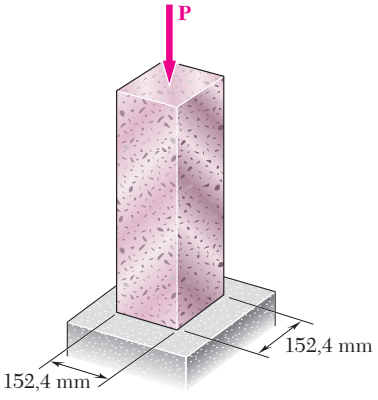


Fig. P1.33 e *P1.34*

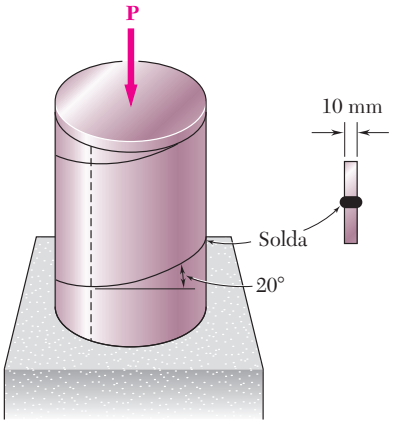


Fig. P1.35 e P1.36

1.35 Um tubo de aço com 400 mm de diâmetro externo é fabricado a partir de uma chapa de aço com espessura de 10 mm soldada ao longo de uma hélice que forma um ângulo de 20° com um plano perpendicular ao eixo do tubo. Sabendo que as tensões normal e de cisalhamento máximas admissíveis nas direções, respectivamente, normal e tangencial à solda são $\sigma = 60$ MPa e $\tau = 36$ MPa, determine a intensidade **P** da maior força axial que pode ser aplicada ao tubo.

1.36 Um tubo de aço com 400 mm de diâmetro externo é fabricado a partir de uma chapa de aço com espessura de 10 mm soldada ao longo de uma hélice que forma um ângulo de 20º com um plano perpendicular ao eixo do tubo. Sabendo que é aplicada ao tubo uma força **P** axial de 300 kN, determine as tensões normal e de cisalhamento nas direções, respectivamente, normal e tangencial à solda.

1.37 Um aro em forma de losango de aço *ABCD* com comprimento de 1,2 m e com 10 mm de diâmetro é colocado para envolver uma barra de alumínio *AC* com 24 mm de diâmetro, conforme mostra a figura. São utilizados os cabos *BE* e *DF*, cada um com 12 mm de diâmetro, para aplicar a carga **Q**. Sabendo que o limite de resistência do aço utilizado para o aro e os cabos é 480 MPa e que o limite de resistência do alumínio utilizado na barra é 260 MPa, determine a máxima carga **Q** que pode ser aplicada quando se adota um coeficiente de segurança 3 para todos os elementos.

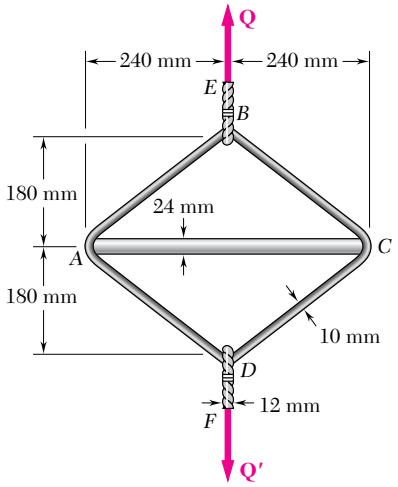


Fig. P1.37

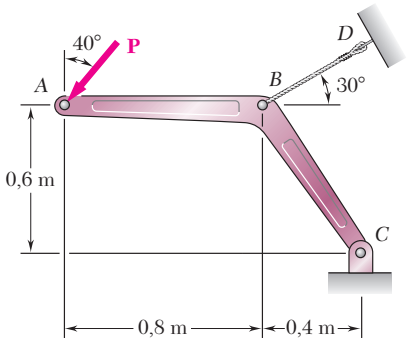


Fig. P1.38 e *P1.39*

1.38 O elemento *ABC*, suportado por um pino em *C* e por um cabo *BD*, foi projetado para suportar uma carga **P** de 16 kN conforme mostrado. Sabendo que a carga limite para o cabo *BD* é de 100 kN, determine o coeficiente de segurança com relação à falha do cabo.

1.39 Sabendo que a carga limite no cabo *BD* é de 100 kN e que o coeficiente de segurança exigido para a falha do cabo é de 3,2, determine a intensidade do maior esforço **P** que pode ser aplicado com segurança conforme o indicado para o elemento *ABC*.

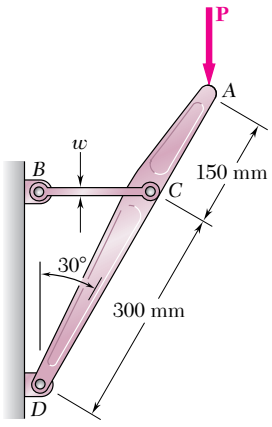


Fig. P1.40 e P1.41

1.40 O vínculo horizontal *BC* tem 6,4 mm de espessura, uma largura $w = 31{,}8$ mm e é feito de um aço que tem um limite de resistência à tração de 450 MPa. Qual é o coeficiente de segurança, se a estrutura mostrada for projetada para suportar uma carga $P = 45$ kN?

1.41 O vínculo horizontal *BC* tem 6,4 mm de espessura e é feito de um aço com um limite de resistência à tração de 450 MPa. Qual deverá ser a largura *w* do vínculo, se a estrutura mostrada for projetada para suportar uma carga $P = 36$ kN com um coeficiente de segurança igual a 3?

1.42 O vínculo *AB* deve ser feito de um aço para o qual o limite da tensão normal é 450 MPa. Determine a área da seção transversal para *AB* para a qual o coeficiente de segurança seja 3,50. Suponha que o vínculo seja reforçado adequadamente ao redor dos pinos em *A* e *B*.

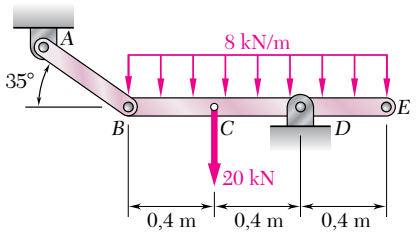


Fig. *P1.42*

1.43 Os dois elementos de madeira mostrados suportam uma carga de 16 kN e são unidos por juntas de madeira contraplacadas perfeitamente coladas pela superfície de contato. A tensão de cisalhamento limite da cola é de 2,5 MPa e o espaçamento entre os elementos é de 6 mm. Determine o comprimento *L* necessário para que as juntas trabalhem com um coeficiente de segurança igual a 2,75.

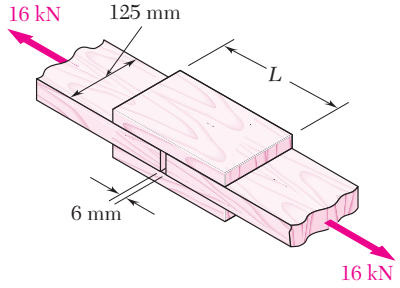


Fig. P1.43

1.44 Para a conexão e o carregamento do Problema 1.43, determine o coeficiente de segurança, sabendo que o comprimento de cada junta é $L = 180$ mm.

1.45 Três parafusos de aço com 18 mm de diâmetro devem ser utilizados para fixar a chapa de aço mostrada na figura em uma viga de madeira. Sabendo que a chapa suportará uma carga de 110 kN e que o limite da tensão de cisalhamento do aço utilizado é 360 MPa, determine o coeficiente de segurança para esse projeto.

1.46 Três parafusos de aço devem ser utilizados para fixar a chapa de aço mostrada na figura em uma viga de madeira. Sabendo que a chapa suportará uma carga de 110 kN, que o limite da tensão de cisalhamento do aço utilizado é 360 MPa e que é desejado um coeficiente de segurança 3,35, determine o diâmetro necessário para os parafusos.

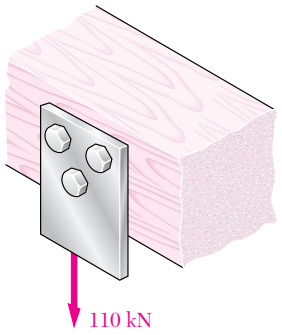


Fig. *P1.45* e *P1.46*

1.47 Uma carga **P** é aplicada em um pino de aço que foi inserido em um elemento de madeira curto preso em um teto, como mostra a figura. O limite de resistência à tração da madeira utilizada é 82,7 MPa e 10,3 MPa em cisalhamento, ao passo que o limite de resistência do aço é 207 MPa em cisalhamento. Sabendo que o diâmetro do pino é $d = 16$ mm e que a intensidade da carga é $P = 22{,}2$ kN, determine (*a*) o coeficiente de segurança para o pino e (*b*) os valores necessários de *b* e *c*, se o valor do coeficiente de segurança do elemento de madeira for o mesmo que o encontrado na parte *a* para o pino.

1.48 Para o suporte do Problema 1.47, sabendo que $b = 40{,}6$ mm, $c = 55{,}9$ mm e $d = 12{,}7$ mm, determine a carga **P** para um coeficiente de segurança global desejado igual a 3,2.

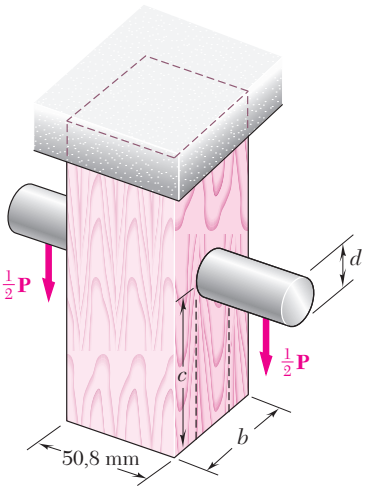


Fig. P1.47

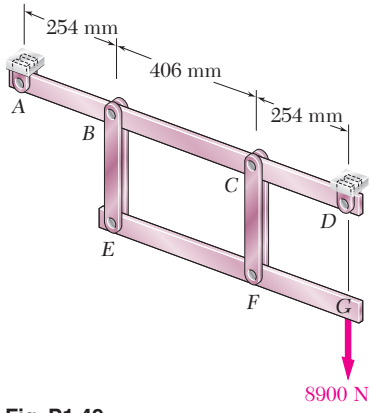


Fig. P1.49

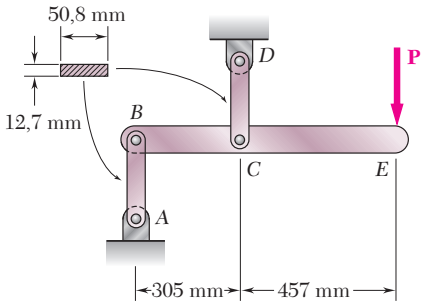


Fig. P1.51

1.49 Os dois vínculos verticais *CF* que conectam os dois elementos horizontais *AD* e *EG* têm uma seção transversal retangular uniforme de 6,35 × 25,4 mm e são feitos com um aço que tem limite de resistência em tração de 413,7 MPa, enquanto os dois pinos em *C* e *F* têm um diâmetro de 12,7 mm e são feitos de aço com um limite de resistência em cisalhamento de 172,4 MPa. Determine o coeficiente global de segurança para os vínculos *CF* e os pinos que os conectam aos elementos horizontais.

1.50 Resolva o Problema 1.49 assumindo que os pinos em *C* e *F* tenham sido substituídos por pinos com 19,05 mm de diâmetro.

1.51 Cada um dos elementos *AB* e *CD* está conectado a um suporte e ao elemento *BCE* por pinos de aço com 25,4 mm de diâmetro em cisalhamento simples. Sabendo que o limite de tensão de cisalhamento é de 207 MPa para o aço utilizado nos pinos e que o limite de tensão normal é de 483 MPa para o aço utilizado nos elementos, determine a carga **P** admissível se deseja um coeficiente de segurança global igual a 3,0. (Observe que os elementos não são reforçados no contorno dos orifícios dos pinos.)

1.52 Um projeto alternativo está sendo considerado para a estrutura *BCE* do Problema 1.51, no qual o elemento *CD* será substituído por dois elementos, cada um com seção transversal de 6,35 × 50,8 mm, levando os dois pinos em *C* e *D* estarem solicitados a duplo cisalhamento. Supondo que todas as demais especificações permanecem inalteradas, determine a carga **P** admissível se for adotado um coeficiente global de segurança 3,0.

1.53 Na estrutura de aço mostrada na figura é utilizado um pino de 6 mm de diâmetro em *C* e são utilizados pinos de 10 mm de diâmetro em *B* e *D*. O limite da tensão de cisalhamento é 150 MPa em todas as conexões, e o limite da tensão normal é 400 MPa na barra *BD*. Sabendo que se deseja um coeficiente de segurança de 3,0, determine a maior carga **P** que pode ser aplicada em *A*. Note que a barra *BD* não é reforçada ao redor dos furos dos pinos.

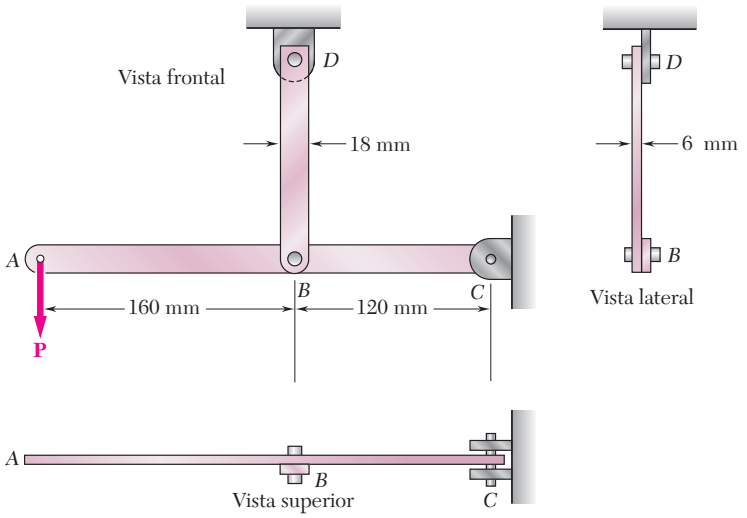


Fig. P1.53

1.54 Resolva o Problema 1.53 supondo que a estrutura foi reprojetada para utilizar pinos com diâmetro de 12 mm em *B* e *D* e nenhuma outra alteração foi feita.

1.55 Na estrutura mostrada, é utilizado um pino de 8 mm de diâmetro em *A* e pinos de 12 mm de diâmetro em *B* e *D*. Sabendo que o limite da tensão de cisalhamento é 100 MPa em todas as conexões e que o limite da tensão normal é 250 MPa em cada um dos dois vínculos que conectam *B* e *D*, determine a carga **P** admissível se adotarmos um coeficiente global de segurança de 3,0.

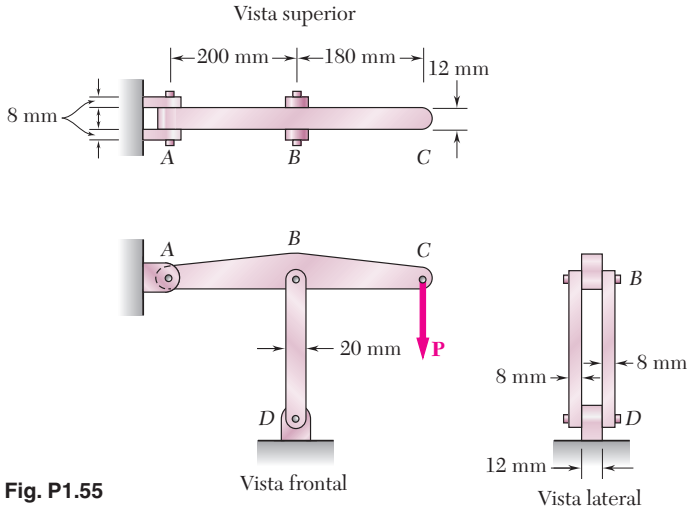


Fig. P1.55

1.56 Em um projeto alternativo para a estrutura do Problema 1.55, deve ser utilizado um pino de 10 mm de diâmetro em A. Supondo que todas as outras especificações permaneçam inalteradas, determine a carga **P** admissível se adotarmos um coeficiente global de segurança de 3,0.

***1.57** Uma plataforma de 40 kg está presa à extremidade *B* de uma barra *AB* de madeira, de 50 kg, suportada, conforme mostra a figura, por um pino em *A* e por uma barra esbelta de aço *BC* com um limite de carga de 12 kN. (*a*) Utilizando o método do Coeficiente de Projeto para Carga e Resistência, com um coeficiente de resistência $\phi = 0{,}90$ e coeficientes de carga $\gamma_P = 1{,}25$ e $\gamma_E = 1{,}6$, determine a maior carga que pode ser colocada com segurança na plataforma. (*b*) Qual é o coeficiente de segurança convencional correspondente para a barra *BC*?

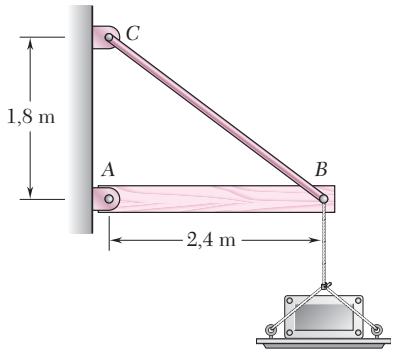


Fig. P1.57

***1.58** Deve ser utilizado o método do Coeficiente de Projeto para Carga e Resistência para selecionar os dois cabos a serem utilizados para subir e descer uma plataforma com dois operários lavadores de janelas. A plataforma pesa 710 N e supõe-se que cada um dos lavadores pesa 870 N incluindo seus equipamentos. Como os operários podem andar livremente na plataforma, 75% do peso total deles e de seus equipamentos será utilizado como carga externa de projeto para cada cabo. (*a*) Supondo um coeficiente de resistência $\phi = 0{,}85$ e coeficientes de carga $\gamma_P = 1{,}2$ e $\gamma_E = 1{,}5$, determine o limite mínimo de carga necessário de um cabo. (*b*) Qual é o coeficiente de segurança convencional para os cabos selecionados?

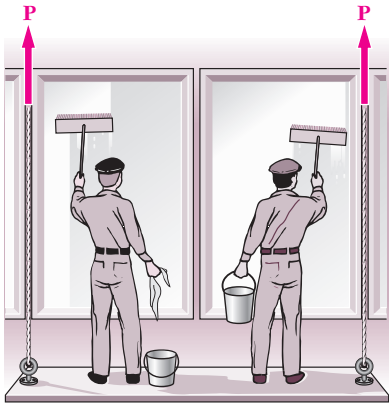


Fig. P1.58

REVISÃO E RESUMO DO CAPÍTULO 1

Esse capítulo foi dedicado ao conceito de tensão e à introdução aos métodos utilizados para a análise e o projeto de máquinas e estruturas.

A Seção 1.2 apresentou uma rápida revisão dos métodos da estática e sua aplicação na determinação das reações de apoio em estruturas simples formadas por membros conectados por pinos. Demos ênfase ao uso do *diagrama de corpo livre* para obter equações de equilíbrio cuja resolução permite obter as reações de apoio desconhecidas. Foram utilizados diagramas de corpo livre também para determinar as forças internas nos vários componentes da estrutura.

Carga axial. Tensão normal

O conceito de *tensão* foi introduzido inicialmente na Seção 1.3 em que considerou-se uma barra sob *carga axial*. A *tensão normal na seção transversal dessa* barra foi obtida dividindo-se a intensidade P da carga pela área A de sua seção transversal (Fig. 1.8a). Assim, temos

$$\sigma = \frac{P}{A} \tag{1.5}$$

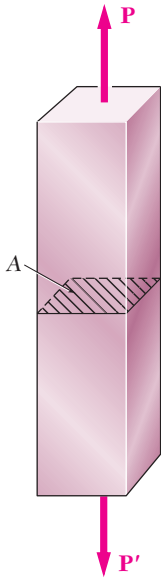


Fig. 1.18*a*

A Seção 1.4 foi dedicada a uma breve discussão das duas principais tarefas de um engenheiro, que são a *análise* e o *projeto* de estruturas e máquinas.

Conforme notamos na Seção 1.5, o valor de σ obtido da Equação (1.5) representa a *tensão média* sobre a seção e não a tensão em um ponto Q específico da seção. Considerando uma pequena área ΔA ao redor de Q e a intensidade ΔF da força exercida sobre ΔA, definimos a tensão no ponto Q como

$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \tag{1.6}$$

Em geral, o valor obtido para a tensão σ no ponto Q é diferente do valor da tensão média dado pela Fórmula (1.5) e sabe-se que ele varia ao longo da seção. No entanto, essa variação é pequena em qualquer seção distante dos pontos de aplicação das cargas. Na prática, portanto, a distribuição da tensão normal em uma barra com carga axial supõe-se *uniforme*, exceto nas vizinhanças imediatas dos pontos de aplicação das cargas.

Contudo, para que a distribuição das tensões seja uniforme em uma dada seção, é necessário que a linha de ação das cargas **P** e **P′** passem através do *centroide C* da seção. Uma carga desse tipo é chamada de carga axial *centrada*. No caso de uma carga axial *excêntrica*, a distribuição de tensões não é uniforme. As tensões em elementos submetidos a uma carga axial excêntrica serão discutidas no Capítulo 4.

Quando *forças transversais* **P** e **P′** iguais e opostas de intensidade P são aplicadas a uma barra AB (Fig. 1.16a), são criadas *tensões de cisalhamento* τ sobre qualquer seção localizada entre os pontos de aplicação das duas forças (Seção 1.6). Essas tensões variam bastante através da seção e sua distribuição *não pode* ser considerada uniforme. No entanto, dividindo a intensidade P (chamada de força *cortante* na seção) pela área da seção transversal A, definimos a *tensão de cisalhamento média* sobre a seção.

$$\tau_{\text{méd}} = \frac{P}{A} \tag{1.8}$$

Tensões de cisalhamento são encontradas em parafusos, pinos ou rebites que conectam dois elementos estruturais ou em componentes de máquinas. Por exemplo, no caso do parafuso CD (Fig. 1.18), que está sob *corte simples*, temos

$$\tau_{\text{méd}} = \frac{P}{A} = \frac{F}{A} \tag{1.9}$$

ao passo que, no caso dos parafusos EG e HJ (Fig. 1.20), que estão ambos sob *corte duplo*, tínhamos

$$\tau_{\text{méd}} = \frac{P}{A} = \frac{F/2}{A} = \frac{F}{2A} \tag{1.10}$$

Parafusos, pinos e rebites também criam tensões localizadas ao longo das superfícies de contato nos elementos conectados (Seção 1.7). O parafuso CD da Fig. 1.18, por exemplo, cria tensões na superfície semicilíndrica da chapa A com a qual ele está em contato (Fig. 1.22). Como a distribuição dessas tensões é bastante complicada, utilizamos na prática um valor nominal médio σ_e da tensão, chamado de *tensão de esmagamento*, obtida dividindo-se a carga P pela área do retângulo que representa a projeção do parafuso na seção da chapa. Designando por t a espessura da chapa e por d o diâmetro do parafuso, temos

$$\sigma_e = \frac{P}{A} = \frac{P}{td} \tag{1.11}$$

Na Seção 1.8, aplicamos o conceito introduzido nas seções anteriores para analisar uma estrutura simples formada por dois elementos conectados por pinos e suportando uma carga dada. Determinamos sucessivamente as tensões normais nos dois elementos, prestando especial atenção às suas seções mais estreitas, às tensões de cisalhamento nos vários pinos e à tensão de esmagamento em cada conexão.

O método que você vai utilizar na solução de um problema em mecânica dos materiais foi descrito na Seção 1.9. A sua solução deverá começar com um *enunciado* claro e preciso do problema. Você desenhará então um ou vários *diagramas de corpo livre* que utilizará para escrever *equações de equilíbrio*. Essas equações serão resolvidas em função das *forças desconhecidas*, a partir das quais podem ser computadas as *tensões* e as *deformações* necessárias. Uma vez obtida a resposta, esta deverá ser *cuidadosamente verificada*.

Forças transversais. Tensão de cisalhamento

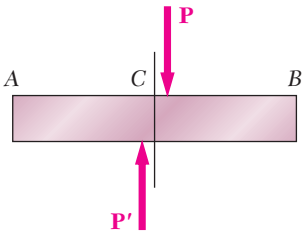


Fig. 1.16*a*

Corte simples e duplo

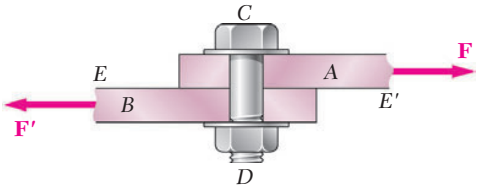


Fig. 1.18

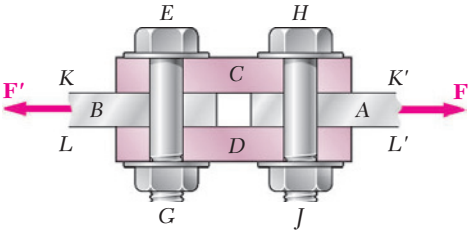


Fig. 1.20

Tensão de esmagamento

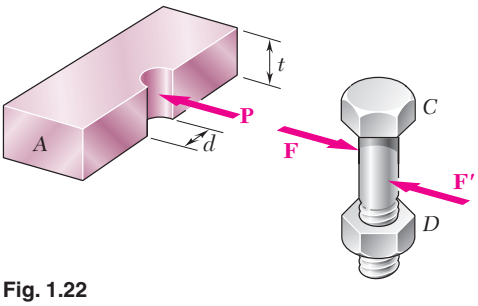
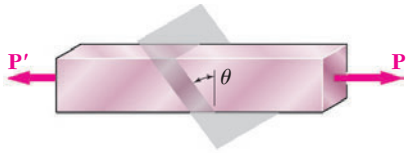


Fig. 1.22

Método de solução

A primeira parte do capítulo terminou com uma discussão sobre a *precisão numérica* em engenharia, salientando o fato de que a precisão de uma resposta nunca pode ser maior que a de um determinado dado (Seção 1.10).

Tensões em um corte oblíquo



(*a*)

Fig. 1.30*a*

Na Seção 1.11, consideramos as tensões criadas em um *corte oblíquo* em uma barra sob carga axial. Descobrimos que ocorriam *tensões normais* e *de cisalhamento* nessa situação. Designando por θ o ângulo formado pelo plano de corte com um plano normal (Fig. 1.30*a*) e por A_0 a área de uma seção perpendicular ao eixo do componente, determinamos as expressões a seguir para a tensão normal σ e a tensão de cisalhamento τ no corte oblíquo:

$$\sigma = \frac{P}{A_0}\cos^2\theta \qquad \tau = \frac{P}{A_0}\operatorname{sen}\theta\cos\theta \tag{1.14}$$

Observamos a partir dessas fórmulas que a tensão normal é máxima e igual a $\sigma_m = P/A_0$ para $\theta = 0$, enquanto a tensão de cisalhamento é máxima e igual a $\tau_m = P/2A_0$ para $\theta = 45°$. Notamos também que $\tau = 0$ quando $\theta = 0$, enquanto $\sigma = P/2A_0$ quando $\theta = 45°$.

Tensão sob carregamento geral

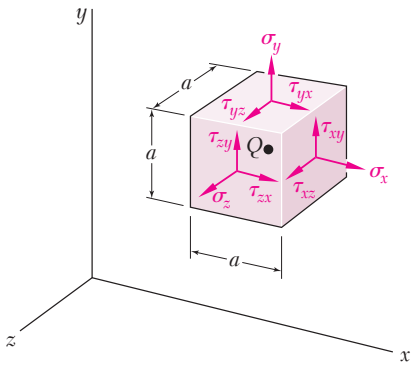


Fig. 1.36

Em seguida, discutimos o estado de tensão no ponto Q em um corpo sob as condições de carregamento mais gerais (Seção 1.12). Considerando um pequeno cubo centrado em Q (Fig. 1.36), designamos por σ_x a tensão normal aplicada a uma face do cubo perpendicular ao eixo x, e por τ_{xy} e τ_{xz}, respectivamente, as componentes y e z da tensão de cisalhamento aplicada na mesma face do cubo. Repetindo esse procedimento para as outras duas faces do cubo e observando que $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ e $\tau_{zx} = \tau_{xz}$, concluímos que são necessários *seis componentes de tensão* para definir o estado de tensão em um determinado ponto Q, a saber, σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx}.

A Seção 1.13 foi dedicada a uma discussão dos vários conceitos utilizados no projeto de estruturas em engenharia. A *carga-limite* de um componente estrutural ou componente de máquina é a carga com a qual se espera que o elemento ou componente venha a falhar: ela é calculada com base no valor do *limite de tensão* ou *limite de resistência* do material utilizado, conforme determinado por um teste de laboratório feito em corpo de prova daquele material. O limite de carga deverá ser consideravelemente maior que a *carga admissível*, isto é, a carga que o elemento ou componente poderá suportar sob condições normais. A relação entre a carga-limite e a carga admissível é definida como *coeficiente de segurança*:

Coeficiente de segurança

$$\text{Coeficiente de segurança} = C.S. = \frac{\text{carga-limite}}{\text{carga admissível}} \tag{1.24}$$

A determinação do coeficiente de segurança que deverá ser utilizado no projeto de uma determinada estrutura depende de muitas considerações, algumas das quais foram arroladas nessa seção.

Coeficiente de Projeto para Carga e Resistência

A Seção 1.13 terminou com a discussão de uma abordagem alternativa ao projeto, conhecida como *Coeficiente de Projeto para Carga e Resistência*, que permite ao engenheiro distinguir entre as incertezas associadas à estrutura e aquelas associadas à carga.

PROBLEMAS DE REVISÃO

1.59 A haste *BD* consiste em uma barra simples com largura de 25,4 mm e espessura de 12,7 mm. Sabendo que cada pino tem diâmetro de 9,525 mm determine o valor da tensão normal média máxima na haste *BD* se (*a*) $\theta = 0$ e (*b*) $\theta = 90°$.

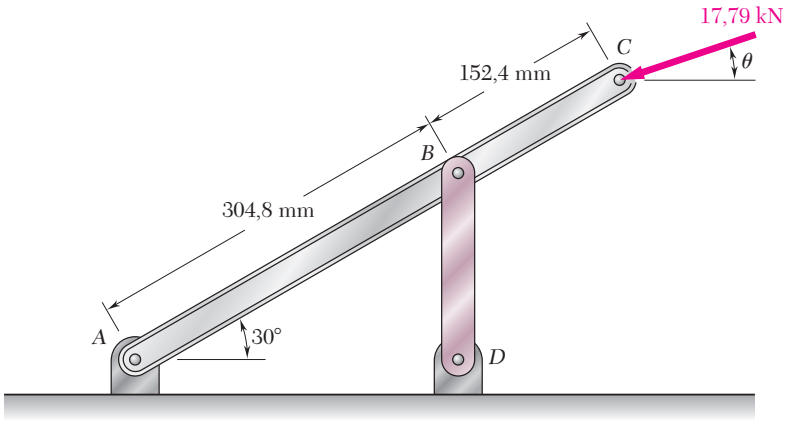


Fig. P1.59

1.60 Duas forças horizontais de 22,24 kN são aplicadas ao pino *B* do conjunto mostrado na figura. Sabendo que é utilizado um pino de 20,32 mm de diâmetro em cada conexão, determine o valor máximo da tensão normal média (*a*) na haste *AB* e (*b*) na haste *BC*.

1.61 Para a montagem e carregamento do Problema 1.60, determine (*a*) a tensão de cisalhamento média no pino *C*, (*b*) a tensão de esmagamento média em *C* no componente *BC* e (*c*) a tensão de esmagamento média em *B* no componente *BC*.

1.62 Duas pranchas de madeira, cada uma com 22 mm de espessura e 160 mm de largura, são unidas por uma junta de encaixe colada, mostrada na figura. Sabendo que a junta falhará quando a tensão de cisalhamento média na cola atingir 820 kPa, determine o menor comprimento *d* admissível do encaixe uma vez que a junta precisa suportar uma carga axial de intensidade $P = 7{,}6$ kN.

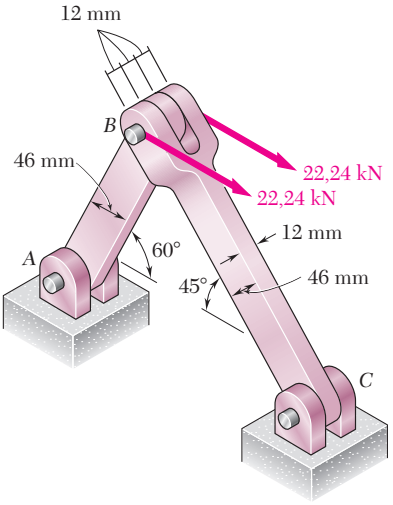


Fig. P1.60

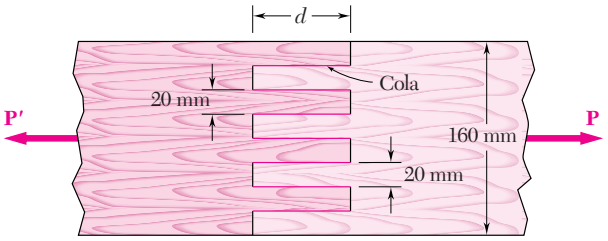


Fig. *P1.62*

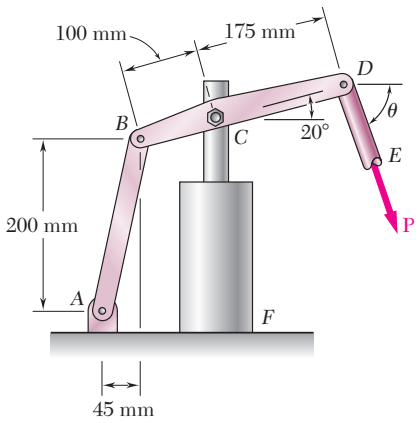


Fig. P1.63 e *P1.64*

1.63 O cilindro hidráulico *CF*, que controla parcialmente a posição da haste *DE*, foi bloqueado na posição mostrada na figura. A barra *BD* tem 15 mm de espessura e está conectada à haste vertical por um parafuso com diâmetro de 9 mm. Sabendo que $P = 2$ kN e $\theta = 75°$, determine (*a*) a tensão de cisalhamento média no parafuso e (*b*) a tensão de esmagamento em *C* na barra *BD*.

1.64 O cilindro hidráulico *CF*, que controla parcialmente a posição da haste *DE*, foi bloqueado na posição mostrada na figura. A barra *AB* tem seção retangular uniforme de 12 × 25 mm e é conectada ao ponto *B* do membro *BD* por meio de um pino de 8 mm de diâmetro. Sabendo que a tensão de cisalhamento média admissível no pino é de 140 MPa, determine (*a*) a maior força **P** que pode ser aplicada no ponto *E* quando $\theta = 60°$, (*b*) a correspondente tensão de contato em *B* na haste *AB* e (*c*) o correspondente valor da tensão normal máxima na haste *AB*.

1.65 Dois elementos de madeira de 70 × 110 mm de seção transversal retangular uniforme são unidos por uma junta colada, como mostra a figura. Sabendo que a tensão de cisalhamento admissível na junta colada é de 500 kPa, determine a maior carga axial **P** possível de ser aplicada com segurança.

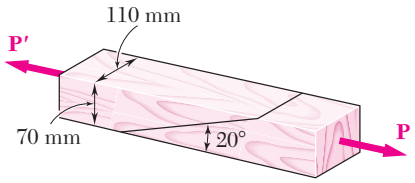


Fig. P1.65

1.66 A carga de 8 900 N pode ser movida ao longo da barra *BD* para qualquer posição entre os limites *E* e *F*. Sabendo que $\sigma_{adm} = 42$ MPa para o aço utilizado nas barras *AB* e *CD*, determine onde os limites devem ser colocados se o movimento permitido para a carga deve ser o maior possível.

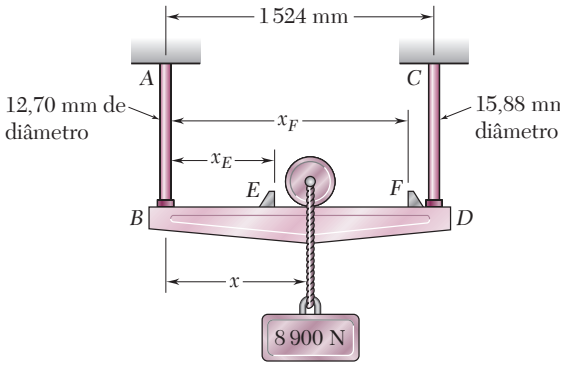


Fig. *P1.66*

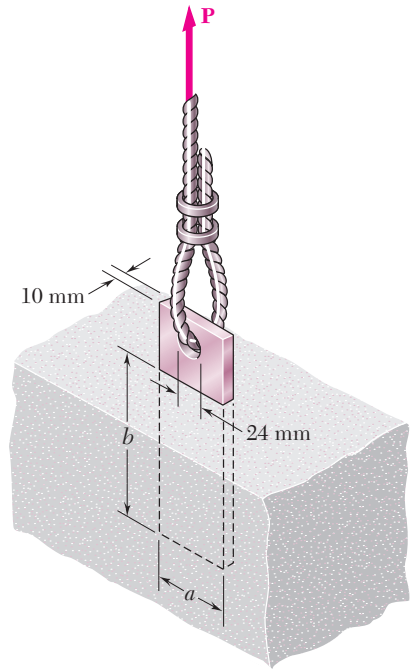


Fig. P1.67

1.67 Uma chapa de 10 mm de espessura está encaixada em um bloco de concreto e é utilizada para ancorar um cabo vertical de alta resistência, conforme mostra a figura. O diâmetro do furo na chapa é de 24 mm, o limite de resistência do aço utilizado é 250 MPa e o limite da tensão de aderência entre a chapa e o concreto é 2,1 MPa. Sabendo que se deseja um coeficiente de segurança de 3,60 quando $P = 18$ kN, determine (*a*) a largura *a* necessária para a chapa e (*b*) a dimensão *b* mínima com que a placa deve ser encaixada no bloco de concreto. (Despreze a tensão normal entre o concreto e a extremidade inferior da placa.)

1.68 As duas partes do elemento *AB* são coladas ao longo de um plano formando um ângulo θ com a horizontal. Sabendo que o limite de tensão para a junta colada é de 17,2 MPa em tração e de 9 MPa em cisalhamento, determine o intervalo de valores de θ para o qual o coeficiente de segurança dos elementos seja pelo menos 3,0.

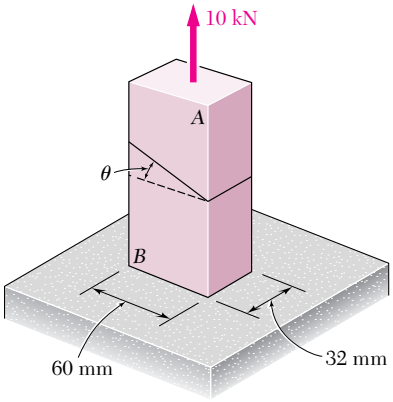


Fig. P1.68 e *P1.69*

1.69 As duas partes do elemento *AB* são coladas ao longo de um plano formando um ângulo θ com a horizontal. Sabendo que o limite de tensão para a junta colada é 17,24 MPa em tração e 8,96 MPa em cisalhamento, determine (*a*) o valor de θ para o qual o coeficiente de segurança do elemento seja máximo e (*b*) o valor correspondente do coeficiente de segurança. (*Dica*: equacione as expressões obtidas para os coeficientes de segurança respeitando a tensão normal e de cisalhamento.)

1.70 Uma força **P** é aplicada a uma barra de aço encaixada dentro de um bloco de concreto, conforme mostra a figura. Determine o menor comprimento *L* para o qual pode ser desenvolvida a tensão normal admissível na barra. Expresse o resultado em termos do diâmetro *d* da barra, da tensão normal admissível σ_{adm} no aço e da tensão média de aderência τ_{adm} entre o concreto e a superfície cilíndrica da barra. (Despreze as tensões normais entre o concreto e a extremidade da barra.)

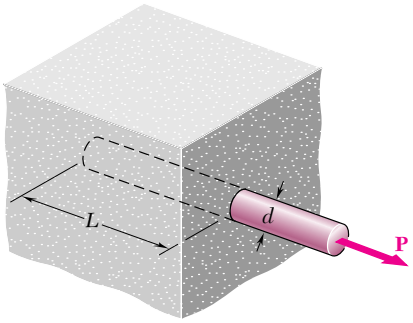


Fig. P1.70

PROBLEMAS PARA COMPUTADOR

Os problemas a seguir devem ser resolvidos no computador.

1.C1 Uma barra sólida de aço consistindo de *n* elementos cilíndricos soldados entre si é submetida ao carregamento indicado na figura. O diâmetro do elemento *i* é indicado por d_i e a carga aplicada em sua extremidade inferior por $\mathbf{P}_i$, sendo a intensidade de P_i dessa carga considerada positiva se $\mathbf{P}_i$ estiver direcionada para baixo como mostra a figura e negativa em caso contrário. (*a*) Elabore um programa de computador que possa ser utilizado para determinar a tensão média em cada elemento da barra. (*b*) Utilize esse programa para resolver os Problemas 1.2 e 1.4.

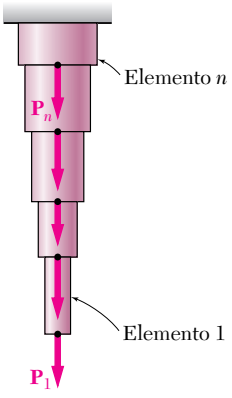


Fig. P1.C1

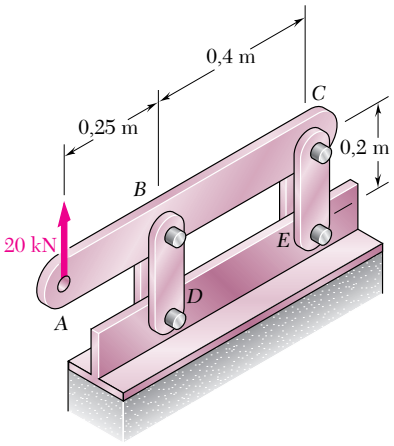


Fig. P1.C2

1.C2 Uma carga de 20 kN é aplicada ao elemento horizontal *ABC,* conforme mostra a figura. O elemento *ABC* tem uma seção transversal retangular uniforme de 10 × 50 mm e é suportado por quatro vínculos verticais, cada um com seção transversal retangular uniforme de 8 × 36 mm. Cada um dos quatro pinos em *B*, *C*, *D* e *E* tem o mesmo diâmetro *d* e está em corte duplo. (*a*) Elabore um programa de computador para calcular para valores de *d* de 10 mm a 30 mm, utilizando incrementos de 1 mm, (1) o valor máximo da tensão normal média nos vínculos que conectam os pinos *B* e *D*, (2) a tensão normal média nos vínculos que conectam os pinos *C* e *E*, (3) a tensão de cisalhamento média no pino *B*, (4) a tensão de cisalhamento média no pino *C*, (5) a tensão de esmagamento média em *B* no elemento *ABC* e (6) a tensão de esmagamento média em *C* no elemento *ABC*. (b) Verifique o seu programa comparando os valores obtidos para $d = 16$ mm com as respostas dadas para os Problemas 1.7 e 1.27. (*c*) Utilize esse programa para determinar os valores admissíveis para o diâmetro *d* dos pinos, sabendo que os valores admissíveis para as tensões normal, de cisalhamento e de esmagamento para o aço utilizado são, respectivamente, 150 MPa, 90 MPa e 230 MPa. (*d*) Resolva a parte *c* considerando que a espessura do elemento *ABC* foi reduzida de 10 mm para 8 mm.

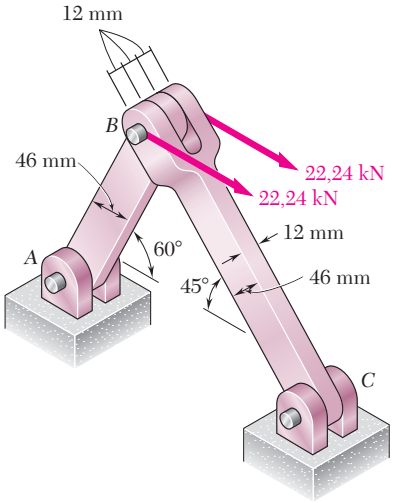


Fig. P1.C3

1.C3 Duas forças horizontais de 22,242 kN são aplicadas ao pino *B* do conjunto mostrado na figura. Cada um dos três pinos *A*, *B* e *C* tem o mesmo diâmetro *d* e está em corte duplo. (*a*) Elabore um programa de computador para calcular para valores de *d* de 12,7 mm a 38,1 mm, utilizando incrementos de 1,27 mm, (1) o valor máximo da tensão normal média no elemento *AB*, (2) a tensão normal média no elemento *BC*, (3) a tensão de cisalhamento média no pino *A*, (4) a tensão de cisalhamento média no pino *C*, (5) a tensão de esmagamento média em *A* no elemento *AB*, (6) a tensão de esmagamento média em *C* no elemento *BC* e (7) a tensão de esmagamento média em *B* no elemento *BC*. (*b*) Verifique o seu programa comparando os valores obtidos para $d = 20{,}32$ mm com as respostas dadas para os Problemas ver resposta 1.60 e 1.61. (*c*) Utilize esse programa para encontrar os valores admissíveis para o diâmetro *d* dos pinos, sabendo que os valores admissíveis das tensões normal, de cisalhamento e de esmagamento para o aço utilizado são, respectivamente, 150 MPa, 90 MPa e 250 MPa. (*d*) Resolva a parte *c* supondo que um novo projeto esteja sendo investigado, no qual a espessura e largura dos dois elementos são alteradas, respectivamente, de 12 mm para 8 mm e de 45 mm para 60 mm.

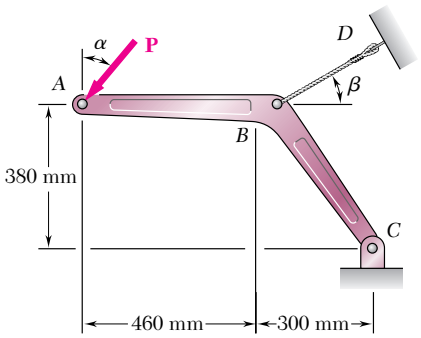


Fig. P1.C4

1.C4 Uma força **P** de 18 kN formando um ângulo α com a vertical é aplicada no elemento *ABC*, conforme mostra a figura. O elemento *ABC* é suportado por um pino e um suporte em *C* e por um cabo *BD* formando um ângulo β com a horizontal. (*a*) Sabendo que a carga-limite do cabo é 110 kN, elabore um programa de computador para fazer uma tabela dos valores do coeficiente de segurança do cabo para valores de α e β de 0 até 45°, utilizando incrementos em α e β correspondentes a incrementos de 0,1 na tan α e na tan β. (*b*) Verifique que, para um determinado valor de α, o valor máximo do coeficiente de segurança é obtido para $\beta = 38{,}66°$ e explique por quê. (c) Determine o menor valor possível do coeficiente de segurança para $\beta = 38{,}66°$, bem como o correspondente valor de α, e explique o resultado obtido.

1.C5 Uma carga **P** é suportada, conforme mostra a figura, por dois elementos de madeira de seção transversal retangular uniforme e unidos por uma junta colada. (*a*) Designando por σ_L e τ_L, respectivamente, o limite de resistência da junta em tração e em cisalhamento, elabore um programa de computador que, para valores de *a*, *b*, *P*, σ_L e τ_L e para valores de α de 5° a 85° em intervalos de 5°, possa ser utilizado para calcular (1) a tensão normal na junta, (2) a tensão de cisalhamento na junta, (3) o coeficiente de segurança relativo à falha em tração, (4) o coeficiente de segurança relativo a falha em cisalhamento e (5) o coeficiente de segurança global para a junta colada. (*b*) Aplique esse programa utilizando as dimensões e carregamentos dos elementos dos Problemas 1.29 e 1.31, sabendo que $\sigma_L = 1{,}034$ MPa e $\tau_L = 1{,}476$ MPa para a cola utilizada no Problema 1.29 e que $\sigma_L = 1{,}26$ MPa e $\tau_L = 1{,}50$ MPa para a cola utilizada no Problema 1.31. (*c*) Verifique que em cada um dos dois casos a tensão de cisalhamento é máxima para $\alpha = 45°$.

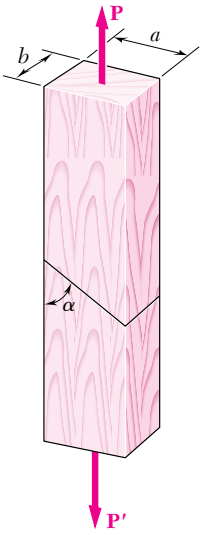


Fig. P1.C5

1.C6 O elemento *ABC* é suportado por um pino e suporte em *A* e por duas barras, conectadas por pinos ao elemento em *B* e a um suporte fixo em *D*. (*a*) Elabore um programa de computador para calcular a carga P_{adm} para quaisquer valores dados de (1) o diâmetro d_1 do pino em *A*, (2) o diâmetro comum d_2 dos pinos em *B* e *D*, (3) o limite da tensão normal σ_L em cada uma das duas barras, (4) o limite da tensão de cisalhamento τ_L em cada um dos três pinos e (5) o coeficiente de segurança global desejado C.S. O seu programa deverá também indicar qual das três tensões é crítica: a tensão normal nas barras, a tensão de cisalhamento no pino em *A* ou a tensão de cisalhamento nos pinos em *B* e *D*. (*b* e *c*) Verifique o seu programa utilizando os dados dos Problemas 1.55 e 1.56, respectivamente, e compare as respostas obtidas para P_{adm} com aquelas dadas no texto. (*d*) Utilize o seu programa para determinar a carga admissível P_{adm}, bem como quais as tensões que são críticas, quando $d_1 = d_2 = 15$ mm, $\sigma_L = 110$ MPa para as barras de alumínio, $\sigma_L = 100$ MPa para pinos de aço e C.S. = 3,2.

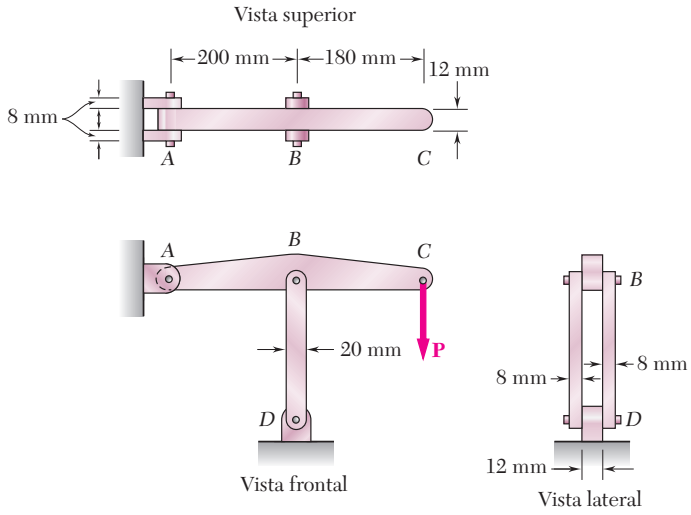


Fig. P1.C6

CAPÍTULO

2

Tensão e deformação — Carregamento axial

Este capítulo é dedicado ao estudo das deformações que ocorrem em componentes estruturais sujeitos a carregamento axial. A alteração no comprimento das amarras foi cuidadosamente considerada no projeto desta ponte suspensa.

2.1. Introdução

No Capítulo 1, analisamos as tensões originadas nos vários componentes e conexões pelas cargas aplicadas em uma estrutura ou máquina. Aprendemos também a projetar componentes e conexões simples para que não falhassem sob condições específicas de carregamento. Um outro aspecto importante da análise e projeto de estruturas relaciona-se com as *deformações* produzidas pelas cargas aplicadas a uma estrutura. É claro que a análise das deformações é importante para se evitar deformações grandes o suficiente que possam impedir a estrutura de atender à finalidade para a qual ela foi destinada, mas essa análise também pode nos ajudar na determinação das tensões. Sem dúvida, nem sempre é possível determinar as forças nos componentes de uma estrutura aplicando-se somente os princípios da estática; isto porque a estática é baseada na hipótese de estruturas rígidas e indeformáveis. Considerando as estruturas de engenharia *deformáveis* e analisando as deformações em seus vários componentes, poderemos calcular as forças *estaticamente indeterminadas*, isto é, indeterminadas dentro do âmbito da estática. Também, conforme indicamos na Seção 1.5, a distribuição de tensões em um componente é estaticamente indeterminada, mesmo quando é conhecida a força nesse componente. Para determinar a distribuição real das tensões dentro de um componente, é então necessário analisar as deformações que ocorrem naquele componente. Neste capítulo, vamos considerar as deformações de um componente estrutural como uma haste, barra, ou placa sob *carregamento axial*.

Primeiro, a *deformação específica normal* ϵ em um componente será definida como a *deformação do componente por unidade de comprimento*. Construindo um gráfico da tensão σ em função da deformação específica ϵ, à medida que aumentarmos a carga aplicada ao componente, obteremos um *diagrama tensão-deformação específica* para o material utilizado. Por meio desse diagrama podemos determinar algumas propriedades importantes do material, como seu *módulo de elasticidade*, e se o material é *dúctil* ou *frágil* (Seções 2.2 a 2.5). Você verá também na Seção 2.5 que, embora o comportamento da maioria dos materiais seja independente da direção na qual a carga é aplicada, a resposta de materiais compósitos reforçados com fibras depende da direção da carga.

Por meio do diagrama tensão-deformação específica, podemos também determinar se as deformações no corpo de prova desaparecerão depois de a carga ser removida (neste caso dizemos que o material tem comportamento *elástico*,) ou se haverá uma *deformação permanente* ou *deformação plástica* (Seção 2.6).

A Seção 2.7 é dedicada ao fenômeno da *fadiga*, que faz com que os componentes de uma estrutura ou máquina venham a falhar após um número muito grande de cargas repetidas, mesmo que as tensões permaneçam na região elástica.

A primeira parte do capítulo finaliza com a Seção 2.8, dedicada à determinação da deformação de vários tipos de componentes sob várias condições de carregamento axial.

Nas Seções 2.9 e 2.10, serão considerados os *problemas estaticamente indeterminados*, isto é, problemas nos quais as reações e as forças internas *não podem* ser determinadas apenas pela estática. As equações de equilíbrio derivadas do diagrama de corpo livre do componente, devem ser complementadas por relações que envolve deformações; essas relações serão obtidas da geometria do problema.

Nas Seções 2.11 a 2.15, serão introduzidas constantes adicionais associadas com materiais isotrópicos — isto é, materiais com características mecâ-

nicas independentes da direção. Elas incluem o *coeficiente de Poisson*, que relaciona deformação lateral e axial, o *módulo de compressibilidade volumétrica*, que caracteriza a variação do volume de um material sob pressão hidrostática, e o *módulo de elasticidade transversal*, que relaciona componentes de tensão de cisalhamento e deformação específica de cisalhamento. Vamos determinar também as relações tensão-deformação específica para um material isotrópico sob um carregamento multiaxial.

Na Seção 2.16, serão desenvolvidas relações tensão-deformação específica que envolve vários valores distintos do módulo de elasticidade, do coeficiente de Poisson e do módulo de elasticidade transversal, para materiais compósitos reforçados com fibras submetidos a carregamento multiaxial. Embora esses materiais sejam não-isotrópicos, geralmente apresentam propriedades especiais, conhecidas como propriedades *ortotrópicas*, que facilitam seu estudo.

No texto deste livro até aqui, as tensões são consideradas uniformemente distribuídas em determinada seção transversal; também supõe-se que elas permaneçam dentro da região elástica. A validade da primeira hipótese é discutida na Seção 2.17, enquanto *concentrações de tensões* próximas a furos circulares e adoçamentos em placas são consideradas na Seção 2.18. As Seções 2.19 e 2.20 dedicam-se à discussão das tensões e deformações em componentes feitos com um material dúctil quando o ponto de escoamento do material é excedido. Veremos, também, que dessas condições de carregamento resultam *deformações plásticas* permanentes e *tensões residuais*.

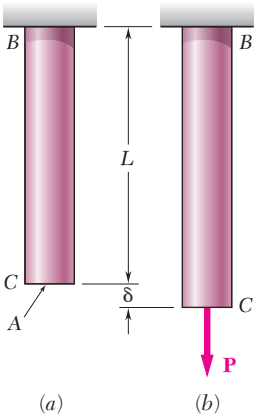


Fig. 2.1

2.2. Deformação específica normal sob carregamento axial

Vamos considerar uma barra *BC*, de comprimento *L* e com seção transversal uniforme de área *A*, que está suspensa em *B* (Fig. 2.1*a*). Se aplicarmos uma força **P** à extremidade *C*, a barra se alonga (Fig. 2.1*b*). Construindo um gráfico com os valores da intensidade *P* da força em função da deformação δ (letra grega delta), obtemos determinado diagrama força-deformação (Fig. 2.2). Embora esse diagrama contenha informações úteis para a análise da barra em consideração, ele não pode ser utilizado diretamente para prever a deformação de uma barra do mesmo material mas com dimensões diferentes. De fato, observamos que, se uma deformação δ é produzida em uma barra *BC* por uma força **P**, é necessária uma força 2**P** para provocar a mesma deformação em uma barra $B'C'$ de mesmo comprimento *L*, mas com uma área de seção

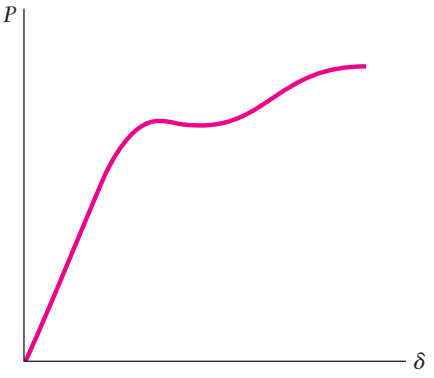


Fig. 2.2

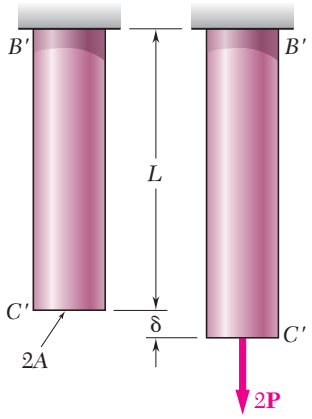


Fig. 2.3

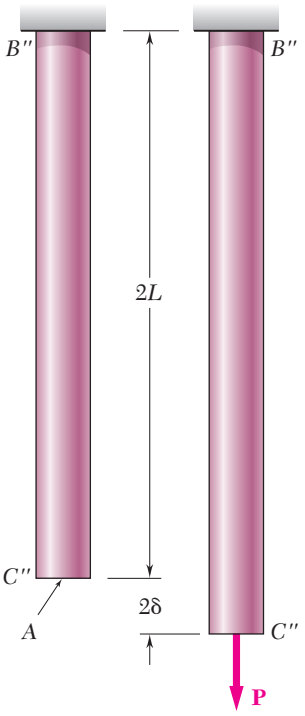


Fig. 2.4

transversal igual a $2A$ (Fig. 2.3). Notamos que, em ambos os casos, o valor da tensão é o mesmo: $\sigma = P/A$. Em contrapartida, uma força **P** aplicada a uma barra $B''C''$, com a mesma seção transversal de área A, mas com comprimento $2L$, provoca uma deformação 2δ naquela barra (Fig. 2.4), isto é, uma deformação duas vezes maior do que a deformação δ que ela produz na barra BC. Mas em ambos os casos, a relação entre a deformação e o comprimento da barra é a mesma; ela é igual a δ/L. Essa observação nos leva a introduzir o conceito de *deformação específica*: definimos *deformação específica normal* em uma barra sob carregamento axial como a *deformação por unidade de comprimento* da barra. Designando a deformação específica normal por ϵ (letra grega epsilon), temos

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} \tag{2.1}$$

Construindo o gráfico da tensão $\sigma = P/A$ em função da deformação específica $\epsilon = \delta/L$, obtemos uma curva característica das propriedades do material que não depende das dimensões do corpo de prova utilizado. Essa curva é chamada de *diagrama tensão-deformação* e será discutida em detalhes na Seção 2.3.

Como a barra BC considerada na discussão anterior tinha uma seção transversal uniforme de área A, poderíamos supor que a tensão normal σ tem um valor constante igual a P/A por toda a barra. Assim, seria apropriado definir a deformação específica ϵ como a relação entre a deformação total δ sobre o comprimento total L da barra. No caso de um elemento com seção transversal de área A variável, a tensão normal $\sigma = P/A$ também varia ao longo do elemento e é necessário definir a deformação específica em determinado ponto Q considerando um pequeno elemento de comprimento não deformado Δx (Fig. 2.5). Designando por $\Delta\delta$ a deformação do elemento sob determinado carregamento, definimos a *deformação específica normal no ponto Q* como

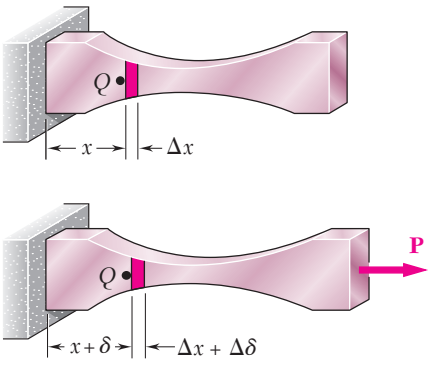


Fig. 2.5

$$\epsilon = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\delta}{\Delta x} = \frac{d\delta}{dx} \tag{2.2}$$

Como a deformação e o comprimento são expressos nas mesmas unidades, a deformação específica normal ϵ obtida dividindo-se δ por L (ou $d\delta$ por dx) é uma *quantidade adimensional*. Assim, obtemos o mesmo valor numérico para a deformação específica normal em determinado componente, independentemente de usarmos o sistema de unidades métrico SI ou o sistema inglês. Considere, por exemplo, uma barra de comprimento $L = 0{,}600$ m com seção transversal uniforme, que sofre uma deformação $\delta = 150 \times 10^{-6}$ m. A deformação específica correspondente é

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{150 \times 10^{-6}\ \text{m}}{0{,}600\ \text{m}} = 250 \times 10^{-6}\ \text{m/m} = 250 \times 10^{-6}$$

Note que a deformação poderia ter sido expressa em micrômetro: $\delta = 150\ \mu$m. Poderíamos, então, ter escrito

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{150\ \mu\text{m}}{0{,}600\ \text{m}} = 250\ \mu\text{m/m} = 250\ \mu$$

e lido a resposta como "250 mícrons". Se usarmos unidades inglesas, o comprimento e a deformação da mesma barra são, respectivamente, $L = 23{,}6$ pol e $\delta = 5{,}91 \times 10^{-3}$ pol. A deformação específica correspondente é

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{5{,}91 \times 10^{-3}\ \text{pol}}{23{,}6\ \text{pol}} = 250 \times 10^{-6}\ \text{pol/pol}$$

que é o mesmo valor que encontramos usando as unidades SI. No entanto, usualmente, quando os comprimentos e deformações são expressos em polegadas ou micropolegadas (μpol), costuma-se manter as unidades originais na expressão obtida para a deformação específica. Em nosso exemplo, a deformação específica seria escrita como $\epsilon = 250 \times 10^{-6}$ pol/pol ou, alternativamente, como $\epsilon = 250\ \mu$pol/pol.

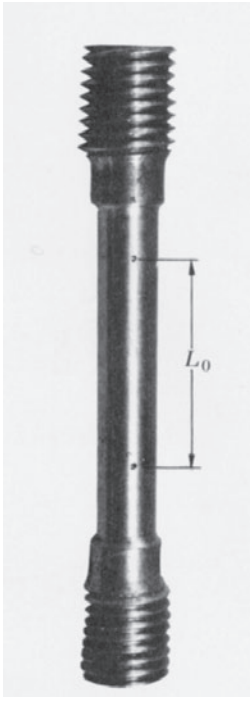


Fig. 2.6 Corpo de prova típico para ensaio de tração.

2.3. Diagrama tensão-deformação

Vimos na Seção 2.2 que o diagrama que representa a relação entre tensão e deformação específica em determinado material é uma característica importante do material. Para obter o diagrama tensão-deformação de um material, geralmente se executa um *ensaio de tração* em um corpo de prova do material. A Fig. 2.6 mostra um tipo de corpo de prova usual. A área da seção transversal da parte central cilíndrica do corpo de prova foi determinada com precisão e foram feitas duas marcas de referência naquela parte a uma distância L_0 uma da outra. A distância L_0 é conhecida como *comprimento de referência* do corpo de prova.

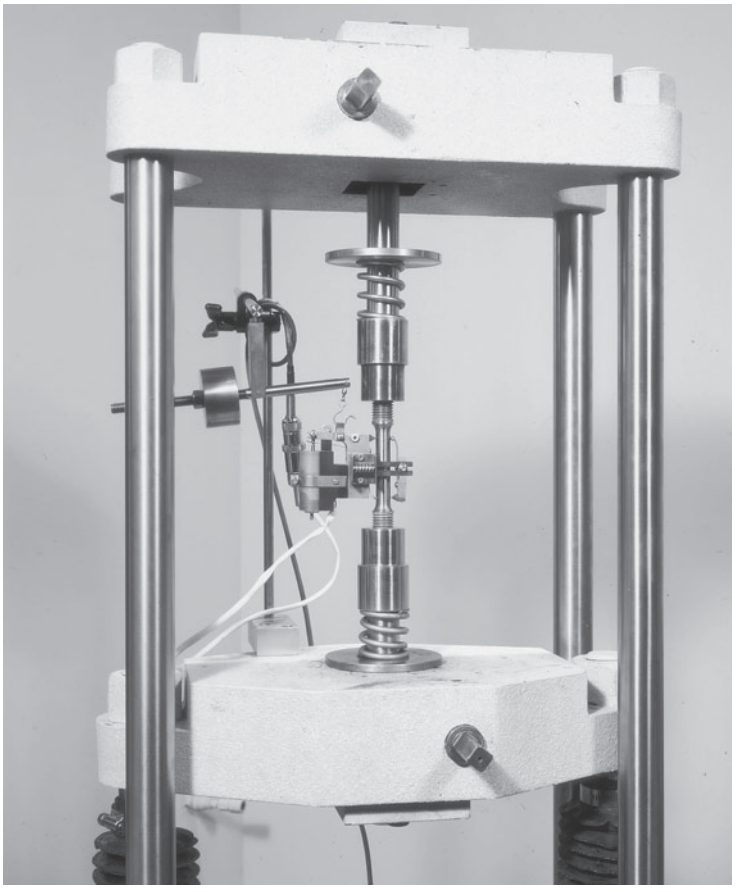


Fig. 2.7 Esta máquina é utilizada para ensaios de corpos de prova a tração, como aqueles mostrados neste capítulo.

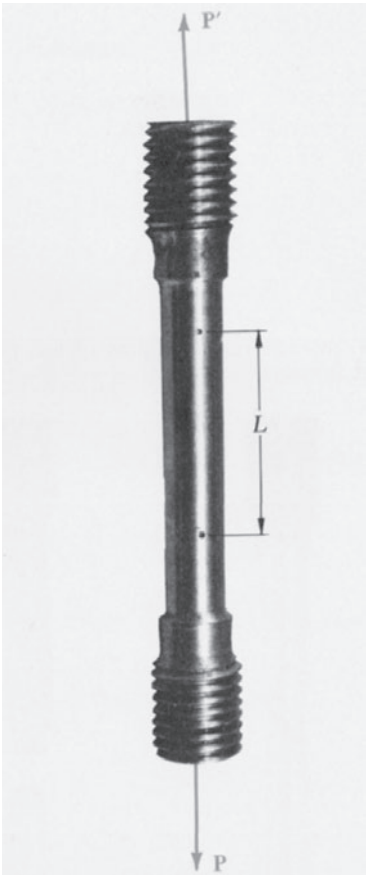


Fig. 2.8 Corpo de prova com carga de tração.

O corpo de prova é então colocado em uma máquina de teste (Fig. 2.7), utilizada para aplicar uma carga centrada **P**. À medida que a carga **P** aumenta, a distância L entre as duas marcas de referência também aumenta (Fig. 2.8). A distância L é medida com um extensômetro, e o alongamento $\delta = L - L_0$ é registrado para cada valor de P. Em geral usa-se simultaneamente um segundo extensômetro para medir e registrar a alteração no diâmetro do corpo de prova. Para cada par de leituras P e δ é calculada a tensão σ dividindo-se P pela área original A_0 da seção transversal do corpo de prova, e a deformação específica ϵ é obtida dividindo-se o alongamento δ pela distância original L_0 entre as duas marcas de referência. O diagrama tensão-deformação pode então ser obtido colocando-se ϵ como abscissa e σ como ordenada.

Os diagramas tensão-deformação dos materiais variam muito, e ensaios de tração diferentes executados com o mesmo material podem produzir resultados diferentes, dependendo da temperatura do corpo de prova e da velocidade de aplicação da carga. No entanto, é possível distinguir algumas características comuns entre os diagramas tensão-deformação de vários grupos de materiais e, assim, dividir os materiais em duas categorias principais com base nessas características, ou seja, materiais *dúcteis* e materiais *frágeis*.

Os materiais dúcteis, como o aço estrutural e as ligas de muitos outros metais, são caracterizados por sua capacidade de *escoar* na temperatura ambiente. À medida que o corpo de prova é submetido a uma carga crescente, seu comprimento aumenta linearmente a uma taxa muito baixa, inicialmente. Assim, a parte inicial do diagrama tensão-deformação é uma linha reta com

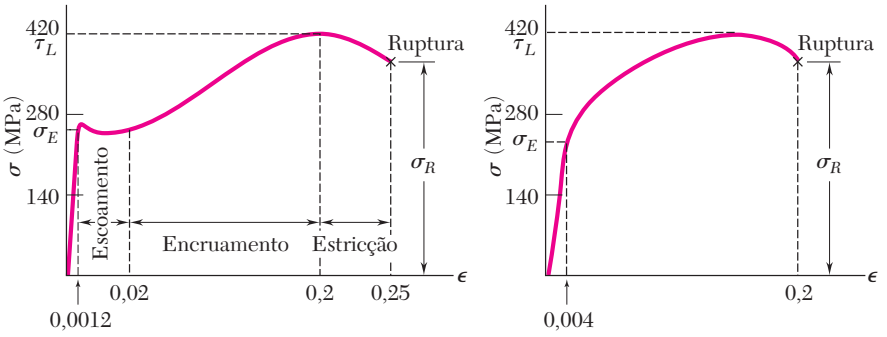


Fig. 2.9 Diagramas tensão-deformação de dois materiais dúcteis típicos.

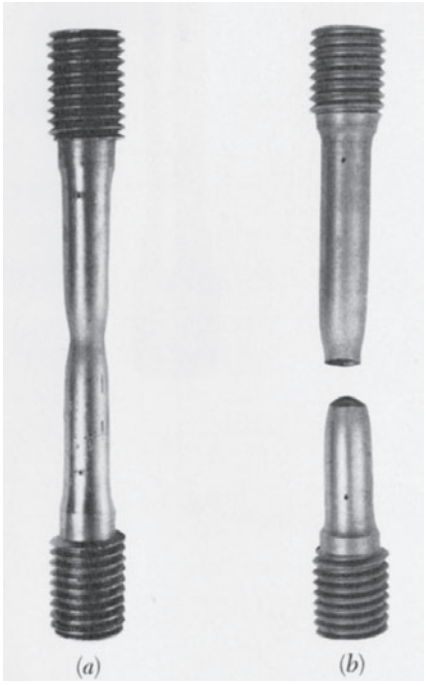


Fig. 2.10 Corpo de prova ensaiado de um material dúctil.

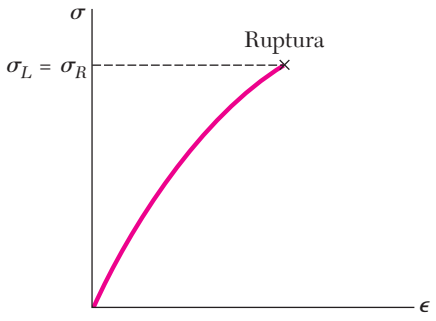


Fig. 2.11 Diagrama tensão-deformação para um material frágil típico.

inclinação bastante acentuada (Fig. 2.9). No entanto, após alcançar um valor crítico de tensão σ_E, o corpo de prova sofre uma grande deformação com aumento relativamente pequeno da carga aplicada. Essa deformação é provocada por deslizamento do material ao longo de superfícies oblíquas e é devido, portanto, primeiro às tensões de cisalhamento. Conforme podemos notar nos diagramas tensão-deformação de dois materiais dúcteis típicos (Fig. 2.9), o alongamento do corpo de prova após o início do escoamento pode ser até 200 vezes maior do que àquele observado no início do escoamento. Depois de alcançar um certo valor máximo da carga, o diâmetro de uma parte do corpo de prova começa a diminuir, em razão da instabilidade local (Fig. 2.10*a*). Esse fenômeno é conhecido como *estricção*. Depois de iniciada a estricção, cargas mais baixas são suficientes para manter o corpo de prova alongando, até que finalmente se rompa (Fig. 2.10*b*). Notamos que a ruptura ocorre ao longo de uma superfície cônica que forma um ângulo de aproximadamente 45° com a superfície original do corpo de prova. Isso indica que o cisalhamento é o principal responsável pela falha dos materiais dúcteis, e confirma o fato de que, sob uma carga axial, as tensões de cisalhamento são maiores nos planos que formam um ângulo de 45° com a carga (cf. Seção 1.11). A tensão σ_E, na qual o escoamento é iniciado, é chamada de *resistência ao escoamento* do material, a tensão σ_L correspondente à carga máxima aplicada ao corpo de prova é conhecida como *limite de resistência*, e a tensão σ_R, correspondente à ruptura, é chamada de *resistência à ruptura*.

Materiais frágeis, que incluem ferro fundido, vidro e pedra, são caracterizados pelo fato de que a ruptura ocorre sem nenhuma mudança prévia notável na taxa de alongamento (Fig. 2.11). Para os materiais frágeis, não há diferença entre o limite de resistência e a resistência à ruptura. E, também, a deformação no instante da ruptura é muito menor para materiais frágeis que para materiais dúcteis. Na Fig. 2.12, notamos a falta de estricção no corpo de prova no caso de um material frágil, e que a ruptura ocorre ao longo de uma superfície perpendicular à carga. Concluímos dessa observação que as tensões normais são as principais responsáveis pela falha de materiais frágeis.†

† Os ensaios de tração descritos nesta seção são executados na temperatura ambiente. No entanto, um material dúctil na temperatura ambiente pode apresentar as características de um material frágil a temperaturas muito baixas, ao passo que um material normalmente frágil pode se comportar de maneira dúctil a temperaturas muito altas. Portanto, em temperaturas que não a ambiente, podemos nos referir a *um material em estado dúctil* ou a *um material em estado frágil*, em vez de dizer que o material é dúctil ou frágil.

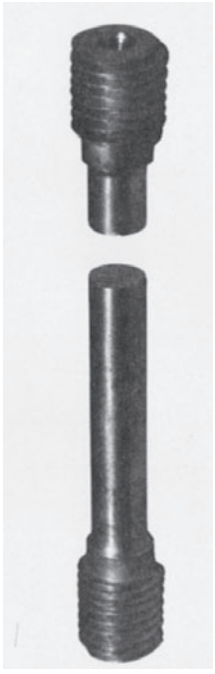


Fig. 2.12 Corpo de prova ensaiado de um material frágil.

Os diagramas tensão-deformação da Fig. 2.9 mostram que o aço estrutural e o alumínio, embora sejam ambos dúcteis, têm diferentes características de escoamento. No caso do aço estrutural (Fig. 2.9*a*), a tensão permanece constante em um grande intervalo de valores da deformação após o início do escoamento. Depois a tensão tem de ser aumentada para manter o corpo de prova se alongando, até ser atingido o máximo valor de σ_L. Isso se dá em razão de uma propriedade do material conhecida como encruamento. A resistência ao escoamento do aço estrutural pode ser determinada durante o ensaio de tração observando-se a carga indicada no mostrador da máquina de ensaio. Após um aumento constante, observa-se que a carga cai subitamente para um valor ligeiramente inferior, mantido por um certo período enquanto o corpo de prova continua se alongando. Em um ensaio executado cuidadosamente, é possível distinguir entre o *ponto de escoamento superior*, que corresponde à carga atingida imediatamente antes do início do escoamento, e o *ponto de escoamento inferior*, que corresponde à carga necessária para manter o escoamento. Como o ponto de escoamento superior é transitório, deve ser utilizado o ponto de escoamento inferior para determinar a resistência ao escoamento do material.

No caso do alumínio (Fig. 2.9*b*) e de muitos outros materiais dúcteis, o início do escoamento não é caracterizado por uma parte horizontal da curva tensão-deformação. Em vez disso, a tensão continua aumentando, embora não linearmente, até ser alcançado o limite de resistência. Começa então a estricção, que leva eventualmente à ruptura. Para esses materiais, a resistência ao escoamento σ_E pode ser definida pelo método do desvio. A resistência ao escoamento para um desvio de 0,2%, por exemplo, é obtida traçando-se através do ponto do eixo horizontal de abcissa $\epsilon = 0{,}2\%$ (ou $\epsilon = 0{,}002$) uma linha paralela à parte reta inicial da curva do diagrama tensão-deformação (Fig. 2.13). A tensão σ_E corresponde ao ponto E obtido dessa maneira e é definido como a resistência ao escoamento a 0,2% da origem.

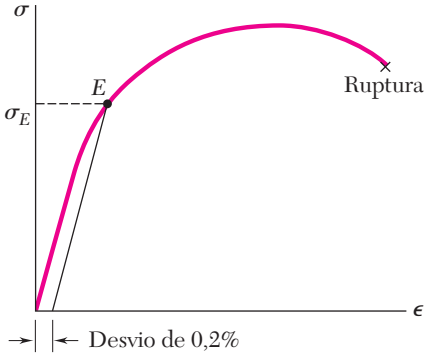


Fig. 2.13 Determinação da resistência ao escoamento pelo método do desvio.

Uma medida-padrão da ductilidade de um material é sua *deformação percentual*, definida como

$$\text{Deformação percentual} = 100\,\frac{L_R - L_0}{L_0}$$

em que L_0 e L_R são, respectivamente, o comprimento inicial do corpo de prova e seu comprimento final na ruptura. O alongamento mínimo especificado para um comprimento de referência de 50 mm, usualmente empregado para aços com resistência ao escoamento de até 345 MPa, é 21%. Isso significa que a deformação média na ruptura deverá ser de pelo menos 0,21 mm/mm.

Outra medida da ductilidade, às vezes usada, é a *redução percentual da área*, definida como

$$\text{Redução percentual da área} = 100\,\frac{A_0 - A_R}{A_0}$$

em que A_0 e A_R são, respectivamente, a área da seção transversal inicial do corpo de prova e sua área de seção transversal mínima na ruptura. Para o aço estrutural, reduções percentuais em área de 60% a 70% são comuns.

Até aqui, discutimos apenas os ensaios de tração. Se um corpo de prova feito de um material dúctil fosse submetido a uma carga de compressão em lugar de tração, a curva tensão-deformação específica obtida seria essencialmente a mesma em sua parte inicial reta e no início da parte correspondente ao escoamento e encruamento. É particularmente notável o fato de que, para determinado aço, a resistência ao escoamento é a mesma tanto na tração como na compressão. Para valores maiores de deformação específica, as curvas tensão-deformação na tração e na compressão divergem, e deve-se notar que a estricção não pode ocorrer na compressão. Para muitos materiais frágeis, sabe-se que o limite de resistência de compressão é muito maior que o limite de resistência de tração. Isso se deve à presença de falhas, como trincas microscópicas ou cavidades, que tendem a enfraquecer o material na tração, embora não afete significativamente sua resistência à falha em compressão.

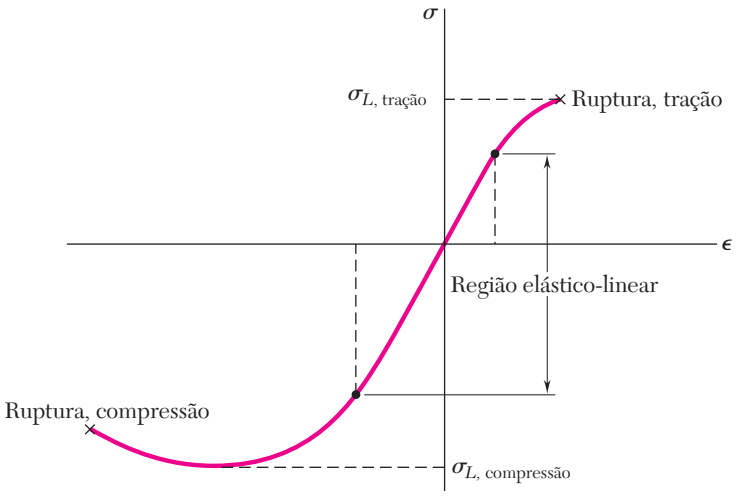


Fig. 2.14 Diagrama tensão-deformação para o concreto.

Um exemplo de material frágil com propriedades diferentes na tração e na compressão é o *concreto*, cujo diagrama tensão-deformação é mostrado na Fig. 2.14. No lado da tração do diagrama, observamos primeiro uma região elástico-linear na qual a deformação é proporcional à tensão. Depois de ter alcançado o ponto de escoamento, a deformação aumenta mais rápido do que a tensão até ocorrer a ruptura. O comportamento do material na compressão é diferente. Primeiro, a região elástico-linear é significativamente maior. Segundo, não ocorre a ruptura quando a tensão alcança seu valor máximo. Em vez disso, a tensão diminui em intensidade enquanto a deformação continua aumentando até ocorrer a ruptura. Note que o módulo de elasticidade, representado pela inclinação da curva tensão-deformação em sua parte linear, é o mesmo na tração e na compressão. Isso vale para a maioria dos materiais frágeis.

*2.4. Tensões e deformações específicas verdadeiras

Recordamos que a tensão representada nos diagramas das Figs. 2.9 e 2.11 foi obtida dividindo-se a força P pela área A_0 da seção transversal do corpo de prova. Esta área foi medida antes de ocorrer qualquer deformação. Como a área da seção transversal do corpo de prova diminui à medida que P aumenta, o gráfico da tensão indicada em nossos diagramas não representa a tensão verdadeira no corpo de prova. A diferença entre a *tensão de engenharia* $\sigma = P/A_0$, já calculada, e a *tensão verdadeira* $\sigma_v = P/A$, obtida dividindo-se P pela área A da seção transversal do corpo de prova deformado, torna-se visível em materiais dúcteis após o início do escoamento. Embora a tensão de engenharia σ, que é diretamente proporcional à força P, diminua com P durante a fase de estricção, observa-se que a tensão verdadeira σ_v, que é proporcional a P mas também inversamente proporcional a A, continua aumentando até ocorrer a ruptura do corpo de prova.

Muitos cientistas também usam uma definição de deformação específica diferente daquela de *deformação específica de engenharia* $\epsilon = \delta/L_0$. Em vez de usar o alongamento total δ e o valor original L_0 do comprimento de referência, eles usam todos os valores sucessivos de L que registraram. Dividindo cada incremento ΔL da distância entre as marcas de referência pelo valor correspondente de L, obtêm uma deformação específica elementar $\Delta\epsilon = \Delta L/L$. Somando os valores sucessivos de $\Delta\epsilon$, definem a deformação específica verdadeira ϵ_v:

$$\epsilon_v = \Sigma\Delta\epsilon = \Sigma(\Delta L/L)$$

Substituindo a somatória pela integral, pode-se também expressar a deformação específica verdadeira da seguinte forma:

$$\epsilon_v = \int_{L_0}^{L} \frac{dL}{L} = \ln\frac{L}{L_0} \tag{2.3}$$

O diagrama obtido construindo-se o gráfico da tensão verdadeira em função da deformação específica verdadeira (Fig. 2.15) reflete mais precisamente o comportamento do material. Conforme já vimos, não há nenhum decrés-

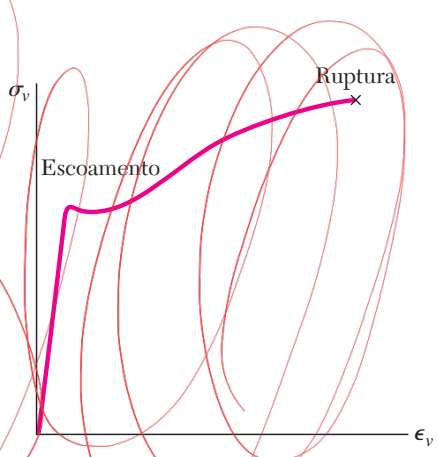


Fig. 2.15 Tensão verdadeira em função da deformação específica verdadeira para um material dúctil típico.

cimo na tensão verdadeira durante a fase de estricção. Os resultados obtidos dos ensaios de tração e de compressão resultarão essencialmente no mesmo gráfico quando utilizadas a tensão verdadeira e a deformação específica verdadeira. Este não é o caso para grandes valores de deformação específica quando se utiliza o gráfico da tensão de engenharia em função da deformação específica de engenharia. No entanto, os engenheiros, cuja responsabilidade é determinar se uma carga P produzirá tensões e deformações aceitáveis em determinado componente, desejarão usar um diagrama baseado na tensão de engenharia $\sigma = P/A_0$ e na deformação específica de engenharia $\epsilon = \delta/L_0$, visto que essas expressões envolvem dados que eles têm disponíveis, ou seja, a área A_0 da seção transversal e o comprimento L_0 do componente em seu estado não deformado.

2.5. Lei de Hooke; módulo de elasticidade

Muitas estruturas em engenharia são projetadas para sofrer deformações relativamente pequenas, que envolvem somente a parte reta do correspondente diagrama tensão-deformação. Para essa parte inicial do diagrama (Fig. 2.9), a tensão σ é diretamente proporcional à deformação específica ϵ, e podemos escrever

$$\sigma = E\,\epsilon \tag{2.4}$$

Essa relação é conhecida como *lei de Hooke*, em homenagem ao matemático inglês Robert Hooke (1635-1703). O coeficiente E é chamado de *módulo de elasticidade* do material envolvido, ou também *módulo de Young*, em homenagem ao cientista inglês Thomas Young (1773-1829). Como a deformação específica ϵ é uma quantidade adimensional, o módulo E é expresso nas mesmas unidades da tensão σ, ou seja, em pascal ou em um de seus múltiplos se forem utilizadas unidades do SI, e em psi ou ksi se forem utilizadas unidades do sistema inglês de unidades.

O maior valor da tensão para o qual a lei de Hooke pode ser utilizada para determinado material é conhecido como o *limite de proporcionalidade* daquele material. No caso dos materiais dúcteis que possuem um ponto de escoamento bem definido, como na Fig. 2.9*a*, o limite de proporcionalidade quase coincide com o ponto de escoamento. Para outros materiais, o limite de proporcionalidade não pode ser definido tão facilmente, visto que é difícil determinar com precisão o valor da tensão σ para o qual a relação entre σ e ϵ deixa de ser linear. Contudo, em razão dessa dificuldade, podemos concluir para esses materiais que o uso da lei de Hooke para valores de tensão ligeiramente maiores que o limite proporcional real não resultará em um erro significativo.

Algumas das propriedades físicas dos metais estruturais, como resistência, ductilidade e resistência à corrosão, podem ser muito afetadas pela inclusão de elementos de liga, tratamento térmico e processos de fabricação utilizados. Por exemplo, observamos com base nos diagramas tensão-deformação do ferro puro e de três diferentes tipos de aço (Fig. 2.16) que existem grandes variações na resistência ao escoamento, limite de resistência e deformação específica final (ductilidade) entre esses quatro metais. No entanto, todos eles possuem o mesmo módulo de elasticidade; em outras palavras, a "rigidez", ou capacidade em resistir a deformações dentro da região linear é a mesma. Portanto, se for usado um aço de alta resistência em lugar de um aço de baixa resistência em determinada estrutura, e se todas as dimensões forem mantidas com os mesmos valores, a estrutura terá uma capacidade de carga maior, mas sua rigidez permanecerá inalterada.

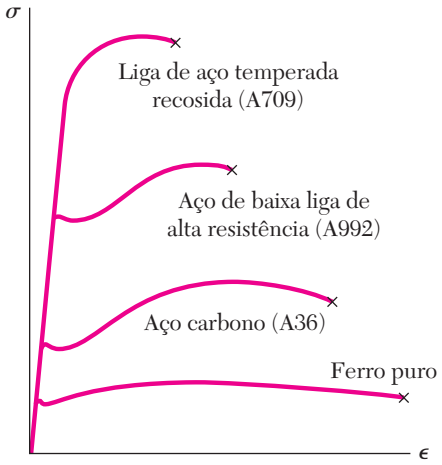


Fig. 2.16 Diagramas tensão-deformação para o ferro e diferentes tipos de aço.

Para cada um dos materiais considerados até agora, a relação entre tensão normal e deformação específica normal, $\sigma = E\epsilon$, é independente da direção de carregamento. Isso porque as propriedades mecânicas de cada material, incluindo seu módulo de elasticidade E, são independentes da direção considerada. Dizemos que esses materiais são *isotrópicos*. Materiais cujas propriedades dependem da direção considerada são chamados de *anisotrópicos*. Uma classe importante de materiais anisotrópicos consiste em *materiais compósitos reforçados com fibras*.

Esses materiais compósitos são obtidos incorporando-se fibras de um material resistente e rígido em um material mais fraco e menos rígido, chamado de *matriz*. Materiais típicos utilizados como fibras são carbono, vidro e polímeros, enquanto vários tipos de resinas são utilizados como matriz. A Fig. 2.17 mostra uma camada, ou *lâmina*, de um material compósito que consiste de uma grande quantidade de fibras paralelas embutidas em uma matriz. Uma força axial aplicada à lamina ao longo do eixo x, ou seja, em uma direção paralela às fibras, provocará uma tensão normal σ_x na lâmina e uma deformação específica normal ϵ_x correspondente. A lei de Hooke estará satisfeita à medida que a carga aumenta, desde que não seja ultrapassado o limite elástico do material da lâmina. Analogamente, se forças axiais forem aplicadas ao longo dos eixos y e z, ou seja, em direções perpendiculares às fibras, tensões normais σ_y e σ_z, respectivamente, serão criadas como, também, as respectivas deformações específicas normais ϵ_y e ϵ_z sempre satisfazendo à lei de Hooke. No entanto, os módulos de elasticidade E_x, E_y e E_z correspondentes, respectivamente, a cada um dos carregamentos acima, serão diferentes. Em virtude de as fibras serem paralelas ao eixo x, a lâmina oferecerá uma resistência à deformação muito maior a uma força direcionada ao longo do eixo x que a uma força direcionada ao longo dos eixos y ou z. Portanto, E_x será muito maior que E_y ou E_z.

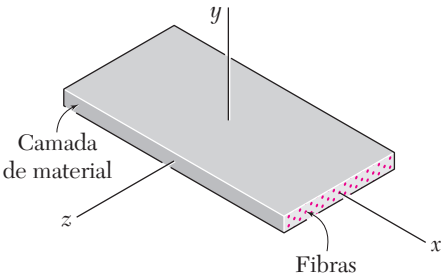


Fig. 2.17 Camada de material compósito reforçado com fibras.

Um plano *laminado* é obtido superpondo-se uma quantidade de placas ou lâminas. Se o laminado for submetido somente a uma força axial provocando tração, as fibras em todas as camadas deverão ter a mesma orientação da força para se obter a maior resistência possível. Contudo, se o laminado estiver em compressão, o material da matriz pode não ser suficientemente forte para evitar a dobra ou a flambagem das fibras. A estabilidade lateral do laminado pode ser então aumentada posicionando-se algumas das camadas de maneira que suas fibras fiquem perpendiculares à força. Posicionando algumas camadas de modo que suas fibras fiquem orientadas a 30°, 45° ou 60° em relação à força, pode-se também aumentar a resistência do laminado ao cisalhamento no plano. Os materiais compósitos reforçados com fibras serão discutidos em mais detalhes na Seção 2.16, onde será considerado seu comportamento sob carregamentos multiaxiais.

2.6. Comportamento elástico e comportamento plástico de um material

Se as deformações específicas provocadas em um corpo de prova pela aplicação de determinada força desaparecem quando a força é removida, dizemos que o material se comporta *elasticamente*. O maior valor da tensão para o qual o material comporta-se elasticamente é chamado de *limite elástico* do material.

Se o material tem um ponto de escoamento bem definido, como na Fig. 2.9*a*, o limite elástico, o limite de proporcionalidade (Seção 2.5) e o ponto de escoamento são essencialmente iguais. Em outras palavras, o material

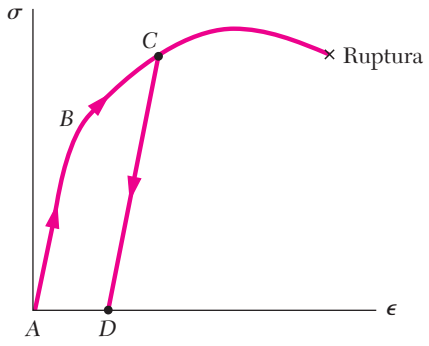


Fig. 2.18

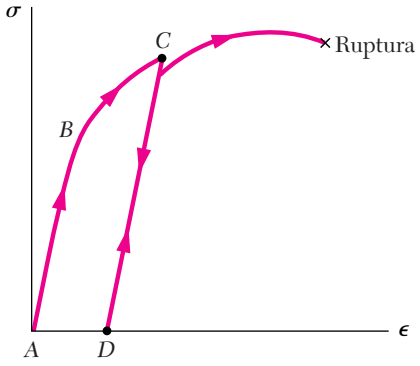


Fig. 2.19

comporta-se elástica e linearmente desde que a tensão seja mantida abaixo do ponto de escoamento. No entanto, se for atingido o ponto de escoamento, ele deve ocorrer conforme descrito na Seção 2.3, e quando a força é removida, a tensão e a deformação específica diminuem de forma linear, ao longo de uma linha *CD* paralela à parte reta *AB* da curva de carregamento (Fig. 2.18). O fato de ϵ não retornar a zero depois de a força ter sido removida indica que ocorreram *deformações permanentes* ou *plásticas*. Para muitos materiais, a deformação plástica não depende somente do valor máximo atingido pela tensão, mas também do tempo decorrido até que o carregamento seja removido. A parte da deformação plástica que depende da tensão é conhecida como *escorregamento*, e a parte que depende do tempo, que também é influenciada pela temperatura, é conhecida como *fluência*.

Quando um material não possui um ponto de escoamento bem definido, o limite elástico não pode ser determinado com precisão. No entanto, supor o limite elástico igual à resistência ao escoamento conforme definido pelo método do desvio (Seção 2.3) resulta apenas em um pequeno erro. Sem dúvida, examinando a Fig. 2.13, notamos que a parte reta utilizada para determinar o ponto *E* também representa a curva de descarregamento depois de ter alcançado a máxima tensão σ_E. Embora o material não se comporte de forma verdadeiramente elástica, a deformação plástica resultante é tão pequena quanto o desvio selecionado.

Se o corpo de prova for carregado e descarregado (Fig. 2.19) e carregado novamente, a nova curva de carregamento seguirá bem próxima à curva de descarregamento até quase chegar ao ponto *C*; então ela virará para a direita e se conectará com a porção curvada do diagrama tensão-deformação original. Observe que a parte reta da nova curva de carregamento é mais longa do que a parte correspondente da curva inicial. Assim, o limite de proporcionalidade e o limite elástico aumentaram em consequência do encruamento que ocorreu durante o carregamento anterior do corpo de prova. No entanto, como o ponto de ruptura *R* se manteve inalterado, a ductilidade do corpo de prova, que agora deve ser medida a partir do ponto *D*, diminuiu.

Em nossa discussão, consideramos que o corpo de prova foi carregado duas vezes na mesma direção, isto é, que ambas as forças eram forças de tração. Vamos agora considerar o caso quando é aplicada uma segunda carga em uma direção oposta àquela da primeira carga.

Suponha que o material seja um aço doce, para o qual a resistência ao escoamento seja a mesma em tração e em compressão. A força inicial, de tração, é aplicada até ser alcançado o ponto *C* no diagrama tensão-deformação (Fig. 2.20). Após o descarregamento (ponto *D*), é aplicada uma força de compressão fazendo o material alcançar o ponto *H*, onde a tensão é igual a $-\sigma_E$. Notamos que a parte *DH* do diagrama tensão-deformação é curva e não mostra nenhum ponto de escoamento claramente definido. Isso é chamado de *efeito Bauschinger*. À medida que a força de compressão é mantida, o material escoa ao longo da linha *HJ*.

Se a carga é removida após alcançar o ponto *J*, a tensão retorna a zero ao longo da linha *JK*, e notamos que a inclinação de *JK* é igual ao módulo de elasticidade *E*. A deformação permanente resultante *AK* pode ser positiva, negativa, ou zero, dependendo dos comprimentos dos segmentos *BC* e *HJ*. Se uma força de tração for aplicada novamente ao corpo de prova, a parte do diagrama tensão-deformação começando em *K* (linha tracejada) curvará para cima e para a direita até alcançar a tensão de escoamento σ_E.

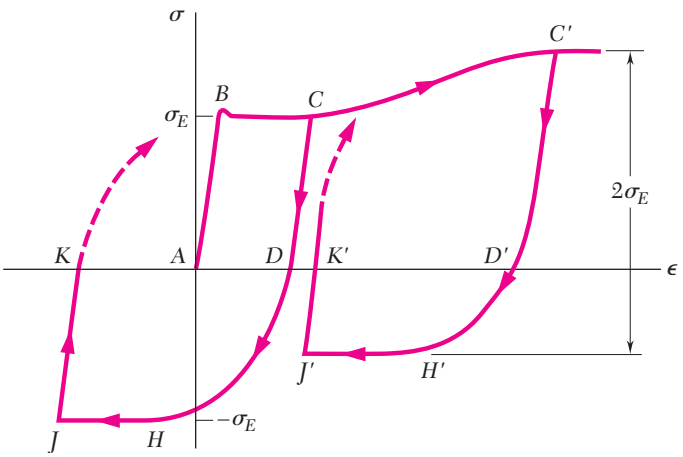


Fig. 2.20

Se o carregamento inicial for grande o suficiente para provocar encruamento do material (ponto C'), o descarregamento ocorrerá ao longo da linha $C'D'$. À medida que é aplicada a força reversa, a tensão se torna de compressão, alcançando seu valor máximo em H' e mantendo-a à medida que o material escoa ao longo da linha $H'J'$. Notamos que enquanto o valor máximo da tensão de compressão é menor que σ_E, a variação total na tensão entre C' e H' ainda é igual a $2\sigma_E$.

Se o ponto K ou K' coincide com a origem A do diagrama, a deformação permanente é igual a zero e pode parecer que o corpo de prova retornou à sua condição original. No entanto, terão ocorrido alterações internas e, embora a mesma sequência de carregamento possa ser repetida, o corpo de prova romperá sem qualquer aviso após algumas poucas repetições. Isso indica que as deformações plásticas excessivas às quais o corpo de prova estava submetido provocaram uma alteração radical nas características do material. Portanto, forças reversas na região plástica raramente são permitidas e só podem ocorrer sob condições rigorosamente controladas. Essas situações ocorrem no endireitamento de material danificado e no alinhamento final de uma estrutura ou máquina.

2.7. Carregamentos repetidos; fadiga

Nas seções anteriores consideramos o comportamento de um corpo de prova submetido a uma carga axial. Lembramos que, se a tensão máxima no corpo de prova não exceder o limite elástico do material, o corpo de prova retornará à sua condição inicial quando a carga for removida. Você pode concluir que determinada carga pode ser repetida muitas vezes, desde que a tensão permaneça na região elástica. Essa conclusão é correta para cargas repetidas algumas dezenas ou mesmo centenas de vezes. No entanto, conforme você verá, isso não é correto quando a carga é repetida milhares ou milhões de vezes. Nesses casos, ocorrerá a ruptura a uma tensão muito menor do que a resistência à ruptura estática; esse fenômeno é conhecido como *fadiga*. Uma falha por fadiga é de natureza frágil, mesmo para materiais normalmente dúcteis.

A fadiga deve ser levada em conta no projeto de todos os componentes estruturais e de máquinas submetidos a cargas repetidas ou flutuantes. O número de ciclos de carregamento que se pode esperar durante a vida útil de um componente varia grandemente. Por exemplo, uma viga que suporta um guindaste industrial pode ser carregada até dois milhões de vezes em 25 anos (cerca de 300 carregamentos por dia de trabalho); um virabrequim do motor de um carro será carregado aproximadamente meio bilhão de vezes se o carro rodar 300 000 km, e uma pá de turbina pode ser carregada várias centenas de bilhões de vezes durante sua vida útil.

Alguns carregamentos têm natureza flutuante. Por exemplo, o tráfego de veículos sobre uma ponte provocará níveis de tensão que flutuarão sobre o nível de tensão em razão do próprio peso da ponte. Uma condição mais severa ocorre quando há uma inversão completa da carga durante o ciclo de carregamento. Por exemplo, as tensões no eixo de um vagão de trem são completamente invertidas a cada meia volta da roda.

O número de ciclos de carregamento necessário para provocar a falha de um corpo de prova por meio da aplicação de cargas cíclicas pode ser determinado experimentalmente para determinado nível de tensão máxima. Se for executada uma série de ensaios usando diferentes níveis de tensão máxima, os dados resultantes podem ser colocados em um gráfico como uma curva σ-n. Para cada ensaio, deve-se construir uma curva da tensão máxima σ, como ordenada, e o número de ciclos n como abcissa. Por causa do grande número de ciclos necessários para a ruptura, o número n de ciclos é apresentado em escala logarítmica.

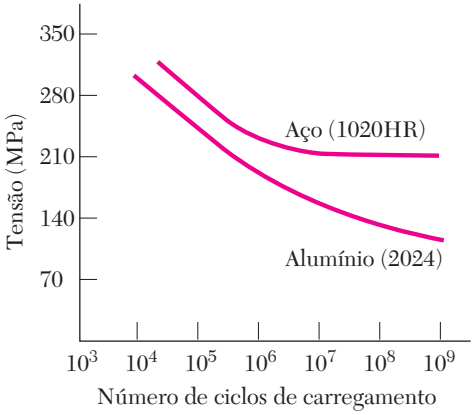


Fig. 2.21

A Fig. 2.21 mostra uma curva típica σ-n para o aço. Notamos que, se a tensão máxima aplicada for alta, serão necessários relativamente poucos ciclos para causar a ruptura. À medida que a intensidade da tensão máxima é reduzida, o número de ciclos necessário para provocar a ruptura aumenta até ser alcançada uma tensão conhecida como *limite de resistência à fadiga*, que é a tensão para a qual não ocorre falha, mesmo para um número indefinidamente grande de ciclos de carregamento. Para um aço de baixo teor de carbono como o aço estrutural, o limite de resistência à fadiga é aproximadamente metade do limite de resistência do aço.

Para metais não-ferrosos como o alumínio e o cobre, uma curva σ-n típica (Fig. 2.21) mostra que a tensão de falha continua a diminuir à medida que aumenta o número de ciclos de carregamento. Para esses metais, define-se o *limite de resistência à fadiga* como a tensão correspondente à falha após um número especificado de ciclos de carregamento, por exemplo, 500 milhões.

O exame de corpos de prova obtidos de eixos, molas ou de outros componentes que falharam em fadiga, mostra que a falha foi iniciada em uma trinca microscópica ou em alguma imperfeição similar. A cada carregamento, a trinca se propagava um pouco. Durante sucessivos ciclos de carregamento, a trinca se propagou pelo material até que a quantidade de material não danificado fosse insuficiente para suportar a carga máxima, ocorrendo falha abrupta por fragilidade. Devido ao fato de que a falha por fadiga pode ser iniciada em qualquer trinca ou imperfeição, as condições da superfície de um corpo de prova têm um efeito importante no valor do limite de resistência à fadiga obtida no ensaio. O limite de resistência à fadiga para corpos de prova usinados e polidos é mais alto do que para os componentes laminados ou forjados, ou para componentes corroídos. Em aplicações no mar ou próximo do mar, ou em outras aplicações onde se espera que haja corrosão, pode-se prever uma redução de 50% no limite de resistência à fadiga.

2.8. Deformações de elementos sob carregamento axial

Considere a barra homogênea BC de comprimento L e seção transversal uniforme de área A submetida a uma força axial centrada **P** (Fig. 2.22). Se a tensão axial resultante $\sigma = P/A$ não ultrapassar o limite de proporcionalidade do material, podemos aplicar a lei de Hooke e escrever

$$\sigma = E\,\epsilon \tag{2.4}$$

da qual se segue que

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{AE} \tag{2.5}$$

Lembrando que a deformação específica ϵ foi definida na Seção 2.2 como $\epsilon = \delta/L$, temos

$$\delta = \epsilon\,L \tag{2.6}$$

e substituindo ϵ da Equação (2.5) na Equação (2.6), temos:

$$\delta = \frac{PL}{AE} \tag{2.7}$$

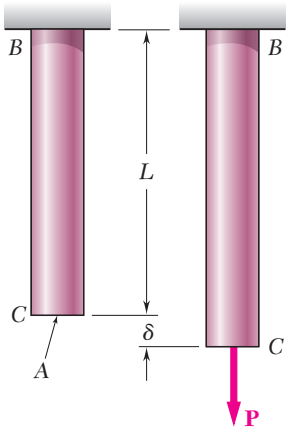


Fig. 2.22

A Equação (2.7) só pode ser utilizada se a barra for homogênea (E constante), se tiver uma seção transversal uniforme de área A e se tiver a força aplicada em suas extremidades. Se a barra estiver carregada em outros pontos, ou se ela consistir em diversas partes com várias seções transversais e possivelmente de diferentes materiais, precisamos dividi-la em partes componentes que satisfaçam individualmente às condições necessárias para a aplicação da Fórmula (2.7). Designando, respectivamente, por P_i, L_i, A_i, e E_i a força interna, comprimento, área da seção transversal e módulo de elasticidade correspondentes à parte i, expressamos a deformação da barra inteira como

$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} \tag{2.8}$$

Lembramos da Seção 2.2 que, no caso de uma barra de seção transversal variável (Fig. 2.5), a deformação específica ϵ depende da posição do ponto Q em que ela é calculada e definida como $\epsilon = d\delta/dx$. Resolvendo $d\delta$ dessa equação, e substituindo ϵ pelo seu valor dado na Equação (2.5), expressamos a deformação de um elemento de comprimento dx como

$$d\delta = \epsilon\,dx = \frac{P\,dx}{AE}$$

A deformação total δ da barra é obtida integrando-se essa expressão sobre o comprimento L da barra:

$$\delta = \int_0^L \frac{P\,dx}{AE} \tag{2.9}$$

A Fórmula (2.9) deverá ser utilizada em lugar da (2.7), não só quando a área A da seção transversal for uma função de x, mas também quando a força interna P depender de x, como é o caso de uma barra suspensa suportando seu próprio peso.

EXEMPLO 2.1

Determine a deformação da barra de aço mostrada na Fig. 2.23*a* submetida às forças dadas ($E = 200$ GPa).

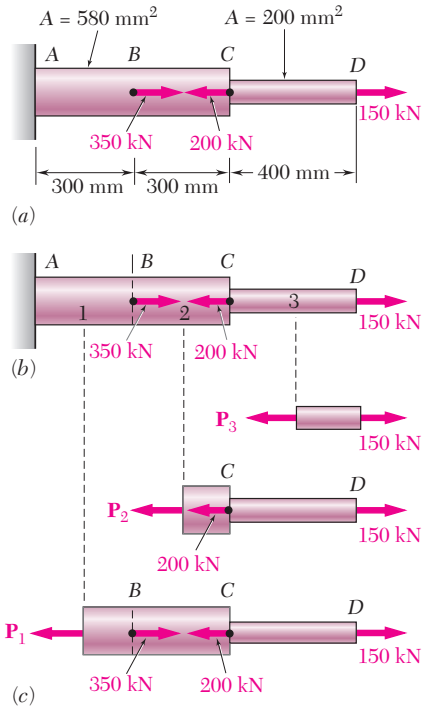


Fig. 2.23

Dividimos a barra em três partes componentes mostradas na Fig. 2.23*b* e escrevemos

$$L_1 = L_2 = 300 \text{ mm} \quad L_3 = 400 \text{ mm}$$
$$A_1 = A_2 = 580 \text{ mm}^2 \quad A_3 = 200 \text{ mm}^2$$

Para encontrarmos as forças internas P_1, P_2 e P_3, devemos cortar cada uma das partes componentes, desenhando para cada corte o diagrama de corpo livre da parte da barra localizada à direita da seção (Fig. 2.23*c*). Impondo a condição de que cada um dos corpos livres está em equilíbrio, obtemos sucessivamente

$$P_1 = 300 \text{ kN} = 300 \times 10^3 \text{ N}$$
$$P_2 = -50 \text{ kN} = -50 \times 10^3 \text{ N}$$
$$P_3 = 150 \text{ kN} = 150 \times 10^3 \text{ N}$$

Usando esses valores na Equação (2.8), temos

$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} = \frac{1}{E}\left(\frac{P_1 L_1}{A_1} + \frac{P_2 L_2}{A_2} + \frac{P_3 L_3}{A_3}\right)$$

$$= \frac{1}{200}\left[\frac{(300 \times 300)}{580} + \frac{(-50)(300)}{580} + \frac{150 \times 400}{200}\right]$$

$$\delta = \frac{429{,}31}{200} = 2{,}15 \text{ mm}.$$

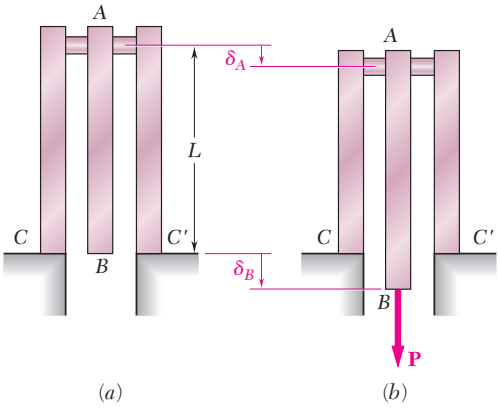
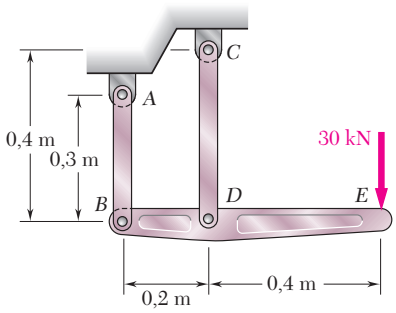


Fig. 2.24

A barra *BC* da Fig. 2.22, utilizada para deduzir a Fórmula (2.7), e a barra *AD* da Fig. 2.23, que acabamos de discutir no Exemplo 2.1, tinham ambas uma extremidade presa a um suporte fixo. Em cada caso, portanto, a deformação δ da barra era igual ao deslocamento de sua extremidade livre. Porém, quando ambas as extremidades da barra se movem, a deformação da barra é medida pelo *deslocamento relativo* de uma extremidade da barra em relação à outra. Considere, por exemplo, o conjunto mostrado na Fig. 2.24*a*, que consiste em três barras elásticas de comprimento L conectadas por um pino rígido em A. Se uma força **P** é aplicada em B (Fig. 2.24*b*), as três barras se deformarão. Como as barras AC e AC' estão presas a suportes fixados em C e C', a deformação de ambas as barras é medida pelo deslocamento δ_A do ponto A. Entretanto, como ambas as extremidades da barra AB se movem, a deformação de AB é medida pela diferença entre os deslocamentos δ_A e δ_B dos pontos A e B, isto é, pelo deslocamento relativo de B em relação a A. Designando esse deslocamento relativo por $\delta_{B/A}$, temos

$$\delta_{B/A} = \delta_B - \delta_A = \frac{PL}{AE} \tag{2.10}$$

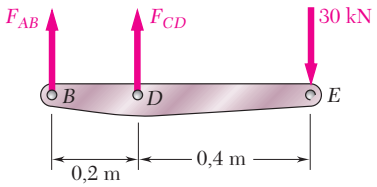
em que A é a área da seção transversal de AB e E é seu módulo de elasticidade.



PROBLEMA RESOLVIDO 2.1

A barra rígida *BDE* é suspensa por duas barras *AB* e *CD*. A barra *AB* é de alumínio ($E = 70$ GPa) e tem uma seção transversal com área de 500 mm^2; a barra *CD* é de aço ($E = 200$ GPa) e tem uma seção transversal com área de 600 mm^2. Para a força de 30 kN mostrada na figura, determine os deslocamentos dos pontos (*a*) *B*, (*b*) *D* e (*c*) *E*.

SOLUÇÃO



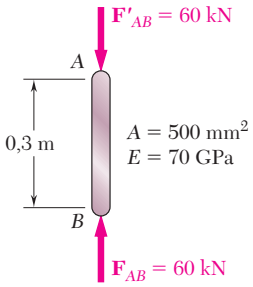
Corpo livre: barra *BDE*

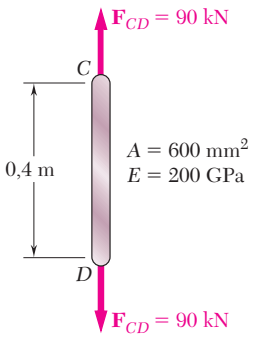
$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0$: $\quad -(30\text{ kN})(0{,}6\text{ m}) + F_{CD}(0{,}2\text{ m}) = 0$

$F_{CD} = +90\text{ kN} \qquad F_{CD} = 90\text{ kN}$ *tração*

$+\circlearrowleft \Sigma M_D = 0$: $\quad -(30\text{ kN})(0{,}4\text{ m}) - F_{AB}(0{,}2\text{ m}) = 0$

$F_{AB} = -60\text{ kN} \qquad F_{AB} = 60\text{ kN}$ *compressão*





a. Deslocamento do ponto *B*. Como a força interna na barra *AB* é de compressão, temos $P = -60$ kN

$$\delta_B = \frac{PL}{AE} = \frac{(-60 \times 10^3\text{ N})(0{,}3\text{ m})}{(500 \times 10^{-6}\text{ m}^2)(70 \times 10^9\text{ Pa})} = -514 \times 10^{-6}\text{ m}$$

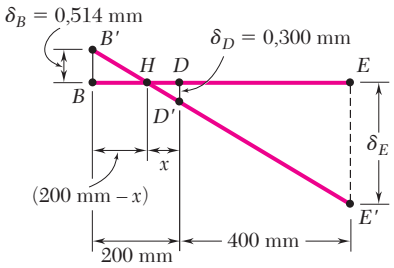
O sinal negativo indica uma contração do elemento *AB* e, portanto, um deslocamento da extremidade *B* para cima:

$$\delta_B = 0{,}514\text{ mm} \uparrow \blacktriangleleft$$

b. Deslocamento do ponto *D*. Como a força interna na barra *CD* é $P = 90$ kN, temos

$$\delta_D = \frac{PL}{AE} = \frac{(90 \times 10^3\text{ N})(0{,}4\text{ m})}{(600 \times 10^{-6}\text{ m}^2)(200 \times 10^9\text{ Pa})}$$

$$= 300 \times 10^{-6}\text{ m} \qquad \delta_D = 0{,}300\text{ mm} \downarrow \blacktriangleleft$$

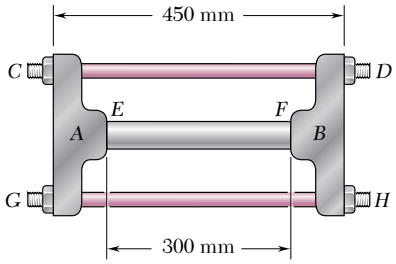


c. Deslocamento do ponto *E*. Designamos por B' e D' as posições deslocadas dos pontos *B* e *D*. Como a barra *BDE* é rígida, os pontos B', D' e E' estão em uma linha reta e temos

$$\frac{BB'}{DD'} = \frac{BH}{HD} \qquad \frac{0{,}514\text{ mm}}{0{,}300\text{ mm}} = \frac{(200\text{ mm}) - x}{x} \qquad x = 73{,}7\text{ mm}$$

$$\frac{EE'}{DD'} = \frac{HE}{HD} \qquad \frac{\delta_E}{0{,}300\text{ mm}} = \frac{(400\text{ mm}) + (73{,}7\text{ mm})}{73{,}7\text{ mm}}$$

$$\delta_E = 1{,}928\text{ mm} \downarrow \blacktriangleleft$$

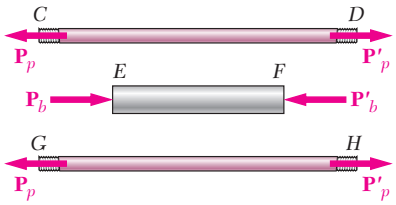


PROBLEMA RESOLVIDO 2.2

As peças fundidas rígidas *A* e *B* estão conectadas por dois parafusos de aço *CD* e *GH* de 19 mm de diâmetro e estão em contato com as extremidades de uma barra de alumínio *EF* com diâmetro de 38 mm. Cada parafuso tem rosca simples com um passo de 2,5 mm e, depois de serem ajustadas, as porcas em *D* e *H* são apertadas em $\frac{1}{4}$ de volta cada uma. Sabendo que *E* é 200 GPa para o aço e 70 GPa para o alumínio, determine a tensão normal na barra.

SOLUÇÃO

Deformações



***Parafusos* CD *e* GH.** O aperto das porcas provoca tração nos parafusos. Em razão da simetria, ambos estão sujeitos à mesma força interna P_p e sofrem a mesma deformação δ_p. Temos

$$\delta_b = +\frac{P_pL_p}{A_pE_p} = +\frac{P_p(0{,}450\text{ m})}{\frac{1}{4}\pi(0{,}019\text{ m})^2(200\times10^9\text{ Pa})} = +7{,}936\times10^{-9}\,P_p \qquad (1)$$

***Barra* EF.** A barra está em compressão. Designando por P_b a intensidade da força na barra e por δ_b a deformação na barra, temos

$$\delta_b = -\frac{P_bL_b}{A_bE_b} = -\frac{P_b(0{,}300\text{ m})}{\frac{1}{4}\pi(0{,}038\text{ m})^2(70\times10^9\text{ Pa})} = +3{,}779\times10^{-9}\,P_b \qquad (2)$$

***Deslocamento de* D *em relação a* B.** O aperto de $\frac{1}{4}$ de volta nas porcas faz as extremidades *D* e *H* dos parafusos sofrerem um deslocamento de $\frac{1}{4}$ (2,5 mm) *em relação à peça fundida B*. Considerando a extremidade *D*, temos

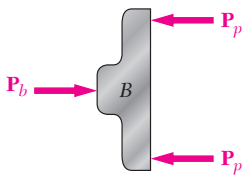
$$\delta_{D/B} = \tfrac{1}{4}(0{,}0025\text{ m}) = 6{,}25\times10^{-4}\text{ m} \qquad (3)$$

Mas $\delta_{D/B} = \delta_D - \delta_B$, em que δ_D e δ_B representam os deslocamentos de *D* e *B*, respectivamente. Considerando que a peça *A* é mantida em uma posição fixa enquanto as porcas em *D* e *H* são apertadas, esses deslocamentos são iguais às deformações dos parafusos e da barra, respectivamente. Temos, então,

$$\delta_{D/B} = \delta_p - \delta_b \qquad (4)$$

Substituindo (1), (2) e (3) em (4), obtemos

$$6{,}25\times10^{-4} = 7{,}936\times10^{-9}\,P_p + 3{,}779\times10^{-9}\,P_b \qquad (5)$$



Corpo livre: peça *B*

$$\stackrel{+}{\rightarrow}\Sigma F = 0: \qquad P_b - 2P_p = 0 \qquad P_b = 2P_p \qquad (6)$$

Forças nos parafusos e na barra. Substituindo o valor de P_b de (6) em (5), temos

$$6{,}25\times10^{-4} = 7{,}936\times10^{-9}\,P_p + 3{,}779\times10^{-9}(2P_p)$$
$$P_p = 40339\text{ N}$$
$$P_b = 2P_p = 2(40339\text{ N}) = 80678\text{ N}$$

Tensão na barra

$$\sigma_b = \frac{P_b}{A_b} = \frac{180678\text{ N}}{\frac{1}{4}\pi(0{,}038\text{ m})^2}$$

$\sigma_b = 71$ MPa ◀

PROBLEMAS

2.1 Duas marcas de referência são colocadas a exatamente 250 mm uma da outra, em uma barra de alumínio com diâmetro de 12 mm. Sabendo que uma força axial de 6 000 N atuando nessa barra provoca um afastamento entre as marcas de 250,18 mm, determine o módulo de elasticidade do alumínio utilizado.

2.2 Uma barra feita de poliestireno de comprimento igual a 304,8 mm e diâmetro igual a 12,7 mm está submetida a uma força de tração igual a 3 558 N. Sabendo que $E = 3{,}10$ GPa, determine (*a*) o alongamento dessa barra e (*b*) a tensão normal na barra.

2.3 Um fio de aço de 60 m de comprimento está submetido a uma força de tração de 6 kN. Sabendo que $E = 200$ GPa e que o comprimento do fio deve aumentar no máximo 48 mm, determine (*a*) o menor diâmetro que pode ser selecionado para o fio e (*b*) a tensão normal correspondente.

2.4 Deseja-se usar um fio de aço de 8,5 m de comprimento e 6,4 mm de diâmetro para sustentar uma força **P** de tração. Sabe-se que o fio se alonga 12 mm quando é aplicada essa força. Sabendo que $E = 200$ GPa, determine (*a*) a intensidade da força **P** e (*b*) a tensão normal correspondente no fio.

2.5 Um tubo de ferro fundido é utilizado para suportar uma força de compressão. Sabendo que $E = 69$ GPa e que a máxima variação admissível no comprimento é 0,025%, determine (*a*) a tensão normal máxima no tubo e (*b*) a espessura mínima da parede para uma carga de 7,2 kN se o diâmetro externo do tubo for de 50 mm.

2.6 Uma barra de controle feita de latão não deve se alongar mais de 3,0 mm quando a tração no fio for 4 kN. Sabendo que $E = 105$ GPa e que a máxima tensão normal admissível é 180 MPa, determine (*a*) o menor diâmetro que pode ser selecionado para a barra e (*b*) o comprimento máximo correspondente da barra.

2.7 Duas marcas de referência são colocadas exatamente a 254 mm uma da outra, em uma barra de alumínio com diâmetro de 12,7 mm, $E = 69{,}6$ GPa e limite de resistência de 110 MPa. Sabendo que a distância entre as marcas de referência é de 254,229 mm depois que a força é aplicada, determine (*a*) a tensão na barra e (*b*) o coeficiente de segurança.

2.8 Um fio com 5 mm de diâmetro e 80 m de comprimento é feito de um aço com módulo de elasticidade $E = 200$ GPa e limite de resistência à tração de 400 MPa. Se o fator de segurança desejado for igual a 3,2, determine (*a*) a máxima tensão admissível no fio e (*b*) o correspondente alongamento desse fio.

2.9 Um bloco de 250 mm de comprimento e seção transversal de 50 × 40 mm deve suportar uma força de compressão centrada **P**. O material a ser utilizado é um bronze para o qual $E = 95$ GPa. Determine a maior força que pode ser aplicada, sabendo que a tensão normal não deve exceder 80 MPa e que a diminuição no comprimento do bloco deverá ser no máximo de 0,12% de seu comprimento original.

2.10 Uma barra de alumínio de 1,5 m de comprimento não deve se alongar mais que 1 mm e a tensão normal não deve exceder 40 MPa quando a barra está submetida a uma força axial de 3 kN. Sabendo que $E = 70$ GPa, determine o diâmetro necessário para a barra.

2.11 Uma barra de controle feita de alumínio alonga-se 2,032 mm quando uma força de tração de 2224 N lhe é aplicada. Sabendo que $\sigma_{adm} = 151{,}7$ MPa e $E = 69{,}6$ GPa, determine o menor diâmetro e o menor comprimento que poderão ser adotados para essa barra.

2.12 Uma barra de alumínio quadrada não deve se alongar mais de 1,4 mm quando submetida a uma força de tração. Sabendo que $E = 70$ GPa e que a resistência à tração admissível é 120 MPa, determine (*a*) o comprimento máximo admissível para a barra e (*b*) as dimensões necessárias para a seção transversal se a força de tração for de 28 kN.

2.13 A barra *BD* feita de aço ($E = 200$ GPa) é utilizada para contenção lateral da haste comprimida *ABC*. O máximo esforço que se desenvolve em *BD* é igual a $0{,}02P$. Se a tensão não deve exceder 124,1 MPa e a máxima mudança de comprimento da barra *BD* não pode exceder 0,001 vez o comprimento de *ABC*, determine o menor diâmetro possível de ser utilizado para o membro *BD*.

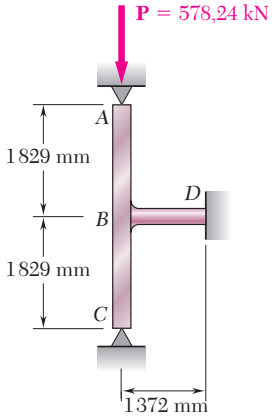


Fig. P2.13

2.14 O cabo *BC* de 4 mm de diâmetro é feito de um aço com $E = 200$ GPa. Sabendo que a máxima tensão no cabo não pode exceder 190 MPa e que a deformação do cabo não deve exceder 6 mm, determine a máxima força **P** que pode ser aplicada conforme mostra a figura.

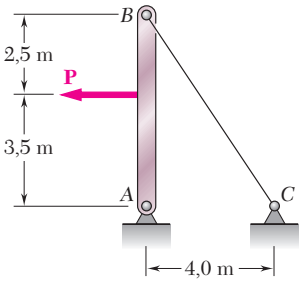


Fig. P2.14

2.15 Um cilindro vazado de poliestireno ($E = 3{,}1$ GPa) com parede de 3,2 mm de espessura e uma placa rígida circular (somente parte dela é mostrada) são utilizados para suportar uma barra de aço *AB* ($E = 200$ GPa) de 254 mm de comprimento e 6,4 mm de diâmetro. Se uma carga **P** de 3 558 N for aplicada em *B*, determine (*a*) a deformação da barra *AB*, (*b*) o deslocamento do ponto *B* e (*c*) a tensão normal média na barra *AB*.

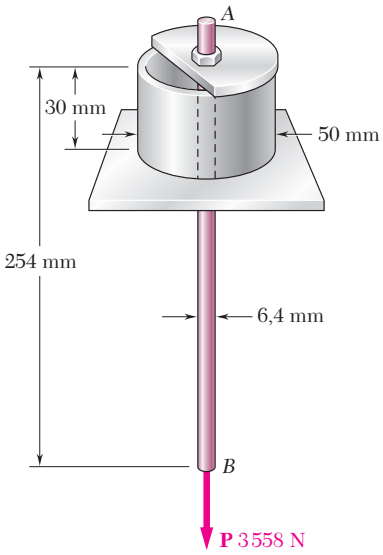


Fig. P2.15

2.16 O elemento mostrado é construído com um cilindro de aço com diâmetro de 25,4 mm e duas luvas com 38,1 mm de diâmetro externo ajustadas nas suas extremidades. Sabendo que $E = 200$ GPa, determine (*a*) a carga **P** de modo que o alongamento total seja igual a 0,0508 mm e (*b*) o correspondente alongamento da porção central *BC*.

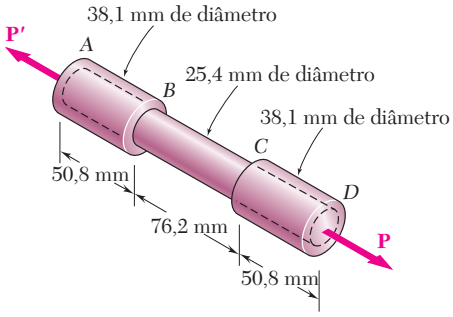


Fig. P2.16

2.17 Duas barras cilíndricas sólidas são unidas em *B* e submetidas a carga conforme mostra a figura. A barra *AB* é feita de aço ($E = 200$ GPa) e a barra *BC*, de latão ($E = 105$ GPa). Determine (*a*) o alongamento total da barra composta *ABC* e (*b*) o deslocamento do ponto *B*.

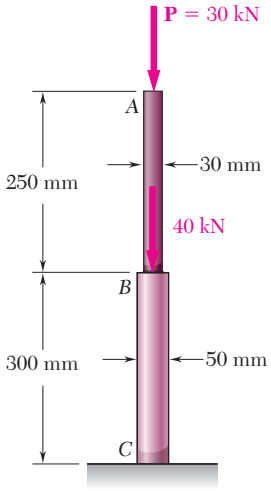


Fig. *P2.17*

2.18 Para a barra composta do Problema 2.17, determine (*a*) a carga *P* que produz o alongamento total da barra igual a −0,2 mm e (*b*) o correspondente deslocamento do ponto *B*.

2.19 Ambas as partes da barra *ABC* são feitas de um alumínio para o qual $E = 70$ GPa. Sabendo que a intensidade de **P** é 4 kN, determine (*a*) o valor de **Q** de modo que o deslocamento em *A* seja zero e (*b*) o deslocamento correspondente de *B*.

2.20 A barra *ABC* é feita de um alumínio para o qual $E = 70$ GPa. Sabendo que $P = 6$ kN e $Q = 42$ kN, determine o deslocamento de (*a*) ponto *A* e (*b*) ponto *B*.

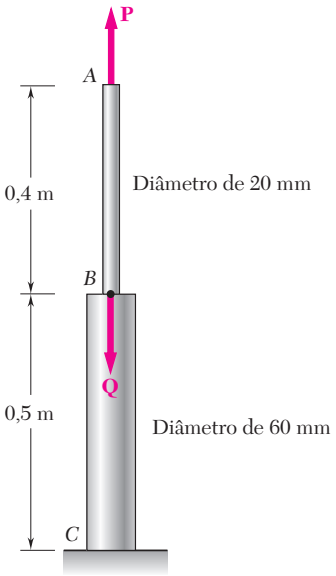


Fig. P2.19 e P2.20

2.21 Para a treliça de aço ($E = 200$ GPa) e o carregamento mostrado, determine as deformações dos componentes *AB* e *AD*, sabendo que suas áreas de seção transversal são, respectivamente, 2 400 mm² e 1 800 mm².

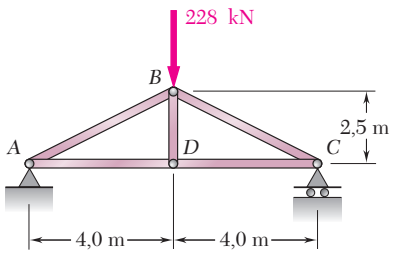


Fig. P2.21

2.22 Para a treliça de aço ($E = 200$ GPa) e os carregamentos mostrados, determine as deformações dos componentes *BD* e *DE*, sabendo que suas áreas de seção transversal são, respectivamente, 1290 mm^2 e 1935 mm^2.

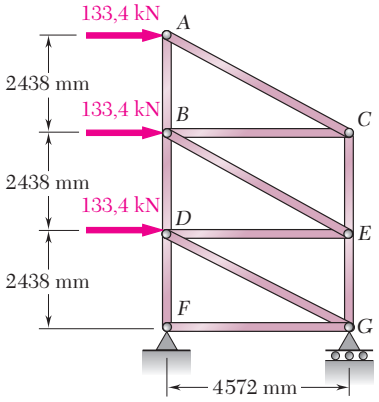


Fig. *P2.22*

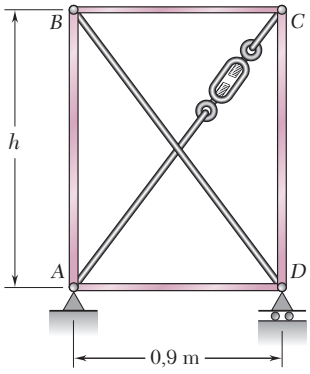


Fig. P2.23

2.23 Os elementos *AB* e *CD* são barras de aço de 28,6 mm de diâmetro, e os elementos *BC* e *AD* são barras de aço de 22,2 mm de diâmetro. Quando o tensor é esticado, o elemento diagonal *AC* é posto sob tração. Sabendo que $E = 200$ GPa e $h = 1\,219$ mm, determine a maior tração admissível em *AC* de modo que as deformações nos elementos *AB* e *CD* não excedam 1 mm.

2.24 Para a estrutura do Problema 2.23, determine (*a*) a distância *h* de modo que as deformações nos elementos *AB*, *BC*, *CD* e *AD* sejam iguais a 1 mm e (*b*) a tração correspondente no elemento *AC*.

2.25 Cada uma das quatro barras verticais que conectam os dois elementos horizontais é feita de alumínio ($E = 70$ GPa) e tem seção transversal retangular e uniforme de 10 × 40 mm. Para o carregamento mostrado, determine o deslocamento de (*a*) ponto *E*, (*b*) ponto *F* e (*c*) ponto *G*.

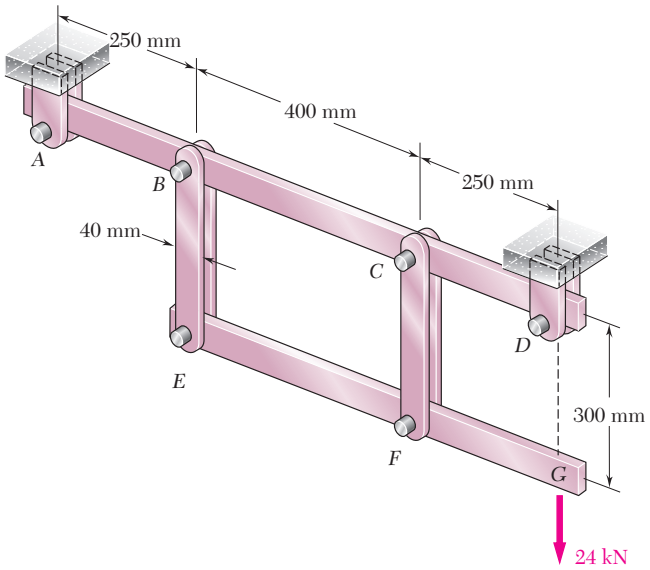


Fig. P2.25

2.26 Cada uma das hastes *AB* e *CD* é feita de aço (200 GPa) e seção transversal retangular e uniforme de 6,35 × 25,4 mm. Determine a maior carga que pode ser suportada pelo ponto *E* se seu deslocamento não pode exceder 0,254 mm.

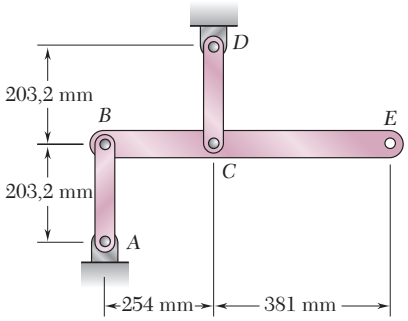


Fig. *P2.26*

2.27 Cada uma das barras *AB* e *CD* é feita de alumínio ($E = 75$ GPa) e tem uma seção transversal com área de 125 mm^2. Sabendo que elas suportam a barra rígida *BC*, determine o deslocamento do ponto *E*.

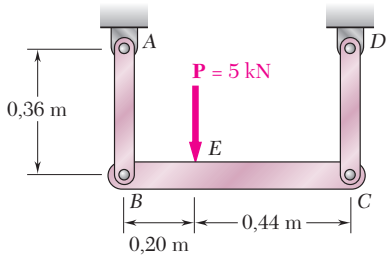


Fig. P2.27

2.28 O comprimento do fio de aço *CD* de 2 mm de diâmetro foi ajustado de modo que, sem nenhuma força aplicada, existe um espaço de 1,5 mm entre a extremidade *B* da barra rígida *ACB* e um ponto de contato *E*. Sabendo que $E = 200$ GPa, determine onde deve ser colocado o bloco de 20 kg na barra rígida para provocar o contato entre *B* e *E*.

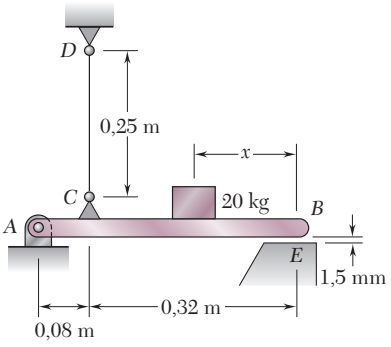


Fig. P2.28

2.29 Um cabo homogêneo de comprimento *L* e seção transversal uniforme é suspenso por uma das extremidades. (*a*) Designando por ρ a densidade (massa por unidade de volume) do cabo e por *E* seu módulo de elasticidade, determine a deformação do cabo em razão de seu próprio peso. (*b*) Mostre que a mesma deformação seria obtida se o cabo estivesse na horizontal e se uma força igual à metade de seu peso fosse aplicada a cada extremidade.

2.30 Uma carga vertical *P* é aplicada no centro *A* da face superior de um tronco de cone circular de altura *h* e com raio mínimo igual a *a* e raio máximo igual a *b*. Denotando por *E* o módulo de elasticidade do material e desprezando o efeito do peso próprio, determine a deflexão do ponto *A*.

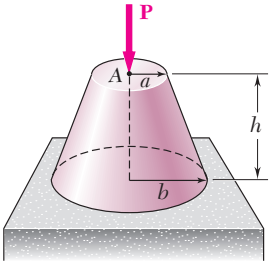


Fig. P2.30

2.31 Designando por ϵ a "deformação específica de engenharia" em um corpo de prova em tração, mostre que a deformação específica verdadeira é $\epsilon_v = \ln(1 + \epsilon)$.

2.32 O volume de um corpo de prova em tração é essencialmente constante enquanto ocorre a deformação plástica. Se o diâmetro inicial do corpo de prova for d_1, mostre que, quando o diâmetro for *d*, a deformação específica verdadeira será $\epsilon_v = 2 \ln(d_1/d)$.

2.9. Problemas estaticamente indeterminados

Nos problemas considerados na seção anterior, sempre podíamos usar diagramas de corpo livre e equações de equilíbrio para determinar as forças internas que ocorrem nas várias partes de um componente sob determinadas condições de carregamento. Os valores obtidos para as forças internas eram então colocados nas Equações (2.8) ou (2.9) para obter a deformação do componente.

No entanto, há muitos problemas nos quais as forças internas não podem ser determinadas apenas por meio da estática. Na verdade, na maioria desses problemas as próprias reações, que são forças externas, não podem ser determinadas simplesmente desenhando-se o diagrama de corpo livre do componente e escrevendo as equações de equilíbrio correspondentes. As equações de equilíbrio devem ser complementadas por relações que envolvem deformações obtidas considerando-se a geometria do problema. Como as equações da estática são incapazes de determinar as reações ou as forças internas, dizemos que os problemas desse tipo são *estaticamente indeterminados*. Os exemplos a seguir mostrarão como lidar com esse tipo de problema.

EXEMPLO 2.2

Uma barra de comprimento L, seção transversal de área A_1, e módulo de elasticidade E_1, foi colocada dentro de um tubo do mesmo comprimento L, mas de seção transversal de área A_2 e módulo de elasticidade E_2 (Fig. 2.25*a*). Qual é a deformação da barra e do tubo quando uma força **P** é aplicada em uma placa lateral rígida como mostra a figura?

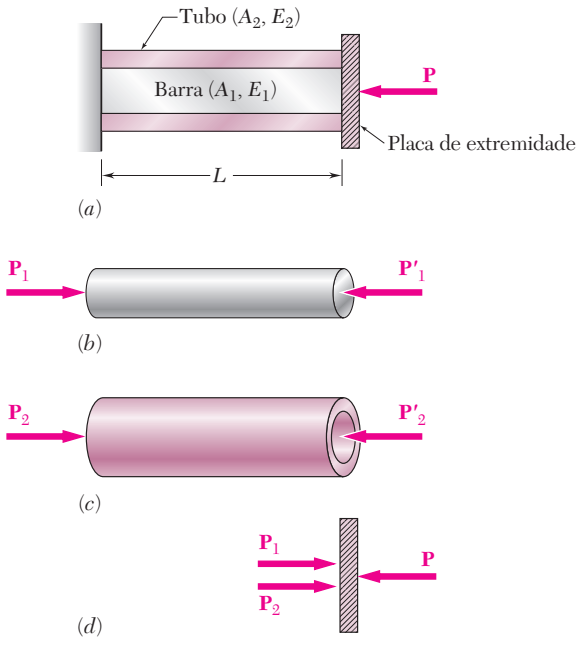


Fig. 2.25

Indicando por P_1 e P_2, respectivamente, as forças axiais na barra e no tubo, desenhamos os diagramas de corpo livre dos três elementos (Fig. 2.25*b*, *c*, *d*). Somente o último dos diagramas fornece alguma informação significativa, ou seja

$$P_1 + P_2 = P \tag{2.11}$$

Está claro que uma única equação não é suficiente para determinar as duas forças internas desconhecidas P_1 e P_2. O problema é estaticamente indeterminado.

No entanto, a geometria do problema mostra que as deformações δ_1 e δ_2 da barra e do tubo devem ser iguais. Usando a Equação (2.7), escrevemos

$$\delta_1 = \frac{P_1 L}{A_1 E_1} \qquad \delta_2 = \frac{P_2 L}{A_2 E_2} \tag{2.12}$$

Igualando as deformações δ_1 e δ_2, obtemos

$$\frac{P_1}{A_1 E_1} = \frac{P_2}{A_2 E_2} \tag{2.13}$$

As Equações (2.11) e (2.13) podem ser resolvidas simultaneamente para P_1 e P_2

$$P_1 = \frac{A_1 E_1 P}{A_1 E_1 + A_2 E_2} \qquad P_2 = \frac{A_2 E_2 P}{A_1 E_1 + A_2 E_2}$$

Qualquer uma das Equações (2.12) pode então ser utilizada para determinar a deformação comum da barra e do tubo.

EXEMPLO 2.3

Uma barra AB de comprimento L e seção transversal uniforme está ligada a suportes rígidos em A e B antes de ser aplicada uma força. Quais são as tensões nas partes AC e BC em razão da aplicação de uma força P no ponto C (Fig. 2.26*a*)?

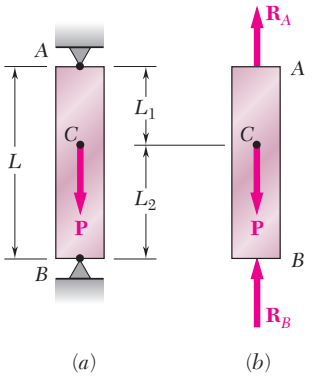


Fig. 2.26

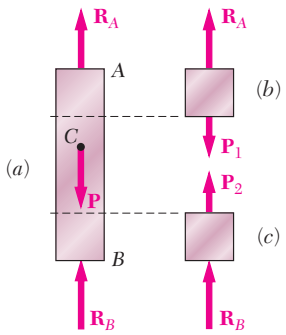


Fig. 2.27

Desenhando o diagrama de corpo livre da barra (Fig. 2.26*b*), obtemos a equação de equilíbrio

$$R_A + R_B = P \tag{2.14}$$

Como essa equação não é suficiente para determinar as duas reações desconhecidas R_A e R_B, o problema é estaticamente indeterminado.

No entanto, as reações podem ser determinadas se observarmos da geometria que a deformação total δ da barra deve ser zero. Designando por δ_1 e δ_2, respectivamente, as deformações das partes AC e BC, temos

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = 0$$

ou, expressando δ_1 e δ_2 em termos das forças internas correspondentes P_1 e P_2

$$\delta = \frac{P_1 L_1}{AE} + \frac{P_2 L_2}{AE} = 0 \tag{2.15}$$

Mas notamos pelos diagramas de corpo livre mostrados, respectivamente, nas partes b e c da Fig. 2.27 que $P_1 = R_A$ e $P_2 = -R_B$. Substituindo esses dois valores na Equação (2.15), escrevemos

$$R_A L_1 - R_B L_2 = 0 \tag{2.16}$$

As Equações (2.14) e (2.16) podem ser resolvidas simultaneamente para R_A e R_B; obtemos $R_A = PL_2/L$ e $R_B = PL_1/L$. As tensões desejadas σ_1 em AC e σ_2 em BC são obtidas dividindo-se, respectivamente, $P_1 = R_A$ e $P_2 = -R_B$ pela área da seção transversal da barra

$$\sigma_1 = \frac{PL_2}{AL} \qquad \sigma_2 = -\frac{PL_1}{AL}$$

Método da superposição. Observamos que uma estrutura é estaticamente indeterminada sempre que ela é vinculada por mais suportes do que aqueles necessários para manter seu equilíbrio. Isso resulta em mais reações desconhecidas do que equações de equilíbrio disponíveis. Muitas vezes é conveniente designar uma das reações como *redundante* e eliminar o suporte correspondente. Como as condições estabelecidas no problema não podem ser alteradas arbitrariamente, a reação redundante deve ser mantida na solução. Contudo, ela será tratada como uma *força desconhecida* que, juntamente com outras forças, deve produzir deformações compatíveis com as restrições originais. A solução real do problema é obtida considerando-se separadamente as deformações provocadas pelas forças e pela reação redundante e somando ou *superpondo* os resultados obtidos.†

†As condições gerais sob as quais o efeito combinado de várias forças pode ser obtido dessa maneira serão discutidas na Seção 2.12.

EXEMPLO 2.4

Seja a barra de aço, presa em ambas as extremidades por apoios fixos, mostrada na Fig. 2.28, submetida ao carregamento indicado. Determine o valor das reações nesses apoios.

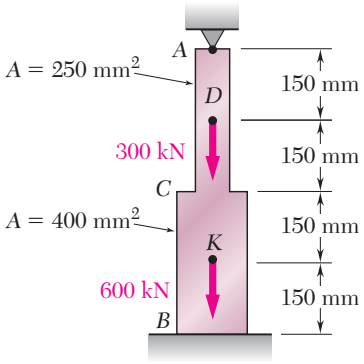


Fig. 2.28

Consideramos a reação em B como redundante e liberamos a barra daquele apoio. A reação $\mathbf{R}_B$ é agora considerada uma força desconhecida (Fig. 2.29*a*) e será determinada por meio da condição de que a deformação δ da barra deve ser igual a zero. A solução é obtida considerando-se separadamente a deformação δ_L causada pelas forças dadas (Fig. 2.29*b*) e a deformação δ_R em razão da reação $\mathbf{R}_B$ redundante (Fig. 2.29*c*).

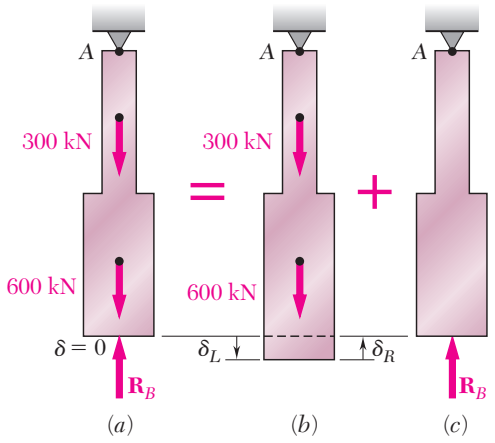


Fig. 2.29

A deformação δ_L foi obtida pela Equação (2.8) depois que a barra foi dividida em quatro partes, como mostra a Fig. 2.30.

Seguindo o mesmo procedimento do Exemplo 2.1, escrevemos

$$P_1 = 0 \qquad P_2 = P_3 = 600 \times 10^3\ \text{N} \qquad P_4 = 900 \times 10^3\ \text{N}$$
$$A_1 = A_2 = 400 \times 10^{-6}\ \text{m}^2 \qquad A_3 = A_4 = 250 \times 10^{-6}\ \text{m}^2$$
$$L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = 0{,}150\ \text{m}$$

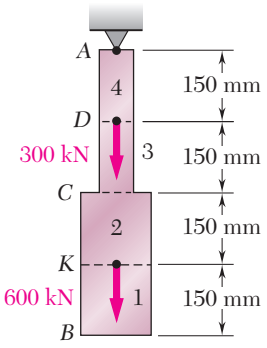


Fig. 2.30

Substituindo esses valores na Equação (2.8), obtemos

$$\delta_L = \sum_{i=1}^{4} \frac{P_i L_i}{A_i E} = \left(0 + \frac{600 \times 10^3\ \text{N}}{400 \times 10^{-6}\ \text{m}^2} + \frac{600 \times 10^3\ \text{N}}{250 \times 10^{-6}\ \text{m}^2} + \frac{900 \times 10^3\ \text{N}}{250 \times 10^{-6}\ \text{m}^2}\right)\frac{0{,}150\ \text{m}}{E}$$

$$\delta_L = \frac{1{,}125 \times 10^9}{E} \qquad (2.17)$$

Para a determinação da deformação δ_R por causa da reação redundante R_B, devemos dividir a barra em duas partes, como mostra a Fig. 2.31, e escrever

$$P_1 = P_2 = -R_B$$
$$A_1 = 400 \times 10^{-6}\ \text{m}^2 \qquad A_2 = 250 \times 10^{-6}\ \text{m}^2$$
$$L_1 = L_2 = 0{,}300\ \text{m}$$

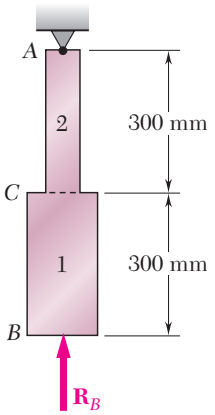


Fig. 2.31

Substituindo esses valores na Equação (2.8), obtemos

$$\delta_R = \frac{P_1 L_1}{A_1 E} + \frac{P_2 L_2}{A_2 E} = -\frac{(1{,}95 \times 10^3) R_B}{E} \qquad (2.18)$$

Considerando que a deformação total δ da barra deve ser zero, escrevemos

$$\delta = \delta_L + \delta_R = 0 \qquad (2.19)$$

e substituindo δ_L e δ_R de (2.17) e (2.18) em (2.19),

$$\delta = \frac{1{,}125 \times 10^9}{E} - \frac{(1{,}95 \times 10^3) R_B}{E} = 0$$

Dessa equação temos o valor de R_B

$$R_B = 577 \times 10^3 \text{ N} = 577 \text{ kN}$$

A reação R_A no apoio superior é obtida do diagrama de corpo livre da barra (Fig. 2.32). Escrevemos

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad R_A - 300 \text{ kN} - 600 \text{ kN} + R_B = 0$$
$$R_A = 900 \text{ kN} - R_B = 900 \text{ kN} - 577 \text{ kN} = 323 \text{ kN}$$

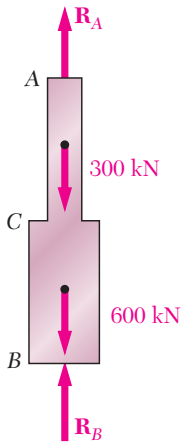


Fig. 2.32

Uma vez determinadas as reações, as tensões e deformações na barra podem ser obtidas facilmente. Deve-se notar que, embora a deformação total da barra seja zero, cada uma de suas partes componentes *se deforma* sob as condições de carregamento e restrições nos apoios.

EXEMPLO 2.5

Determine as reações em A e B para a barra de aço do Exemplo 2.4. Considere o mesmo carregamento e suponha, agora, que exista uma folga de 4,5 mm entre a barra e o apoio B antes de aplicar o carregamento (Fig. 2.33). Suponha $E = 200$ GPa.

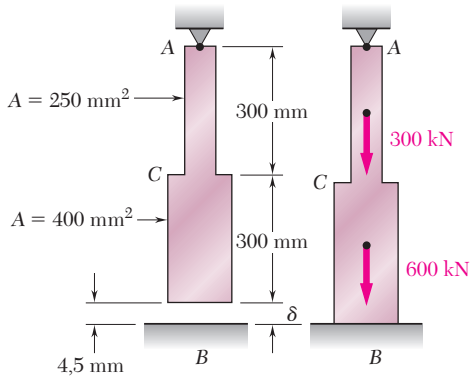


Fig. 2.33

Seguimos o mesmo procedimento do Exemplo 2.4. Considerando a reação em B redundante, calculamos as deformações δ_L e δ_R provocadas, respectivamente, pelas forças e pela reação redundante $\mathbf{R}_B$. No entanto, neste caso a deformação total não é zero, mas $\delta = 4{,}5$ mm. Escrevemos então

$$\delta = \delta_L + \delta_R = 4{,}5 \times 10^{-3} \text{ m} \qquad (2.20)$$

Substituindo δ_L e δ_R de (2.17) e (2.18) em (2.20) e lembrando de que $E = 200$ GPa $= 200 \times 10^9$ Pa, temos

$$\delta = \frac{1{,}125 \times 10^9}{200 \times 10^9} - \frac{(1{,}95 \times 10^3) R_B}{200 \times 10^9} = 4{,}5 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Resolvendo esta equação, determina-se o valor de R_B. Assim, temos

$$R_B = 115{,}4 \times 10^3 \text{ N} = 115{,}4 \text{ kN}$$

A reação em A é obtida do diagrama de corpo livre da barra (Fig. 2.32)

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad R_A - 300 \text{ kN} - 600 \text{ kN} + R_B = 0$$
$$R_A = 900 \text{ kN} - R_B = 900 \text{ kN} - 115{,}4 \text{ kN} = 785 \text{ kN}$$

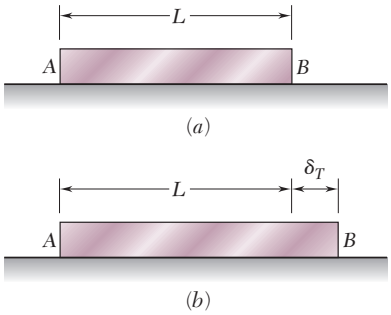


Fig. 2.34

2.10. Problemas que envolvem mudanças de temperatura

Todos os componentes e estruturas até agora foram considerados na mesma temperatura enquanto estavam sendo submetidos a um carregamento. Agora vamos considerar várias situações que envolvem mudanças na temperatura.

Primeiro vamos considerar uma barra homogênea AB de seção transversal uniforme, que se apoia livremente em uma superfície horizontal lisa (Fig. 2.34*a*). Se a temperatura da barra for aumentada de ΔT, observamos que a barra se alonga de δ_T, que é proporcional à variação de temperatura ΔT e ao comprimento L da barra (Fig. 2.34*b*). Temos

$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L \tag{2.21}$$

em que α é uma constante característica do material, chamada de *coeficiente de dilatação térmica*. Como δ_T e L são ambos expressos em unidades de comprimento, α representa uma quantidade *por grau C* ou *por grau F*, dependendo se a mudança de temperatura é expressa em graus Celsius ou graus Fahrenheit.

Com a deformação δ_T deve ser associada uma deformação específica $\epsilon_T = \delta_T/L$. Usando a Equação (2.21), concluímos que

$$\epsilon_T = \alpha\,\Delta T \tag{2.22}$$

A deformação específica ϵ_T é conhecida como *deformação específica térmica*, pois ela é provocada pela variação de temperatura da barra. No caso que estamos considerando aqui, *não há tensão associada com a deformação específica* ϵ_T.

Vamos supor agora que a mesma barra AB de comprimento L é colocada entre dois apoios fixos a uma distância L um do outro (Fig. 2.35*a*). Novamente, não há tensão nem deformação nesta condição inicial. Se aumentarmos a temperatura em ΔT, a barra não poderá se alongar em razão das restrições impostas nas suas extremidades; a deformação δ_T da barra será então zero. Como a barra é homogênea e tem seção transversal uniforme, a deformação específica ϵ_T em qualquer ponto será $\epsilon_T = \delta_T/L$ e, portanto, também será zero. No entanto, os apoios exercerão forças iguais e opostas **P** e **P′** na barra, após a elevação da temperatura, para impedir sua deformação (Fig. 2.35*b*). Concluímos então que é criado um estado de tensão (sem a deformação específica correspondente) na barra.

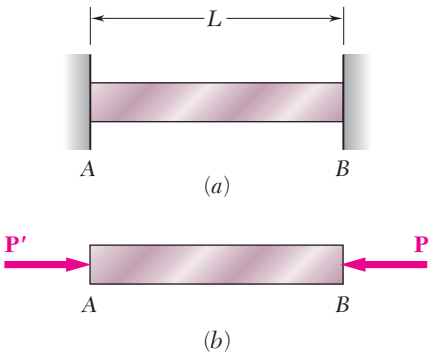


Fig. 2.35

Quando nos preparamos para determinar a tensão σ criada pela variação de temperatura ΔT, observamos que o problema que tínhamos para resolver era estaticamente indeterminado. Portanto, devemos primeiro calcular a intensidade P das reações nos apoios por meio da condição de que a deformação da barra é zero. Usando o método da superposição descrito na Seção 2.9, separamos a barra de seu apoio B (Fig. 2.36*a*) e a deixamos alongar-se livremente com a variação de temperatura ΔT (Fig. 2.36*b*). De acordo com a Fórmula (2.21), a deformação correspondente é

$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L$$

Aplicando-se agora à extremidade B a força **P**, que representa a reação redundante, e usando a Fórmula (2.7), obtemos uma segunda deformação (Fig. 2.36*c*)

$$\delta_P = \frac{PL}{AE}$$

Considerando que a deformação total δ deve ser zero, temos

$$\delta = \delta_T + \delta_P = \alpha(\Delta T)L + \frac{PL}{AE} = 0$$

do qual concluímos que

$$P = -AE\alpha(\Delta T)$$

e que a tensão na barra em razão da mudança de temperatura ΔT é

$$\sigma = \frac{P}{A} = -E\alpha(\Delta T) \tag{2.23}$$

Devemos ter em mente que o resultado obtido aqui e nossa observação anterior referente à ausência de qualquer deformação específica na barra *aplicam-se somente no caso de uma barra homogênea de seção transversal uniforme*. Qualquer outro problema envolvendo uma estrutura impedida de se deformar submetida a uma variação de temperatura deve ser analisado detalhadamente. No entanto, pode ser utilizada a mesma abordagem geral; ou seja, podemos considerar separadamente a deformação em decorrência da variação de temperatura e a deformação em virtude da reação redundante e superpor as soluções obtidas.

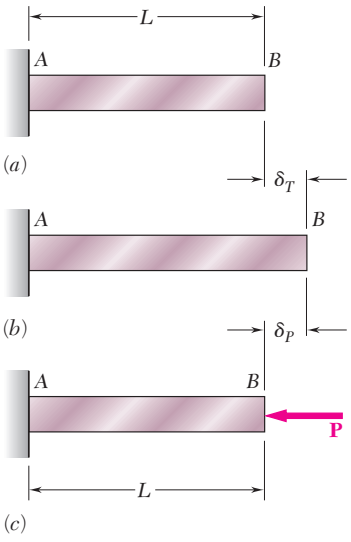


Fig. 2.36

EXEMPLO 2.6

Determine os valores da tensão nas partes *AC* e *CB* da barra de aço mostrada (Fig. 2.37) quando a temperatura da barra for de $-45\,°C$, sabendo que ambos os apoios rígidos estão ajustados quando a temperatura estiver a $+20\,°C$. Use os valores $E = 200$ GPa e $\alpha = 12 \times 10^{-6}/°C$ para o aço.

Primeiro determinamos as reações nos apoios. Como o problema é estaticamente indeterminado, separamos a barra de seu apoio em B e a deixamos mudar com a temperatura

$$\Delta T = (-45\,°C) - (20\,°C) = -65\,°C$$

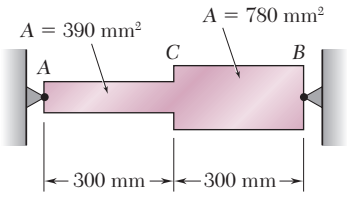


Fig. 2.37

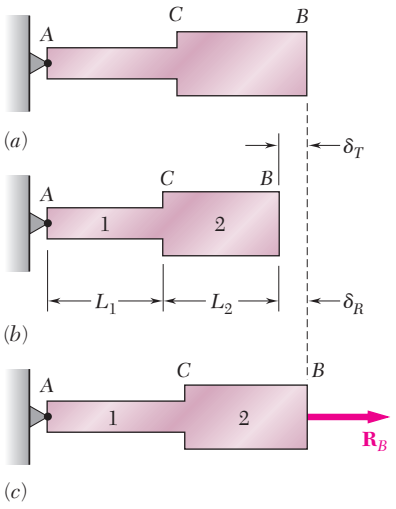


Fig. 2.38

A deformação correspondente (Fig. 2.38*b*) é

$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L = (12 \times 10^{-6}/°\text{C})(-65\,°\text{C})(600\text{ mm})$$
$$= -0{,}468\text{ mm}$$

Aplicando agora a força desconhecida $\mathbf{R}_B$ na extremidade *B* (Fig. 2.38*c*), usamos a Equação (2.8) para expressar a deformação δ_R correspondente. Substituindo

$$L_1 = L_2 = 300\text{ mm}$$
$$A_1 = 390\text{ mm}^2 \qquad A_2 = 780\text{ mm}^2$$
$$P_1 = P_2 = R_B \qquad E = 200\text{ GPa}$$

na Equação (2.8), temos

$$\delta_R = \frac{P_1L_1}{A_1E} + \frac{P_2L_2}{A_2E}$$
$$= \frac{R_B}{200\text{ kN/mm}^2}\left(\frac{300\text{ mm}}{390\text{ mm}^2} + \frac{300\text{ mm}}{780\text{ mm}^2}\right)$$
$$= (5{,}769 \times 10^{-3}\text{ mm/kN})R_B$$

Considerando que a deformação total da barra deve ser zero como resultado das restrições impostas, temos

$$\delta = \delta_T + \delta_R = 0$$
$$= -0{,}468\text{ mm} + (5{,}769 \times 10^{-3}\text{ mm/kN})R_B = 0$$

do qual obtemos

$$R_B = 81{,}12\text{ kN}$$

A reação em *A* é igual e oposta.

Notando que as forças nas duas partes da barra são $P_1 = P_2 = 81{,}12$ kN, obtemos os seguintes valores para a tensão nas partes *AC* e *CB* da barra

$$\sigma_1 = \frac{P_1}{A_1} = \frac{81{,}12\text{ kN}}{390\text{ mm}^2} = +208\text{ MPa}$$
$$\sigma_2 = \frac{P_2}{A_2} = \frac{81{,}12\text{ kN}}{780\text{ mm}^2} = +104\text{ MPa}$$

Não podemos enfatizar demasiadamente o fato de que, embora a *deformação total* da barra deva ser zero, as deformações das partes componentes *AC* e *CB* *não serão nulas*. Portanto, uma solução do problema baseada na hipótese de que essas deformações são iguais a zero seria errada. E nem os valores da deformação específica em *AC* ou *CB* podem ser considerados iguais a zero. Para melhor destacarmos esse ponto, vamos determinar a deformação específica ϵ_{AC} na parte *AC* da barra. A deformação específica ϵ_{AC} pode ser dividida em duas partes componentes; uma é a deformação específica térmica ϵ_T produzida na barra livre pela variação de temperatura ΔT (Fig. 2.38*b*). Da Equação (2.22) escrevemos

$$\epsilon_T = \alpha\,\Delta T = (12 \times 10^{-6}/°\text{C})(-65°\text{C})$$
$$= -780 \times 10^{-6}$$

A outra componente de ϵ_{AC} está associada com a tensão σ_1 por causa da força $\mathbf{R}_B$ aplicada à barra (Fig. 2.38*c*). Da lei de Hooke, expressamos essa componente da deformação como

$$\frac{\sigma_1}{E} = \frac{208\text{ MPa}}{200000\text{ MPa}} = 1040 \times 10^{-6}$$

Somando as duas componentes da deformação específica em *AC*, obtemos

$$\epsilon_{AC} = \epsilon_T + \frac{\sigma_1}{E} = -780 \times 10^{-6} + 1040 \times 10^{-6}$$
$$= +260 \times 10^{-6}$$

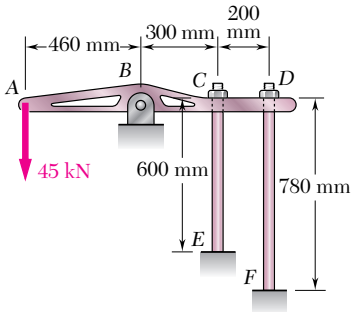
Um cálculo semelhante fornece a deformação específica na parte *CB* da barra

$$\epsilon_{CB} = \epsilon_T + \frac{\sigma_2}{E} = -780 \times 10^{-6} + 520 \times 10^{-6}$$
$$= -260 \times 10^{-6}$$

As deformações δ_{AC} e δ_{CB} das duas partes da barra são expressas, respectivamente, como

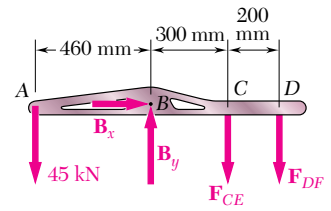
$$\delta_{AC} = \epsilon_{AC}(AC) = (260 \times 10^{-6})(300 \times 10^{-3}\text{ m})$$
$$= 78 \times 10^{-6}\text{ m}$$
$$\delta_{CB} = \epsilon_{CB}(CB) = (-260 \times 10^{-6})(300 \times 10^{-3}\text{ m})$$
$$= -78 \times 10^{-6}\text{ m}$$

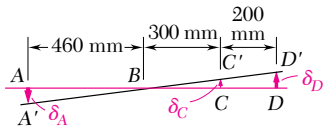
Verificamos então que, embora a soma $\delta = \delta_{AC} + \delta_{CB}$ das duas deformações seja zero, nenhuma das deformações é igual a zero.

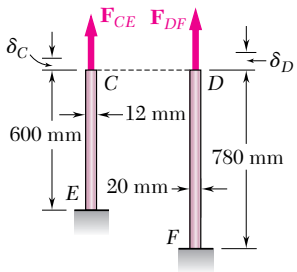


PROBLEMA RESOLVIDO 2.3

As barras *CE* de 12 mm de diâmetro e *DF* de 20 mm de diâmetro estão ligadas à barra rígida *ABCD* conforme mostra a figura. Sabendo que as barras são feitas de alumínio e usando $E = 70$ GPa, determine (*a*) a força em cada barra provocada pela força mostrada na figura e (*b*) o deslocamento correspondente do ponto *A*.







SOLUÇÃO

Estática. Considerando o diagrama de corpo livre da barra *ABCD*, notamos que a reação em *B* e as forças aplicadas pelas barras são indeterminadas. No entanto, usando a estática, podemos escrever

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: \quad (45\text{ kN})(460\text{ mm}) - F_{CE}(300\text{ mm}) - F_{DF}(500\text{ mm}) = 0$$
$$3F_{CE} + 5F_{DF} = 207 \tag{1}$$

Geometria. Após a aplicação da força de 45 kN, a posição da barra é $A'BC'D'$. Com base nos triângulos semelhantes BAA', BCC', e BDD', temos

$$\frac{\delta_C}{300\text{ mm}} = \frac{\delta_D}{500\text{ mm}} \qquad \delta_C = 0{,}60\,\delta_D \tag{2}$$

$$\frac{\delta_A}{460\text{ mm}} = \frac{\delta_D}{500\text{ mm}} \qquad \delta_A = 0{,}92\,\delta_D \tag{3}$$

Deformações. Usando a Equação (2.7), temos

$$\delta_C = \frac{F_{CE}L_{CE}}{A_{CE}E} \qquad \delta_D = \frac{F_{DF}L_{DF}}{A_{DF}E}$$

Substituindo os valores de δ_C e δ_D em (2), escrevemos

$$\delta_C = 0{,}6\delta_D \qquad \frac{F_{CE}L_{CE}}{A_{CE}E} = 0{,}6\,\frac{F_{DF}L_{DF}}{A_{DF}E}$$

$$F_{CE} = 0{,}6\,\frac{L_{DF}}{L_{CE}}\frac{A_{CE}}{A_{DF}}F_{DF} = 0{,}6\left(\frac{780\text{ mm}}{600\text{ mm}}\right)\left[\frac{\frac{1}{4}\pi(12\text{ mm})^2}{\frac{1}{4}\pi(20\text{ mm})^2}\right]F_{DF} \qquad F_{CE} = 0{,}281F_{DF}$$

Força em cada barra. Substituindo F_{CE} em (1) e lembrando que todas as forças foram expressas em kN, temos

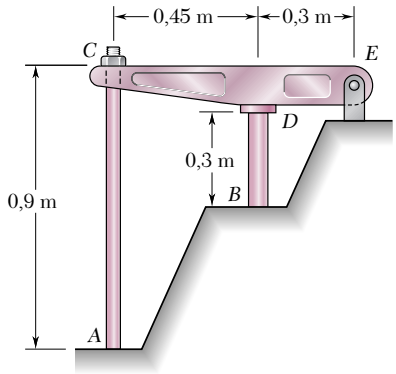
$$3(0{,}281\,F_{DF}) + 5F_{DF} = 207 \qquad F_{DF} = 35{,}43\text{ kN} \blacktriangleleft$$
$$F_{CE} = 0{,}281F_{DF} = 0{,}281(35{,}43) \qquad F_{CE} = 9{,}96\text{ kN} \blacktriangleleft$$

Deslocamentos. O deslocamento do ponto *D* é

$$\delta_D = \frac{F_{DF}L_{DF}}{A_{DF}E} = \frac{(35{,}43\text{ kN})(780\text{ mm})}{\frac{1}{4}\pi(20\text{ mm})^2(70\text{ kN/mm}^2)} \qquad \delta_D = 1{,}26\text{ mm}$$

Usando (3), escrevemos

$$\delta_A = 0{,}92\delta_D = 0{,}92\,(1{,}26\text{ mm}) \qquad \delta_A = 1{,}16\text{ mm} \blacktriangleleft$$



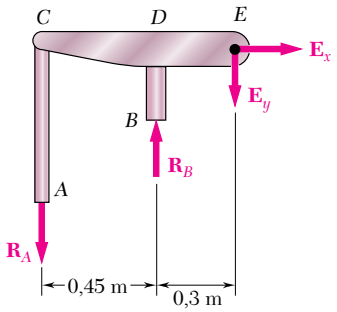
PROBLEMA RESOLVIDO 2.4

A barra rígida *CDE* está ligada a um pino com apoio em *E* e apoiada sobre o cilindro *BD* de latão, com 30 mm de diâmetro. Uma barra de aço *AC* com diâmetro de 22 mm passa através de um furo na barra e está presa por uma porca que está ajustada quando a temperatura do conjunto todo é de 20 °C. A temperatura do cilindro de latão é então elevada para 50 °C enquanto a barra de aço permanece a 20 °C. Supondo que não havia tensões presentes antes da variação de temperatura, determine a tensão no cilindro.

Barra *AC*: Aço
$E = 200$ GPa
$\alpha = 11{,}7 \times 10^{-6}/°C$

Cilindro *BD*: Latão
$E = 105$ GPa
$\alpha = 20{,}9 \times 10^{-6}/°C$

SOLUÇÃO



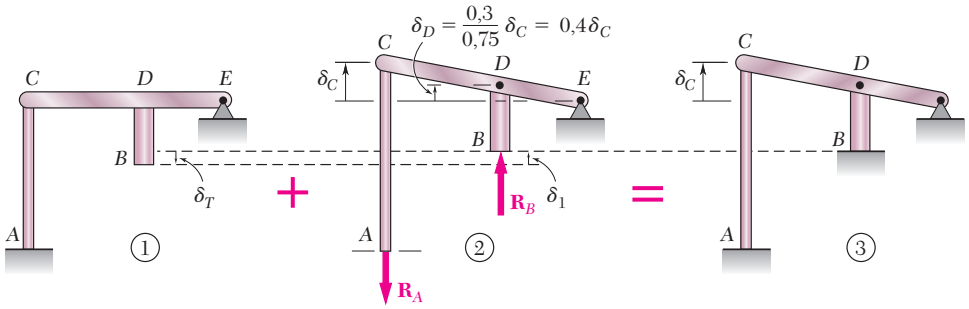
Estática. Considerando o diagrama de corpo livre do conjunto inteiro, escrevemos

$$+\circlearrowleft \Sigma M_E = 0: \quad R_A(0{,}75\text{ m}) - R_B(0{,}3\text{ m}) = 0 \qquad R_A = 0{,}4R_B \tag{1}$$

Deformações. O método da superposição será utilizado, considerando $\mathbf{R}_B$ redundante. Com o apoio em *B* removido, o aumento de temperatura do cilindro faz o ponto *B* se mover para baixo com valor δ_T. A reação $\mathbf{R}_B$ deve provocar um deslocamento δ_1 igual a δ_T de modo que o deslocamento final em *B* será zero (Fig. 3).

Deslocamento δ_T. Em virtude de um aumento na temperatura de 50 °C − 20 °C = 30 °C, o comprimento do cilindro de latão aumenta em δ_T.

$$\delta_T = L(\Delta T)\alpha = (0{,}3\text{ m})(30°C)(20{,}9 \times 10^{-6}/°C) = 188{,}1 \times 10^{-6}\text{ m} \downarrow$$



Deslocamento δ_1. Notamos que $\delta_D = 0{,}4\,\delta_C$ e $\delta_1 = \delta_D + \delta_{B/D}$.

$$\delta_C = \frac{R_A L}{AE} = \frac{R_A(0{,}9\text{ m})}{\frac{1}{4}\pi(0{,}022\text{ m})^2(200\text{ GPa})} = 11{,}84 \times 10^{-9} R_A \uparrow$$

$$\delta_D = 0{,}40\delta_C = 0{,}4(11{,}84 \times 10^{-9} R_A) = 4{,}74 \times 10^{-9} R_A \uparrow$$

$$\delta_{B/D} = \frac{R_B L}{AE} = \frac{R_B(0{,}3\text{ m})}{\frac{1}{4}\pi(0{,}03\text{ m})^2(105\text{ GPa})} = 4{,}04 \times 10^{-9} R_B \uparrow$$

De acordo com a Equação (1), em que $R_A = 0{,}4R_B$, escrevemos

$$\delta_1 = \delta_D + \delta_{B/D} = [4{,}74(0{,}4R_B) + 4{,}04R_B]10^{-9} = 5{,}94 \times 10^{-9} R_B \uparrow$$

Mas $\delta_T = \delta_1$: $\quad 188{,}1 \times 10^{-6}\text{ m} = 5{,}94 \times 10^{-9} R_B \qquad R_B = 31{,}7\text{ kN}$

Tensão no cilindro: $\quad \sigma_B = \dfrac{R_B}{A} = \dfrac{31{,}7\text{ kN}}{\frac{1}{4}\pi(0{,}03)^2} \qquad \sigma_B = 44{,}8\text{ MPa}$ ◀

PROBLEMAS

2.33 Uma barra de 250 mm de comprimento e seção transversal retangular de 15 × 30 mm é formada por duas camadas de alumínio de 5 mm de espessura, e uma camada central de latão de mesma espessura. Se o conjunto é submetido a forças centradas de intensidade $P = 30$ kN, e sabendo que $E_{alum} = 70$ GPa e $E_{latão} = 105$ GPa, determine a tensão normal (*a*) nas camadas de alumínio e (*b*) na camada de bronze.

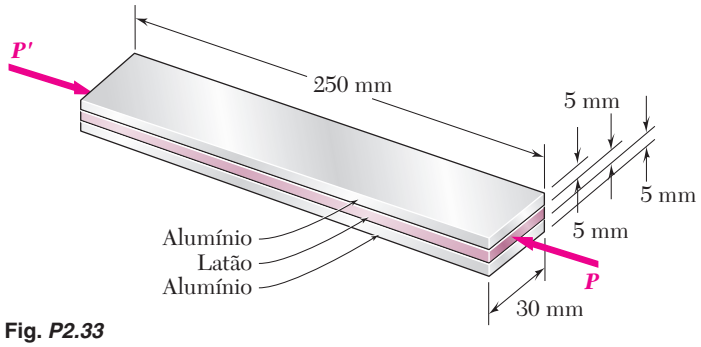


Fig. *P2.33*

2.34 Determine a deformação do compósito do Problema 2.33 se for submetido a uma carga centrada de intensidade $P = 45$ kN.

2.35 Forças de compressão centradas de 178 kN são aplicadas em ambas as extremidades do conjunto mostrado na figura por meio de placas rígidas. Sabendo que $E_{aço} = 200$ GPa e $E_{alum} = 69{,}6$ GPa, determine (*a*) as tensões normais no núcleo de aço e no tubo de alumínio e (*b*) a deformação do conjunto.

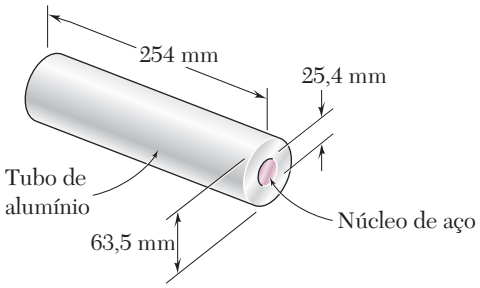


Fig. P2.35

2.36 O comprimento do conjunto diminui em 0,15 mm quando uma força axial é aplicada por meio de placas rígidas nas extremidades do conjunto. Determine (*a*) a intensidade da força aplicada e (*b*) a tensão correspondente no núcleo de aço.

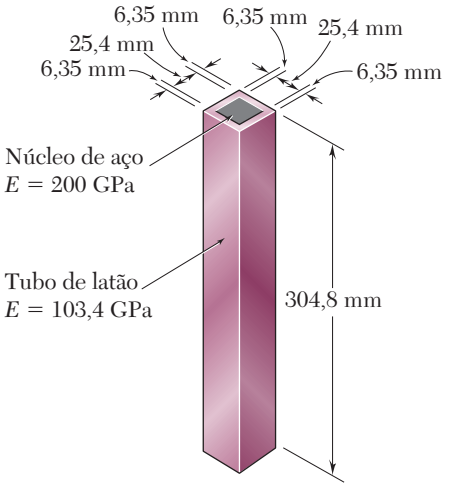


Fig. P2.36

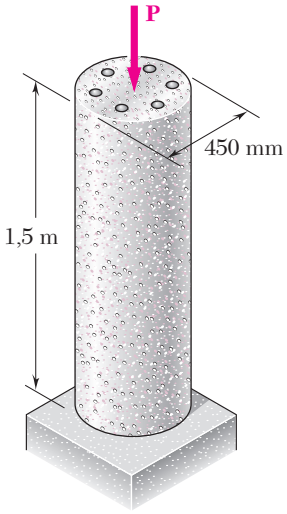


Fig. P2.37

2.37 A coluna de concreto de 1,5 m é reforçada com seis barras de aço, cada uma com 28 mm de diâmetro. Sabendo que $E_{aço} = 200$ GPa e $E_{conc} = 25$ GPa, determine as tensões normais no aço e no concreto quando uma força **P** centrada axial de 1 550 kN é aplicada à coluna.

2.38 Para a coluna do Problema 2.37, determine a força centrada máxima que pode ser aplicada se a tensão normal admissível é de 160 MPa no aço e 18 MPa no concreto.

2.39 Três barras de aço ($E = 200$ GPa) suportam uma carga **P** de 36 kN. Cada uma das barras *AB* e *CD* tem uma área de seção transversal de 200 mm^2 e a barra *EF* tem uma área de seção transversal de 625 mm^2. Desprezando a deformação da barra BED, determine (*a*) a variação do comprimento da barra *EF* e (*b*) a tensão em cada barra.

2.40 Três fios são utilizados para suspender a placa mostrada. Os fios *A* e *B* com diâmetro 3,175 mm são de alumínio e C é um fio de aço com diâmetro de 2,117 mm. Sabendo que a tensão admissível para o alumínio ($E = 71{,}7$ GPa) é 96,5 MPa e para o aço ($E = 200$ GPa) é 124,1 MPa, determine a máxima carga **P** que pode ser aplicada.

2.41 Duas barras cilíndricas, uma de aço e outra de latão, são unidas em *C* e contidas por apoios rígidos em *A* e *E*. Para o carregamento indicado na figura e sabendo que $E_{aço} = 200$ GPa e $E_{latão} = 105$ GPa, determine (*a*) as reações em *A* e *E* e (*b*) o deslocamento do ponto *C*.

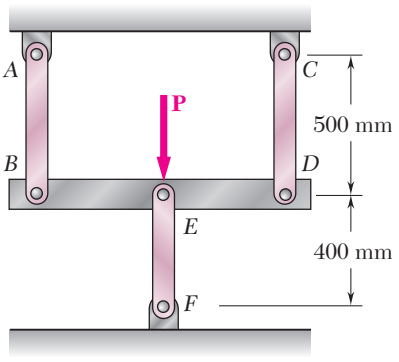


Fig. P2.39

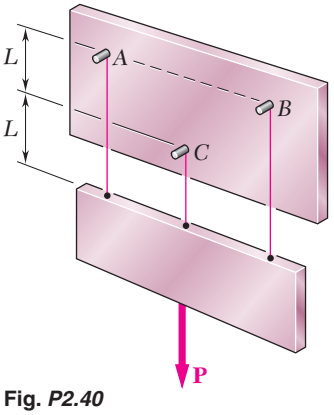


Fig. *P2.40*

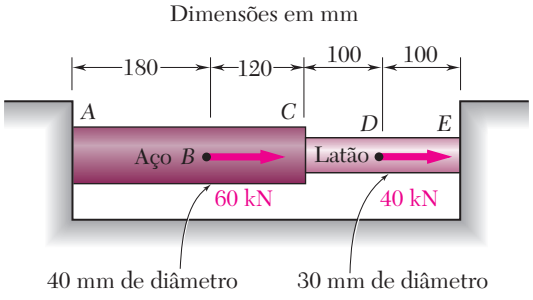


Fig. P2.41

2.42 Resolva o Problema 2.41 supondo que a barra *AC* é feita de latão e a barra *CE* é feita de aço.

2.43 Um tubo de aço ($E = 200$ GPa) com diâmetro externo de 31,8 mm e espessura de 3,18 mm é colocado em um torno de bancada ajustado de maneira que as mandíbulas apenas toquem as extremidades do tubo sem exercerem nenhuma pressão sobre ele. As duas forças mostradas na figura são então aplicadas ao tubo. Após aplicar essas forças, o torno de bancada é ajustado para diminuir a distância entre suas mandíbulas em 0,2 mm. Determine (*a*) as forças aplicadas pelo torno de bancada no tubo em *A* e *D* e (*b*) a variação do comprimento da parte *BC* do tubo.

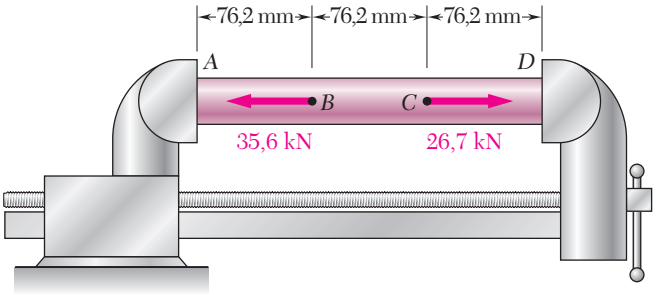


Fig. P2.43

2.44 Resolva o Problema 2.43 supondo que, depois de as forças terem sido aplicadas, o torno de bancada seja ajustado para aumentar a distância entre suas mandíbulas em 0,1 mm.

2.45 As barras de aço *BC* e *DE* ($E = 200$ GPa) tem 12,7 mm de largura e 6,35 mm de espessura. Determine (*a*) a força atuante em cada vínculo quando uma carga **P** de 2 669 N é aplicada à barra rígida *AF* como mostrada e (*b*) o correspondente deslocamento do ponto A.

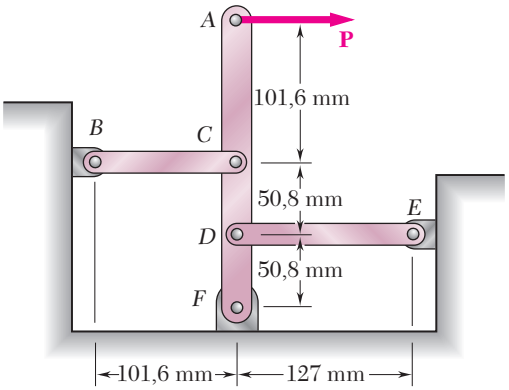


Fig. *P2.45*

2.46 A barra rígida *ABCD* é suportada por quatro fios idênticos. Determine a tensão em cada fio causada pela carga **P** mostrada.

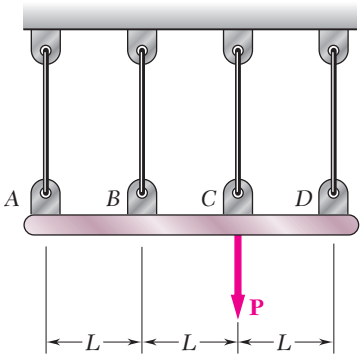


Fig. P2.46

2.47 O tubo de alumínio é completamente unido ao núcleo de latão e a montagem tem as tensões aliviadas a uma temperatura de 15 °C. Considerando apenas deformações axiais, determine a tensão no alumínio quando a temperatura alcançar os 195 °C.

2.48 Resolva o Problema 2.47, supondo que o núcleo é feito de aço ($E = 200$ GPa, $\alpha = 11,7 \times 10^{-6}$/°C) em substituição ao latão.

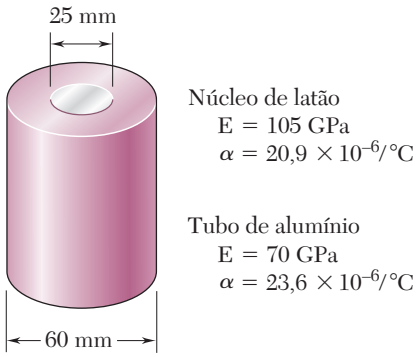


Fig. P2.47

2.49 Uma coluna de concreto de 1219 mm de altura é reforçada por quatro barras de aço, cada uma com diâmetro de 19,05 mm. Sabendo que $E_{aço} = 200$ GPa, $\alpha_{aço} = 11,7 \times 10^{-6}$/°C e $E_{conc} = 24,8$ GPa e $\alpha_{conc} = 9,9 \times 10^{-6}$/°C, determine as tensões normais induzidas no aço e no concreto por um aumento de temperatura de 30 °C.

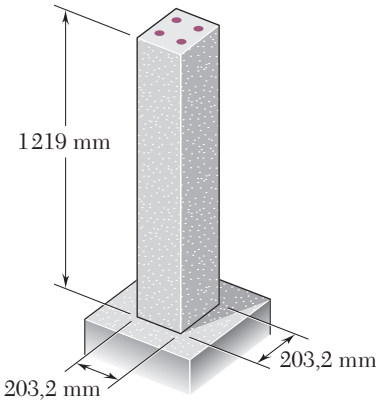


Fig. *P2.49*

2.50 Um tubo de latão ($\alpha_{latão} = 20,9 \times 10^{-6}$/°C) é totalmente preso ao núcleo de aço ($\alpha_{aço} = 11,7 \times 10^{-6}$/°C). Determine o maior aumento permitido na temperatura considerando que a tensão no núcleo de aço não deve exceder 55 MPa.

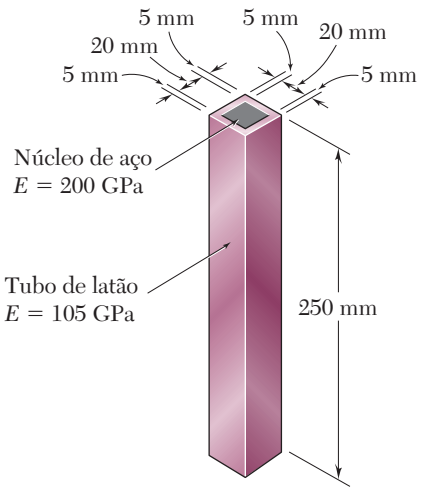


Fig. P2.50

2.51 Uma barra formada por duas partes cilíndricas *AB* e *BC* está impedida de se deslocar em ambas as extremidades. A parte *AB* é feita de aço ($E_{aço} = 200$ GPa, $\alpha_{aço} = 11{,}7 \times 10^{-6}/°C$) e a parte *BC* é feita de latão ($E_{latão} = 105$ GPa, $\alpha_{latão} = 20{,}9 \times 10^{-6}/°C$). Sabendo que a barra está inicialmente livre de tensões, determine a força compressiva induzida em *ABC* quando há um aumento de temperatura de 50 °C.

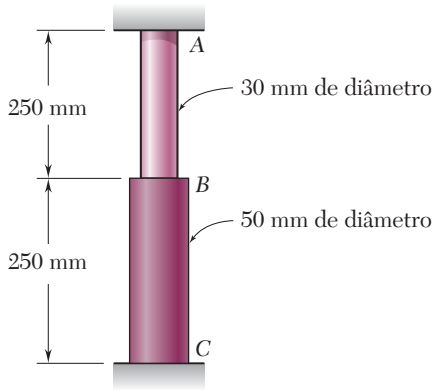


Fig. P2.51

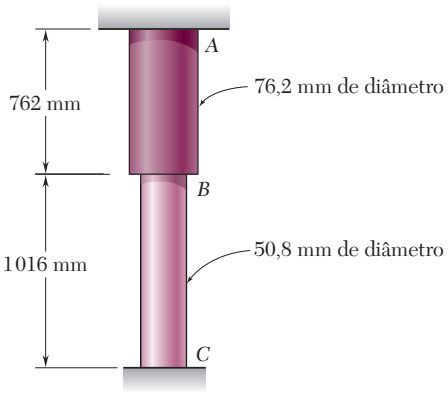


Fig. P2.52

2.52 Uma barra formada por duas partes cilíndricas *AB* e *BC* está impedida de se deslocar em ambas as extremidades. A parte *AB* é feita de latão ($E_{latão} = 103{,}4$ GPa, $\alpha_{latão} = 20{,}9 \times 10^{-6}/°C$) e a parte *BC* é feita de aço ($E_{aço} = 200$ GPa $\alpha_{ço} = 11{,}7 \times 10^{-6}/°C$). Sabendo que a barra está inicialmente livre de tensões, determine (*a*) as tensões normais nas partes *AB* e *BC* provocadas por um aumento de 32,2 °C na temperatura e (*b*) o deslocamento correspondente do ponto *B*.

2.53 Resolva o Problema 2.52, considerando que a porção *AB* da barra composta é feita de aço e a porção *BC* é feita de latão.

2.54 Um trilho de aço ($E = 200$ GPa e $\alpha = 11{,}7 \times 10^{-6}/°C$) foi instalado à temperatura de −1,1 °C. Determine a tensão normal no trilho quando a temperatura alcança os 51,67 °C, considerando que os trilhos são (*a*) soldados a fim de assegurar continuidade e (*b*) tem 11,89 m de comprimento com uma folga entre trilhos igual a 6,35 mm.

2.55 Duas barras de aço ($E_{aço} = 200$ GPa e $\alpha_{aço} = 11{,}7 \times 10^{-6}/°C$) são utilizadas para reforçar uma barra de latão ($E_{latão} = 105$ GPa, $\alpha_{latão} = 20{,}9 \times 10^{-6}/°C$) que está submetida a uma força $P = 25$ kN. Quando as barras de aço foram fabricadas, a distância entre os centros dos furos que deveriam encaixar os pinos foi feita 0,5 mm menor do que os 2 m necessários. As barras de aço foram então colocadas em um forno para aumentar seu comprimento para que pudessem encaixar-se nos pinos. Após a fabricação, a temperatura das barras de aço voltou a ser a temperatura ambiente. Determine (*a*) o aumento na temperatura necessário para que as barras de aço se encaixassem nos pinos e (*b*) a tensão na barra de latão depois que a força foi aplicada a ela.

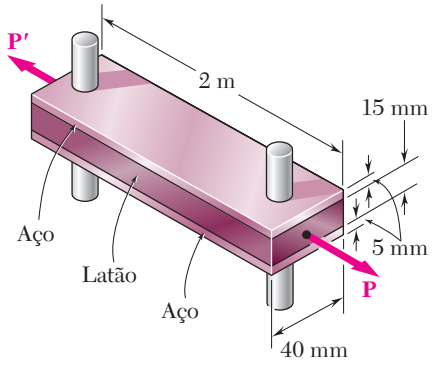


Fig. P2.55

2.56 Determine a força P máxima que pode ser aplicada à barra de latão do Problema 2.55 se a tensão admissível nas barras de aço for de 30 MPa e a tensão admissível na barra de latão, 25 MPa.

2.57 O anel de latão ($E_{latão}$ = 105 GPa, $\alpha_{latão}$ = 20,9 × 10^{-6}/°C) e a barra de aço ($E_{aço}$ = 200 GPa e $\alpha_{aço}$ = 11,7 × 10^{-6}/°C tem as dimensões mostradas à temperatura de 20 °C. A barra de aço é resfriada até que se encaixe com folga no anel. A temperatura da montagem é então aumentando em 45 °C. Determine (*a*) a tensão final na barra de aço e (*b*) o comprimento final da barra de aço.

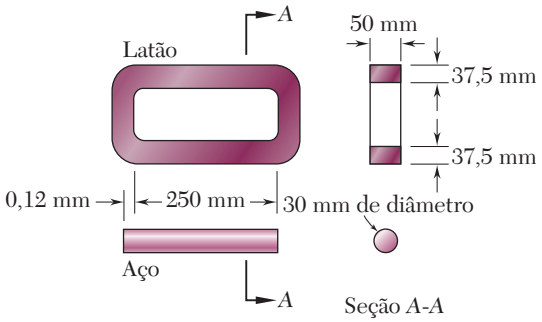
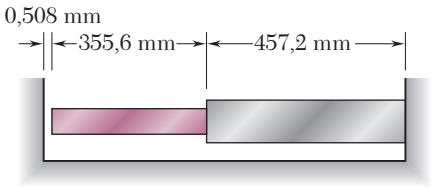


Fig. *P2.57*

2.58 Sabendo que existe um espaçamento de 0,508 mm quando a temperatura é de 23,9 °C, determine (*a*) a temperatura na qual a tensão normal na barra de alumínio será igual a −75,8 MPa e (*b*) o comprimento exato correspondente da barra de alumínio.

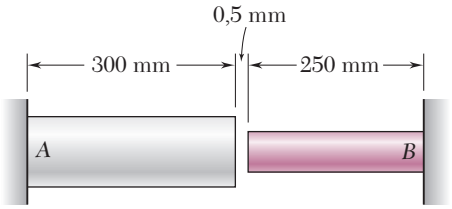


Bronze	Alumínio
A = 1 548 mm^2	A = 1 806 mm^2
E = 103,4 GPa	E = 73,1 GPa
α = 21,6 × 10^{-6}/°C	α = 23,2 × 10^{-6}/°C

Figs. P2.58 e P2.59

2.59 Determine (*a*) a força de compressão nas barras mostradas depois que a temperatura atingiu 82 °C e (*b*) a variação correspondente no comprimento da barra de bronze.

2.60 Na temperatura ambiente (20 °C) existe um espaçamento de 0,5 mm entre as extremidades das barras mostradas na figura. Algum tempo depois, quando a temperatura atingir 140 °C, determine (*a*) a tensão normal na barra de alumínio e (*b*) sua variação do comprimento.



Alumínio	Aço inoxidável
A = 2000 mm^2	A = 800 mm^2
E = 75 GPa	E = 190 GPa
α = 23 × 10^{-6}/°C	α = 17,3 × 10^{-6}/°C

Fig. *P2.60*

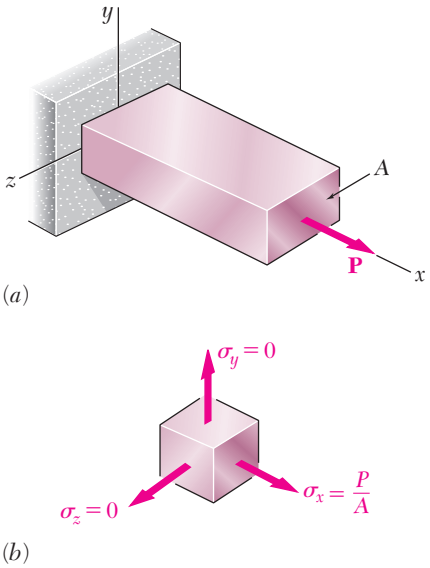


Fig. 2.39

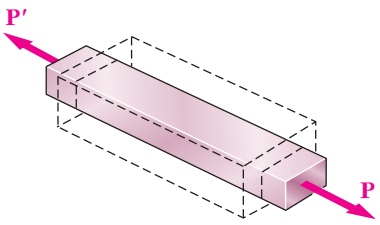


Fig. 2.40

2.11. Coeficiente de Poisson

Vimos anteriormente neste capítulo que, quando uma barra delgada homogênea é carregada axialmente, a tensão e a deformação específica resultantes satisfazem a lei de Hooke, desde que o limite de elasticidade do material não seja excedido. Supondo que a direção da força **P** seja a do eixo x (Fig. 2.39*a*), temos $\sigma_x = P/A$, em que A é a área da seção transversal da barra, e, pela lei de Hooke, temos

$$\epsilon_x = \sigma_x/E \tag{2.24}$$

em que E é o módulo de elasticidade do material.

Notamos também que as tensões normais nas faces, respectivamente, perpendiculares aos eixos y e z são iguais a zero: $\sigma_y = \sigma_z = 0$ (Fig. 2.39*b*). Poderíamos ser tentados a concluir que as deformações específicas correspondentes ϵ_y e ϵ_z também são iguais a zero. No entanto, *não é isso o que ocorre*. Em todos os materiais de engenharia, a deformação produzida por uma força axial de tração **P** na direção da força é acompanhada por uma contração em qualquer direção transversal (Fig. 2.40).† Nesta seção e nas próximas (Seções 2.12 até 2.15), vamos supor que todos os materiais considerados são *homogêneos* e *isotrópicos*, ou seja, suas propriedades mecânicas serão consideradas independentes da *direção* e *posição*. Conclui-se daí que a deformação específica deve ter o mesmo valor para qualquer direção transversal. Portanto, para o carregamento mostrado na Fig. 2.39 devemos ter $\epsilon_y = \epsilon_z$. Esse valor comum é chamado de *deformação específica lateral*. Um parâmetro importante para determinado material é o seu *coeficiente de Poisson*, assim chamado em homenagem ao matemático francês Siméon Denis Poisson (1781–1840) e designado pela letra grega ν (nu). Ele é definido como

$$\nu = -\frac{\text{deformação específica lateral}}{\text{deformação específica axial}} \tag{2.25}$$

ou

$$\nu = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = -\frac{\epsilon_z}{\epsilon_x} \tag{2.26}$$

para a condição de carregamento representado na Fig. 2.39. Note o uso do sinal de menos nas Equações (2.25) e (2.26). Para obter um valor positivo de ν, as deformações específicas axial e lateral têm de ter sinais opostos.‡ Resolvendo a Equação (2.26) para ϵ_y e ϵ_z, e usando a (2.24), temos as seguintes relações, que descrevem completamente a condição de deformação específica de uma barra, submetida a uma força axial aplicada em direção paralela ao eixo x

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \qquad \epsilon_y = \epsilon_z = -\frac{\nu\sigma_x}{E} \tag{2.27}$$

† Seria tentador, mas igualmente errado, supor que o volume da barra permanece inalterado como resultado do efeito combinado da deformação axial e da contração transversal (ver a Seção 2.13).

‡ No entanto, alguns materiais, como as espumas de polímeros, expandem lateralmente quando são esticados. Como as deformações específicas axial e lateral têm o mesmo sinal,o coeficiente de Poisson desses materiais é negativo. (*Ver* LAKES, Roderic. Foam structures with a negative Poisson's ratio. *Science*, v. 235, p. 1 038-40, 27 fev. 1987.)

EXEMPLO 2.7

Observa-se que uma barra de 500 mm de comprimento e 16 mm de diâmetro, feita de um material homogêneo e isotrópico, aumenta no comprimento em 300 μm, e diminui no diâmetro em 2,4 μm quando submetida a uma força axial de 12 kN. Determine o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson do material.

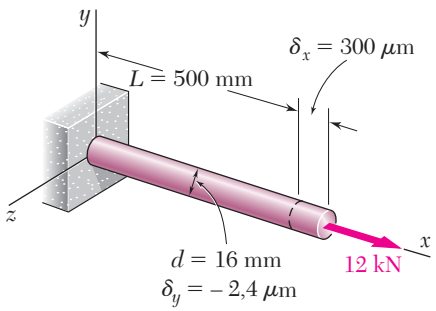


Fig. 2.41

A área da seção transversal da barra é

$$A = \pi r^2 = \pi(8 \times 10^{-3}\,\text{m})^2 = 201 \times 10^{-6}\,\text{m}^2$$

Escolhendo o eixo x ao longo do eixo da barra (Fig. 2.41), escrevemos

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{12 \times 10^3\,\text{N}}{201 \times 10^{-6}\,\text{m}^2} = 59{,}7\ \text{MPa}$$

$$\epsilon_x = \frac{\delta_x}{L} = \frac{300\ \mu\text{m}}{500\ \text{mm}} = 600 \times 10^{-6}$$

$$\epsilon_y = \frac{\delta_y}{d} = \frac{-2{,}4\ \mu\text{m}}{16\ \text{mm}} = -150 \times 10^{-6}$$

Da lei de Hooke, $\sigma_x = E\epsilon_x$, obtemos

$$E = \frac{\sigma_x}{\epsilon_x} = \frac{59{,}7\ \text{MPa}}{600 \times 10^{-6}} = 99{,}5\ \text{GPa}$$

e, da Equação (2.26),

$$\nu = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = -\frac{-150 \times 10^{-6}}{600 \times 10^{-6}} = 0{,}25$$

2.12. Carregamento multiaxial; lei de Hooke generalizada

Todos os exemplos considerados até agora tratavam de elementos delgados submetidos a forças axiais, isto é, a forças com direção de um único eixo. Escolhemos esse eixo como o eixo x, designamos por P a força interna em uma dada localização e as componentes de tensão correspondentes eram $\sigma_x = P/A$, $\sigma_y = 0$, e $\sigma_z = 0$.

Vamos agora considerar elementos estruturais submetidos a cargas que atuam nas direções dos três eixos coordenados e produzem tensões normais σ_x, σ_y e σ_z que são todas diferentes de zero (Fig. 2.42). Essa condição é conhecida como *carregamento multiaxial*. Note que essa não é a condição geral de tensão descrita na Seção 1.12, visto que não há tensões de cisalhamento incluídas entre as tensões mostradas na Fig. 2.42.

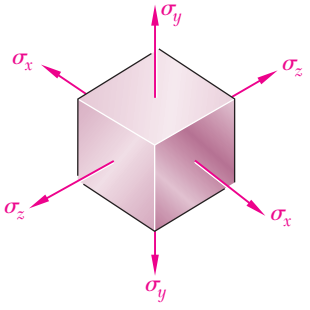


Fig. 2.42

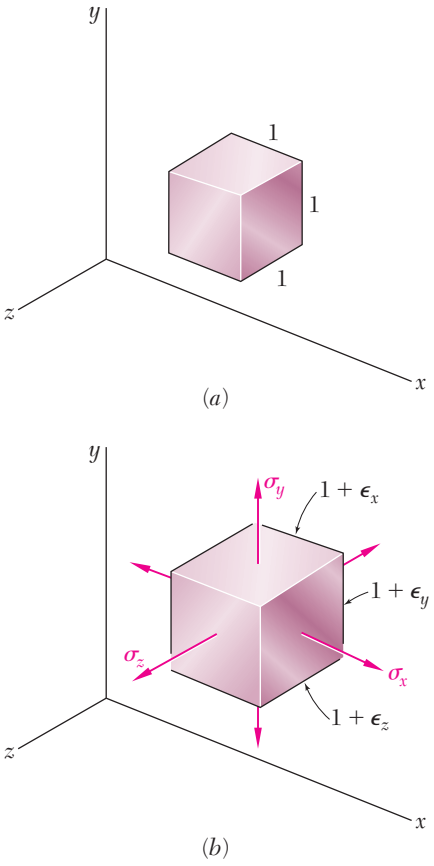


Fig. 2.43

Considere um elemento de um material isotrópico na forma de um cubo (Fig. 2.43*a*). Podemos supor que as arestas do cubo tenham um comprimento unitário, desde que seja sempre possível considerar a aresta do cubo como uma unidade de comprimento. Sob um carregamento multiaxial dado, o elemento se deformará, transformando-se em um *paralelepípedo retangular* de lados respectivamente iguais a $1 + \epsilon_x$, $1 + \epsilon_y$, e $1 + \epsilon_z$, em que ϵ_x, ϵ_y e ϵ_z são os valores da deformação específica normal nas direções dos três eixos coordenados (Fig. 2.43*b*). Você deve notar que, como os outros elementos do material também se deformam, o elemento em consideração poderia sofrer uma translação. Entretanto estamos interessados aqui somente na *deformação real* do elemento, e não no deslocamento de corpo rígido.

Para expressarmos as componentes de deformação ϵ_x, ϵ_y e ϵ_z em função das componentes de tensão σ_x, σ_y e σ_z, consideraremos separadamente o efeito de cada componente de tensão e combinaremos os resultados obtidos. A abordagem que propomos aqui será utilizada repetidamente neste texto, e é baseada no *princípio da superposição*. Ele diz que o efeito de determinado carregamento combinado em uma estrutura pode ser obtido *determinando-se separadamente os efeitos das várias forças e combinando os resultados obtidos*, desde que sejam satisfeitas as condições a seguir:

1. Cada efeito está linearmente relacionado com a força que o produz.
2. A deformação resultante de determinada força é pequena e não afeta as condições de aplicação das outras forças.

No caso de um carregamento multiaxial, a primeira condição será satisfeita se as tensões não excederem o limite de proporcionalidade do material. A segunda condição será satisfeita se a tensão em qualquer face não provocar deformações nas outras faces suficientemente grandes para afetar o cálculo das tensões nessas faces.

Considerando o primeiro efeito da componente de tensão σ_x, lembramo-nos da Seção 2.11, em que σ_x provoca uma deformação específica igual a σ_x/E na direção x, e deformações específicas iguais a $-\nu\sigma_x/E$ em cada uma das direções y e z. Da mesma forma, a componente de tensão σ_y, se aplicada separadamente, provocará uma deformação específica igual a σ_y/E na direção y, e deformações específicas $-\nu\sigma_y/E$ nas outras duas direções. Finalmente, a componente de tensão σ_z provoca uma deformação específica igual a σ_z/E na direção z, e deformações específicas iguais a $-\nu\sigma_z/E$ nas direções x e y. Combinando os resultados obtidos, concluímos que as componentes de deformação específica correspondentes a um carregamento multiaxial são

$$\begin{aligned}
\epsilon_x &= +\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\
\epsilon_y &= -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\
\epsilon_z &= -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}
\end{aligned} \tag{2.28}$$

As relações (2.28) são conhecidas como *lei de Hooke generalizada para carregamento multiaxial de um material isotrópico homogêneo*. Conforme indicamos anteriormente, os resultados obtidos são válidos somente enquanto as tensões não excederem o limite de proporcionalidade e desde que as deformações envolvidas permaneçam pequenas. Lembramos também que um valor positivo para a componente de tensão significa tração, e um valor negativo, compressão. Analogamente, um valor positivo para uma componente de deformação específica indica expansão na direção correspondente, e um valor negativo, contração.

EXEMPLO 2.8

O bloco de aço mostrado na Fig. 2.44 está submetido a uma pressão uniforme em todas as suas faces. Sabendo que a variação no comprimento da aresta AB é $-0{,}03$ mm, determine (*a*) a variação no comprimento das outras arestas e (*b*) a pressão p aplicada às faces do bloco. Suponha $E = 200$ GPa e $\nu = 0{,}29$.

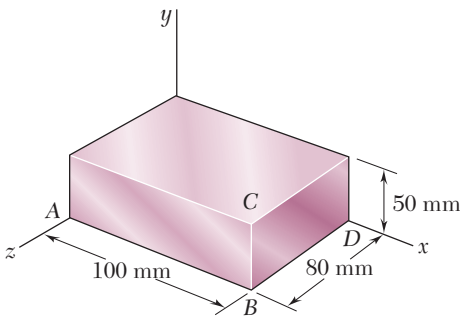


Fig 2.44

(a) Variação no comprimento das outras arestas. Substituindo $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$ nas relações (2.28), encontramos que as três componentes de deformação específica têm o seguinte valor

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = -\frac{p}{E}(1 - 2\nu) \tag{2.29}$$

Como

$$\epsilon_x = \delta_x/AB = (-0{,}03 \text{ mm})/(100 \text{ mm})$$
$$= -300 \times 10^{-6} \text{ mm/mm}$$

obtemos

$$\epsilon_y = \epsilon_z = \epsilon_x = -300 \times 10^{-6} \text{ mm/mm}$$

do qual se segue que

$$\delta_y = \epsilon_y(BC) = (-300 \times 10^{-6})(50 \text{ mm}) = -0{,}015 \text{ mm}$$
$$\delta_z = \epsilon_z(BD) = (-300 \times 10^{-6})(80 \text{ mm}) = -0{,}024 \text{ mm}$$

(b) Pressão. Resolvendo a Equação (2.29) para p, escrevemos

$$p = -\frac{E\epsilon_x}{1 - 2\nu} = -\frac{(200 \text{ GPa})(-300 \times 10^{-6})}{1 - 0{,}58}$$
$$p = 142{,}9 \text{ MPa}$$

*2.13. Dilatação; módulo de compressibilidade volumétrica

Nesta seção, examinaremos o efeito das tensões normais σ_x, σ_y e σ_z no volume de um elemento de material isotrópico. Considere o elemento de volume mostrado na Fig. 2.43. Em seu estado livre de tensões, ele está na forma de um cubo de volume unitário; e, sob as tensões σ_x, σ_y e σ_z, ele se deforma transformando-se em um paralelepípedo retangular de volume

$$v = (1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z)$$

Como as deformações específicas ϵ_x, ϵ_y, ϵ_z são muito menores que a unidade, seus produtos serão ainda menores e poderão ser omitidos depois do desenvolvimento da expressão acima. Temos, portanto,

$$v = 1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

Designando por e a variação do volume de nosso elemento, escrevemos

$$e = v - 1 = 1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z - 1$$

ou

$$e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \tag{2.30}$$

Como o elemento tinha originalmente um volume unitário, a quantidade e representa a *variação em volume por unidade de volume*. Ela é conhecida como *dilatação* volumétrica específica do material. Substituindo ϵ_x, ϵ_y, e ϵ_z das Equações (2.28) na Equação (2.30), escrevemos

$$e = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{E} - \frac{2\nu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{E}$$

$$e = \frac{1 - 2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \tag{2.31}$$†

Um caso de interesse especial é aquele de um corpo sujeito a uma pressão hidrostática uniforme p. Cada uma das componentes de tensão é então igual a $-p$ e a Equação (2.31) fica assim

$$e = -\frac{3(1 - 2\nu)}{E}p \tag{2.32}$$

Introduzindo a seguinte constante

$$k = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \tag{2.33}$$

escrevemos a Equação (2.32) na forma

$$e = -\frac{p}{k} \tag{2.34}$$

A constante k é conhecida como *módulo de compressibilidade volumétrica do material* (ou módulo de bulk). Ela é expressa nas mesmas unidades do módulo de elasticidade E, ou seja, em pascal ou em psi.

A observação e o bom senso indicam que um material estável submetido a uma pressão hidrostática só pode *diminuir* em volume; assim a dilatação e na Equação (2.34) é negativa, da qual se conclui que o módulo de compressibilidade volumétrica k é uma quantidade positiva. Examinando a Equação (2.33), concluímos que $1 - 2\nu > 0$, ou $\nu < \frac{1}{2}$. Em contrapartida, vimos na Seção 2.11 que ν é positivo para todos os materiais de engenharia. Concluímos então que, para qualquer material de engenharia,

$$0 < \nu < \tfrac{1}{2} \tag{2.35}$$

Notamos que um material ideal, tendo um valor de ν igual a zero, poderia ser esticado em uma direção sem qualquer contração lateral. Não obstante, um material ideal, para o qual $\nu = \frac{1}{2}$, e portanto $k = \infty$, seria perfeitamente

†Como a dilatação e representa uma variação em volume, ela deve ser independente da orientação do elemento considerado. Conclui-se então das Equações (2.30) e (2.31) que as quantidades $\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$ e $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ são também independentes da orientação do elemento. Essa propriedade será verificada no Capítulo 7.

incompressível ($e = 0$). Examinando a Equação (2.31) notamos também que, como $\nu < \frac{1}{2}$, o alongamento de um material de engenharia, na região elástica, em uma direção, por exemplo na direção x ($\sigma_x > 0$, $\sigma_y = \sigma_z = 0$), resultará em um aumento de seu volume ($e > 0$).†

EXEMPLO 2.9

Determine a variação em volume ΔV do bloco de aço mostrado na Fig. 2.44, quando ele é submetido a uma pressão hidrostática $p = 180$ MPa. Use $E = 200$ GPa e $\nu = 0{,}29$.

Da Equação (2.33), determinamos o módulo de compressibilidade volumétrica do aço,

$$k = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} = \frac{200 \text{ GPa}}{3(1 - 0{,}58)} = 158{,}7 \text{ GPa}$$

e, da Equação (2.34), a dilatação

$$e = -\frac{p}{k} = -\frac{180 \text{ MPa}}{158{,}7 \text{ GPa}} = -1{,}134 \times 10^{-3}$$

Como o volume V do bloco em seu estado livre de tensões é

$$V = (100 \text{ mm})(80 \text{ mm})(50 \text{ mm}) = 400 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

e como e representa a variação em volume por unidade de volume, $e = \Delta V/V$, temos

$$\Delta V = eV = (-1{,}134 \times 10^{-3})(400 \times 10^3 \text{ mm}^3)$$

$$\Delta V = -454 \text{ mm}^3$$

2.14. Deformação de cisalhamento

Quando determinamos na Seção 2.12 as relações (2.28) entre tensões normais e deformações específicas normais em um material isotrópico homogêneo, consideramos que não havia tensões de cisalhamento envolvidas. Na situação de estado de tensão mais geral representada na Fig. 2.45, estarão presentes as tensões de cisalhamento τ_{xy}, τ_{yz} e τ_{zx} (bem como, naturalmente, as tensões de cisalhamento correspondentes τ_{yx}, τ_{zy}, e τ_{xz}). Essas tensões não têm um efeito direto nas deformações específicas normais, e desde que todas as deformações envolvidas permaneçam pequenas, elas não afetarão a determinação nem a validade das relações (2.28). No entanto, as tensões de cisalhamento tenderão a deformar um elemento em forma de cubo do material transformando-o em um paralelepípedo *oblíquo*.

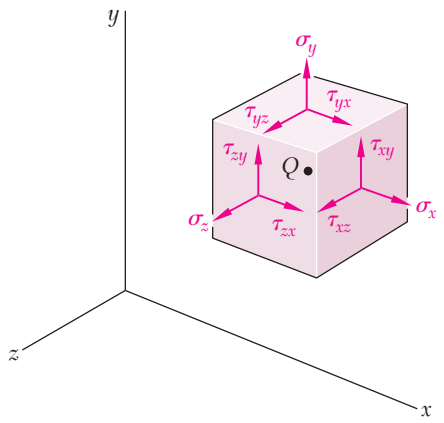


Fig. 2.45

†No entanto, na região plástica o volume do material permanece praticamente constante.

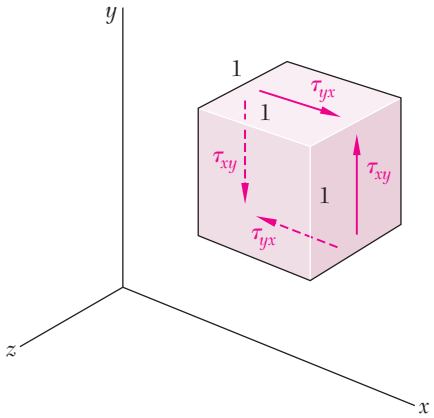


Fig. 2.46

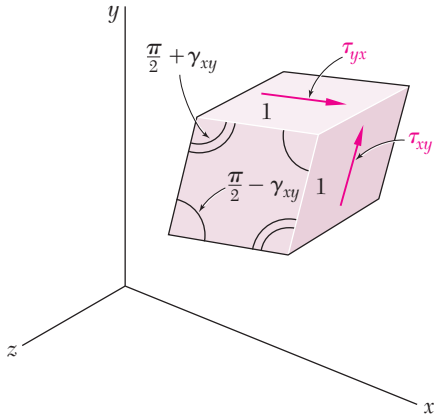


Fig. 2.47

Considere primeiro um elemento em forma de cubo de lado unitário (Fig. 2.46) submetido a nenhuma outra tensão que não as tensões de cisalhamento τ_{xy} e τ_{yx} aplicadas às faces do elemento, respectivamente, perpendiculares aos eixos x e y. (Lembramos da Seção 1.12, em que $\tau_{xy} = \tau_{yx}$.) Observa-se que o elemento se deforma transformando-se em um romboide de lados iguais a um (Fig. 2.47). Dois dos ângulos formados pelas quatro faces sob tensão são reduzidos de $\frac{\pi}{2}$ para $\frac{\pi}{2} - \gamma_{xy}$, enquanto os outros dois são aumentados de $\frac{\pi}{2}$ para $\frac{\pi}{2} + \gamma_{xy}$. O pequeno ângulo γ_{xy} (expresso em radianos) define a *deformação de cisalhamento* correspondente às direções x e y. Quando a deformação envolve uma *redução* do ângulo formado pelas duas faces orientadas, respectivamente, na direção positiva dos eixos x e y (como mostra a Fig. 2.47), dizemos que a deformação de cisalhamento γ_{xy} é *positiva*; caso contrário, dizemos que ela é negativa.

Devemos notar que, em consequência das deformações dos outros elementos do material, o elemento em consideração também pode ter uma rotação geral. No entanto, como era o caso em nosso estudo das deformações específicas normais, estamos preocupados aqui somente com as *deformações reais* do elemento, e não com quaisquer possíveis deslocamentos de corpo rígido.†

Construindo um gráfico com valores sucessivos de τ_{xy} em função dos valores correspondentes de γ_{xy}, obtemos o diagrama tensão-deformação de cisalhamento para o material em consideração. Isso pode ser conseguido executando-se um ensaio de torção, como veremos no Capítulo 3. O diagrama obtido é similar ao diagrama tensão-deformação específica normal, obtido para o mesmo material com o ensaio de tração descrito anteriormente neste capítulo. No entanto, os valores obtidos para a resistência ao escoamento, limite de resistência etc., de um determinado material em um ensaio de cisalhamento, são apenas um pouco maiores que a metade dos valores obtidos em tração. Como ocorria no caso das tensões e deformações específicas normais, a parte inicial do diagrama tensão-deformação de cisalhamento é linear. Para valores de tensão de cisalhamento que não excedam o limite de proporcio-

†Ao definirem a deformação γ_{xy}, alguns autores consideram arbitrariamente que a deformação real do elemento é acompanhada de uma rotação de corpo rígido tal que as faces horizontais do elemento não giram. A deformação γ_{xy} é então representada pelo ângulo através do qual as outras duas faces são giradas (Fig. 2.48). Outros consideram uma rotação do corpo rígido tal que as faces horizontais giram através de $1/2\ \gamma_{xy}$, no sentido anti-horário, e as faces verticais através de $1/2\ \gamma_{xy}$, no sentido horário (Fig. 2.49). Como ambas as suposições são desnecessárias e podem induzir à confusão, neste livro preferimos associar a deformação de cisalhamento γ_{xy} com a *variação no ângulo* formado pelas duas faces, e não com a *rotação de determinada face* sob condições restritivas.

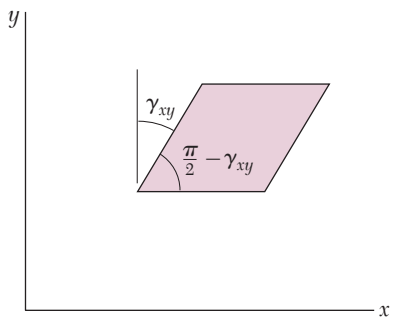


Fig. 2.48

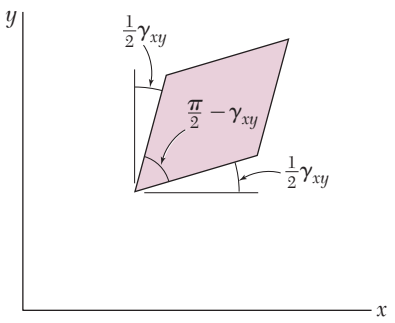


Fig. 2.49

nalidade em cisalhamento, podemos então escrever para qualquer material isotrópico e homogêneo,

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \tag{2.36}$$

Essa relação é conhecida como *lei de Hooke para tensão e deformação de cisalhamento*, e a constante G é chamada de *módulo de rigidez* ou *módulo de elasticidade transversal* do material. Como a deformação γ_{xy} foi definida como um ângulo em radianos, ela é adimensional, e o módulo G é expresso nas mesmas unidades de τ_{xy}, ou seja, em pascal ou em psi. O módulo de rigidez G de qualquer material é menos da metade, porém mais de um terço do módulo de elasticidade E daquele material.†

Considerando agora um cubo elementar do material sujeito a tensões de cisalhamento τ_{yz} e τ_{zy} (Fig. 2.50*a*), definimos a deformação de cisalhamento γ_{yz} como a variação no ângulo formado pelas faces sob tensão. A deformação de cisalhamento γ_{zx} é definida de forma semelhante considerando um elemento submetido a tensões de cisalhamento τ_{zx} e τ_{xz} (Fig. 2.50*b*). Para valores da tensão que não ultrapassem o limite de proporcionalidade, podemos escrever as duas relações adicionais

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz} \qquad \tau_{zx} = G\gamma_{zx} \tag{2.37}$$

em que a constante G é a mesma da Equação (2.36).

Para o estado de tensão geral representado na Fig. 2.45 e desde que nenhuma das tensões envolvidas ultrapasse o limite de proporcionalidade correspondente, podemos aplicar o princípio da superposição e combinar os resultados obtidos nessa seção e na Seção 2.12. Obtemos o seguinte grupo de equações representando a lei de Hooke generalizada para um material isotrópico e homogêneo submetido a um estado de tensão mais geral.

$$\begin{aligned}
\epsilon_x &= +\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\
\epsilon_y &= -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\
\epsilon_z &= -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} \\
\gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \qquad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Um exame das Equações (2.38) pode nos levar a acreditar que três constantes distintas do material, E, ν e G, devem primeiro ser determinadas experimentalmente, se quisermos prever as deformações provocadas em determinado material por uma combinação arbitrária de tensões. Na realidade, somente duas dessas constantes precisam ser determinadas experimentalmente para qualquer material. Conforme você verá na próxima seção, a terceira constante pode então ser obtida com um cálculo bastante simples.

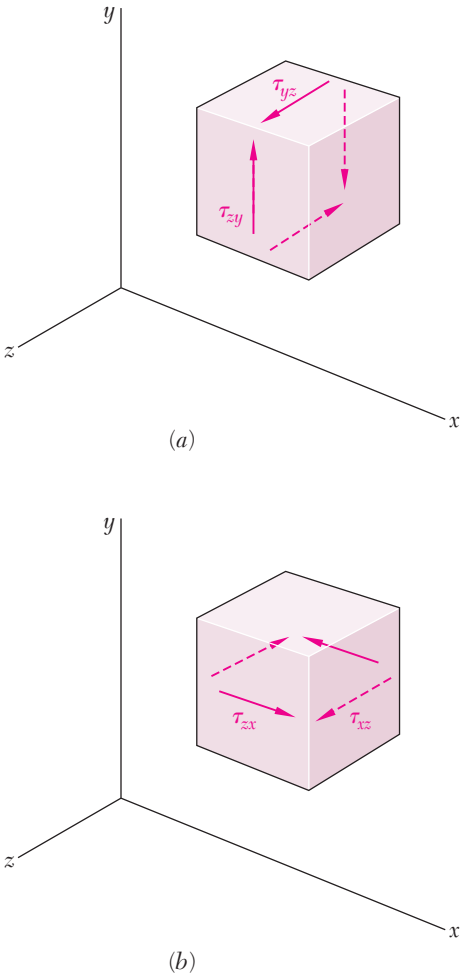


Fig. 2.50

†Ver o Problema 2.91.

EXEMPLO 2.10

Um bloco retangular de um material com um módulo de elasticidade transversal $G = 620$ MPa é colado a duas placas rígidas horizontais. A placa inferior é fixa, enquanto a placa superior está submetida a uma força horizontal **P** (Fig. 2.51). Sabendo que a placa superior se desloca 1 mm sob a ação da força, determine (*a*) a deformação de cisalhamento média no material e (*b*) a força **P** que atua na placa superior.

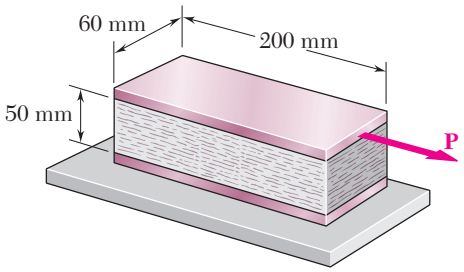


Fig. 2.51

(a) Deformação de cisalhamento. Selecionamos eixos coordenados centrados no ponto médio *C* da borda *AB* e direcionados conforme mostra a Fig. 2.52. De acordo com sua definição, a deformação de cisalhamento γ_{xy} é igual ao ângulo formado pela vertical e pela linha *CF* que une os pontos médios das bordas *AB* e *DE*. Notando que esse é um ângulo muito pequeno e lembrando que ele deverá ser expresso em radianos, escrevemos

$$\gamma_{xy} \approx \text{tg}\,\gamma_{xy} = \frac{1 \text{ mm}}{50 \text{ mm}} \qquad \gamma_{xy} = 0{,}020 \text{ rad.}$$

(b) Força atuante na placa superior. Primeiro determinamos a tensão de cisalhamento τ_{xy} no material. Usando a lei de Hooke para tensão e deformação de cisalhamento, temos

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = (620 \text{ MPa})(0{,}020 \text{ rad.}) = 12{,}4 \text{ MPa}$$

A força exercida na placa superior é então

$$P = \tau_{xy} A = (12{,}4 \text{ MPa})(200 \text{ mm})(60 \text{ mm}) = 148{,}8 \times 10^3 \text{ N}$$

$$P = 148{,}8 \text{ kN}$$

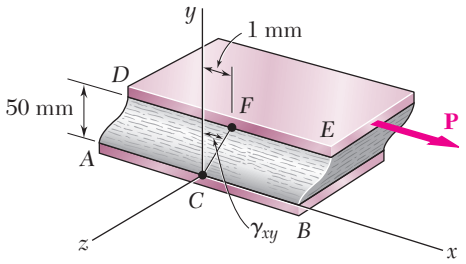
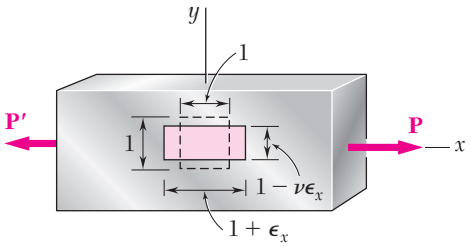
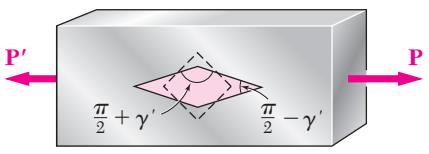


Fig. 2.52



(*a*)



(*b*)

Fig. 2.53

2.15. Outras discussões sobre deformação sob carregamento axial; relação entre *E*, *ν* e *G*

Vimos na Seção 2.11 que uma barra delgada submetida a uma força de tração axial **P** na direção do eixo *x* se alongará na direção *x* e se contrairá nas direções transversais *y* e *z*. Se ϵ_x é a deformação específica axial, a deformação específica lateral é expressa como $\epsilon_y = \epsilon_z = -\nu\epsilon_x$ em que ν é o coeficiente de Poisson. Assim, um elemento na forma de um cubo com lado de comprimento unitário e orientado conforme mostra a Fig. 2.53*a* se deformará, transformando-se em um paralelepípedo retangular de lados $1 + \epsilon_x$, $1 - \nu\epsilon_x$ e $1 - \nu\epsilon_x$. (Note que somente uma face do elemento é mostrada na figura.) Em contrapartida, se o elemento é orientado a 45° em relação ao eixo da força (Fig. 2.53*b*), observa-se que a face mostrada na figura se deforma transformando-se em um losango. Concluímos que a força axial **P** provoca nesse elemento uma deformação de cisalhamento γ' igual ao valor pelo qual aumenta ou diminui cada um dos ângulos mostrados na Fig. 2.53*b*.†

† Note que a carga **P** também produz deformações específicas normais no elemento mostrado na Fig. 2.53*b* (ver o Problema 2.74).

O fato de que as deformações de cisalhamento, bem como as deformações específicas normais, resultam de um carregamento axial não deve ser uma surpresa para nós, pois já observamos no fim da Seção 1.12 que uma carga axial **P** provoca tensões normais e de cisalhamento de igual intensidade nas quatro faces de um elemento orientado a 45° do eixo do elemento. Isso foi ilustrado na Fig. 1.40 que, por conveniência, foi repetida aqui. Foi mostrado também na Seção 1.11 que a tensão de cisalhamento é máxima em um plano que forma um ângulo de 45° com o eixo da força. Conclui-se da lei de Hooke para tensões e deformações de cisalhamento que a deformação de cisalhamento γ' associada ao elemento da Fig. 2.53*b* também é máxima: $\gamma' = \gamma_m$.

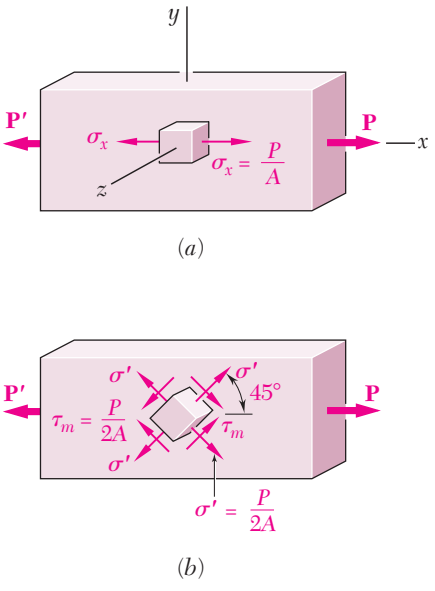


Fig. 1.40 (repetida)

Embora um estudo mais detalhado das transformações de deformações específica seja apresentado só no Capítulo 7, nesta seção deduziremos uma relação entre a deformação de cisalhamento máxima $\gamma' = \gamma_m$ associada ao elemento da Fig. 2.53*b* e a deformação específica normal ϵ_x na direção da força. Vamos considerar para essa finalidade o elemento prismático obtido pelo corte do elemento em forma de cubo da Fig. 2.53*a* por um plano diagonal (Fig. 2.54*a* e *b*). Referindo-nos à Fig. 2.53*a*, concluímos que esse novo elemento se deformará, transformando-se no elemento mostrado na Fig. 2.54*c*, que tem lados horizontais e verticais, respectivamente, iguais a $1 + \epsilon_x$ e $1 - \nu\epsilon_x$. Mas o ângulo formado pelas faces oblíqua e horizontal do elemento da Fig. 2.54*b* é precisamente metade de um dos ângulos retos do elemento em

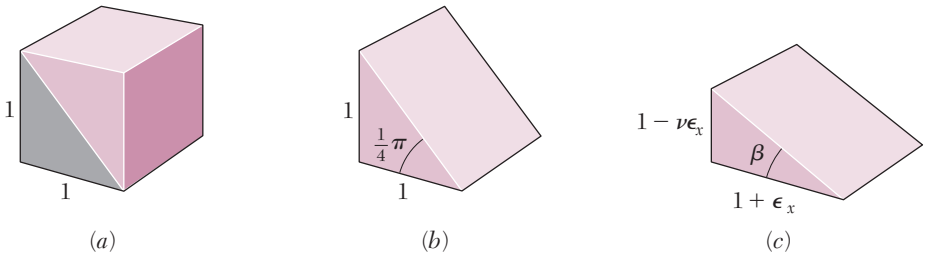


Fig. 2.54

forma de cubo considerado na Fig. 2.53*b*. O ângulo β, obtido após a deformação, deve, portanto, ser igual à metade de $\pi/2 - \gamma_m$. Escrevemos

$$\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\gamma_m}{2}$$

Aplicando a fórmula para a tangente da diferença de dois ângulos, obtemos

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}\frac{\gamma_m}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{\gamma_m}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}\frac{\gamma_m}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\gamma_m}{2}}$$

ou, como $\gamma_m/2$ é um ângulo muito pequeno,

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1 - \dfrac{\gamma_m}{2}}{1 + \dfrac{\gamma_m}{2}} \tag{2.39}$$

Entretanto, da Fig. 2.54*c*, observamos que

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1 - \nu\epsilon_x}{1 + \epsilon_x} \tag{2.40}$$

Igualando os membros do lado direito de (2.39) e (2.40) e resolvendo em função de γ_m, temos

$$\gamma_m = \frac{(1 + \nu)\epsilon_x}{1 + \dfrac{1 - \nu}{2}\epsilon_x}$$

Como $\epsilon_x \ll 1$, o denominador na expressão obtida pode ser considerado igual a 1; temos, portanto,

$$\gamma_m = (1 + \nu)\epsilon_x \tag{2.41}$$

que é a relação desejada entre a deformação de cisalhamento máxima γ_m e a deformação específica axial ϵ_x.

Para obtermos uma relação entre as constantes E, ν e G, lembramos que, pela lei de Hooke, $\gamma_m = \tau_m/\mathrm{G}$, e que, para um carregamento axial, $\epsilon_x = \sigma_x/\mathrm{E}$. A Equação (2.41) pode, portanto, ser escrita como

$$\frac{\tau_m}{G} = (1 + \nu)\frac{\sigma_x}{E}$$

ou

$$\frac{E}{G} = (1 + \nu)\frac{\sigma_x}{\tau_m} \tag{2.42}$$

Verificamos agora, da Fig. 1.40, que $\sigma_x = P/A$ e $\tau_m = P/2\mathrm{A}$, em que A é a área da seção transversal da componente. Conclui-se, então, que $\sigma_x/\tau_m = 2$. Substituindo esse valor em (2.42) e dividindo ambos os membros por 2, obtemos a relação

$$\frac{E}{2G} = 1 + \nu \tag{2.43}$$

que pode ser usada para determinar uma das constantes E, ν ou G a partir das outras duas. Por exemplo, escrevendo a Equação (2.43) para G, temos

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \tag{2.43'}$$

*2.16. Relações de tensão-deformação para materiais compósitos reforçados com fibras

Os materiais compósitos reforçados com fibras foram discutidos rapidamente na Seção 2.5. Foi mostrado naquele momento que são obtidos pela incorporação de fibras de materiais rígidos e resistentes em um material menos resistente e menos rígido chamado de *matriz*. Mostrou-se também que a relação entre a tensão normal e a correspondente deformação específica normal ocorrida em uma lâmina, ou camada, de um material compósito, depende da direção na qual a força é aplicada. São necessários, portanto, diferentes módulos de elasticidade E_x, E_y e E_z, para descrever as relações entre a tensão normal e a deformação específica normal, caso a força seja aplicada em uma direção paralela às fibras, em uma direção perpendicular à camada, ou em uma direção transversal.

Vamos considerar novamente a placa de material compósito discutida na Seção 2.5 e submetê-la a uma força de tração uniaxial paralela a suas fibras, ou seja, na direção x (Fig. 2.55*a*). Para simplificarmos nossa análise, vamos supor que as propriedades das fibras e da matriz foram combinadas, de tal modo que se obtenha um material homogêneo fictício equivalente que possua

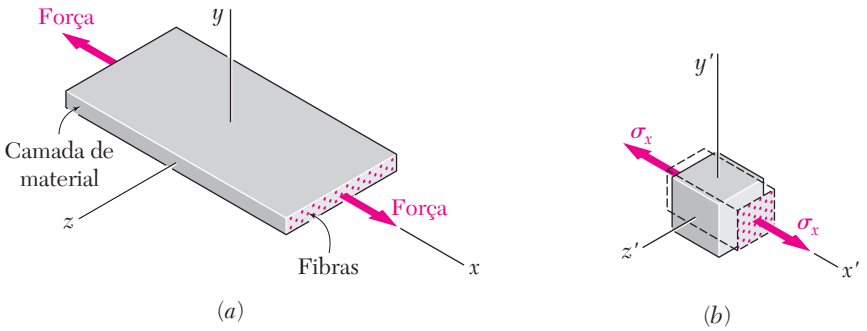


Fig. 2.55

essas propriedades combinadas. Consideramos agora um corpo elementar daquela placa, cujas propriedades são do material combinado (Fig. 2.55*b*). Designamos por σ_x a tensão normal correspondente e observamos que $\sigma_y = \sigma_z = 0$. Como indicamos na Seção 2.5, a deformação específica normal correspondente na direção x é $\epsilon_x = \sigma_x/E_x$, em que E_x é o módulo de elasticidade do material compósito na direção x. Conforme vimos para os materiais isotrópicos, o alongamento do material na direção x é acompanhado de contrações nas direções y e z. Essas contrações dependem do posicionamento das fibras na matriz e geralmente são diferentes. Consequentemente, as deformações específicas laterais ϵ_y e ϵ_z também serão diferentes, bem como os correspondentes coeficientes de Poisson:

$$\nu_{xy} = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} \qquad \text{e} \qquad \nu_{xz} = -\frac{\epsilon_z}{\epsilon_x} \tag{2.44}$$

Note que o primeiro índice em cada uma das relações de Poisson ν_{xy} e ν_{xz} nas Equações (2.44) refere-se à direção da força e o segundo, à direção da contração.

Do exposto, segue-se que, no caso de *carregamento multiaxial* de uma placa de um material compósito, podem ser usadas equações similares às

Equações (2.28) da Seção 2.12 para descrever a relação tensão-deformação. No entanto, neste caso, estarão envolvidos três diferentes valores de módulo de elasticidade e seis valores diferentes de coeficiente de Poisson. Escrevemos

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E_x} - \frac{\nu_{yx}\sigma_y}{E_y} - \frac{\nu_{zx}\sigma_z}{E_z}\\ \epsilon_y &= -\frac{\nu_{xy}\sigma_x}{E_x} + \frac{\sigma_y}{E_y} - \frac{\nu_{zy}\sigma_z}{E_z}\\ \epsilon_z &= -\frac{\nu_{xz}\sigma_x}{E_x} - \frac{\nu_{yz}\sigma_y}{E_y} + \frac{\sigma_z}{E_z}\end{aligned} \tag{2.45}$$

As Equações (2.45) podem ser consideradas a transformação de tensão em deformação específica para determinada camada. Conclui-se, levando em conta uma propriedade geral dessas transformações, que os coeficientes das componentes de tensão são simétricos, isto é, que

$$\frac{\nu_{xy}}{E_x} = \frac{\nu_{yx}}{E_y} \qquad \frac{\nu_{yz}}{E_y} = \frac{\nu_{zy}}{E_z} \qquad \frac{\nu_{zx}}{E_z} = \frac{\nu_{xz}}{E_x} \tag{2.46}$$

Essas equações mostram que, embora diferentes, os coeficientes de Poisson ν_{xy} e ν_{yx} não são independentes; qualquer um deles pode ser obtido a partir do outro se os valores correspondentes do módulo de elasticidade forem conhecidos. O mesmo vale para ν_{yz} e ν_{zy}, e para ν_{zx} e ν_{xz}.

Considere agora o efeito da presença de tensões de cisalhamento nas faces de um corpo elementar da placa de propriedades combinadas. Conforme dito na Seção 2.14, no caso de materiais isotrópicos, essas tensões vêm em pares de vetores iguais e opostos aplicados em lados opostos do corpo elementar e não têm efeito nas deformações específicas normais. Assim, as Equações (2.45) permanecem válidas. As tensões de cisalhamento, no entanto, criarão deformações de cisalhamento definidas por equações similares às últimas três das Equações (2.38) da Seção 2.14, exceto que agora devem ser utilizados três diferentes valores do módulo de elasticidade transversal, G_{xy}, G_{yz} e G_{zx}. Temos

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G_{yz}} \qquad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G_{zx}} \tag{2.47}$$

O fato de que as três componentes de deformação específica ϵ_x, ϵ_y e ϵ_z podem ser relacionadas somente com as tensões normais e não dependem de quaisquer tensões de cisalhamento caracteriza os *materiais ortotrópicos* e os distingue dos anisotrópicos.

Como vimos na Seção 2.5, um *laminado* plano é obtido superpondo-se uma série de camadas ou lâminas. Se as fibras em todas as camadas têm a mesma orientação para melhor resistir a uma força de tração axial, a própria camada será ortotrópica. Se a estabilidade lateral de um laminado é melhorada pelo posicionamento de algumas de suas camadas de maneira que suas fibras estejam em ângulo reto com as fibras das outras camadas, o laminado resultante será também ortotrópico. No entanto, se qualquer uma das camadas de um laminado for posicionada de forma que suas fibras não estejam paralelas nem perpendiculares às fibras das outras camadas, o laminado, geralmente, não será ortotrópico.†

† Para mais informações sobre materiais compósitos reforçados com fibras,ver HYER, M. W. *Stress analysis of fiber-reinforced composite materials*. Nova York: McGraw-Hill, 1998.

EXEMPLO 2.11

Um cubo de 60 mm é feito de camadas de grafite epóxi com fibras alinhadas na direção x. 0 cubo está submetido a uma força de compressão de 140 kN na direção x. As propriedades do material compósito são: $E_x = 155{,}0$ GPa, $E_y = 12{,}10$ GPa, $E_z = 12{,}10$ GPa, $\nu_{xy} = 0{,}248$, $\nu_{xz} = 0{,}248$ e $\nu_{yz} = 0{,}458$. Determine as variações nas dimensões do cubo, sabendo que (*a*) o cubo está livre para se deformar nas direções y e z (Fig. 2.56) e (*b*) o cubo está livre para se deformar na direção z, mas está impedido de se deformar na direção y por duas placas sem atrito (Fig. 2.57).

(a) Livre nas direções y e z. Primeiro determinamos a tensão σ_x na direção da força. Temos

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{-140 \times 10^3 \text{ N}}{(0{,}060 \text{ m})(0{,}060 \text{ m})} = -38{,}89 \text{ MPa}$$

Como o cubo não está sob carga ou impedido de se deformar nas direções y e z, temos $\sigma_y = \sigma_z = 0$. Assim, os membros do lado direito das Equações (2.45) se reduzem aos seus primeiros termos. Substituindo os dados fornecidos nessas equações, temos

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_x} = \frac{-38{,}89 \text{ MPa}}{155{,}0 \text{ GPa}} = -250{,}9 \times 10^{-6}$$

$$\epsilon_y = -\frac{\nu_{xy}\sigma_x}{E_x} = -\frac{(0{,}248)(-38{,}89 \text{ MPa})}{155{,}0 \text{ GPa}} = +62{,}22 \times 10^{-6}$$

$$\epsilon_z = -\frac{\nu_{xz}\sigma_x}{E_x} = -\frac{(0{,}248)(-38{,}69 \text{ MPa})}{155{,}0 \text{ GPa}} = +62{,}22 \times 10^{-6}$$

As variações nas dimensões do cubo são obtidas multiplicando-se as deformações específicas correspondentes pelo comprimento $L = 0{,}060$ m do lado do cubo

$$\delta_x = \epsilon_x L = (-250{,}9 \times 10^{-6})(0{,}060 \text{ m}) = -15{,}05 \ \mu\text{m}$$
$$\delta_y = \epsilon_y L = (+62{,}2 \times 10^{-6})(0{,}060 \text{ m}) = +3{,}73 \ \mu\text{m}$$
$$\delta_z = \epsilon_z L = (+62{,}2 \times 10^{-6})(0{,}060 \text{ m}) = +3{,}73 \ \mu\text{m}$$

(b) Livre na direção z, impedido de se deformar na direção y. A tensão na direção x é a mesma da parte *a*, ou seja, $\sigma_x = -38{,}89$ MPa. Como o cubo está livre para se deformar na direção z e na parte *a*, temos novamente $\sigma_z = 0$. Mas como o cubo agora está impedido de se deformar na direção y, devemos esperar uma tensão σ_y diferente de zero. Por outro lado, visto que o cubo não pode se deformar na direção y, devemos ter $\delta_y = 0$ e, portanto, $\epsilon_y = \delta_y/L = 0$. Fazendo $\sigma_z = 0$ e $\epsilon_y = 0$ na segunda das Equações (2.45), determina-se o valor de σ_y. Assim, temos

$$\sigma_y = \left(\frac{E_y}{E_x}\right)\nu_{xy}\sigma_x = \left(\frac{12{,}10}{155{,}0}\right)(0{,}248)(-38{,}89 \text{ MPa}) = -752{,}9 \text{ kPa}$$

Agora que as três componentes de tensão foram determinadas, podemos usar a primeira e a última das Equações (2.45) para calcular as componentes de deformação específicas ϵ_x e ϵ_z. Mas a primeira dessas equações contém o coeficiente de Poisson ν_{yx}, e,

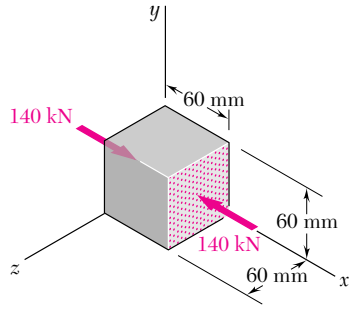


Fig. 2.56

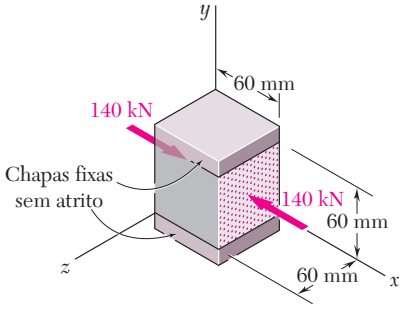


Fig. 2.57

como vimos anteriormente, esse coeficiente *não é igual* ao coeficiente ν_{xy} que estava entre os dados fornecidos. Para encontrarmos ν_{yx}, usamos a primeira das Equações (2.46) e escrevemos

$$\nu_{yx} = \left(\frac{E_y}{E_x}\right)\nu_{xy} = \left(\frac{12{,}10}{155{,}0}\right)(0{,}248) = 0{,}01936$$

Fazendo $\sigma_z = 0$ na primeira e na terceira das Equações (2.45) e substituindo nessas equações os valores numéricos fornecidos de E_x, E_y, ν_{xz} e ν_{yz}, bem como os valores numéricos obtidos para σ_x, σ_y, e ν_{yx}, temos

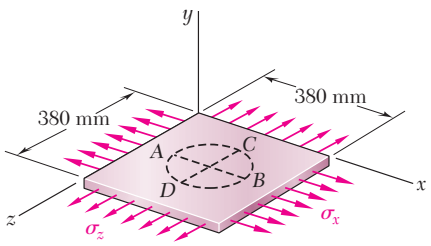
$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_x} - \frac{\nu_{yx}\sigma_y}{E_y} = \frac{-38{,}89 \text{ MPa}}{155{,}0 \text{ GPa}} - \frac{(0{,}01936)(-752{,}9 \text{ kPa})}{12{,}10 \text{ GPa}} = -249{,}7 \times 10^{-6}$$

$$\epsilon_z = -\frac{\nu_{xz}\sigma_x}{E_x} - \frac{\nu_{yz}\sigma_y}{E_y} = -\frac{(0{,}248)(-38{,}89 \text{ MPa})}{155{,}0 \text{ GPa}} - \frac{(0{,}458)(-752{,}9 \text{ kPa})}{12{,}10 \text{ GPa}} = +90{,}72 \times 10^{-6}$$

As variações nas dimensões do cubo são obtidas multiplicando-se as deformações correspondentes pelo comprimento $L = 0{,}060$ m do lado do cubo

$$\delta_x = \epsilon_x L = (-249{,}7 \times 10^{-6})(0{,}060 \text{ m}) = -14{,}98 \ \mu\text{m}$$
$$\delta_y = \epsilon_y L = (0)(0{,}060 \text{ m}) = 0$$
$$\delta_z = \epsilon_z L = (+90{,}72 \times 10^{-6})(0{,}060 \text{ m}) = +5{,}44 \ \mu\text{m}$$

Comparando os resultados das partes *a* e *b*, notamos que a diferença entre os valores obtidos para a deformação δ_x na direção das fibras é desprezível. No entanto, a diferença entre os valores obtidos para a deformação lateral δ_z não é desprezível. Essa deformação é claramente maior quando o cubo está impedido de se deformar na direção y.



PROBLEMA RESOLVIDO 2.5

Um círculo de diâmetro $d = 220$ mm é desenhado em uma placa de alumínio livre de tensões de espessura $t = 19$ mm. Forças atuando posteriormente no plano da placa provocam tensões normais $\sigma_x = 82$ MPa e $\sigma_z = 138$ MPa. Para $E = 69$ GPa e $\nu = \frac{1}{3}$, determine a variação (*a*) do comprimento do diâmetro *AB*, (*b*) do comprimento do diâmetro *CD*, (*c*) da espessura da placa e (*d*) do volume da placa.

SOLUÇÃO

Lei de Hooke. Notamos que $\sigma_y = 0$. Usando as Equações (2.38), encontramos a deformação específica em cada uma das direções das coordenadas.

$$\epsilon_x = +\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}$$

$$= \frac{1}{69 \times 10^3 \text{ MPa}}\left[(82 \text{ MPa}) - 0 - \frac{1}{3}(138 \text{ MPa})\right] = +0{,}522 \times 10^{-3} \text{ mm/mm}$$

$$\epsilon_y = -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}$$

$$= \frac{1}{69 \times 10^3 \text{ MPa}}\left[-\frac{1}{3}(82 \text{ MPa}) + 0 - \frac{1}{3}(138 \text{ MPa})\right] = -1{,}063 \times 10^{-3} \text{ mm/mm}$$

$$\epsilon_z = -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$

$$= \frac{1}{69 \times 10^3 \text{ MPa}}\left[-\frac{1}{3}(82 \text{ MPa}) - 0 + (138 \text{ MPa})\right] = +1{,}604 \times 10^{-3} \text{ mm/mm}.$$

***a*. Diâmetro *AB*.** A variação do comprimento é $\delta_{B/A} = \epsilon_x d$.

$$\delta_{B/A} = \epsilon_x d = (+0{,}522 \times 10^{-3} \text{ mm/mm})(220 \text{ mm})$$

$$\delta_{B/A} = +0{,}104 \text{ mm} \blacktriangleleft$$

***b*. Diâmetro *CD*.**

$$\delta_{C/D} = \epsilon_z d = (+1{,}604 \times 10^{-3} \text{ mm/mm})(220 \text{ mm})$$

$$\delta_{C/D} = +0{,}353 \text{ mm} \blacktriangleleft$$

***c*. Espessura.** Lembrando que $t = 19$ mm, temos

$$\delta_t = \epsilon_y t = (-1{,}063 \times 10^{-3} \text{mm/mm})(19 \text{ mm})$$

$$\delta_t = -0{,}20 \text{ mm} \blacktriangleleft$$

***d*. Volume da placa.** Usando a Equação (2.30), escrevemos

$$e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = (+0{,}522 - 1{,}063 + 1{,}604)\,10^{-3} = +1{,}063 \times 10^{-3}$$

$$\Delta V = eV = +1{,}063 \times 10^{-3}[(380 \text{ mm})(380 \text{ mm})](19 \text{ mm}) \qquad \Delta V = 2{,}916 \text{ mm}^3 \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

2.61 Em um ensaio de tração padrão, uma barra de alumínio de 20 mm de diâmetro está submetida a uma força de tração de $P = 30$ kN. Sabendo que $\nu = 0{,}35$ e $E = 70$ GPa, determine (*a*) o alongamento da barra em um comprimento de referência de 150 mm e (*b*) a variação no diâmetro da barra.

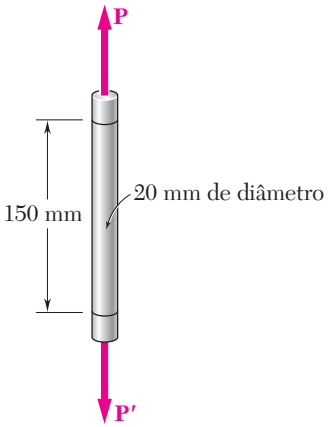


Fig. *P2.61*

2.62 Um ensaio de tração padrão é usado para determinar as propriedades de um plástico. O corpo de prova é uma barra de 20 mm de diâmetro e está submetido a uma força de tração de 6 kN. Sabendo-se que em um comprimento de referência de 150 mm observa-se um alongamento de 14 mm no seu comprimento e uma diminuição de 0,85 mm no diâmetro, determine o módulo de elasticidade, o módulo de elasticidade transversal e o coeficiente de Poisson do material.

2.63 Uma força de tração de 2669 N é aplicada a um corpo de prova feito de placa de aço plana de 1,588 mm ($E = 200$ GPa, $\nu = 0{,}30$). Determine a variação resultante (*a*) no comprimento de referência de 50,8 mm, (*b*) na largura da parte *AB* do corpo de prova, (*c*) na espessura da parte *AB* e (*d*) na área da seção transversal da parte *AB*.

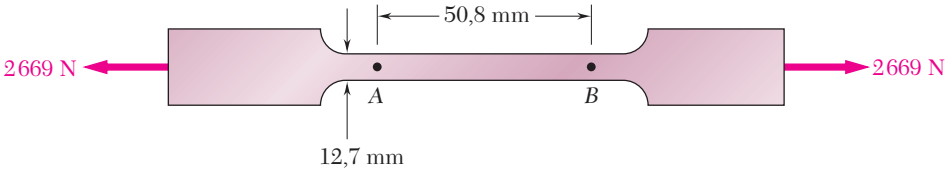


Fig. P2.63

2.64 Um tubo de aço de comprimento igual a 1 829 mm, diâmetro externo de 304,8 mm e espessura de parede de 12,7 mm é usado como uma coluna curta e suporta uma força axial centrada de 1 334 kN. Sabendo que $E = 200$ GPa e $\nu = 0{,}30$, determine (*a*) a variação no comprimento do tubo, (*b*) a variação em seu diâmetro externo e (*c*) a variação na espessura da parede.

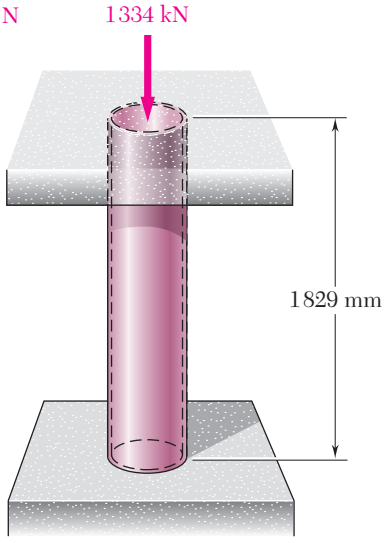


Fig. P2.64

2.65 A variação no diâmetro de um grande parafuso de aço é cuidadosamente medida enquanto a porca é apertada. Sabendo que $E = 200$ GPa e $\nu = 0{,}29$, determine a força interna no parafuso, quando se observa que o diâmetro diminuiu em 13 μm.

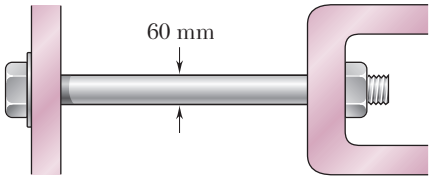


Fig. P2.65

2.66 Uma chapa de alumínio ($E = 74$ GPa e $\nu = 0{,}33$) está submetida a uma força axial que causa uma tensão normal σ. Sabendo que antes do carregamento uma reta inscrita na chapa tem inclinação 2:1, determine essa inclinação quando $\sigma = 125$ MPa.

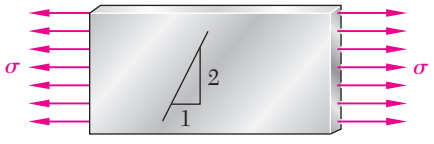


Fig. *P2.66*

2.67 A barra de alumínio *AD* é envolvida por uma jaqueta utilizada para aplicar uma pressão hidrostática de 41,3 MPa na parte *BC* de 305 mm da barra. Sabendo que $E = 70$ GPa e $\nu = 0{,}36$, determine (*a*) a variação no comprimento total *AD* e (*b*) a variação no diâmetro no meio da barra.

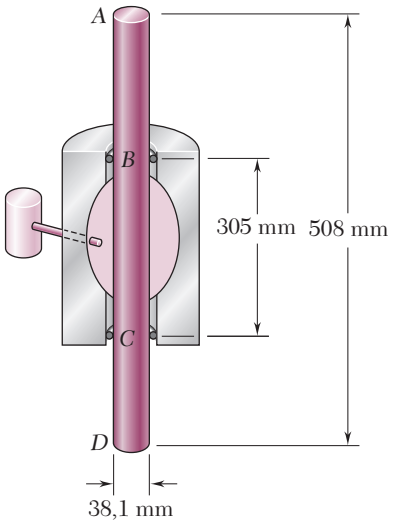


Fig. P2.67

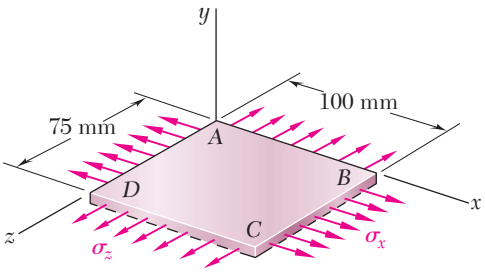


Fig. P2.69

2.68 Para a barra do Problema 2.67, determine as forças que deverão ser aplicadas às extremidades *A* e *D* da barra (*a*) se a deformação específica axial na parte *BC* da barra permanecer zero com a pressão hidrostática aplicada e (*b*) se o comprimento total *AD* da barra permanecer inalterado.

2.69 Um tecido utilizado em estruturas infláveis está submetido a um carregamento biaxial que resulta em tensões normais $\sigma_x = 120$ MPa e $\sigma_z = 160$ MPa. Sabendo que as propriedades do tecido podem ser de aproximadamente $E = 87$ GPa e $\nu = 0{,}34$, determine a variação no comprimento (*a*) do lado *AB*, (*b*) do lado *BC* e (*c*) da diagonal *AC*.

2.70 O bloco mostrado na figura é feito de liga de magnésio com $E = 45$ GPa e $\nu = 0{,}35$. Sabendo que $\sigma_x = -180$MPa, determine (*a*) a intensidade de σ_y para a qual a variação na altura do bloco será zero, (*b*) a variação correspondente na área da face *ABCD* e (*c*) a variação correspondente no volume do bloco.

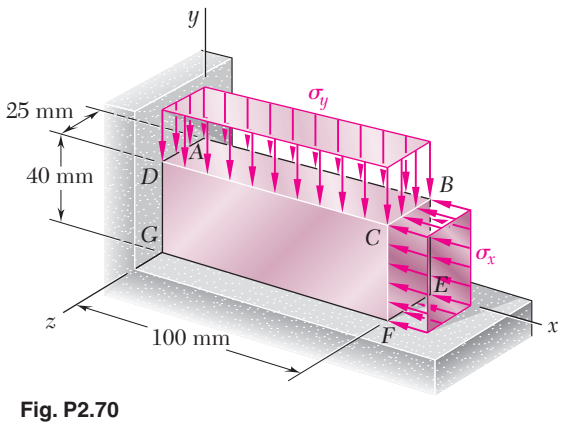


Fig. P2.70

2.71 A placa homogênea *ABCD* está submetida a um carregamento biaxial como mostra a figura. Sabe-se que $\sigma_z = \sigma_0$ e que a variação no comprimento da placa na direção x deve ser zero, ou seja, $\epsilon_x = 0$. Designando por E o módulo de elasticidade e por ν o coeficiente de Poisson, determine (*a*) a intensidade necessária de σ_x e (*b*) a relação σ_0/ϵ_z.

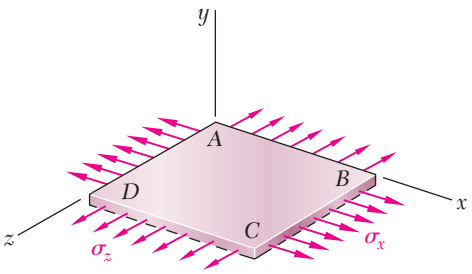


Fig. *P2.71*

2.72 Para um componente sob carregamento axial, expresse a deformação específica normal ϵ' na direção que forma um ângulo de 45° com o eixo da força em função da deformação específica axial ϵ_x através de (*a*) comparação das hipotenusas dos triângulos mostrados na Fig. 2.54, que representam respectivamente um elemento antes e depois da deformação e (*b*) usando os valores das tensões σ' e σ_x correspondentes mostrados na Fig. 1.40 e a lei de Hooke generalizada.

2.73 Em muitas situações sabe-se que a tensão normal em determinada direção é zero, como, $\sigma_z = 0$, no caso da placa fina mostrada. Para esse caso, conhecido como *estado plano de tensão*, mostre que, se as deformações ϵ_x e ϵ_y foram determinadas experimentalmente, podemos expressar σ_x, σ_y e ϵ_z da seguinte maneira:

$$\sigma_x = E\frac{\epsilon_x + \nu\epsilon_y}{1 - \nu^2}$$

$$\sigma_y = E\frac{\epsilon_y + \nu\epsilon_x}{1 - \nu^2}$$

$$\epsilon_z = -\frac{\nu}{1 - \nu}(\epsilon_x + \epsilon_y)$$

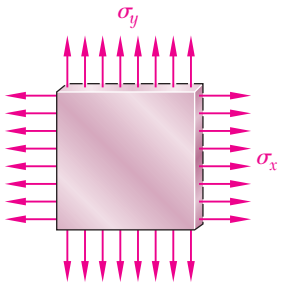


Fig. P2.73

2.74 Em muitas situações físicas, impedimentos de deformação devem ocorrer em determinada direção, por exemplo $\epsilon_z = 0$ no caso mostrado. Esse impedimento ocorre por causa da longa dimensão da barra na direção z. Seções planas perpendiculares ao eixo longitudinal permanecem planas e separadas à mesma distância. Mostre que, para essa situação, conhecida como *estado plano de deformação*, podemos expressar σ_z, ϵ_x e ϵ_y da seguinte maneira:

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}[(1 - \nu^2)\sigma_x - \nu(1 + \nu)\sigma_y]$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E}[(1 - \nu^2)\sigma_y - \nu(1 + \nu)\sigma_x]$$

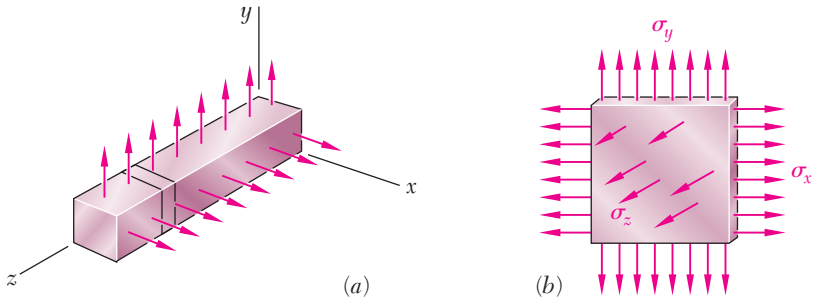


Fig. P2.74

2.75 O bloco de plástico mostrado está colado a uma base fixa e a uma chapa horizontal rígida à qual é aplicada uma força **P**. Sabendo que o plástico utilizado tem módulo de elasticidade transversal $G = 379{,}2$ MPa, determine o deslocamento da chapa quando $P = 40{,}0$ kN.

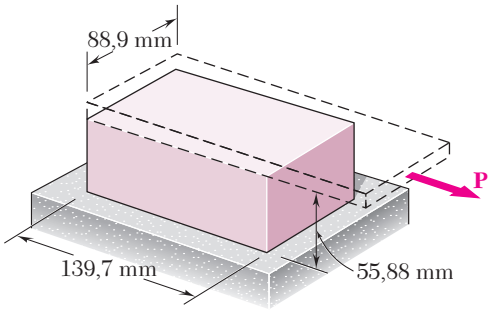


Fig. P2.75

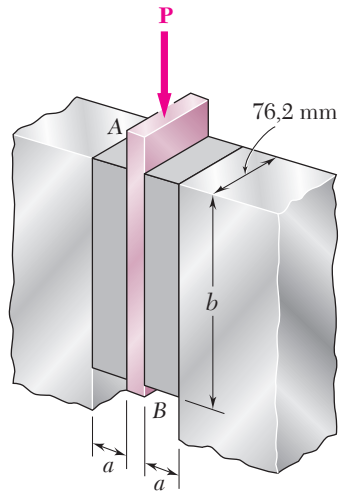
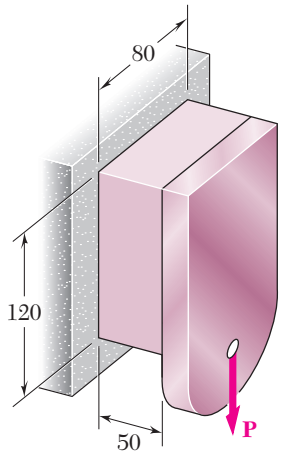


Fig. P2.76

2.76 A unidade de isolamento de vibrações é formada por dois blocos de borracha dura colados à placa *AB* e a suportes rígidos conforme mostrado na figura. Para o grau e o tipo de borracha utilizada tem-se $\tau_{adm} = 1517$ kPa e $G = 12{,}41$ MPa. Sabendo que uma força vertical de intensidade $P = 14{,}23$ kN deve produzir um deslocamento vertical de 2,54 mm na chapa *AB*, determine as menores dimensões *a* e *b* admissíveis para o bloco.

2.77 O bloco plástico mostrado na figura é colado a um suporte rígido e a uma placa vertical à qual é aplicada uma força **P** de 240 kN. Sabendo que, para o plástico utilizado, $G = 1050$ MPa, determine o deslocamento da placa.

2.78 Qual a força **P** que deverá ser aplicada à placa do Problema 2.77 para produzir um deslocamento de 1,5 mm?



Dimensões em mm

Fig. P2.77

2.79 Dois blocos de borracha com um módulo de elasticidade transversal $G = 12{,}07$ MPa são colados a dois suportes rígidos e a uma placa *AB*. Sabendo que $c = 102$ mm e $P = 44{,}5$ kN, determine as menores dimensões *a* e *b* admissíveis dos blocos para que a tensão de cisalhamento na borracha não exceda 1,4 MPa e o deslocamento da placa seja no mínimo de 4,8 mm.

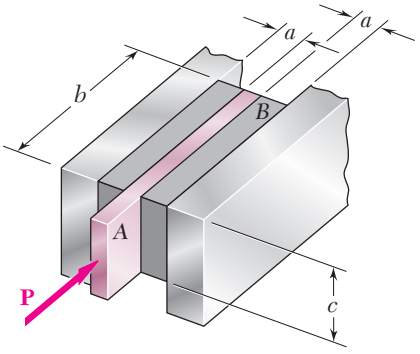


Fig. *P2.79* e *P2.80*

2.80 Dois blocos de borracha com um módulo de elasticidade transversal $G = 10{,}34$ MPa são colados a dois suportes rígidos e a uma placa *AB*. Sabendo que $b = 203$ mm e $c = 127$ mm, determine a maior força *P* admissível e a menor espessura *a* admissível dos blocos para que a tensão de cisalhamento na borracha não exceda 1448 kPa e o deslocamento da placa seja no mínimo 6,4 mm.

2.81 Um apoio de elastômero ($G = 0{,}9$ MPa) é utilizado para suportar uma viga mestra de uma ponte, como mostra a figura, para proporcionar flexibilidade durante terremotos. A viga não pode sofrer deslocamento horizontal superior a 10 mm quando é aplicada uma força lateral de 22 kN. Sabendo que a tensão de cisalhamento máxima admissível é 420 kPa, determine (*a*) a menor dimensão *b* admissível e (*b*) a menor espessura *a* necessária.

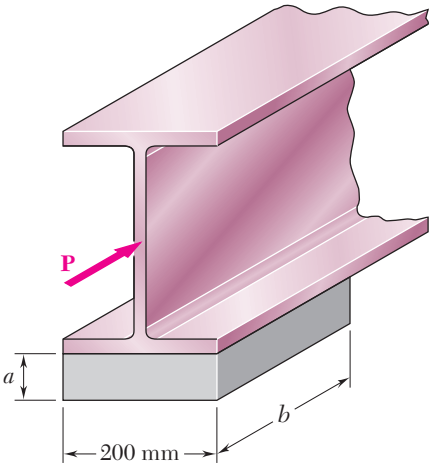


Fig. P2.81

2.82 Para o apoio de elastômero do Problema 2.81 com $b = 220$ mm e $a = 30$ mm, determine o módulo de cisalhamento G e a tensão de cisalhamento τ para uma força lateral máxima $P = 19$ kN e um deslocamento máximo $\delta = 12$ mm.

***2.83** Uma esfera sólida de aço com diâmetro de 152,4 mm é mergulhada no oceano, em um ponto onde a pressão é de 49 MPa (aproximadamente 4,8 km abaixo da superfície). Sabendo que $E = 200$ GPa e $\nu = 0{,}30$, determine (*a*) a diminuição no diâmetro da esfera, (*b*) a diminuição no volume da esfera e (*c*) a porcentagem de aumento da densidade da esfera.

***2.84** (*a*) Para o carregamento axial mostrado, determine a variação em altura e a variação em volume do cilindro de latão mostrado na figura. (*b*) Resolva a parte *a* considerando que o carregamento seja hidrostático com $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -70$ MPa.

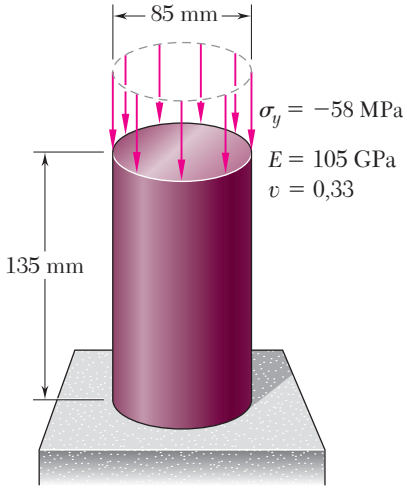


Fig. P2.84

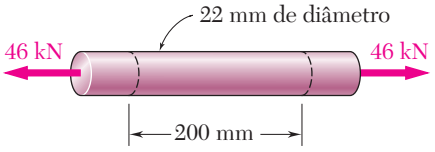


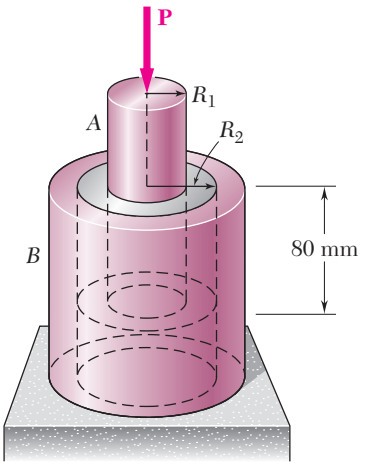
Fig. *P2.85*

***2.85** Determine a dilatação *e* e a variação em volume do segmento de 200 mm da barra mostrada se (*a*) a barra fosse feita de aço com $E = 200$ GPa e $\nu = 0{,}30$ e (*b*) a barra fosse feita de alumínio com $E = 70$ GPa e $\nu = 0{,}35$.

***2.86** Determine a variação em volume do segmento *AB* do comprimento de referência de 50,8 mm no Problema 2.63 (*a*) pelo cálculo da dilatação do material e (*b*) pela subtração do volume original da parte *AB* de seu volume final.

***2.87** Um suporte isolador de vibração consiste em uma barra *A* de raio $R_1 = 10$ mm e um tubo *B* de raio interno $R_2 = 25$ mm, colado a um tubo de borracha de 80 mm de comprimento com um módulo de elasticidade transversal $G = 12$ MPa. Determine a maior força **P** admissível que pode ser aplicada à barra *A*, sabendo que seu deslocamento não deve exceder 2,50 mm.

***2.88** Um suporte isolador de vibração consiste em uma barra *A* de raio R_1 e um tubo *B* de raio interno R_2, colado a um tubo de borracha de 80 mm de comprimento com um módulo de elasticidade transversal $G = 10{,}93$ MPa. Determine o valor necessário para a relação R_2/R_1, se uma força **P** de 10 kN provocar um deslocamento de 2 mm da barra *A*.



Figs. *P2.87* e P2.88

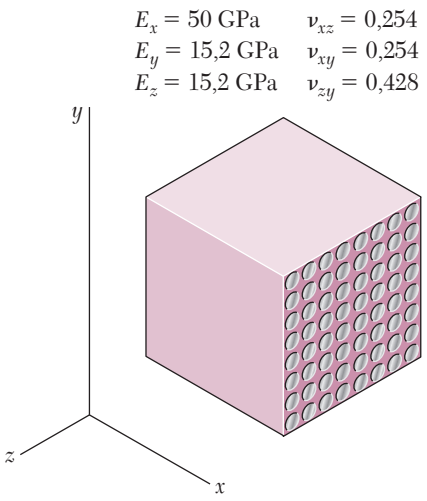


Fig. P2.89

***2.89** Um cubo, de um material compósito, com 40 mm de lado e as propriedades mostradas na figura é feito de polímeros com fibras de vidro alinhadas na direção x. O cubo é impedido de se deformar nas direções y e z e está submetido a uma força de tração de 65 kN na direção x. Determine (*a*) a variação na dimensão do cubo na direção x e (*b*) as tensões σ_x, σ_y e σ_z.

***2.90** O cubo do Problema 2.89, de um material compósito, é impedido de se deformar na direção z e é alongado na direção x em 0,035 mm por uma força de tração na direção x. Determine (*a*) as tensões σ_x, σ_y e σ_z e (*b*) a variação na dimensão do cubo na direção y.

***2.91** As constantes de material E, G, k e ν estão relacionadas nas Equações (2.33) e (2.43). Mostre que qualquer uma dessas constantes pode ser expressa em função de quaisquer outras duas constantes. Por exemplo, mostre que (*a*) $k = GE/(9G - 3E)$ e (*b*) $\nu = (3k - 2G)/(6k + 2G)$.

***2.92** Mostre que, para qualquer material, a relação G/E do módulo de elasticidade transversal dividido pelo módulo de elasticidade é sempre menor que $\frac{1}{2}$, mas maior que $\frac{1}{3}$. [*Sugestão*: Ver as Equações (2.43) e a Seção 2.13.]

2.17. Distribuição de tensão e deformação específica sob carregamento axial; princípio de Saint-Venant

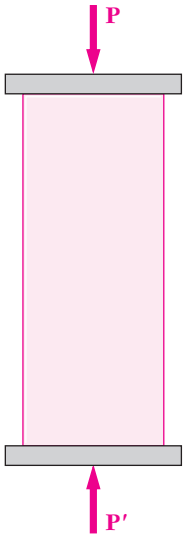


Fig. 2.58

Supomos até agora que, em um componente carregado axialmente, as tensões normais são uniformemente distribuídas em qualquer seção perpendicular ao eixo do elemento. Conforme vimos na Seção 1.5, essa suposição pode estar errada nas vizinhanças imediatas dos pontos de aplicação das forças. No entanto, a determinação das tensões reais em uma seção do componente requer a solução de um problema estaticamente indeterminado.

Na Seção 2.9, foi visto que problemas estaticamente indeterminados envolvendo a determinação de *forças* podem ser resolvidos considerando as *deformações* provocadas por essas forças. É portanto razoável concluir que a determinação das *tensões* em um componente requer a análise das *deformações específicas* produzidas pelas tensões no componente. Essa é essencialmente a abordagem encontrada nos livros-textos mais avançados, em que é utilizada a teoria matemática da elasticidade para determinar a distribuição de tensões que correspondem a vários modos de aplicação das forças nas extremidades do elemento. Em razão dos meios matemáticos mais limitados à nossa disposição, a análise de tensões ficará restrita ao caso em que são utilizadas duas placas rígidas para transmitir as forças a um componente feito de material isotrópico homogêneo (Fig. 2.58).

Se as forças são aplicadas ao centro de cada placa,† as placas se moverão uma em direção a outra sem girar, fazendo o componente ficar mais curto enquanto aumenta na largura e na espessura. É razoável supor que o componente permanecerá reto (desde que não haja atrito entre a placa e o componente),

† Mais precisamente, a linha de ação das forças deverá passar através do centroide da seção transversal (ver Seção 1.5).

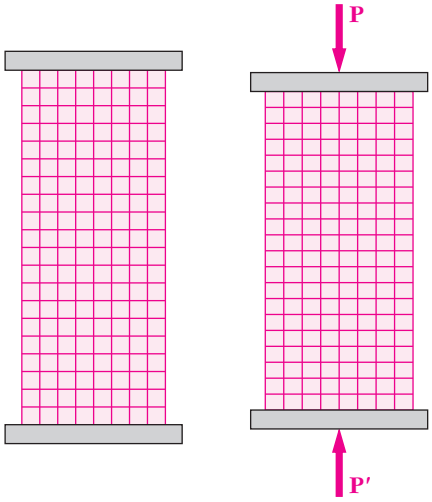


Fig. 2.59

que as seções planas permanecerão planas, e que todos os elementos se deformarão da mesma maneira, visto que essa suposição é claramente compatível com as condições de contorno do elemento. Isso está ilustrado na Fig. 2.59, que mostra um modelo de borracha antes e depois do carregamento.‡ Agora, se os elementos se deformam da mesma maneira, a distribuição de deformações específica através do componente deve ser uniforme. Em outras palavras, a deformação específica axial ϵ_y e a deformação específica lateral $\epsilon_x = -\nu\epsilon_y$ são constantes. Mas se as tensões não excederem o limite de proporcionalidade, podemos aplicar a lei de Hooke e escrever $\sigma_y = E\epsilon_y$, e consequentemente a tensão normal σ_y também será constante. Assim, a distribuição das tensões é uniforme através de todo o componente e, em qualquer ponto,

$$\sigma_y = (\sigma_y)_{\text{méd}} = \frac{P}{A}$$

Entretanto, se as forças forem concentradas, conforme ilustra a Fig. 2.60, os elementos nas vizinhanças imediatas dos pontos de aplicação das forças estarão submetidos a tensões muito grandes, ao passo que outros elementos próximos das extremidades do componente não serão afetados pelo carregamento. Isso pode ser verificado observando-se que ocorrem grandes deformações e, portanto, grandes deformações específicas e grandes tensões nas proximidades dos pontos de aplicação das forças, enquanto nos cantos não há deformações. No entanto, à medida que consideramos elementos cada vez mais distantes das extremidades, notamos uma equalização progressiva das deformações envolvidas e, portanto, uma distribuição mais uniforme das deformações específicas e tensões através da seção transversal do componente. Isso está melhor ilustrado na Fig. 2.61, que mostra o resultado dos cálculos, por métodos de matemática avançada, da distribuição de tensões através de várias seções transversais de uma placa retangular fina submetida a forças

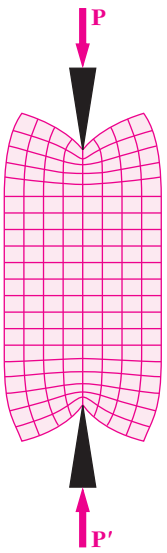


Fig. 2.60

‡ Note que, para componentes longos e delgados, é possível uma outra configuração, e certamente prevalecerá, se a carga for suficientemente grande; o componente *se dobra* e assume uma forma curvada. Isso será discutido no Capítulo 10.

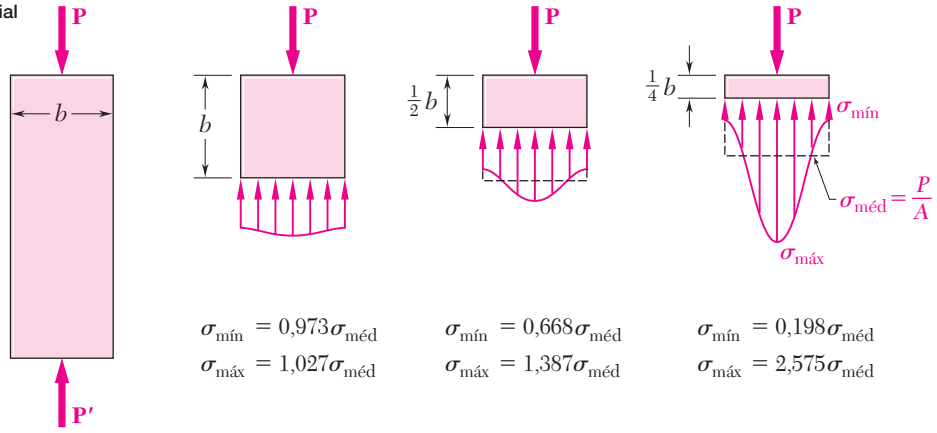


Fig. 2.61

concentradas. Notamos que a uma distância b de qualquer extremidade, em que b é a largura da placa, a distribuição de tensões é aproximadamente uniforme através da seção transversal, e o valor da tensão σ_y em qualquer ponto daquela seção pode ser considerado igual ao valor médio P/A. Assim, a uma distância igual ou maior que a largura do componente, a distribuição de tensões através de determinada seção transversal é a mesma, independentemente de o componente estar carregado, como mostram as Figs. 2.58 ou 2.60. Em outras palavras, exceto nas vizinhanças imediatas dos pontos de aplicação das forças, a distribuição de tensões pode ser considerada independentemente do modo real de aplicação das forças. Essa definição, que se aplica não somente a carregamentos axiais, mas praticamente a todo tipo de carregamento, é conhecida como *princípio de Saint-Venant*, em homenagem ao matemático e engenheiro francês Adhémar Barré de Saint-Venant (1797-1886).

Embora o princípio de Saint-Venant torne possível substituir determinado carregamento por um outro mais simples para fins de cálculos de tensões em um componente estrutural, devemos ter em mente dois pontos importantes ao aplicá-lo:

1. O carregamento real e o utilizado para calcular as tensões devem ser *estaticamente equivalentes*.
2. As tensões não podem ser calculadas dessa maneira nas vizinhanças imediatas dos pontos de aplicação das forças. Métodos teóricos avançados ou experimentais devem ser utilizados para determinar a distribuição de tensões nessas regiões.

Você deve também observar que as placas utilizadas para obter uma distribuição uniforme de tensão no componente da Fig. 2.59 devem permitir que o componente se expanda livremente na direção lateral. As placas não podem ser fixadas rigidamente no componente. Você deve considerar que elas estejam apenas em contato com o componente e devem ser lisas o suficiente para não impedir a expansão lateral do componente. Embora se possa realmente obter essas condições de contorno para um componente em compressão, elas não podem ser obtidas fisicamente no caso de um componente em tração. No entanto, pouco importa se um dispositivo real pode ser ou não implementado e utilizado para aplicar uma força em um componente de maneira que a distribuição de tensões no componente seja uniforme. O importante é *idealizar um modelo* que permitirá essa distribuição de tensões e mantê-lo em mente para que depois você possa compará-lo com as condições reais de carregamento.

2.18. Concentrações de tensão

Como foi visto na seção anterior, as tensões nas proximidades dos pontos de aplicação de forças concentradas podem alcançar valores muito maiores do que o valor médio da tensão no componente. Quando um componente estrutural contém uma descontinuidade, por exemplo, um furo ou uma mudança brusca na seção transversal, podem ocorrer valores altos de tensões localizadas próximas da descontinuidade. As Figs. 2.62 e 2.63 mostram a distribuição de tensões em seções críticas correspondentes a duas dessas situações. A Figura 2.62 refere-se a uma placa com um *furo circular* e mostra a distribuição de tensões em uma seção passando através do centro do furo. A Fig. 2.63 refere-se a uma placa que consiste em duas partes de diferentes seções transversais conectadas por *adoçamentos (arredondamentos)*. Ela mostra a distribuição de tensões na parte mais estreita da conexão, onde ocorrem as maiores tensões.

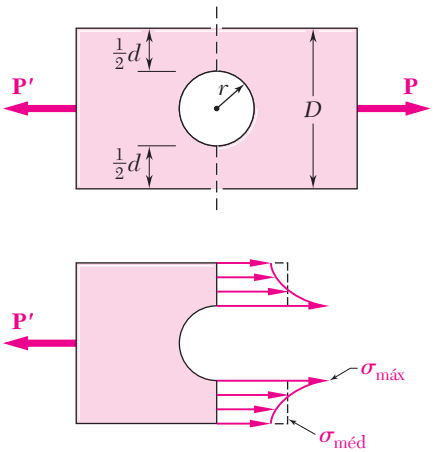


Fig. 2.62 Distribuição de tensões próximas a um furo circular em placa submetida a carregamento axial.

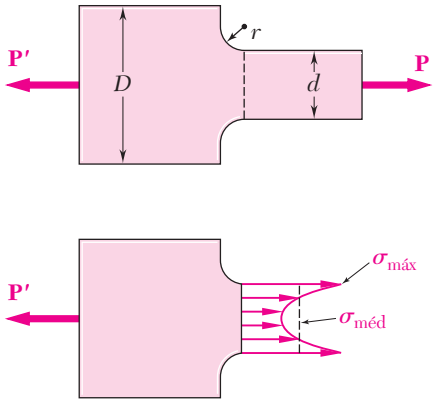


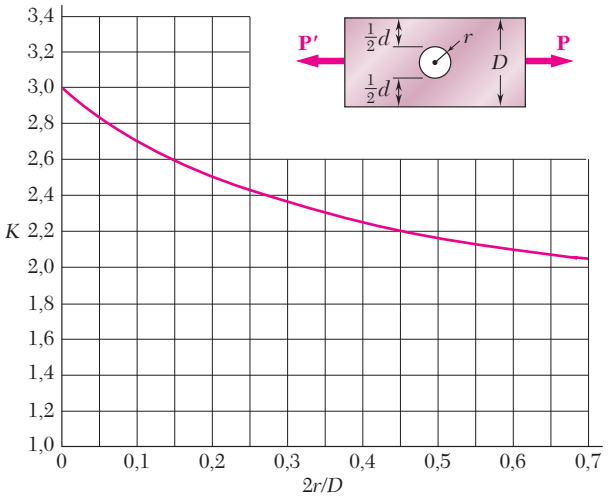
Fig. 2.63 Distribuição de tensões próximas aos adoçamentos em placa submetida a carregamento axial.

Esses resultados foram obtidos experimentalmente por meio de método fotoelástico. Felizmente, para o engenheiro que tiver de projetar determinado componente e não puder executar uma análise assim, os resultados obtidos serão independentes do tamanho do elemento e do material utilizado. Eles dependerão somente das relações dos parâmetros geométricos envolvidos, ou seja, da relação r/d no caso de um furo circular, e das relações r/d e D/d no caso dos adoçamentos. Além disso, o projetista está mais interessado no *valor máximo* da tensão em determinada seção, que na distribuição real de tensões naquela seção. Sua preocupação principal é determinar *se* a tensão admissível será ou não ultrapassada sob determinada carregamento e não *onde* esse valor será ultrapassado. Por essa razão, definimos a relação

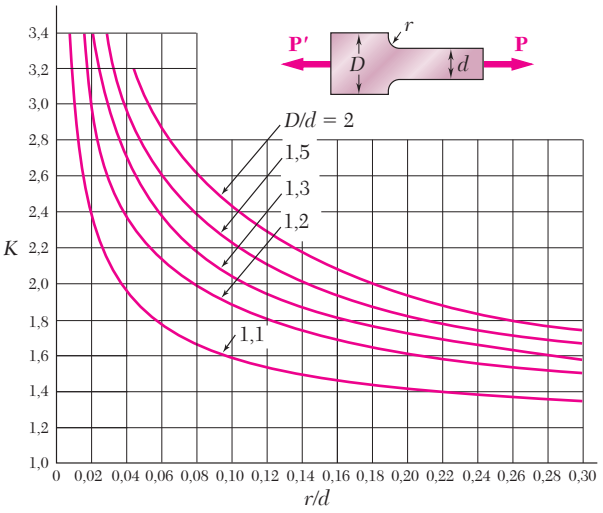
$$K = \frac{\sigma_{máx}}{\sigma_{méd}} \tag{2.48}$$

em que $\sigma_{máx}$ é a máxima tensão normal e $\sigma_{méd}$ é a tensão normal média calculadas na seção crítica (mais estreita) da descontinuidade. Essa relação é chamada de *coeficiente de concentração de tensão* de uma descontinuidade. Os coeficientes de concentração de tensão podem ser calculados somente uma vez em função das relações de parâmetros geométricos envolvidos. Os resul-

tados obtidos podem ser apresentados na forma de tabelas ou gráficos, como mostra a Fig. 2.64. Para determinar a tensão máxima que está ocorrendo próxima de uma descontinuidade em um elemento submetido a uma força axial P, o projetista precisa somente calcular a tensão média $\sigma_{méd} = P/A$ na seção crítica e multiplicar o resultado obtido pelo valor apropriado do coeficiente K de concentração de tensão. No entanto, deve-se notar que esse procedimento é válido somente enquanto $\sigma_{máx}$ não excede o limite de proporcionalidade do material, pois os valores de K representados no gráfico da Fig. 2.64 foram obtidos supondo-se uma relação linear entre tensão e deformação específica.



(*a*) Placas com furos



(*b*) Placas com adoçamentos

Fig. 2.64 Coeficientes de concentração de tensão para placas submetidas a carregamento axial.†

Note que a tensão média deve ser calculada na seção transversal mais estreita: $\sigma_{méd} = P/td$, em que t é a espessura da placa.

EXEMPLO 2.12

Determine a maior força axial **P** que pode ser suportada com segurança por uma placa de aço que consiste em duas partes, ambas com espessura de 10 mm e, respectivamente, 40 e 60 mm de largura, conectadas por adoçamentos de raio $r = 8$ mm. Considere uma tensão normal admissível de 165 MPa.

Primeiro calculamos as relações

$$\frac{D}{d} = \frac{60\text{ mm}}{40\text{ mm}} = 1{,}50 \qquad \frac{r}{d} = \frac{8\text{ mm}}{40\text{ mm}} = 0{,}20$$

Usando a curva da Fig. 2.64*b* correspondente a $D/d = 1{,}50$, verificamos que o valor do coeficiente de concentração de tensão correspondente a $r/d = 0{,}20$ é

$$K = 1{,}82$$

Usando esse valor na Equação (2.48), determina-se o valor $\sigma_{méd}$

$$\sigma_{méd} = \frac{\sigma_{máx}}{1{,}82}$$

Mas $\sigma_{máx}$ não pode exceder a tensão admissível do material da placa $\sigma_{adm} = 165$ MPa. Considerando esse valor para $\sigma_{máx}$, verificamos que a tensão média na parte mais estreita ($d = 40$ mm) da barra não deverá exceder o valor

$$\sigma_{méd} = \frac{165\text{ MPa}}{1{,}82} = 90{,}7\text{ MPa}$$

Lembrando que $\sigma_{méd} = P/A$, temos

$$P = A\sigma_{méd} = (40\text{ mm})(10\text{ mm})(90{,}7\text{ MPa}) = 36{,}3 \times 10^3\text{ N}$$
$$P = 36{,}3\text{ kN}$$

†PILKEY,W. D. *Peterson's Stress Concentration Factors*. 2. ed., Nova York: John Wiley & Sons, 1997.

2.19. Deformações plásticas

Os resultados obtidos nas seções anteriores eram baseados na suposição de uma relação tensão-deformação linear. Em outras palavras, considerou-se que o limite de proporcionalidade do material nunca havia sido ultrapassado. Essa é uma suposição razoável no caso de materiais frágeis, que entram em ruptura sem escoarem. Porém, no caso dos materiais dúcteis, essa suposição pressupõe que a tensão de escoamento do material não é excedida. As deformações permanecerão, assim, dentro da região elástica e os componentes estruturais considerados permanecerão em sua forma original após a remoção das forças. Se, entretanto, as tensões em qualquer parte do elemento excederem a tensão de escoamento do material, ocorrerão deformações plásticas, e a maior parte dos resultados obtidos nas seções anteriores deixará de ser válida. Deve ser feita então uma análise mais profunda, com base em uma relação tensão-deformação não-linear.

Embora uma análise levando em conta a relação real tensão-deformação esteja além do escopo deste livro, podemos obter muitas informações sobre o comportamento plástico considerando um *material elastoplástico* ideal. Para esse material considera-se o diagrama tensão-deformação constituído de dois segmentos retos, como mostra a Fig. 2.65. Podemos notar que o diagrama tensão-deformação para o aço doce nas regiões elástica e plástica é similar a esse modelo ideal. Desde que a tensão σ seja menor que a tensão de escoamento σ_E, o material tem comportamento elástico e obedece à lei de Hooke, $\sigma = E\epsilon$. Quando σ atinge o valor σ_E, o material começa a escoar e continua deformando plasticamente sob um carregamento constante. Se o carregamento é removido, o descarregamento ocorre ao longo do segmento de reta CD paralelo à parte inicial AE da curva de carregamento. O segmento AD do eixo horizontal representa a deformação específica correspondente à deformação permanente ou deformação plástica resultante do carregamento e descarregamento do corpo de prova. Embora nenhum material real se comporte exatamente como mostra a Fig. 2.65, esse diagrama tensão-deformação será útil na discussão de deformações plásticas de materiais dúcteis como o aço doce.

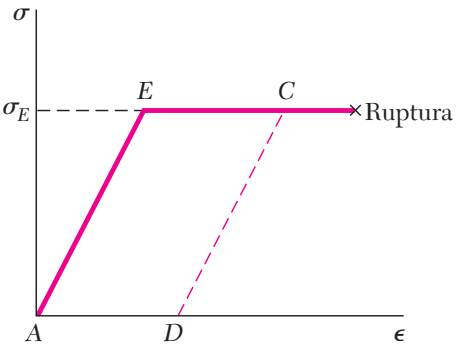


Fig. 2.65

EXEMPLO 2.13

Uma barra de comprimento $L = 500$ mm e seção transversal com área $A = 60$ mm^2 é feita de um material elastoplástico que tem um módulo de elasticidade $E = 200$ GPa em sua região elástica e uma tensão de escoamento $\sigma_E = 300$ MPa. A barra é submetida a uma força axial até que seja atingido um alongamento de 7 mm e a força é então removida. Qual é a deformação permanente resultante?

Consultando o diagrama da Fig. 2.65, verificamos que a deformação específica máxima, representada pela abscissa do ponto C, é

$$\epsilon_C = \frac{\delta_C}{L} = \frac{7 \text{ mm}}{500 \text{ mm}} = 14 \times 10^{-3}$$

Em contrapartida, a deformação de escoamento, representada pela abscissa do ponto E, é

$$\epsilon_E = \frac{\sigma_E}{E} = \frac{300 \times 10^6 \text{ Pa}}{200 \times 10^9 \text{ Pa}} = 1{,}5 \times 10^{-3}$$

A deformação específica após a remoção da força é representada pela abscissa ϵ_D do ponto D. Notamos da Fig. 2.65 que

$$\epsilon_D = AD = EC = \epsilon_C - \epsilon_E$$
$$= 14 \times 10^{-3} - 1{,}5 \times 10^{-3} = 12{,}5 \times 10^{-3}$$

A deformação permanente é a δ_D correspondente à deformação específica ϵ_D. Temos

$$\delta_D = \epsilon_D L = (12{,}5 \times 10^{-3})(500 \text{ mm}) = 6{,}25 \text{ mm}$$

EXEMPLO 2.14

Uma barra cilíndrica com 800 mm de comprimento e seção transversal com área $A = 48\ \text{mm}^2$ é colocada dentro de um tubo de mesmo comprimento e seção transversal de área $A_t = 60\ \text{mm}^2$. As extremidades da barra e do tubo são fixadas a um suporte rígido em um dos lados e a uma placa rígida no outro, como mostra a seção longitudinal da Fig. 2.66. Supõe-se que a barra e o tubo sejam ambos elastoplásticos, com módulos de elasticidade $E_b = 200$ GPa e $E_t = 80$ GPa, e as tensões de escoamento $(\sigma_b)_E = 250$ MPa e $(\sigma_t)_E = 300$ MPa. Desenhe o diagrama força-deslocamento do conjunto constituído por barra e tubo quando a força **P** é aplicada à placa, conforme mostra a figura.

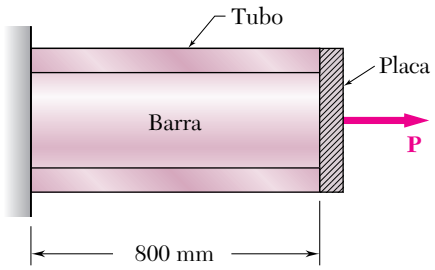


Fig. 2.66

Primeiro determinamos a força interna e o alongamento da barra quando ela começa a escoar

$$(P_b)_E = (\sigma_b)_E A_b = (250\ \text{MPa})(48 \times 10^{-6}\,\text{m}^2) = 12\ \text{kN}$$

$$(\delta_b)_E = (\epsilon_b)_E L = \frac{(\sigma_b)_E}{E_b} L = \frac{250\ \text{MPa}}{200\,000\ \text{MPa}} (800 \times 10^{-3}\ \text{m})$$

$$= 10 \times 10^{-4}\ \text{m}$$

Como o material é elastoplástico, o diagrama força-deslocamento *da barra isoladamente* consiste em uma linha reta oblíqua e uma linha reta horizontal, como mostra a Fig. 2.67*a*. Seguindo o mesmo procedimento para o tubo, temos

$$(P_t)_E = (\sigma_t)_E A_t = (300\ \text{MPa})(60 \times 10^{-6}\,\text{m}^2) = 18\ \text{kN}$$

$$(\delta_t)_E = (\epsilon_t)_E L = \frac{(\sigma_t)_E}{E_t} L = \frac{300\ \text{MPa}}{80\,000\ \text{MPa}} (800 \times 10^{-3}\ \text{m})$$

$$= 30 \times 10^{-4}\ \text{m}$$

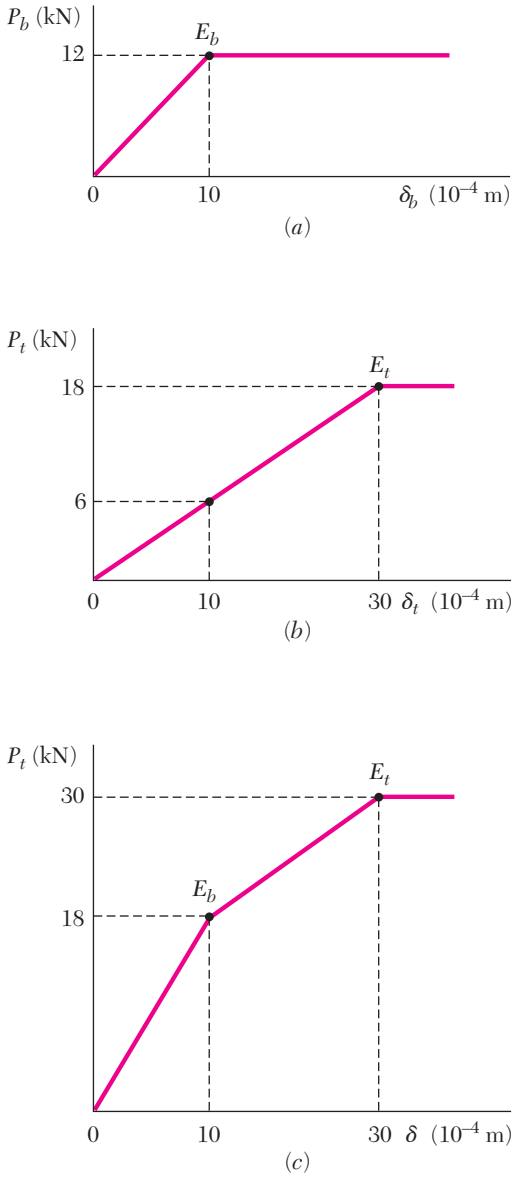


Fig. 2.67

O diagrama força-deslocamento do tubo isoladamente é mostrado na Fig. 2.67*b*. Observando que a força e o deslocamento do conjunto barra-tubo são, respectivamente,

$$P = P_b + P_t \qquad \delta = \delta_b = \delta_t$$

Adicionando as ordenadas dos diagramas obtidos para a barra e para o tubo, tomados isoladamente, obtém-se o diagrama força-deslocamento desejado (Fig. 2.67*c*). Os pontos E_b e E_t correspondem ao início do escoamento na barra e no tubo, respectivamente.

EXEMPLO 2.15

Se a força **P** aplicada ao conjunto constituído por barra e tubo do Exemplo 2.14 é aumentada de zero a 24 kN e diminuída de volta a zero, determine (*a*) o alongamento máximo do conjunto e (*b*) a deformação permanente depois que a força é removida.

(a) Alongamento máximo. Referindo-nos à Fig. 2.67*c*, observamos que a carga $P_{máx} = 24$ kN corresponde a um ponto localizado no segmento E_bE_t do diagrama força-deslocamento do conjunto. Assim, a barra atingiu a região plástica, com $P_b = (P_b)_E = 12$ kN e $\sigma_b = (\sigma_b)_E = 250$ MPa, enquanto o tubo ainda está na região elástica, com

$$P_t = P - P_b = 24 - 12 = 12 \text{ kN}$$

$$\sigma_t = \frac{P_t}{A_t} = \frac{12 \text{ kN}}{60 \text{ mm}^2} = 200 \text{ MPa}$$

$$\delta_t = \epsilon_t L = \frac{\sigma_t}{E_t} L = \frac{200 \text{ MPa}}{80000 \text{ MPa}} (800 \times 10^{-3} \text{ m}) = 20 \times 10^{-4} \text{ m}$$

O alongamento máximo do conjunto é, portanto,

$$\delta_{máx} = \delta_t = 20 \times 10^{-4} \text{ m}$$

(b) Deformação permanente. À medida que a força **P** diminui de 24 kN para zero, as forças internas P_b e P_t diminuem ao longo de uma linha reta, como mostra a Fig. 2.68*a* e *b*, respectivamente. A força P_b diminui ao longo da linha *CD* paralela à parte inicial da curva de carregamento, enquanto a força P_t diminui ao longo da curva de carregamento original, pois a tensão de escoamento não foi excedida no tubo. Sua soma *P*, portanto, diminuirá ao longo de uma linha *CE* paralela à parte OE_b da curva de força-deslocamento do conjunto (Fig. 2.68*c*). Referindo-nos à Fig. 2.67*c*, encontramos a inclinação de OE_b e, portanto, de *CE*, que é

$$m = \frac{18 \text{ kN}}{10 \times 10^{-4} \text{ m}} = 18 \times 10^3 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

O segmento de reta *FE* na Fig. 2.68*c* representa a deformação δ' do conjunto durante a fase de descarregamento, e o segmento *OE*, a deformação permanente δ_p depois que a força **P** foi removida. Do triângulo *CEF* temos

$$\delta' = -\frac{P_{máx}}{m} = -\frac{24 \text{ kN}}{18 \times 10^3 \frac{\text{kN}}{\text{m}}} = -13{,}33 \times 10^{-4} \text{ m}$$

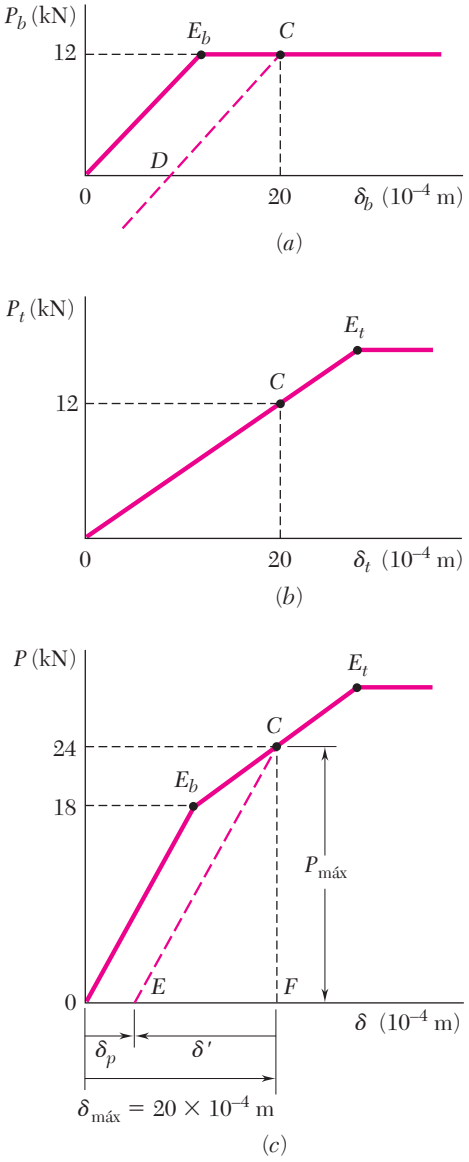


Fig. 2.68

A deformação permanente é, portanto,

$$\delta_P = \delta_{máx} + \delta' = 20 \times 10^{-4} - 13{,}33 \times 10^{-4}$$
$$= 6{,}67 \times 10^{-4} \text{ m}$$

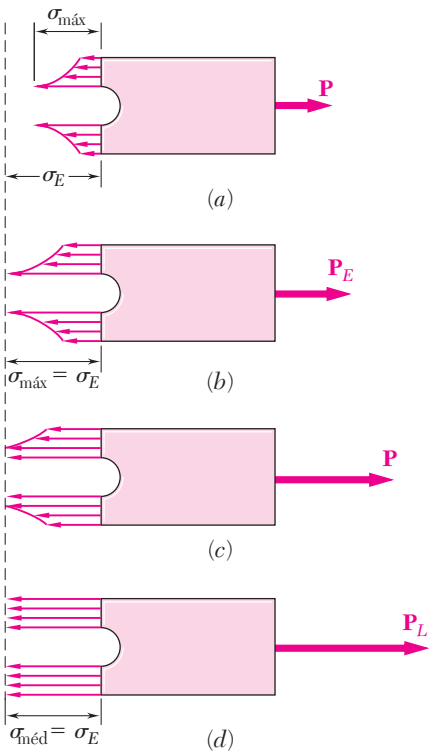


Fig. 2.69 Distribuição de tensões em um material elastoplástico sob aumento de força.

Lembramos que a discussão das concentrações de tensão da Seção 2.18 foi feita sob a hipótese de uma relação linear entre tensão e deformação específica. As distribuições de tensão mostradas nas Figs. 2.62 e 2.63 e os valores dos coeficientes de concentração de tensão mostrados na Fig. 2.64 não podem ser utilizados, portanto, quando ocorrem deformações plásticas, isto é, quando o valor de $\sigma_{máx}$ obtido dessas figuras excede a tensão de escoamento σ_E.

Vamos considerar novamente a placa com um furo circular da Fig. 2.62 e supor que o material seja elastoplástico, isto é, que seu diagrama de tensão em função da deformação específica seja conforme mostra a Fig. 2.65. Desde que não haja deformação plástica, a distribuição de tensões assemelha-se ao indicado na Seção 2.18 (Fig. 2.69*a*). Observamos que a área sob a curva de distribuição de tensão representa a integral $\int \sigma \, dA$, que é igual à força P. Portanto, essa área e o valor de $\sigma_{máx}$ devem aumentar à medida que a força P aumenta. Enquanto $\sigma_{máx} \leq \sigma_E$, as sucessivas distribuições de tensão obtidas à medida que P aumenta terão a forma mostrada na Fig. 2.62 e repetida na Fig. 2.69*a*. No entanto, como P aumenta além do valor P_E correspondente a $\sigma_{máx} = \sigma_E$ (Fig. 2.69*b*), a curva de distribuição de tensão deve se achatar nas vizinhanças do furo (Fig. 2.69*c*), pois a tensão no material considerado não pode exceder o valor σ_E. Isso indica que o material está escoando nas vizinhanças do furo. Na medida em que a força P continua aumentando, a zona plástica onde tem lugar o escoamento continua expandindo-se, até atingir as bordas da placa (Fig. 2.69*d*). Nesse ponto, a distribuição da tensão através da placa é uniforme, $\sigma = \sigma_E$, e o valor correspondente $P = P_L$ da força é o maior que pode ser aplicado à barra sem provocar ruptura.

É interessante comparar o valor máximo da força P_E que pode ser aplicada sem que se produzam deformações permanentes na barra, com o valor P_L que provocará sua ruptura. Lembrando a definição de tensão média, $\sigma_{méd} = P/A$, em que A é a área da seção transversal, e a definição do coeficiente de concentração de tensão, $K = \sigma_{máx}/\sigma_{méd}$, escrevemos

$$P = \sigma_{méd} A = \frac{\sigma_{máx} A}{K} \tag{2.49}$$

para qualquer valor de $\sigma_{máx}$ que não exceda σ_E. Quando $\sigma_{máx} = \sigma_E$ (Fig. 2.69*b*), temos $P = P_E$, e a Equação (2.49) torna-se

$$P_E = \frac{\sigma_E A}{K} \tag{2.50}$$

Em contrapartida, quando $P = P_L$ (Fig. 2.69*d*), temos $\sigma_{méd} = \sigma_E$ e

$$P_L = \sigma_E A \tag{2.51}$$

Comparando as Equações (2.50) e (2.51), concluímos que

$$P_E = \frac{P_L}{K} \tag{2.52}$$

*2.20. Tensões residuais

No Exemplo 2.13 da seção anterior, consideramos uma barra que foi alongada além da tensão de escoamento. Quando a força foi removida, a barra não voltou ao seu comprimento original; ela tinha sido deformada permanentemente. No entanto, após a remoção da carga, todas as tensões desapareceram. Você não deve considerar que isso sempre acontecerá. Sem dúvida, quando somente algumas das partes de uma estrutura indeterminada sofrem deformações plásticas, como no Exemplo 2.15, ou quando diferentes partes da estrutura sofrem diferentes deformações plásticas, as tensões nas várias partes da estrutura em geral não retornarão a zero depois que a força for removida. Tensões chamadas de *tensões residuais* permanecerão nas várias partes da estrutura.

Embora o cálculo das tensões residuais em uma estrutura real possa ser bastante complexo, o exemplo a seguir lhe dará uma ideia geral do método a ser utilizado para sua determinação.

EXEMPLO 2.16

Determine as tensões residuais na barra e no tubo dos Exemplos 2.14 e 2.15 depois de a carga **P** ser aumentada de zero até 24 kN e diminuída de volta a zero.

Observamos nos diagramas da Fig. 2.70 que, depois de a força **P** retornar a zero, as forças internas P_b e P_t não voltam a ser iguais a zero. Seus valores foram indicados pelo ponto E nas partes a e b, respectivamente, da Fig. 2.70. Segue-se que as tensões correspondentes também não são iguais a zero depois que o conjunto foi descarregado. Para determinar essas tensões residuais, vamos determinar as tensões reversas σ'_b e σ'_t provocadas pelo descarregamento e somá-las às tensões máximas $\sigma_b = 250$ MPa e $\sigma_t = 200$ MPa encontradas na parte a do Exemplo 2.15.

A deformação provocada pelo descarregamento é a mesma na barra e no tubo. Ela é igual a δ'/L, em que δ' é a deformação do conjunto durante o descarregamento, que foi calculado no Exemplo 2.15. Temos

$$\epsilon' = \frac{\delta'}{L} = \frac{-13{,}33 \times 10^{-4}\,\text{m}}{800 \times 10^{-3}\,\text{m}} = -1{,}67 \times 10^{-3}\,\text{m/m}$$

As tensões reversas correspondentes na barra e no tubo são

$$\sigma'_b = \epsilon' E_b = (-1{,}67 \times 10^{-3})(200000\ \text{MPa}) = -334\ \text{MPa}$$
$$\sigma'_t = \epsilon' E_t = (-1{,}67 \times 10^{-3})(80000\ \text{MPa}) = -134\ \text{MPa}$$

As tensões residuais são encontradas superpondo-se as tensões em virtude do carregamento com as tensões reversas em virtude do descarregamento. Temos

$$(\sigma_b)_{\text{res}} = \sigma_b + \sigma'_r = 250\ \text{MPa} - 334{,}0\ \text{MPa} = -84\ \text{MPa}$$
$$(\sigma_t)_{\text{res}} = \sigma_t + \sigma'_t = 200\ \text{MPa} - 134{,}0\ \text{MPa} = 66\ \text{MPa}$$

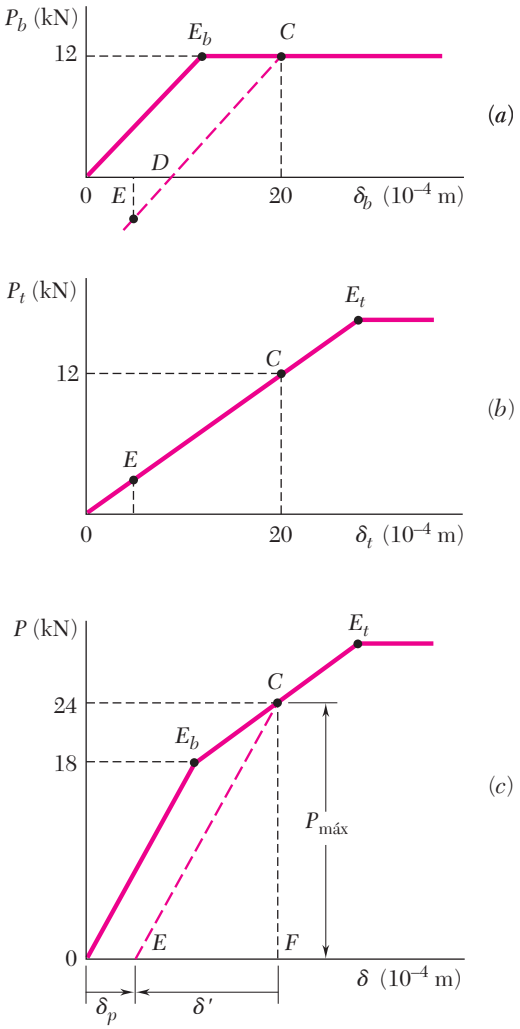


Fig. 2.70

Deformações plásticas provocadas por variações na temperatura também podem resultar em tensões residuais. Por exemplo, considere um pequeno tarugo que deve ser soldado em uma placa grande. Para as finalidades desta discussão, o tarugo será considerado uma pequena barra *AB* que deve ser soldada dentro de um pequeno furo na placa (Fig. 2.71). Durante o processo de soldagem, a temperatura da barra subirá acima de 1 000 °C, e, nessa temperatura, seu módulo de elasticidade e, portanto, sua rigidez e sua tensão serão quase zero. Como a placa é grande, sua temperatura não subirá significativamente acima da temperatura ambiente (20 °C). Assim, com a soldagem concluída, temos uma barra *AB* à temperatura $T = 1\,000\,°C$, sem tensão, ligada à placa que está a 20 °C.

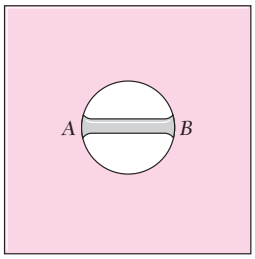


Fig. 2.71

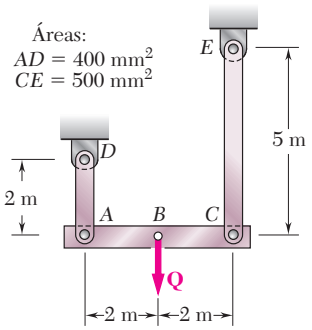
À medida que a barra esfria, seu módulo de elasticidade aumenta e, a aproximadamente 500 °C, ele se aproximará de seu valor normal que é de 200 GPa. Conforme a temperatura da barra cai ainda mais, temos uma situação similar àquela considerada na Seção 2.10 e ilustrada na Fig. 2.35. Resolvendo a Equação (2.23) para ΔT e fazendo σ igual à tensão de escoamento, $\sigma_E = 300$ MPa, para o aço comum, e $\alpha = 12 \times 10^{-6}/°C$, encontramos a variação de temperatura que fará a barra escoar:

$$\Delta T = -\frac{\sigma}{E\alpha} = -\frac{300\text{ MPa}}{(200\text{ GPa})(12 \times 10^{-6}/°C)} = -125\,°C$$

Isso significa que a barra começará a escoar a aproximadamente 375 °C e continuará escoando a um nível de tensão razoavelmente constante, enquanto ela resfria até à temperatura ambiente. Como resultado dessa operação, é então criada no tarugo e na solda uma tensão residual aproximadamente igual à tensão de escoamento do aço utilizado.

As tensões residuais também ocorrem como resultado do resfriamento de metais que foram fundidos ou laminados à quente. Nesses casos, as camadas externas esfriam mais rapidamente do que o núcleo interno. Isso faz as camadas externas recuperarem sua rigidez (*E* retorna ao seu valor normal) mais rapidamente do que o núcleo interno. Quando todo o corpo de prova retorna à temperatura ambiente, o núcleo interno terá se contraído mais do que as camadas externas. O resultado é o surgimento de tensões de tração residuais longitudinais no núcleo interno e tensões de compressão residuais nas camadas externas.

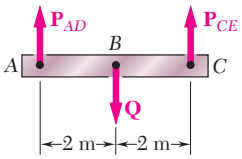
Tensões residuais por causa de solda, fundição e laminação à quente podem ser muito grandes (da ordem da intensidade da tensão de escoamento). Essas tensões podem ser removidas, quando necessário, reaquecendo todo o corpo de prova a aproximadamente 600 °C e depois deixando esfriar lentamente por um período de 12 a 24 horas.



PROBLEMA RESOLVIDO 2.6

A viga rígida *ABC* é suspensa por duas barras de aço, como mostra a figura, e inicialmente está na horizontal. O ponto médio *B* da viga se desloca 10 mm para baixo pela aplicação lenta da força **Q**, e após, a força é lentamente removida. Sabendo que o aço utilizado para as barras é elastoplástico com $E = 200$ GPa e $\sigma_E = 300$ MPa, determine (*a*) o valor máximo necessário de **Q** e a posição correspondente da viga e (*b*) a posição final da viga.

SOLUÇÃO

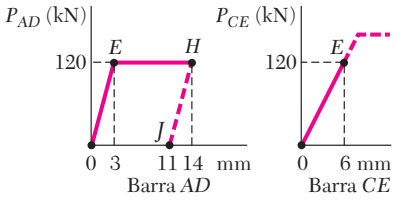


Estática. Como **Q** é aplicada ao ponto médio da viga, temos

$$P_{AD} = P_{CE} \qquad \text{e} \qquad Q = 2P_{AD}$$

Ação elástica. O valor máximo de Q e o deslocamento elástico máximo do ponto A ocorrem quando $\sigma = \sigma_E$ na barra AD.

$$(P_{AD})_{\text{máx}} = \sigma_E A = (300 \text{ MPa})(400 \text{ mm}^2) = 120 \text{ kN}$$
$$Q_{\text{máx}} = 2(P_{AD})_{\text{máx}} = 2(120 \text{ kN}) \qquad Q_{\text{máx}} = 240 \text{ kN} \blacktriangleleft$$
$$\delta_{A_1} = \epsilon L = \frac{\sigma_E}{E} L = \left(\frac{300 \text{ MPa}}{200 \text{ GPa}}\right)(2 \text{ m}) = 3 \text{ mm}$$



Diagramas força-deslocamento

Como $P_{CE} = P_{AD} = 120$ kN, a tensão na barra CE é

$$\sigma_{CE} = \frac{P_{CE}}{A} = \frac{120 \text{ kN}}{500 \text{ mm}^2} = 240 \text{ MPa}$$

O deslocamento correspondente do ponto C é

$$\delta_{C_1} = \epsilon L = \frac{\sigma_{CE}}{E} L = \left(\frac{240 \text{ MPa}}{200 \text{ GPa}}\right)(5 \text{ m}) = 6 \text{ mm}$$

O deslocamento correspondente do ponto B é

$$\delta_{B_1} = \tfrac{1}{2}(\delta_{A_1} + \delta_{C_1}) = \tfrac{1}{2}(3 \text{ mm} + 6 \text{ mm}) = 4{,}5 \text{ mm}$$

Como devemos ter $\delta_B = 10$ mm, concluímos que ocorrerá deformação plástica.

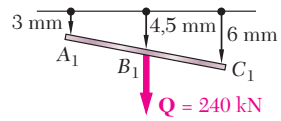
Deformação plástica. Para $Q = 240$ kN, ocorre deformação plástica na barra AD, em que $\sigma_{AD} = \sigma_E = 300$ MPa. Como a tensão na barra CE está dentro da região elástica, δ_C permanece igual a 6 mm. O deslocamento δ_A para a qual $\delta_B = 10$ mm é obtida escrevendo-se

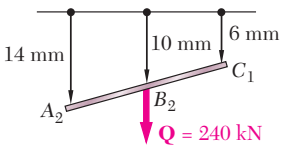
$$\delta_{B_2} = 10 \text{ mm} = \tfrac{1}{2}(\delta_{A_2} + 6 \text{ mm}) \qquad \delta_{A_2} = 14 \text{ mm}$$

Descarregamento. Como a força **Q** é removida lentamente, a força P_{AD} decresce ao longo da linha HJ paralela à parte inicial do diagrama força-deslocamento da barra AD. O deslocamento final do ponto A é

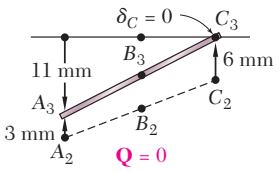
$$\delta_{A_3} = 14 \text{ mm} - 3 \text{ mm} = 11 \text{ mm}$$

Como a tensão na barra CE permaneceu dentro da região elástica, notamos que o deslocamento final do ponto C é zero.



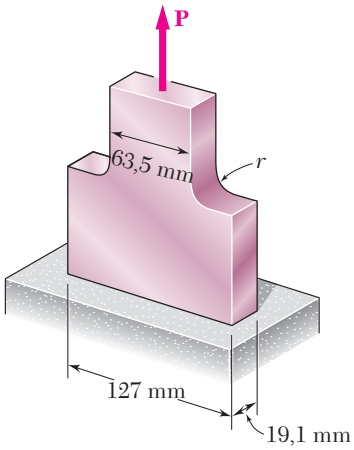


(*a*) Deslocamento para $\delta_B = 10$ mm ◀



(*b*) Deslocamentos finais ◀

PROBLEMAS



Figs. *P2.93* e *P2.94*

2.93 Sabendo que $P = 44{,}5$ kN, determine a tensão máxima quando (*a*) $r = 12{,}7$ mm e (*b*) $r = 15{,}9$ mm.

2.94 Sabendo que, para a placa mostrada, a tensão admissível é de 110 MPa, determine o valor máximo admissível para P quando (*a*) $r = 9{,}53$ mm e (*b*) $r = 19{,}1$ mm.

2.95 Para $P = 37{,}8$ kN, determine a espessura t mínima necessária para a placa se a tensão admissível for de 124,1 MPa.

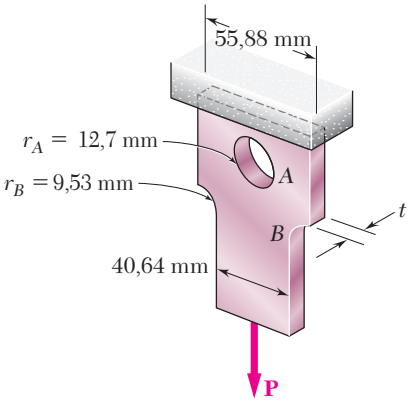


Fig. P2.95

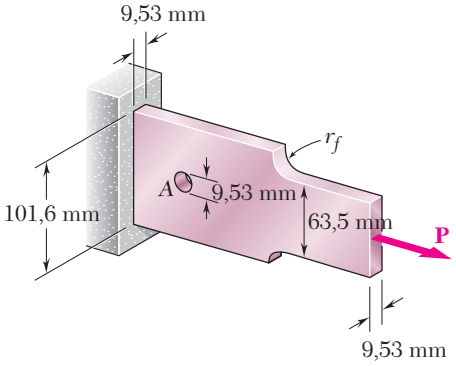
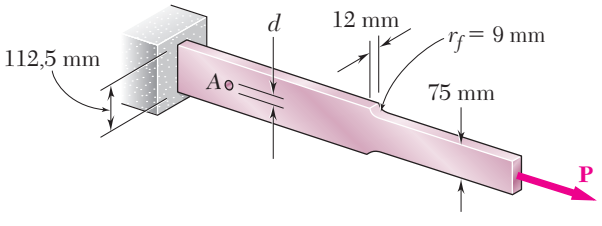


Fig. P2.96

2.96 Sabendo que o furo tem um diâmetro de 9,53 mm, determine (*a*) o raio r_f dos adoçamentos para os quais ocorre a mesma tensão máxima no furo A e nos adoçamentos e (*b*) a força **P** correspondente máxima admissível se a tensão admissível for de 103,4 MPa.

2.97 Deve ser feito um furo na placa no ponto A. Os diâmetros das brocas disponíveis para fazer o furo variam de 12 mm a 24 mm em incrementos de 3 mm. (*a*) Determine o diâmetro d da maior broca que pode ser usada se a força admissível para o furo exceder aquela para os adoçamentos. (*b*) Se a tensão admissível do material da placa for de 145 MPa, qual será a força **P** correspondente admissível?



Figs. P2.97 e P2.98

2.98 (*a*) Para $P = 58$ kN e $d = 12$ mm, determine a tensão máxima na placa mostrada. (*b*) Resolva a parte *a*, supondo que não seja feito o furo em A.

2.99 O corpo de prova de alumínio mostrado está submetido a duas forças iguais axiais, opostas e centradas de intensidade P. (*a*) Sabendo que $E = 70$ GPa e $\sigma_{adm} = 200$ MPa, determine o máximo valor admissível de P e o correspondente alongamento total do corpo de prova. (*b*) Resolva a parte *a*, considerando que o corpo de prova foi substituído por uma barra de alumínio de mesmo comprimento e seção retangular uniforme de 60 × 15 mm.

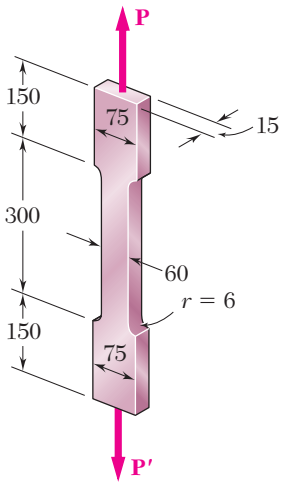


Fig. P2.99

2.100 Para o corpo de prova do Problema 2.99, determine o valor máximo da tensão normal que corresponde a um alongamento total de 0,75 mm.

2.101 A barra AB é feita de um aço doce considerado elastoplástico com $E = 200$ GPa e $\sigma_E = 248$ MPa. Depois de a barra ter sido fixada a uma alavanca rígida CD, descobriu-se que a extremidade C está 9,53 mm mais alta do que deveria estar. Uma força vertical **Q** é aplicada a C até que esse ponto se mova para a posição C'. Determine a intensidade necessária de **Q** e o deslocamento δ_1 para que a alavanca volte para uma posição horizontal depois que **Q** for removida.

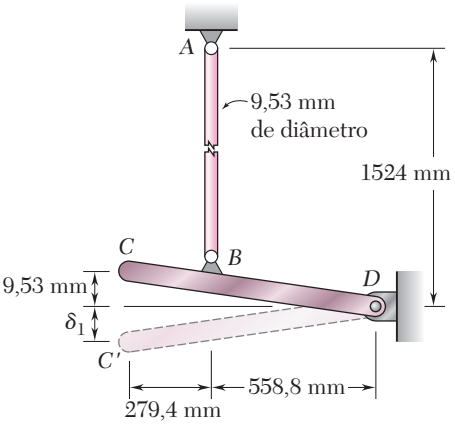
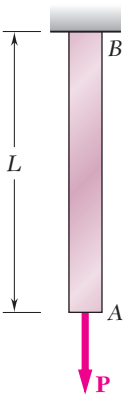


Fig. P2.101

2.102 Resolva o Problema 2.101 supondo que a tensão de escoamento do aço doce seja de 345 MPa.

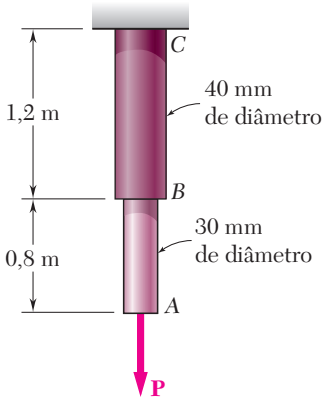
2.103 A barra retangular AB, com lado de 30 mm, tem comprimento $L = 2{,}2$ m e é feita de um aço doce considerado elastoplástico com $E = 200$ GPa e $\sigma_E = 345$ MPa. Uma força **P** é aplicada à barra até que a extremidade A tenha se movido para baixo por um valor δ_m. Determine o valor máximo da força **P** e a deformação permanente da barra depois que a força é removida, sabendo que (*a*) $\delta_m = 4{,}5$ mm e (*b*) $\delta_m = 8{,}0$ mm.

2.104 A barra retangular AB, com lado de 30 mm, tem comprimento $L = 2{,}5$ m e é feita de um aço doce considerado elastoplástico com $E = 200$ GPa e $\sigma_E = 345$ MPa. Uma força **P** é aplicada à barra e em seguida removida para dar a ela uma deformação permanente δ_p. Determine o valor máximo da força **P** e o valor máximo δ_m pelo qual a barra deverá ser alongada se o valor desejado de δ_p for (*a*) 3,5 mm e (*b*) 6,5 mm.



Figs. *P2.103* e *P2.104*

2.105 A barra *ABC* consiste em duas partes cilíndricas *AB* e *BC*; ela é feita de um aço doce considerado elastoplástico com $E = 200$ GPa e $\sigma_E = 250$ MPa. Uma força **P** é aplicada à barra e em seguida removida para dar a ela uma deformação permanente $\delta_p = 2$ mm. Determine o valor máximo da força **P** e o valor máximo de δ_m pelo qual a barra deverá ser alongada para dar a ela a deformação permanente desejada.



Figs. P2.105 e P2.106

2.106 A barra *ABC* consiste em duas partes cilíndricas *AB* e *BC*; ela é feita de um aço doce considerado elastoplástico com $E = 200$ GPa e $\sigma_E = 250$ MPa. Uma força **P** é aplicada à barra até que sua extremidade *A* tenha se movido para baixo por $\delta_m = 5$ mm. Determine o valor máximo da força **P** e a deformação permanente da barra depois que a força for removida.

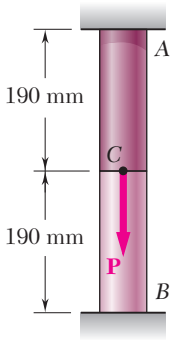


Fig. P2.107

2.107 A barra *AB* consiste em duas partes cilíndricas *AC* e *BC*, cada uma com seção transversal de área igual a 1 750 mm^2. A parte *AC* é feita de um aço doce com $E = 200$ GPa e $\sigma_E = 250$ MPa, e a parte *CB* é feita de um aço de alta resistência com $E = 200$ GPa e $\sigma_E = 345$ MPa. Uma força **P** é aplicada em *C*, conforme mostra a figura. Considerando que ambos os aços sejam elastoplásticos, determine (*a*) o deslocamento máximo de *C* se a força *P* for gradualmente aumentada de zero até 975 kN e depois reduzida novamente para zero, (*b*) a tensão máxima em cada parte da barra e (*c*) o deslocamento permanente de *C*.

2.108 Para a barra composta do Problema 2.107, se *P* é aumentada gradualmente desde zero até que o deslocamento do ponto *C* atinja um valor máximo de $\delta_m = 0{,}3$ mm e depois diminuída novamente até zero, determine (*a*) o valor máximo de *P*, (*b*) a tensão máxima em cada parte da barra e (*c*) o deslocamento permanente de *C* depois de a força ser removida.

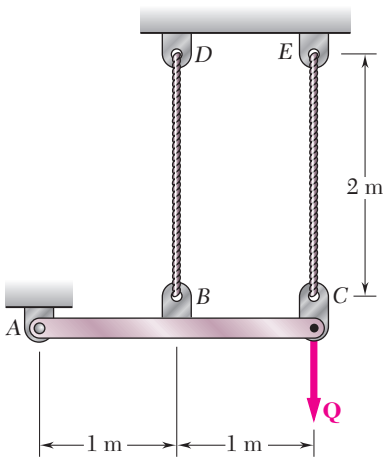


Fig. *P2.109*

2.109 Cada cabo tem uma área de seção transversal igual a 100 mm^2 e é feito de um material elastoplástico para o qual $\sigma_E = 345$ MPa e $E = 200$ GPa. Uma força **Q** é aplicada na barra rígida *ABC* através do ponto *C* e é aumentada gradualmente de 0 até 50 kN e depois reduzida novamente a zero. Sabendo que os cabos foram inicialmente alongados, determine (*a*) a tensão máxima que ocorre no cabo *BD*, (*b*) o deslocamento máximo do ponto *C* e (*c*) o deslocamento final do ponto *C*. (*Dica*: na parte *c*, o cabo *CE* não está alongado.)

2.110 Resolva o Problema 2.109 supondo que os cabos foram substituídos por barras com a mesma área de seção transversal e material. Suponha ainda que as barras foram fixadas de modo que possam suportar forças de compressão.

2.111 Duas barras de aço temperado, cada uma com espessura de 5 mm, são coladas a uma barra de aço doce de 12 mm. Essa barra composta é submetida a uma força axial centrada de intensidade P, conforme mostra a figura. Ambos os aços são elastoplásticos com $E = 200$ GPa e com tensão de escoamento igual a 689,5 MPa e 345 MPa, respectivamente, para o aço temperado e o aço doce. A força P é aumentada gradualmente desde zero até que a deformação da barra alcance um valor máximo de $\delta_m = 1$ mm e depois diminuída novamente até zero. Determine (*a*) o valor máximo de **P**, (*b*) a tensão máxima nas barras de aço temperado e (*c*) a deformação permanente depois de a força ser removida.

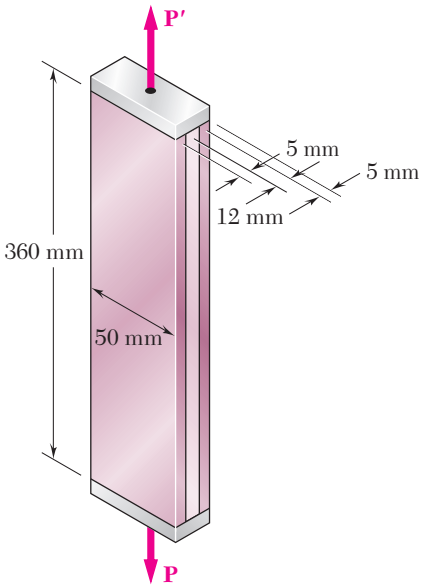


Fig. P2.111

2.112 Para a barra composta do Problema 2.111, se P é gradualmente aumentada desde zero até 436 kN e depois diminuída até zero, determine (*a*) a deformação máxima da barra, (*b*) a tensão máxima nas barras de aço temperado e (*c*) a deformação permanente depois que a carga for removida.

2.113 A barra rígida ABC é suportada por duas barras elásticas, AD e BE, de seção transversal retangular uniforme de 37,5 × 6 mm e feitas de um aço doce considerado elastoplástico, com $E = 200$ GPa e $\sigma_E = 250$ MPa. A intensidade da força **Q** aplicada em B é aumentada gradualmente de zero a 260 kN. Sabendo que $a = 0{,}640$ m, determine (*a*) o valor da tensão normal em cada barra elástica e (*b*) o deslocamento máximo do ponto B.

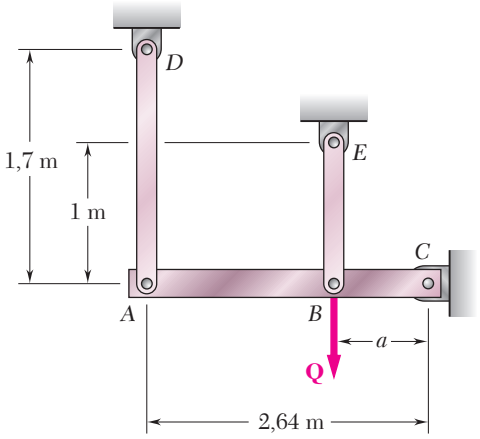


Fig. P2.113

2.114 Resolva o Problema 2.113 sabendo que $a = 1{,}76$ m e que a intensidade da força **Q** aplicada em B é aumentada gradualmente de zero até 135 kN.

***2.115** Resolva o Problema 2.113 supondo que a intensidade da força **Q** aplicada em B seja aumentada gradualmente de zero até 260 kN e depois diminuída de volta para zero. Sabendo que $a = 0{,}640$ m, determine (*a*) a tensão residual em cada barra elástica e (*b*) o deslocamento final no ponto B. Considere que as barras elásticas sejam fixadas de maneira que possam suportar forças de compressão sem flambarem.

2.116 Uma barra de aço uniforme de seção transversal com área A é ligada a suportes rígidos e está livre de tensões a uma temperatura de 7,22 °C. O aço é considerado elastoplástico com $\sigma_E = 248$ MPa e $E = 200$ GPa. Sabendo que $\alpha = 11{,}7 \times 10^{-6}/°C$, determine a tensão na barra (*a*) quando a temperatura for elevada a 160 °C e (*b*) depois que a temperatura retorna a 7,22 °C.

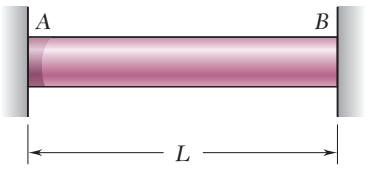


Fig. P2.116

2.117 A barra de aço *ABC* está rigidamente conectada aos suportes e livre de tensões à temperatura de 25 °C. O aço é considerado elastoplástico, com $E = 200$ GPa e $\sigma_E = 250$ MPa. A temperatura de ambas as partes da barra é incrementada até 150 °C. Sabendo que $\alpha = 11{,}7 \times 10^{-6}/°C$, determine (*a*) a tensão em ambas as partes da barra e (*b*) o deslocamento do ponto *C*.

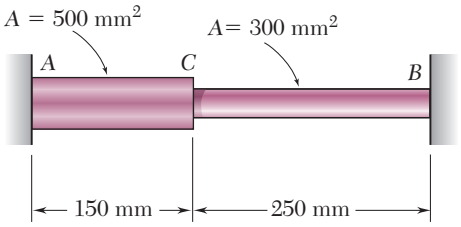


Fig. P2.117

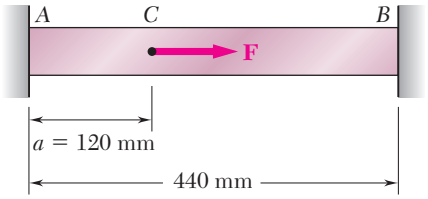


Fig. P2.119

***2.118** Resolva o Problema 2.117 considerando que a temperatura da barra é incrementada até 150 °C e depois reduzida até 25 °C.

***2.119** A barra *AB* tem uma área de seção transversal de 1 200 mm² e é feita de um aço elastoplástico com $E = 200$ GPa e $\sigma_E = 250$ MPa. Sabendo que a força **F** aumenta de 0 a 520 kN e depois diminui para zero, determine (*a*) o deslocamento permanente do ponto *C* e (*b*) a tensão residual na barra.

***2.120** Resolva o Problema 2.119, considerando que $a = 180$ mm.

***2.121** Para a barra composta do Problema 2.111, determine as tensões residuais nas barras de aço temperado se *P* for gradualmente aumentada de zero até 436 kN e depois diminuída novamente até zero.

***2.122** Para a barra composta do Problema 2.111, determine as tensões residuais nas barras de aço temperado, se *P* for gradualmente aumentada de zero até a deformação da barra atingir um valor máximo $\delta_m = 1{,}016$ mm e depois diminuída novamente até zero.

***2.123** Barras estreitas de alumínio são colocadas de dois lados de uma placa grossa de aço, como mostra a figura. Inicialmente, em $T_1 = 21{,}1$ °C, todas as tensões são zero. Sabendo que a temperatura subirá lentamente até T_2 e depois será reduzida novamente até T_1, determine (*a*) a maior temperatura T_2 que *não* provoque tensões residuais e (*b*) a temperatura T_2 que resultará em uma tensão residual no alumínio igual a 400 MPa. Considere $\alpha_{alum} = 23 \times 10^{-6}/°C$ para o alumínio e $\alpha_{aço} = 11{,}7 \times 10^{-6}/°C$ para o aço. Considere ainda que o alumínio é elastoplástico, com $E = 75$ GPa e $\sigma_E = 400$ MPa. (*Dica*: despreze as pequenas tensões na placa.)

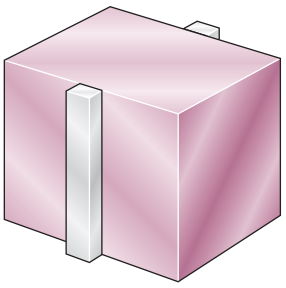


Fig. P2.123

REVISÃO E RESUMO DO CAPÍTULO 2

Esse capítulo foi dedicado à introdução do conceito de *deformação específica*, para a discussão das relações entre tensão e deformação específica para vários tipos de materiais e para a determinação das deformações de elementos estruturais sob carregamento axial.

Considerando uma barra de comprimento L e seção transversal uniforme, e designando por δ sua deformação sob força axial **P** (Fig. 2.1), definimos a *deformação específica normal* ϵ na barra como a *deformação por unidade de comprimento* [Seção 2.2]:

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} \tag{2.1}$$

Deformação específica normal

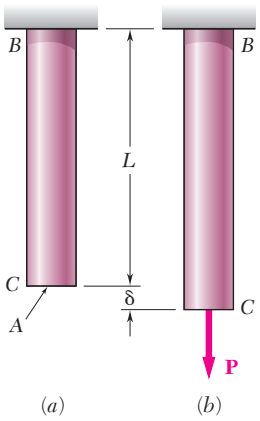


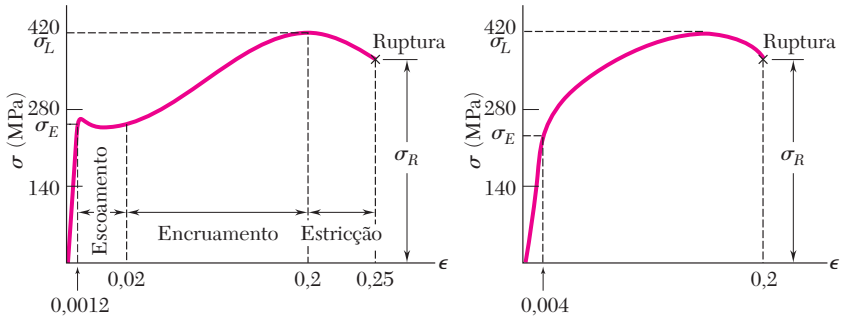
Fig. 2.1

No caso de uma barra de seção transversal variável, a deformação específica normal foi definida em um ponto qualquer Q considerando um pequeno elemento da barra em Q. Designando por Δx o comprimento do elemento e por $\Delta\delta$ sua deformação sob determinada força, escrevemos

$$\epsilon = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\delta}{\Delta x} = \frac{d\delta}{dx} \tag{2.2}$$

Construindo um gráfico da tensão σ em função da deformação específica ϵ à medida que a força é aumentada, obtivemos o *diagrama tensão-deformação* para o material utilizado [Seção 2.3]. A partir desse diagrama, pudemos fazer uma distinção entre materiais *frágeis* e materiais *dúcteis*. Um corpo de prova feito com um material frágil se rompe sem que seja observada uma mudança prévia na taxa de alongamento (Fig. 2.11), enquanto um corpo de prova feito de um material dúctil *escoa* após alcançar uma tensão crítica σ_E, chamada de *resistência ao escoamento*, isto é, o corpo de prova sofre uma grande deformação antes da ruptura, com aumento relativamente pequeno na força aplicada (Fig. 2.9). Um exemplo de material frágil com diferentes propriedades em tração e compressão é o do *concreto*.

Diagrama tensão-deformação



(*a*) Aço com baixo teor de carbono (*b*) Liga de alumínio

Fig. 2.9

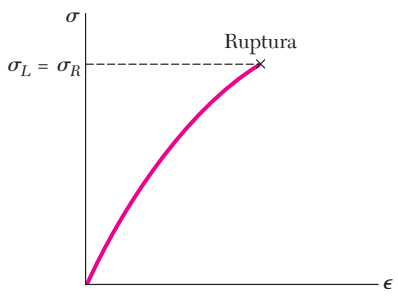


Fig. 2.11

Lei de Hooke
Módulo de elasticidade

Notamos na Seção 2.5 que a parte inicial do diagrama tensão-deformação é uma linha reta. Isso significa que, para pequenas deformações, a tensão é diretamente proporcional à deformação específica:

$$\sigma = E\epsilon \tag{2.4}$$

Essa relação é conhecida como *Lei de Hooke* e o coeficiente E, como o *módulo de elasticidade* do material. A maior tensão para a qual se aplica a Equação (2.4) é o *limite de proporcionalidade* do material.

Os materiais considerados até esse ponto eram *isotrópicos*, isto é, suas propriedades eram independentes da direção. Na Seção 2.5 consideramos também uma classe de materiais *anisotrópicos*, isto é, materiais cujas propriedades são dependentes da direção. Esses eram *materiais compósitos reforçados com fibras*, feitos com fibras de um material forte e rígido incorporado em camadas de um material mais fraco e menos rígido (Fig. 2.17). Vimos que era preciso usar diferentes módulos de elasticidade, dependendo da direção de carregamento.

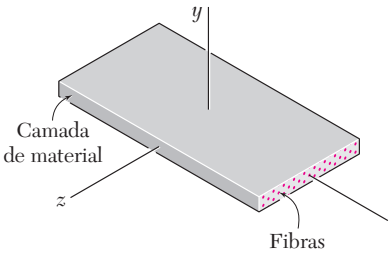


Fig. 2.17

Limite elástico. Deformação plástica

Se as deformações provocadas em um corpo de prova pela aplicação de uma certa força desaparecem quando a força é removida, dizemos que o material se comporta *elasticamente* e a maior tensão na qual isso ocorre é chamada de *limite elástico* do material [Seção 2.6]. Se o limite elástico é ultrapassado, a tensão e a deformação específica decrescem de uma forma linear quando a força é removida e a deformação específica não retorna a zero (Fig. 2.18), indicando que o material sofreu uma *deformação permanente* ou uma *deformação plástica*.

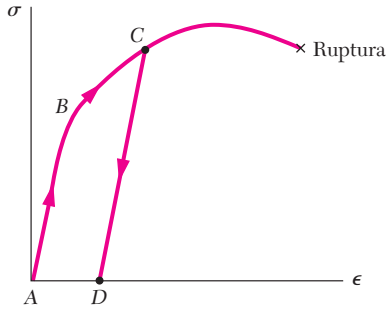


Fig. 2.18

Limite de resistência à fadiga

Na Seção 2.7, discutimos o fenômeno da *fadiga*, que provoca a falha de elementos estruturais ou de máquinas após um número muito grande de ciclos de carga, embora as tensões permaneçam na região elástica. Um teste-padrão de fadiga consiste em determinar o número n de ciclos sucessivos de carregamento e descarregamento necessários para provocar a falha de um corpo de prova para determinado nível máximo de tensão σ, traçando o gráfico σ-n correspondente. O valor de σ para o qual não ocorra a falha, mesmo para um número indefinidamente grande de ciclos, é conhecido como *limite de resistência à fadiga* do material utilizado no teste.

Deformação elástica sob carregamento axial

A Seção 2.8 foi dedicada à determinação das deformações elásticas de vários tipos de elementos estruturais e de máquinas sob várias condições de carregamento axial. Vimos que se uma barra de comprimento L e seção transversal uniforme de área A é submetida em sua extremidade a uma força axial centrada **P** (Fig. 2.22), a deformação correspondente é

$$\delta = \frac{PL}{AE} \tag{2.7}$$

Se a barra é carregada em vários pontos ou se é formada por várias partes de seções transversais diferentes e possivelmente materiais diferentes, a deformação δ da barra deve ser expressa como uma soma das deformações de suas partes componentes [Exemplo 2.01]:

$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} \tag{2.8}$$

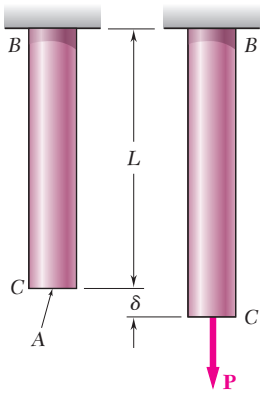


Fig. 2.22

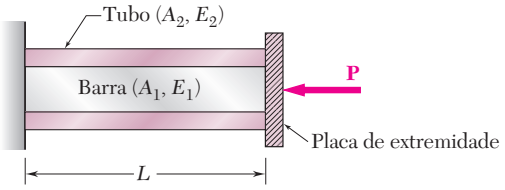


Fig. 2.25a

Problemas estaticamente indeterminados

A Seção 2.9 foi dedicada à solução de *problemas estaticamente indeterminados*, isto é, problemas nos quais as reações e as forças internas *não podem* ser determinadas apenas por meio da estática. As equações de equilíbrio determinadas pelo diagrama de corpo livre do componente em consideração foram complementadas por relações que envolvem deformações e obtidas da geometria do problema. As forças na barra e no tubo da Fig. 2.25*a*, por exemplo, foram determinadas observando-se, por um lado, que sua soma é igual a P e, por outro lado, que elas provocam deformações iguais na barra e no tubo [Exemplo 2.2]. Analogamente, as reações nos apoios da barra da Fig. 2.26 não podiam ser obtidas somente por meio do diagrama de corpo livre da barra [Exemplo 2.3]; mas podiam ser determinadas impondo-se que a deformação total da barra deve ser igual a zero.

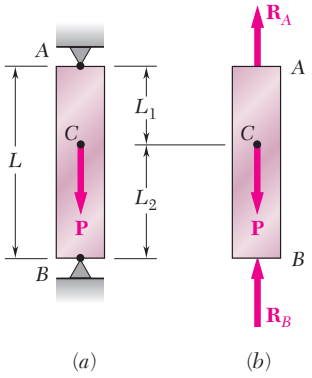


Fig. 2.26

Problemas com variação de temperatura

Na Seção 2.10, consideramos problemas que envolvem *variações de temperatura*. Primeiro observamos que se a temperatura de uma barra *AB sem impedimentos*, de comprimento L, tem sua temperatura aumentada em ΔT, sua deformação é

$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L \tag{2.21}$$

em que α é o *coeficiente de expansão térmica* do material. Notamos que a deformação específica correspondente, chamada de *deformação específica térmica*, é

$$\epsilon_T = \alpha \Delta T \tag{2.22}$$

e que *nenhuma tensão* é associada a essa deformação específica. No entanto, se a barra *AB* está *impedida de se deformar* por suportes fixos (Fig. 2.35*a*), aparecem tensões na barra à medida que a temperatura aumenta, em razão das reações nos suportes. Para determinarmos a intensidade P das

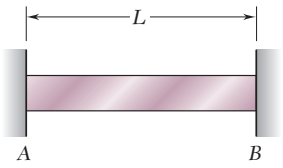


Fig. 2.35a

reações, separamos a barra de seu suporte em B (Fig. 2.36) e consideramos separadamente a deformação δ_T da barra à medida que ela se expande livremente, por causa da variação de temperatura, e a deformação δ_p provocada pela força **P** necessária para trazer de volta a barra ao seu comprimento original, de forma que ela pudesse ser recolocada no suporte em B. Escrevendo que a deformação total $\delta = \delta_T + \delta_p$ é igual a zero, obtivemos uma equação que poderia ser resolvida para P. Embora a deformação final na barra *AB* seja claramente zero, este geralmente não será o caso para barras que consistem em elementos de diferentes seções transversais ou materiais, pois as deformações dos vários elementos usualmente *não serão* zero [Exemplo 2.6].

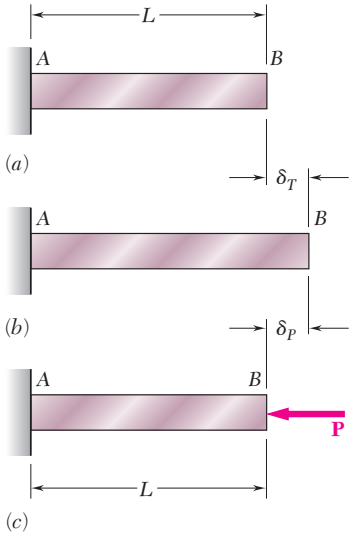


Fig. 2.36

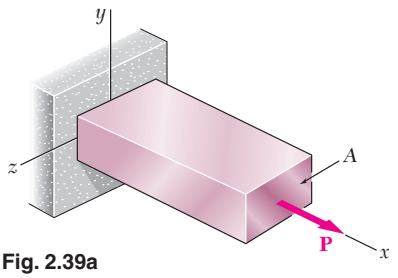


Fig. 2.39a

Deformação específica lateral. Coeficiente de Poisson

Quando uma força axial **P** é aplicada a uma barra delgada e homogênea (Fig. 2.39*a*), provoca uma deformação específica, não somente ao longo do eixo da barra, mas também em qualquer direção transversal [Seção 2.11]. Essa deformação específica é chamada de *deformação específica lateral*, e a relação entre a deformação específica lateral e a *deformação específica* axial é chamada de *coeficiente de Poisson* e designada por ν. Escrevemos

$$\nu = -\frac{\text{deformação específica lateral}}{\text{deformação específica axial}} \tag{2.25}$$

Lembrando que a deformação específica axial na barra é $\epsilon_x = \sigma_x/E$, expressamos da seguinte forma a condição de deformação específica sob um carregamento axial na direção x

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \qquad \epsilon_y = \epsilon_z = -\frac{\nu\sigma_x}{E} \tag{2.27}$$

Carregamento multiaxial

Esse resultado foi estendido na Seção 2.12 no caso de um *carregamento multiaxial,* provocando o estado de tensão mostrado na Fig. 2.42. A condição de deformação específica resultante foi descrita pelas equações a seguir, chamadas de *lei de Hooke generalizada* para carregamento multiaxial.

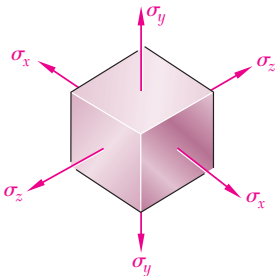


Fig. 2.42

$$\begin{aligned}
\epsilon_x &= +\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\
\epsilon_y &= -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\
\epsilon_z &= -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Dilatação

Se um elemento do material é submetido às tensões σ_x, σ_y, σ_z, ele se deformará e isso resultará em uma certa variação de volume [Seção 2.13]. A *variação em volume por unidade de volume* é chamada de *dilatação* do material e designada por e. Mostramos que

$$e = \frac{1 - 2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \tag{2.31}$$

Quando um material é submetido a uma pressão hidrostática p, temos

$$e = -\frac{p}{k} \tag{2.34}$$

Módulo de compressibilidade volumétrica

em que k é conhecida como *módulo de compressibilidade volumétrica* do material

$$k = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \tag{2.33}$$

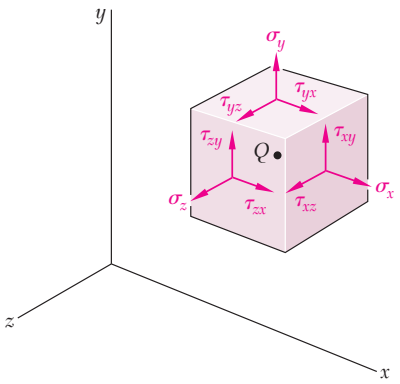


Fig. 2.45

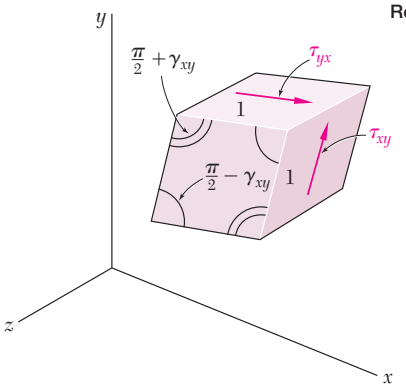


Fig. 2.47

Deformação de cisalhamento. Módulo de elasticidade transversal

Conforme vimos no Capítulo 1, o estado de tensão em um material sob as condições mais generalizadas de carregamento envolve tensões de cisalhamento, bem como tensões normais (Fig. 2.45). As tensões de cisalhamento tendem a deformar um elemento cúbico do material transformando-o em um paralelepípedo oblíquo [Seção 2.14]. Por exemplo, considerando as tensões τ_{xy} e τ_{yx} mostradas na Fig. 2.47 (as quais, lembramos, são iguais em intensidade), notamos que elas provocaram nos ângulos, formados pelas faces nas quais elas agiam, um aumento ou diminuição por um pequeno ângulo γ_{xy}. Esse ângulo, expresso em radianos, define a *deformação de cisalhamento* correspondente às direções x e y. Definindo de uma forma similar as deformações de cisalhamento γ_{yz} e γ_{zx}, escrevemos as relações

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \qquad \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \qquad \tau_{zx} = G\gamma_{zx} \tag{2.36, 37}$$

que são válidas para qualquer material isotrópico homogêneo dentro de seu limite de proporcionalidade em cisalhamento. A constante G é chamada de *módulo de elasticidade transversal* do material e as relações obtidas expressam a *lei de Hooke para tensão e deformação de cisalhamento*. Juntamente com as Equações (2.28), elas formam um grupo de equações que representam a lei de Hooke generalizada para um material isotrópico homogêneo sob um estado de tensão mais geral.

Observamos na Seção 2.15 que, embora uma força axial exercida sobre uma barra delgada produza somente deformações específicas normais (axial e transversal) em um elemento do material orientado ao longo do eixo da barra, ela produzirá deformações normais e de cisalhamento em um elemento girado em 45° (Fig. 2.53). Notamos também que as três constantes E, ν e G não são independentes; elas satisfazem a relação

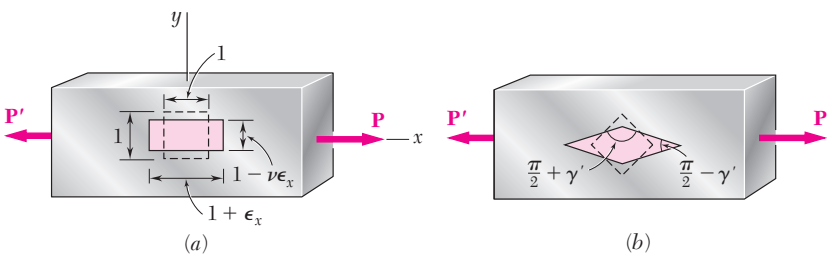


Fig. 2.53

$$\frac{E}{2G} = 1 + \nu \tag{2.43}$$

que pode ser utilizada para determinar qualquer uma das três constantes em função das outras duas.

Materiais compósitos reforçados com fibras

As relações tensão-deformação específicas para materiais compósitos reforçados com fibras foram discutidas em uma seção opcional (Seção 2.16). Foram determinadas equações similares às Equações (2.28) e (2.36, 37) para esses materiais, mas notamos que tiveram de ser utilizados módulos de elasticidade, coeficientes de Poisson e módulos de elasticidade transversal dependentes da direção.

Princípio de Saint-Venant

Na Seção 2.17, discutimos o *princípio de Saint-Venant*, que afirma que, exceto nas vizinhanças imediatas dos pontos de aplicação das forças, a distribuição de tensões em um componente ocorre independentemente do modo real de aplicação das forças. Esse princípio permite supor uma distribuição uniforme de tensões em um componente submetido a forças axiais concentradas, exceto próximo aos pontos de aplicação das forças, onde ocorrem concentrações de tensão.

Concentrações de tensão

Concentrações de tensão também ocorrerão em componentes estruturais próximos de uma descontinuidade, como um furo ou uma mudança brusca na seção transversal [Seção 2.18]. A relação entre o valor máximo da tensão que ocorre próximo da descontinuidade e a tensão média calculada na seção crítica é chamada de *coeficiente de concentração de tensão* da descontinuidade e é designada por K:

$$K = \frac{\sigma_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{méd}}} \tag{2.48}$$

Na Fig. 2.64 foram dados valores de K para furos circulares e adoçamentos em placas.

Deformações plásticas

Na Seção 2.19, discutimos as *deformações plásticas* que ocorrem em componentes estruturais feitos de material dúctil quando as tensões em alguma parte do componente excedem a tensão de escoamento do material. Nossa análise foi feita para um material elastoplástico ideal caracterizado pelo diagrama tensão-deformação específica mostrado na Fig. 2.65 [Exemplos 2.13, 2.14 e 2.15]. Finalmente, na Seção 2.20, observamos que quando uma estrutura indeterminada sofre deformações plásticas, as tensões, em geral, não retornam a zero depois que a carga foi removida. As tensões que permanecem nas várias partes da estrutura são chamadas de *tensões residuais* e podem ser determinadas somando-se as tensões máximas atingidas durante a fase de carregamento e as tensões reversas correspondentes à fase de descarregamento [Exemplo 2.16].

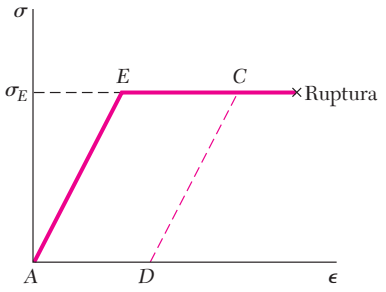


Fig. 2.65

PROBLEMAS DE REVISÃO

2.124 A barra de alumínio *ABC* ($E = 69{,}6$ GPa), que consiste em duas partes cilíndricas *AB* e *BC*, deve ser substituída por uma barra de aço cilíndrica *DE* ($E = 200$ GPa) do mesmo comprimento total. Determine o diâmetro *d* mínimo necessário para a barra de aço, considerando que sua deformação vertical não deve exceder a deformação da barra de alumínio sob a mesma força e que a tensão admissível na barra de aço não deve ultrapassar 165,5 MPa.

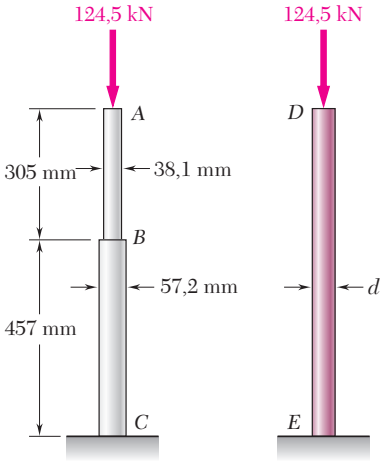


Fig. P2.124

2.125 A tira de latão *AB* foi presa a um suporte fixo em *A* e apoia-se sobre um suporte rugoso em *B*. Sabendo que o coeficiente de atrito é 0,60 entre a tira de latão e o suporte *B*, determine o decréscimo na temperatura para o qual o deslizamento estará na iminência de ocorrer.

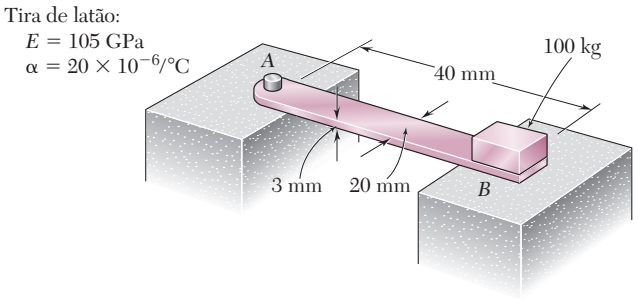


Fig. P2.125

2.126 Duas barras cilíndricas sólidas são unidas em *B* e carregadas conforme mostra a figura. A barra *AB* é feita de aço ($E = 200$ GPa) e a barra *BC*, de latão ($E = 103{,}4$ GPa). Determine (*a*) o deslocamento total da barra composta *ABC* e (*b*) o deslocamento do ponto *B*.

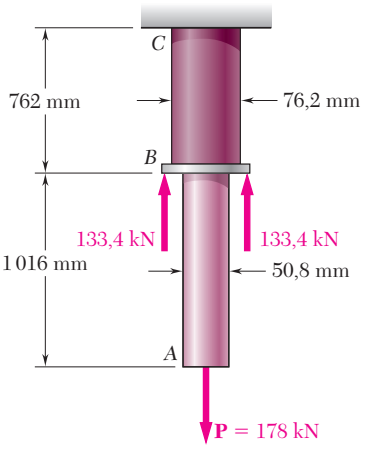


Fig. *P2.126*

2.127 A barra *BD* é feita de latão ($E = 103{,}4$ GPa) e tem uma área de seção transversal de 258,1 mm^2. A barra *CE* é feita de alumínio ($E = 71{,}7$ GPa) e tem uma área de seção transversal de 322,6 mm^2. Determine a máxima força **P** que pode ser aplicada verticalmente no ponto *A* considerando que o deslocamento de *A* não deve exceder 0,36 mm.

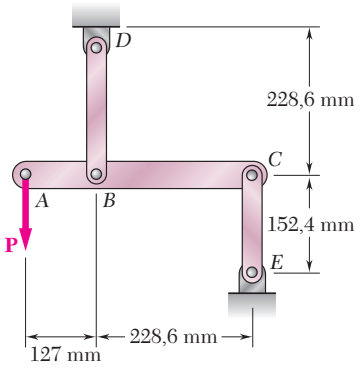


Fig. P2.127

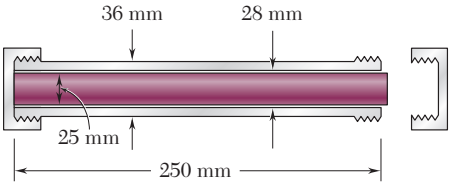


Fig. *P2.128*

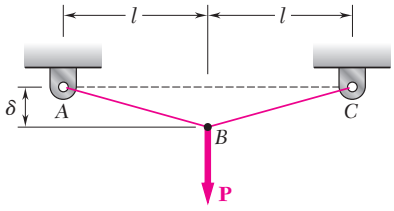


Fig. P2.129

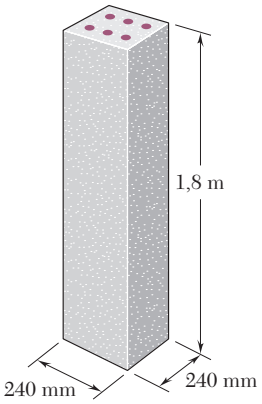


Fig. P2.131

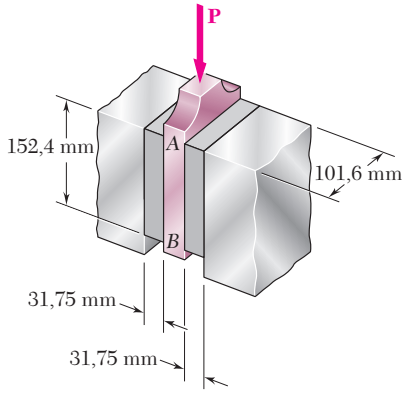


Fig. P2.132

2.128 Um tubo de alumínio com 250 mm de comprimento ($E = 70$ GPa), 36 mm de diâmetro externo e 28 mm de diâmetro interno pode ser fechado em ambas as extremidades por meio de tampas com rosca simples de 1,5 mm de passo. Com uma das tampas aparafusada e apertada, uma barra sólida de latão ($E = 105$ GPa) de 25 mm de diâmetro é colocada dentro do tubo e uma segunda tampa é aparafusada. Como a barra é ligeiramente mais longa que o tubo, observa-se que a tampa precisa ser forçada contra a barra girando-a $\frac{1}{4}$ de volta para que o tubo fique bem fechado. Determine (*a*) a tensão normal média no tubo e na barra e (*b*) as deformações do tubo e da barra.

2.129 O fio uniforme *ABC*, de comprimento $2l$ quando não esticado, é preso aos suportes mostrados na figura e lhe é aplicada uma força vertical **P** no ponto médio *B*. Designando por *A* a área da seção transversal do fio e por *E* o módulo de elasticidade, mostre que, para $\delta \ll l$, o deslocamento no ponto médio *B* é

$$\delta = l\sqrt[3]{\frac{P}{AE}}$$

2.130 A barra rígida *AD* é suportada por dois fios de aço ($E = 200$ GPa) com 1,6 mm de diâmetro e um apoio em *A*. Sabendo que os fios foram inicialmente esticados, determine (*a*) a tensão adicional em cada um quando lhe for aplicada uma carga **P** de 980 N em *D* e (*b*) o deslocamento correspondente do ponto *D*.

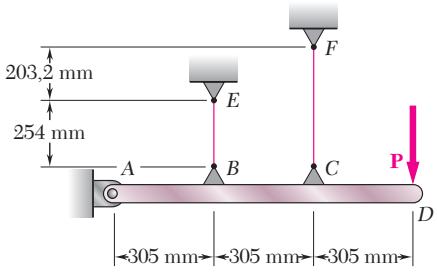


Fig. *P2.130*

2.131 O pilar de concreto ($E_c = 25$ GPa e $\alpha_c = 9{,}9 \times 10^{-6}/°C$) é reforçado por seis barras de aço, cada uma com 22 mm de diâmetro ($E_{aço} = 200$ GPa e $\alpha_{aço} = 11{,}7 \times 10^{-6}/°C$). Determine as tensões normais induzidas no aço e no concreto pelo aumento na temperatura de 35 °C.

2.132 Uma unidade de isolamento de vibração consiste em dois blocos de borracha dura de módulo de rigidez $G = 18{,}96$ MPa colados a uma placa *AB* e a suportes rígidos, conforme mostra a figura. Denotando por *P* a força aplicada à chapa e por δ o correspondente deslocamento, determine a constante de mola, $k = P/\delta$, do sistema.

2.133 Sabendo que $\sigma_{adm} = 120$ MPa, determine o valor máximo admissível para a força axial centrada **P**.

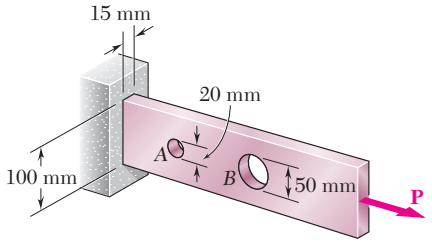


Fig. 2.133

2.134 A barra AB consiste em duas partes cilíndricas AC e BC, cada uma com seção transversal de área igual a 2 950 mm^2. A parte AC é feita de um aço doce com $E = 200$ GPa e $\sigma_E = 250$ MPa, e a parte CB é feita de um aço de alta resistência com $E = 200$ GPa e $\sigma_E = 345$ MPa. Uma força **P** é aplicada em C, conforme mostra a figura. Supondo que ambos os aços sejam elastoplásticos, determine (*a*) o deslocamento máximo de C se a força **P** for gradualmente aumentada de zero até 1 625 kN e depois reduzida novamente para zero e (*b*) o deslocamento permanente de C.

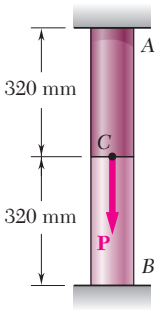


Fig. *P2.134*

2.135 A barra uniforme BC tem uma seção transversal de área A e é feita de um aço doce que pode ser considerado elastoplástico com um módulo de elasticidade E e uma tensão de escoamento σ_E. Usando o sistema massa e mola mostrado na figura, deseja-se simular o deslocamento da extremidade C da barra à medida que a força axial **P** é gradualmente aplicada e removida, ou seja, os deslocamentos dos pontos C e C' deverão ser os mesmos para todos os valores de P. Designando por μ o coeficiente de atrito entre o bloco e a superfície horizontal, determine uma expressão para (*a*) a massa m necessária para o bloco e (*b*) a constante k necessária para a mola.

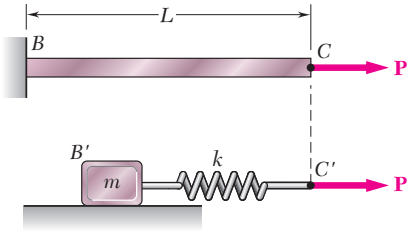


Fig. 2.135

PROBLEMAS PARA COMPUTADOR

Os problemas a seguir devem ser resolvidos usando um computador. Escreva cada programa de modo que os elementos cilíndricos sólidos possam ser definidos pelo seu diâmetro ou pela sua área de seção transversal.

2.C1 Uma barra constituída de n elementos, cada um dos quais homogêneo e de seção transversal uniforme, é submetida ao carregamento mostrado. O comprimento do elemento i é designado por L_i, sua área de seção transversal, por A_i, o módulo de elasticidade, por E_i e a força aplicada à sua extremidade direita, por $\mathbf{P}_i$. Considere que a intensidade P_i dessa força seja positiva se $\mathbf{P}_i$ for dirigida para a direita e negativa no caso contrário. (*a*) Elabore um programa de computador que possa ser utilizado para determinar a tensão normal média em cada elemento, a deformação de cada um deles e a deformação total da barra. (*b*) Use esse programa para resolver os Problemas 2.20 e 2.126.

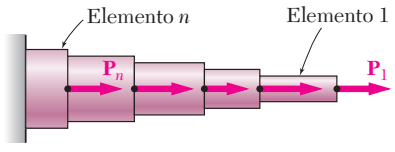


Fig. P2.C1

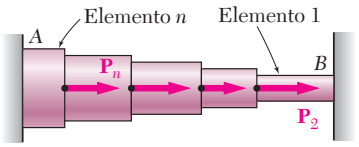


Fig. P2.C2

2.C2 A barra *AB* é horizontal com ambas as extremidades fixas. Ela consiste em *n* elementos, cada um dos quais é homogêneo e de seção transversal uniforme, e está submetida ao carregamento mostrado na figura. O comprimento do elemento *i* é designado por L_i, sua área de seção transversal, por A_i, seu módulo de elasticidade, por E_i e a força aplicada à sua extremidade direita, por $\mathbf{P}_i$. Considere a intensidade P_i dessa força positiva se $\mathbf{P}_i$ for direcionada para a direita e negativa em caso contrário. (Note que $P_1 = 0$.) (*a*) Elabore um programa para computador que possa ser utilizado para determinar as reações em *A* e *B*, a tensão normal média em cada elemento e a deformação de cada um deles. (*b*) Use esse programa para resolver os Problemas 2.41 e 2.42.

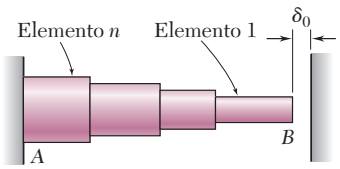


Fig. P2.C3

2.C3 A barra *AB* consiste em *n* elementos, cada um dos quais homogêneo e de seção transversal uniforme. A extremidade *A* é fixa e inicialmente há uma folga δ_0 entre a extremidade *B* e a superfície vertical fixa à direita. O comprimento do elemento *i* é designado por L_i, sua área de seção transversal, por A_i, seu módulo de elasticidade, por E_i e seu coeficiente de expansão térmica por α_i. Depois de a temperatura da barra ter sido aumentada em ΔT, a folga em *B* é fechada e as superfícies verticais exercem forças iguais e opostas na barra. (*a*) Elabore um programa de computador que possa ser utilizado para determinar a intensidade das reações em *A* e *B*, as tensões normais em cada elemento e as deformações em cada um deles. (*b*) Use esse programa para resolver os Problemas 2.51, 2.59 e 2.60.

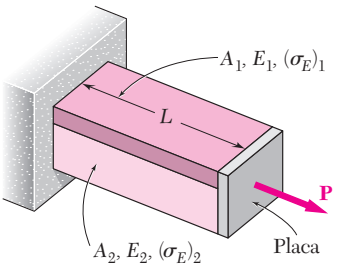


Fig. P2.C4

2.C4 A barra *AB* tem comprimento *L* e é feita de dois materiais diferentes com determinada área de seção transversal, módulo de elasticidade e tensão de escoamento. A barra é submetida, como mostra a figura, à força **P** que é gradualmente aumentada desde zero até que sua deformação atinja um valor máximo δ_m e depois diminuída até zero. (*a*) Elabore um programa de computador que, para cada um dos 25 valores de δ_m igualmente espaçados sobre o intervalo, que se estende desde 0 até um valor igual a 120% da deformação, fazendo ambos os materiais escoarem, possa ser utilizado para determinar o máximo valor P_m da força, a tensão normal máxima em cada material, a deformação permanente δ_p da barra e a tensão residual em cada material. (*b*) Use o programa para resolver os Problemas 2.111 e 2.112.

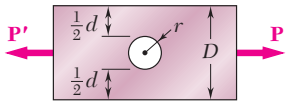


Fig. P2.C5

2.C5 A placa da figura tem um furo no centro de sua largura. O coeficiente de concentração de tensões para uma placa sob carregamento axial com um furo centrado é:

$$K = 3{,}00 - 3{,}13\left(\frac{2r}{D}\right) + 3{,}66\left(\frac{2r}{D}\right)^2 - 1{,}53\left(\frac{2r}{D}\right)^3$$

em que *r* é o raio do furo e *D* é a largura da placa. Elabore um programa de computador para determinar a força **P** admissível para os valores dados de *r*, *D*, a espessura *t* da barra e a tensão admissível σ_{adm} do material. Sabendo que $t = 6{,}4$ mm, $D = 76$ mm e $\sigma_{\text{adm}} = 110$ MPa, determine a força admissível **P** para valores de *r* de 3 mm até 18 mm, usando incrementos de 3 mm.

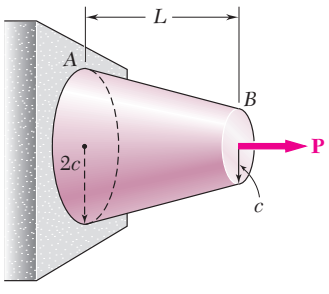


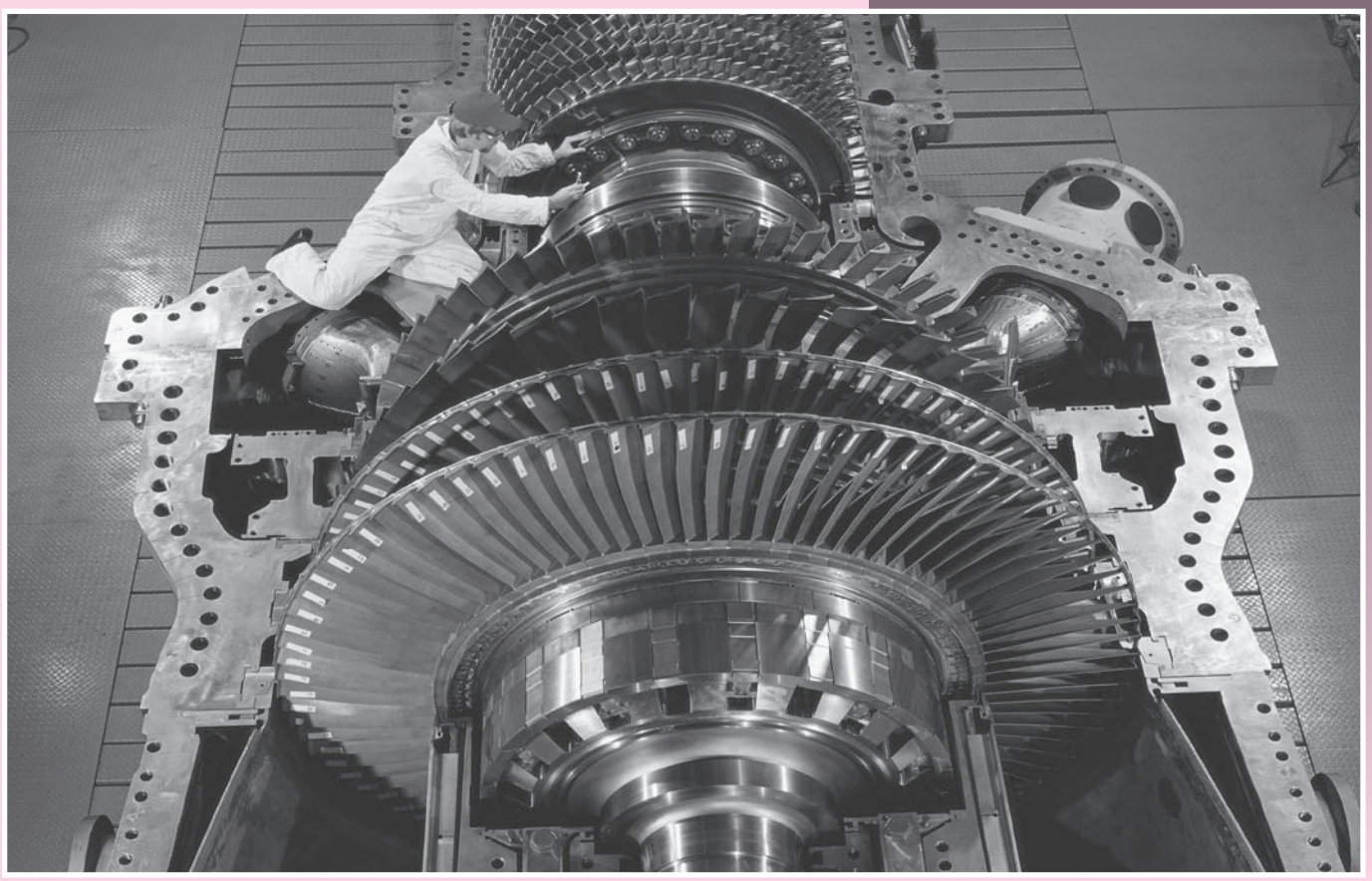
Fig. P2.C6

2.C6 Um cone sólido truncado é submetido a uma força axial **P**, como mostra a figura. O alongamento exato é $(PL)/(2\pi c^2 E)$. Substituindo o cone por *n* cilindros circulares de igual espessura, crie um programa de computador que possa ser utilizado para calcular o alongamento desse cone. Qual é a percentagem de erro na resposta obtida do programa usando (*a*) $n = 6$, (*b*) $n = 12$ e (*c*) $n = 60$?

C A P Í T U L O

3

Torção



Este capítulo é dedicado ao estudo da torção e das tensões e deformações que ela provoca. Na turbina mostrada aqui, o eixo central conecta os componentes do motor para produzir o empuxo necessário ao movimento de uma aeronave.

3.1. Introdução

Nos dois capítulos anteriores, você estudou como calcular as tensões e as deformações em componentes estruturais submetidos a forças axiais, isto é, a forças orientadas ao longo do eixo do componente. Neste capítulo, vamos considerar os elementos estruturais e peças de máquinas que estão sob *torção*. Mais especificamente, você analisará as tensões e as deformações em elementos com seção transversal circular submetidos a momentos de torção, ou *torques*, **T** e **T′** (Fig. 3.1). Esses momentos têm a mesma intensidade T e sentidos opostos. Eles são grandezas vetoriais e podem ser representados por setas curvas, como na Fig. 3.1*a*, ou por vetores conjugados, como na Fig. 3.1*b*.

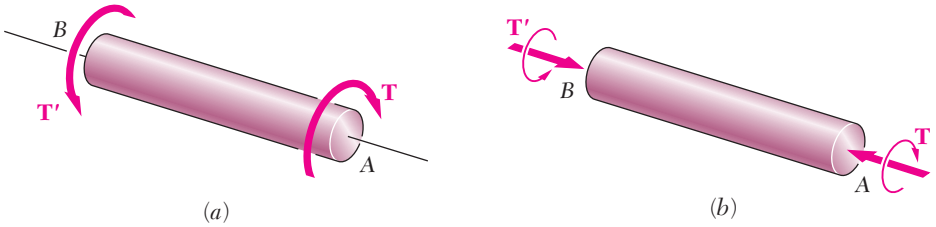


Fig. 3.1

Elementos sob torção são encontrados em muitas aplicações de engenharia. A aplicação mais comum é aquela dos *eixos de transmissão*, utilizados para transmitir potência de um ponto para outro. Por exemplo, o eixo mostrado na Fig. 3.2 é utilizado para transmitir potência do motor para as rodas traseiras de um automóvel. Esses eixos podem ser maciços, como mostra a Fig. 3.1, ou vazados.

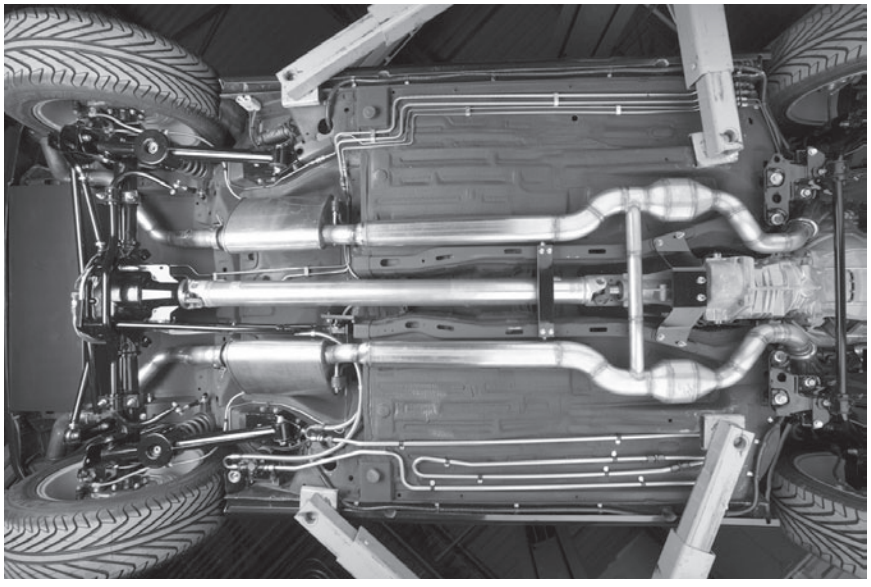


Fig. 3.2 No conjunto de transmissão do automóvel mostrado, o eixo transmite potência do motor para as rodas traseiras.

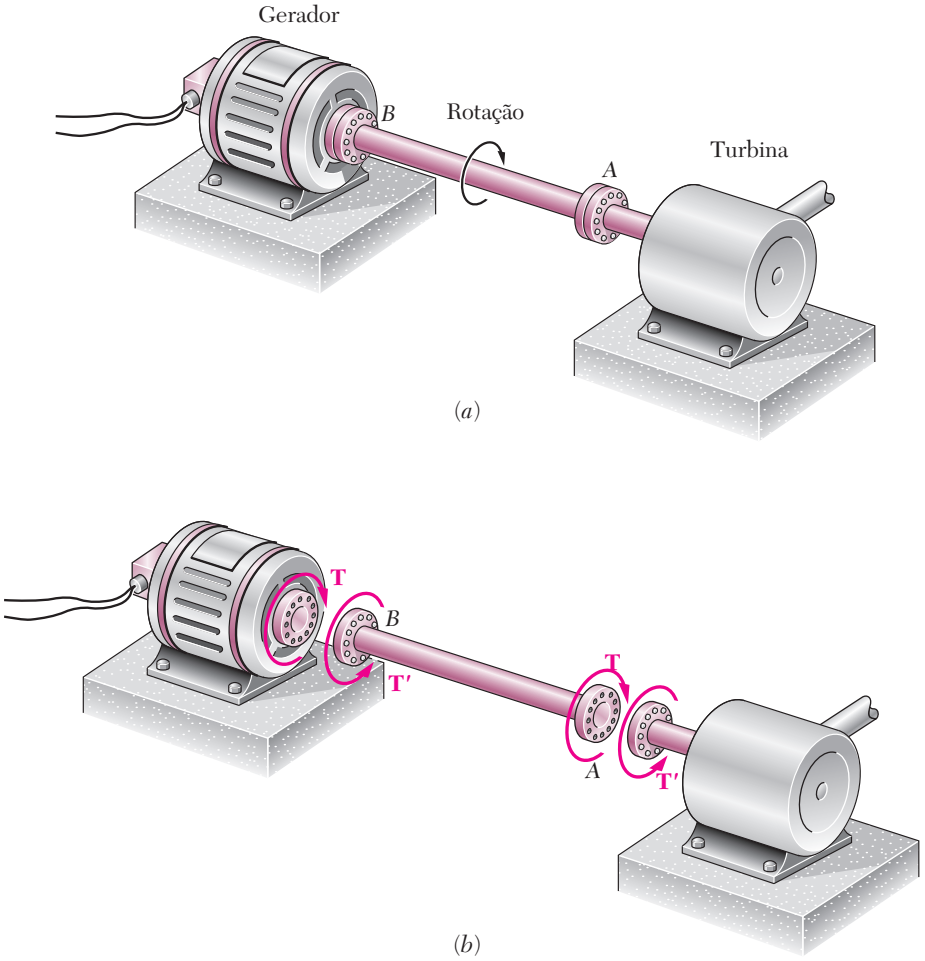


Fig. 3.3

Considere o sistema mostrado na Fig. 3.3*a*, que consiste em uma turbina a vapor *A* e um gerador elétrico *B* conectados por um eixo de transmissão *AB*. Separando o sistema em suas três partes componentes (Fig. 3.3*b*), você pode ver que a turbina aplica um momento de torção ou torque **T** no eixo, e que o eixo aplica um torque igual no gerador. O gerador reage aplicando um torque igual e oposto **T′** no eixo, e o eixo aplica um torque **T′** na turbina.

Primeiro vamos analisar as tensões e as deformações que ocorrem em eixos circulares (ou barras de seção circular). Na Seção 3.3, é demonstrada uma propriedade importante dos eixos circulares: *Quando um eixo circular é submetido à torção, todas as seções transversais permanecem planas e indeformadas*. Em outras palavras, embora as várias seções transversais ao longo do eixo girem em diferentes ângulos, cada seção transversal gira como um disco sólido e rígido. Essa propriedade lhe permitirá determinar a *distribuição de deformações específicas de cisalhamento em um eixo circular e concluir que a deformação específica de cisalhamento varia linearmente com a distância ao centro do eixo*.

Considerando deformações na *região elástica* e utilizando a lei de Hooke para tensão e deformação de cisalhamento, vamos determinar a *distribuição de tensões de cisalhamento* em um eixo circular e deduzir as *fórmulas de torção elástica* (Seção 3.4).

Na Seção 3.5, você aprenderá a encontrar o *ângulo de torção* de um eixo de seção circular submetido a determinado torque, supondo novamente que as deformações sejam elásticas. A solução do problema que envolve *eixos estaticamente indeterminados* será considerada na Seção 3.6.

Na Seção 3.7, você estudará o *projeto de eixos de transmissão*. Para poder projetar, você aprenderá a determinar as características físicas necessárias de um eixo em termos de sua velocidade de rotação e da potência a ser transmitida.

As fórmulas de torção não podem ser utilizadas para determinar tensões próximas às seções nas quais as cargas torçoras são aplicadas ou próximas a uma seção em que ocorre uma mudança abrupta no diâmetro do eixo. Adicionalmente, essas fórmulas se aplicam somente dentro da região elástica do material.

Na Seção 3.8, você aprenderá a levar em conta a concentração de tensões em que ocorre uma mudança abrupta no diâmetro do eixo. Nas Seções 3.9 a 3.11, consideraremos tensões e deformações em eixos de seção circular feitos de um material dúctil, quando o ponto de escoamento do material é ultrapassado. Em seguida você aprenderá a determinar as *deformações plásticas* permanentes e as consequentes *tensões residuais* que permanecem em um eixo que foi carregado além do ponto de escoamento do material.

Nas últimas seções deste capítulo, você estudará a torção de elementos não circulares (Seção 3.12) e analisará a distribuição de tensões em eixos de seção vazada de parede fina e não circular (Seção 3.13).

3.2. Discussão preliminar das tensões em uma barra de seção circular

Considerando a barra de seção circular AB submetida em A e B a torques iguais e opostos $\mathbf{T}$ e $\mathbf{T}'$, cortamos a barra por um plano perpendicular ao seu eixo longitudinal em algum ponto arbitrário C (Fig. 3.4). O diagrama de corpo livre da parte BC da barra deve incluir as forças de cisalhamento elementares $d\mathbf{F}$, perpendiculares ao raio da barra, que a parte AC aplica em BC quando a barra é torcida (Fig. 3.5*a*). Contudo, as condições de equilíbrio para BC

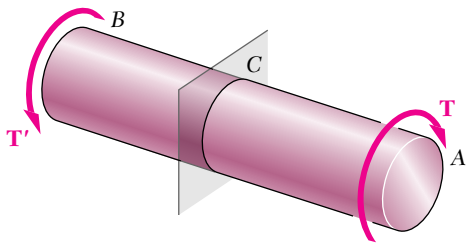


Fig. 3.4

requerem que o sistema dessas forças elementares seja equivalente a um torque interno **T**, igual e oposto a **T**′ (Fig. 3.5*b*). Designando por ρ a distância perpendicular da força $d\mathbf{F}$ ao eixo da barra e supondo que a soma dos momentos das forças de cisalhamento $d\mathbf{F}$ em relação ao eixo da barra seja igual em intensidade ao torque **T**, escrevemos

$$\int \rho \, dF = T$$

ou, uma vez que $dF = \tau \, dA$, com τ tensão de cisalhamento no elemento de área dA,

$$\int \rho(\tau \, dA) = T \tag{3.1}$$

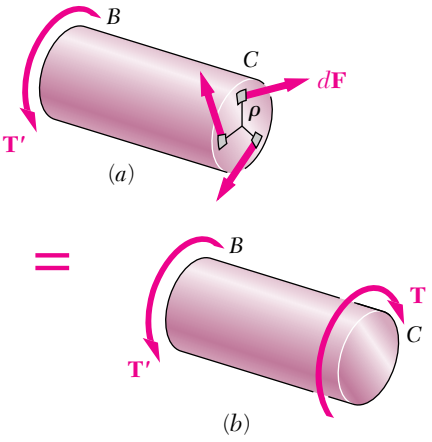


Fig. 3.5

Embora a relação obtida expresse uma importante condição que deve ser satisfeita pelas tensões de cisalhamento em qualquer seção transversal do eixo, ela *não* nos informa como essas tensões são distribuídas na seção transversal. Como já fizemos na Seção 1.5, observamos que a distribuição real de tensões em razão de determinado carregamento é *estaticamente indeterminada*, isto é, essa distribuição *não pode ser determinada pelos métodos da estática*. No entanto, a suposição feita na Seção 1.5 de que as tensões normais produzidas por uma força axial centrada eram uniformemente distribuídas, verificamos mais tarde (Seção 2.17) ser justificada desde que fora da vizinhança das forças concentradas. Uma suposição similar com relação à distribuição das tensões de cisalhamento em uma barra de seção circular elástica *seria incorreta*. Devemos evitar qualquer suposição

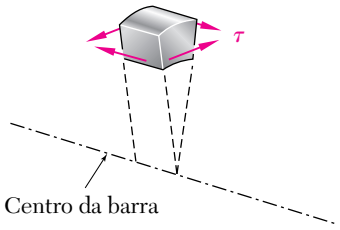


Fig. 3.6

em relação à distribuição de tensões em uma barra de seção circular até que tenhamos analisado as *deformações* produzidas nela. Isso será feito na próxima seção.

Mais uma observação deverá ser feita neste ponto. Conforme indicamos na Seção 1.12, a tensão de cisalhamento não pode ocorrer somente em um plano. Considere um pequeno elemento da barra, como aquele mostrado na Fig. 3.6. Sabemos que o torque aplicado à barra produz tensões de cisalhamento τ nas faces perpendiculares ao eixo longitudinal da barra. Entretanto, as condições de equilíbrio discutidas na Seção 1.12 requerem a existência de tensões iguais nas faces formadas pelos dois planos que contêm o eixo da barra. A demonstração de que essas tensões de cisalhamento realmente ocor-

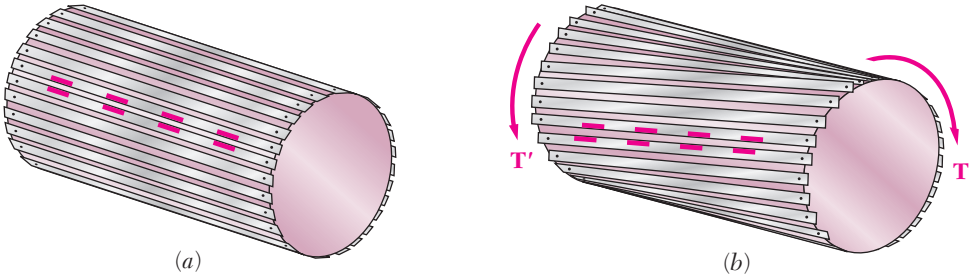


Fig. 3.7

rem na torção, pode ser feita através da consideração de uma "barra" formada por tiras separadas e fixadas por meio de pinos a discos colocados em suas extremidades, como mostra a Fig. 3.7*a*. Se forem pintadas marcas em duas tiras adjacentes, observa-se que as tiras deslizam uma em relação à outra, quando são aplicados torques iguais e opostos nas extremidades da "barra" (Fig. 3.7*b*). Embora esse deslizamento na realidade não ocorra em uma barra feita com um material homogêneo e coesivo, a tendência ao deslizamento existirá, mostrando que ocorrem tensões em planos longitudinais, bem como em planos perpendiculares ao eixo da barra.†

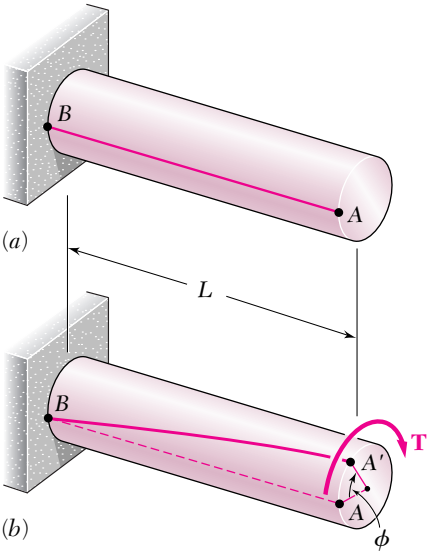


Fig. 3.8

3.3. Deformações em uma barra de seção circular

Considere uma barra de seção circular conectada a um suporte rígido em uma de suas extremidades (Fig. 3.8*a*). Se um torque **T** é aplicado à outra extremidade, a barra sofrerá rotação, com sua extremidade livre girando de um ângulo ϕ chamado de *ângulo de torção* (Fig. 3.8*b*). A observação mostra que, dentro de determinado intervalo de valores de T, o ângulo de torção ϕ é proporcional a T. Ela mostra também que ϕ é proporcional ao comprimento L da barra. Em outras palavras, o ângulo de torção para uma barra do mesmo material e mesma seção transversal, mas duas vezes mais longa, será duas vezes maior sob o mesmo torque T. Um dos objetivos da nossa análise será encontrar a relação existente entre ϕ, L e T; outro objetivo será determinar a distribuição das tensões de cisalhamento na seção transversal da barra, que não conseguimos obter na seção anterior com base apenas na estática.

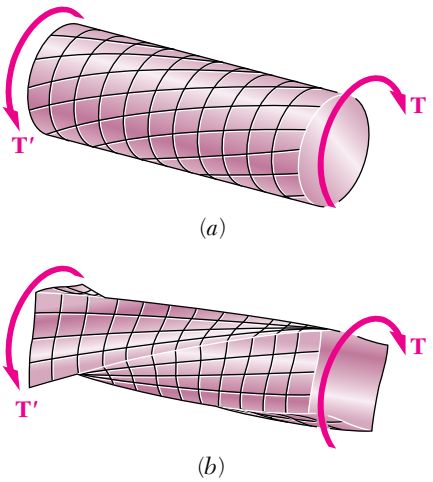


Fig. 3.9

Neste ponto, deve-se notar uma importante propriedade das barras circulares: quando uma barra circular é submetida à torção, *toda seção transversal plana permanece plana e indeformada*. Em outras palavras, embora as várias seções transversais ao longo da barra sofram rotações de diferentes valores, cada seção transversal gira como um disco rígido. Isso está ilustrado na Fig. 3.9*a*, que mostra a deformação em um modelo de borracha submetido à torção. A propriedade que estamos discutindo é característica das barras de seção circular, sejam elas cheias ou vazadas; ela não vale para elementos de seção transversal não circular. Por exemplo, quando uma barra de seção transversal quadrada é submetida à torção, suas várias seções transversais empenam (sofrem deslocamentos longitudinais) e não permanecem planas (Fig. 3.9*b*).

† A rotação de um tubo de cartolina que tenha sido aberto por um corte no sentido do comprimento fornece outra demonstração da existência de tensões de cisalhamento em planos longitudinais.

As seções transversais de uma barra circular permanecem planas e indeformadas porque uma barra circular é *axissimétrica*, isto é, sua aparência permanece a mesma quando ela é vista de uma posição fixa e rotacionada em torno de seu próprio eixo por um ângulo arbitrário. (Barras quadradas, entretanto, mantêm a mesma aparência somente se forem giradas de 90° ou 180°.) Conforme veremos agora, a axissimetria de barras circulares pode ser utilizada para provar teoricamente que suas seções transversais permanecem planas e indeformadas.

Considere os pontos C e D localizados na circunferência de determinada seção transversal da barra, e sejam C' e D' as posições que eles ocuparão depois que a barra for girada (Fig. 3.10*a*). A axissimetria da barra e do carregamento requer que a rotação que colocaria D em C agora coloque D' em C'. Então C' e D' devem ficar na circunferência de um círculo, e o arco $C'D'$ deve ser igual ao arco CD (Fig. 3.10*b*). Examinaremos agora se o círculo no qual estão C' e D' é diferente do círculo original. Vamos supor que C' e D' estejam em um círculo diferente e que o novo círculo esteja localizado à esquerda do círculo original, como mostra a Fig. 3.10*b*. A mesma situação valerá para qualquer outra seção transversal, uma vez que todas as seções transversais da barra estão submetidas ao mesmo torque interno T. Um observador que olha para a barra pela sua extremidade A concluirá que o carregamento faz com que o círculo desenhado na barra se afaste dele. Contudo, um observador localizado em B, para o qual aquele carregamento é o mesmo observado por A (um momento no sentido horário em A e um momento no sentido anti-horário em B), chegará a uma conclusão oposta, isto é, de que o círculo se move em *direção* a ele. Essa contradição prova que nossa hipótese é errada e que C' e D' estão no mesmo círculo em que estão C e D. Assim, quando a barra é torcida, o círculo original apenas gira em seu próprio plano. Como o mesmo raciocínio pode ser aplicado a qualquer círculo menor e concêntrico, localizado na seção transversal em questão, concluímos que a seção transversal inteira permanece plana (Fig. 3.11).

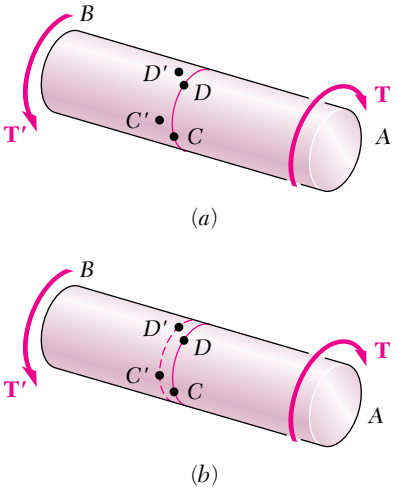


Fig. 3.10

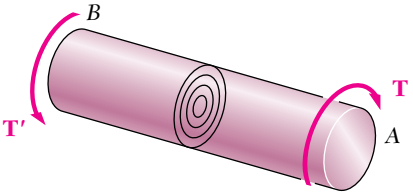


Fig. 3.11

O argumento acima não impede que os vários círculos concêntricos da Fig. 3.11 possam girar por diferentes valores quando a barra é torcida. Todavia, se assim fosse, determinado diâmetro da seção transversal seria distorcido em uma curva que pode ter a aparência daquela mostrada na Fig. 3.12*a*. Um observador que olha para essa curva a partir de A concluiria que as camadas externas da barra ficam mais torcidas do que as camadas internas, enquanto um observador que olha a partir de B chegaria a uma conclusão oposta (Fig. 3.12*b*). Essa inconsistência nos leva a concluir que qualquer diâmetro de seção transversal permanece reto (Fig. 3.12*c*) e, portanto, que qualquer seção transversal de uma barra de seção circular permanece plana e indeformada.

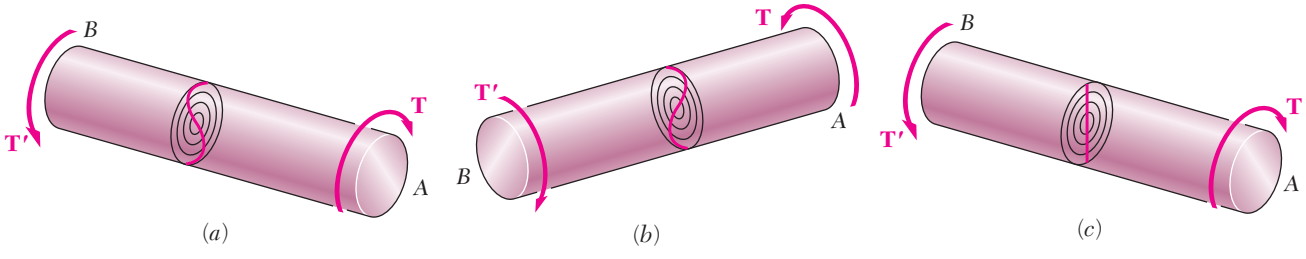


Fig. 3.12

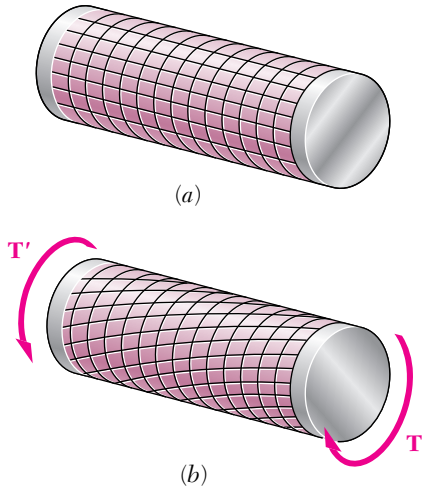


Fig. 3.13

Nossa discussão até agora ignorou o modo de aplicação dos momentos torçores **T** e **T′**. Se *todas* as seções da barra, de uma extremidade a outra, devem permanecer planas e indeformadas, precisamos garantir que os momentos sejam aplicados de maneira que as extremidades da barra permaneçam planas e indeformadas. Isso pode ser conseguido aplicando-se os momentos **T** e **T′** a discos rígidos, que estão presos solidamente às extremidades da barra (Fig. 3.13*a*). Podemos então ter certeza de que todas as seções permanecerão planas e indeformadas quando o carregamento for aplicado e que as deformações resultantes ocorrerão de maneira uniforme em todo o comprimento da barra. Todos os círculos igualmente espaçados mostrados na Fig. 3.13*a* girarão a mesma quantidade em relação aos seus vizinhos, e cada uma das linhas retas será transformada em uma curva (hélice), interceptando os vários círculos com o mesmo ângulo (Fig. 3.13*b*).

As deduções apresentadas nesta e nas próximas seções serão fundamentadas na hipótese de barras com extremidades rígidas. As condições de carregamento encontradas na prática podem ser muito diferentes daquelas correspondentes ao modelo da Fig. 3.13. O grande mérito desse modelo é que ele nos ajuda a caracterizar um problema de torção para o qual podemos obter uma solução exata, de maneira análoga ao que foi feito com o modelo de placas rígidas de extremidade apresentado na Seção 2.17, que tornou possível a solução do problema de força axial com facilidade e precisão. Em virtude do princípio de Saint-Venant, os resultados obtidos para nosso modelo idealizado podem ser estendidos para a maioria das aplicações de engenharia. No entanto, devemos associar mentalmente esses resultados ao modelo específico mostrado na Fig. 3.13.

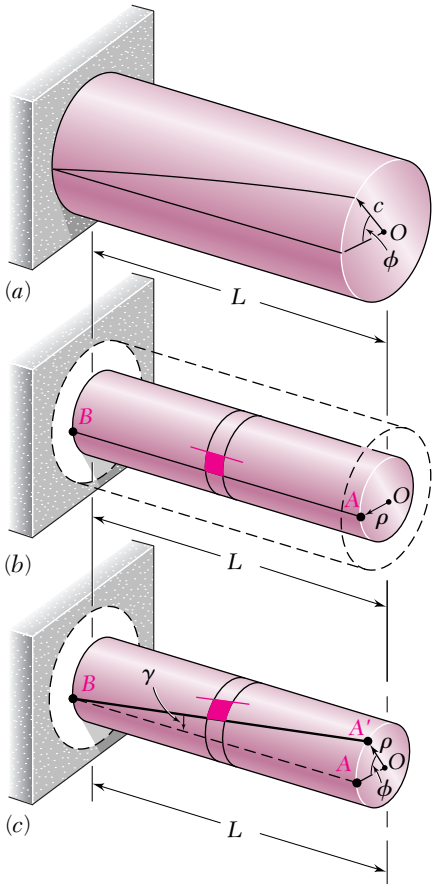


Fig. 3.14

Vamos agora determinar a distribuição de *deformações de cisalhamento* em uma barra circular de comprimento L e raio c que foi torcida através de um ângulo ϕ (Fig. 3.14*a*). Destacando da barra um cilindro de raio ρ, consideramos o pequeno elemento quadrado formado por dois círculos adjacentes e duas linhas retas adjacentes traçadas na superfície do cilindro antes de aplicar qualquer carregamento (Fig. 3.14*b*). Como a barra é submetida a um carregamento torcional, o elemento deformado assume a forma de um losango (Fig. 3.14*c*). Recordamos agora da Seção 2.14 que a deformação por cisalhamento γ em um elemento é medida pela variação dos ângulos formados pelos lados daquele elemento. Como os círculos que definem dois dos lados do elemento considerado aqui permanecem inalterados, a deformação de cisalhamento γ deve ser igual ao ângulo entre as linhas AB e $A'B$. (Lembre-se de que γ deve ser expresso em radianos.)

Observamos da Fig. 3.14*c* que, para pequenos valores de γ, podemos expressar o comprimento do arco AA' como $AA' = L\gamma$. Mas, em contrapartida, temos $AA' = \rho\phi$. Segue-se que $L\gamma = \rho\phi$, ou

$$\gamma = \frac{\rho\phi}{L} \tag{3.2}$$

em que γ e ϕ são ambos expressos em radianos. A equação obtida mostra, como já podíamos prever, que a deformação de cisalhamento γ em determinado ponto de uma barra circular em torção é proporcional ao ângulo de torção ϕ. Ela mostra também que γ é proporcional à distância ρ do eixo da barra até o ponto em consideração. Assim, a *deformação de cisalhamento em uma barra circular varia linearmente com a distância do eixo da barra.*

Conclui-se da Equação (3.2) que a deformação de cisalhamento é máxima na superfície do eixo, em que $\rho = c$. Temos

$$\gamma_{máx} = \frac{c\phi}{L} \tag{3.3}$$

Eliminando ϕ das Equações (3.2) e (3.3), podemos expressar a deformação de cisalhamento γ a uma distância ρ do eixo da barra como

$$\gamma = \frac{\rho}{c}\gamma_{máx} \tag{3.4}$$

3.4. Tensões no regime elástico

Não foi considerada até aqui nenhuma relação particular tensão-deformação em nossa discussão de barras circulares em torção. Vamos agora considerar o caso quando o torque **T** é tal que todas as tensões de cisalhamento na barra permanecem abaixo da tensão de escoamento τ_E. Sabemos do Capítulo 2 que, para todos os fins práticos, isso significa que as tensões na barra circular permanecerão abaixo do limite de proporcionalidade e abaixo do limite elástico também. Assim, vale a lei de Hooke e não haverá deformação permanente.

Recordando a lei de Hooke para tensão e deformação de cisalhamento da Seção 2.14, escrevemos

$$\tau = G\gamma \tag{3.5}$$

em que G é o módulo de elasticidade transversal do material. Multiplicando ambos os membros da Equação (3.4) por G, escrevemos

$$G\gamma = \frac{\rho}{c}G\gamma_{máx}$$

ou, utilizando a Equação (3.5),

$$\tau = \frac{\rho}{c}\tau_{máx} \tag{3.6}$$

A equação obtida mostra que, desde que a tensão de escoamento (ou limite de proporcionalidade) não seja excedida em nenhuma parte da barra circular, a *tensão de cisalhamento na barra circular variará linearmente com a distância ρ do eixo da barra*. A Figura 3.15*a* mostra a distribuição de tensões em uma barra circular cheia de raio c, e a Fig. 3.15*b* em uma barra circular vazada com raio interno c_1 e raio externo c_2. Da Equação (3.6), verificamos que, nesse último caso,

$$\tau_{mín} = \frac{c_1}{c_2}\tau_{máx} \tag{3.7}$$

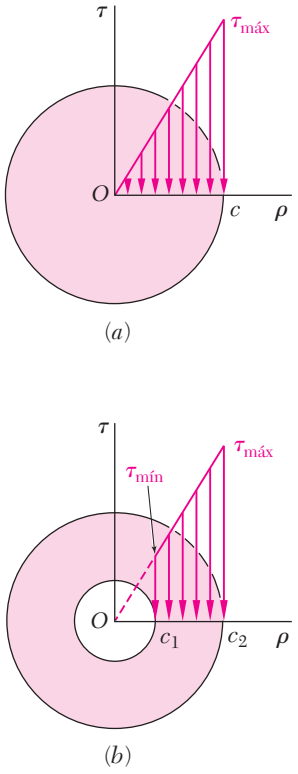


Fig. 3.15

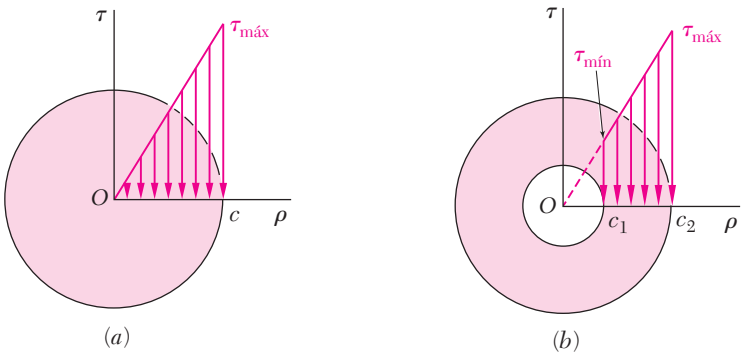


Fig. 3.15 (repetida)

Lembramos agora da Seção 3.2 que a soma dos momentos das forças elementares aplicadas em qualquer seção transversal da barra circular deve ser igual à intensidade T do torque aplicado à barra circular:

$$\int \rho(\tau\, dA) = T \tag{3.1}$$

Substituindo τ de (3.6) em (3.1), escrevemos

$$T = \int \rho\tau\, dA = \frac{\tau_{\text{máx}}}{c}\int \rho^2\, dA$$

Mas a integral no último membro representa o momento polar de inércia J da seção transversal com relação a seu centro O. Temos, portanto

$$T = \frac{\tau_{\text{máx}} J}{c} \tag{3.8}$$

ou, resolvendo para $\tau_{\text{máx}}$,

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc}{J} \tag{3.9}$$

Substituindo $\tau_{\text{máx}}$ de (3.9) em (3.6), expressamos a tensão de cisalhamento a qualquer distância ρ do eixo da barra circular como

$$\tau = \frac{T\rho}{J} \tag{3.10}$$

As Equações (3.9) e (3.10) são conhecidas como *fórmulas da torção no regime elástico*. Recordamos da estática que o momento polar de inércia de um círculo de raio c é $J = \frac{1}{2}\pi c^4$. No caso de uma barra de seção circular vazada de raio interno c_1 e raio externo c_2, o momento polar de inércia é

$$J = \tfrac{1}{2}\pi c_2^4 - \tfrac{1}{2}\pi c_1^4 = \tfrac{1}{2}\pi(c_2^4 - c_1^4) \tag{3.11}$$

Notamos que em unidades métricas SI, na Equação (3.9) ou (3.10), T será expresso em N · m, c ou ρ em metros, e J em m^4; verificamos que a tensão de cisalhamento resultante será expressa em N/m^2, ou seja, pascals (Pa).

EXEMPLO 3.1

Uma barra circular vazada de aço cilíndrica tem 1,5 m de comprimento e diâmetros interno e externo, respectivamente, iguais a 40 mm e 60 mm (Fig. 3.16). (*a*) Qual é o maior torque que pode ser aplicado à barra circular se a tensão de cisalhamento não deve exceder 120 MPa? (*b*) Qual é o valor mínimo correspondente da tensão de cisalhamento na barra circular?

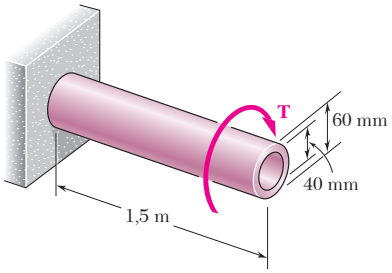


Fig. 3.16

(a) Maior torque permitido. O maior torque **T** que pode ser aplicado à barra de seção circular é aquele para o qual $\tau_{máx} = 120$ MPa. Como esse valor é menor que a tensão de escoamento do material da barra, podemos usar a Equação (3.9). Resolvendo essa equação para T, temos

$$T = \frac{J\tau_{máx}}{c} \tag{3.12}$$

Lembrando que o momento polar de inércia J da seção transversal é dado pela Equação (3.11), em que $c_1 = \frac{1}{2}(40\text{ mm}) = 0{,}02$ m e $c_2 = \frac{1}{2}(60\text{ mm}) = 0{,}03$ m, escrevemos

$$J = \tfrac{1}{2}\pi(c_2^4 - c_1^4) = \tfrac{1}{2}\pi(0{,}03^4 - 0{,}02^4) = 1{,}021 \times 10^{-6}\text{ m}^4$$

Substituindo J e $\tau_{máx}$ em (3.12), e fazendo $c = c_2 = 0{,}03$ m, temos

$$T = \frac{J\tau_{máx}}{c} = \frac{(1{,}021 \times 10^{-6}\text{ m}^4)(120 \times 10^6\text{ Pa})}{0{,}03\text{ m}}$$
$$= 4{,}08\text{ kN} \cdot \text{m}$$

(b) Tensão de cisalhamento mínima. O valor mínimo da tensão de cisalhamento ocorre na superfície interna da barra. Ele é obtido da Equação (3.7), a qual mostra que $\tau_{mín}$ e $\tau_{máx}$ são proporcionais respectivamente a c_1 e c_2:

$$\tau_{mín} = \frac{c_1}{c_2}\tau_{máx} = \frac{0{,}02\text{ m}}{0{,}03\text{ m}}(120\text{ MPa}) = 80\text{ MPa}$$

As fórmulas de torção (3.9) e (3.10) foram deduzidas para uma barra de seção transversal circular uniforme submetida a torques em suas extremidades. No entanto, elas também podem ser utilizadas para uma barra de seção transversal variável ou para uma barra submetida a torques em localizações que não são suas extremidades (Fig. 3.17*a*). A distribuição de tensões de cisalhamento em determinada seção transversal S da barra circular é obtida da Equação (3.9), em que J representa o momento polar de inércia daquela seção, e em que T representa o *esforço solicitante de torção* ou *esforço interno de torção* naquela seção. O valor de T é obtido desenhando-se o diagrama de corpo livre da parte da barra circular localizada em um dos lados da seção (Fig. 3.17*b*) e escrevendo que a soma de torques aplicados àquela parte, incluindo o esforço interno de torção **T**, é zero (ver o Problema Resolvido 3.1).

Até aqui, nossa análise de tensões em uma barra circular esteve limitada a tensões de cisalhamento. Isso porque o elemento que selecionamos estava orientado de modo que suas faces eram paralelas ou perpendiculares ao eixo da barra circular (Fig. 3.6). Sabemos pelas discussões anteriores (Seções 1.11 e 1.12) que podem ser encontradas tensões normais, tensões de cisalhamento, ou uma combinação de ambas sob as mesmas condições de carregamento, dependendo da orientação do elemento que foi escolhido. Considere os dois elementos *a* e *b* localizados na superfície de uma barra circular submetida à

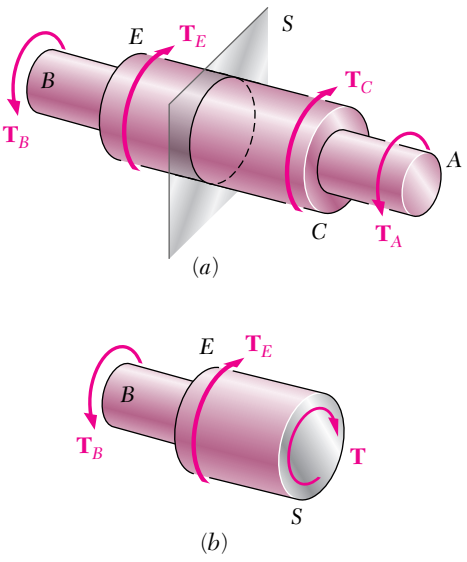


Fig. 3.17

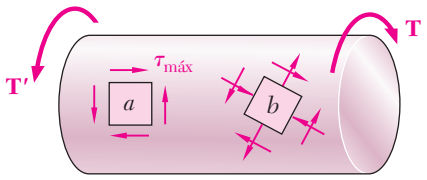


Fig. 3.18

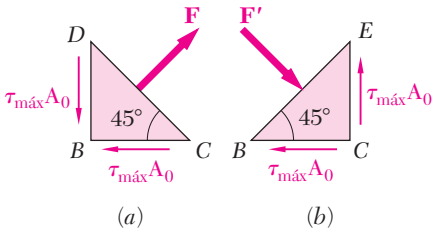


Fig. 3.19

torção (Fig. 3.18). Como as faces do elemento *a* são, respectivamente, paralela e perpendicular ao eixo da barra circular, as únicas tensões no elemento serão as tensões de cisalhamento definidas pela Equação (3.9), ou seja, $\tau_{máx} = Tc/J$. Em contrapartida, as faces do elemento *b*, que formam ângulos arbitrários com o eixo da barra de seção circular, estarão submetidas a uma combinação das tensões normal e de cisalhamento.

Vamos analisar o caso particular de um elemento *c* (não mostrado) a 45° do eixo da barra. Para determinarmos as tensões nas faces desse elemento, consideramos os dois elementos triangulares mostrados na Fig. 3.19 e desenhamos seus diagramas de corpo livre. No caso do elemento da Fig. 3.19*a*, sabemos que as tensões exercidas nas faces *BC* e *BD* são as tensões de cisalhamento $\tau_{máx}=Tc/J$. A intensidade das forças de cisalhamento correspondentes será então $\tau_{máx}A_0$, em que A_0 representa a área da face. Observando que as componentes nas faces *DC* das duas forças de cisalhamento são iguais e opostas, concluímos que a força **F** aplicada em *DC* deve ser perpendicular àquela face. É uma força de tração, e sua intensidade é

$$F = 2(\tau_{máx}A_0)\cos 45° = \tau_{máx}A_0\sqrt{2} \tag{3.13}$$

A tensão correspondente é obtida dividindo-se a força *F* pela área *A* da face *DC*. Observando que $A = A_0\sqrt{2}$, escrevemos

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{\tau_{máx}A_0\sqrt{2}}{A_0\sqrt{2}} = \tau_{máx} \tag{3.14}$$

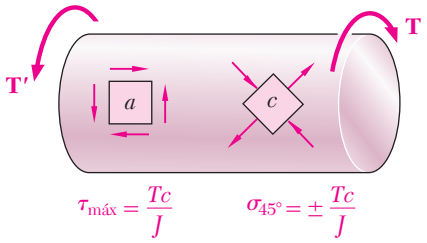


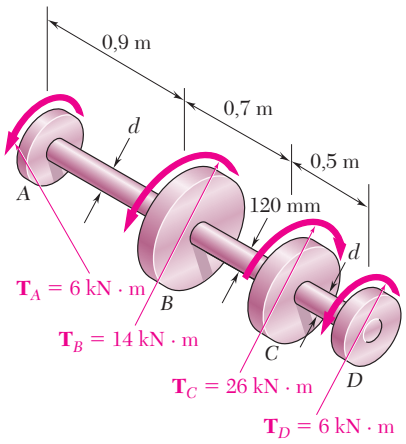
Fig. 3.20

Uma análise similar aplicada ao elemento da Fig. 3.19*b* mostra que a tensão na face *BE* é $\sigma = -\tau_{máx}$. Concluímos que as tensões exercidas nas faces de um elemento *c* a 45° do eixo da barra (Fig. 3.20) são tensões normais iguais a $\pm\tau_{máx}$. Assim, enquanto o elemento *a* na Fig. 3.20 está em cisalhamento puro, o elemento *c* na mesma figura está submetido à tensão de tração em duas de suas faces, e à tensão de compressão nas outras duas. Notamos também que todas as tensões envolvidas têm a mesma intensidade, Tc/J.†

Como foi visto na Seção 2.3, os materiais dúcteis geralmente falham em cisalhamento. Portanto, quando submetido à torção, um corpo de prova *J* feito de um material dúctil rompe-se ao longo de um plano perpendicular ao seu eixo longitudinal (Fig. 3.21*a*). Não obstante, materiais frágeis falham mais em tração do que em cisalhamento. Assim, quando submetido à torção, um corpo de prova feito de um material frágil tende a se romper ao longo das superfícies perpendiculares à direção na qual a tensão de tração é máxima, isto é, ao longo das superfícies que formam um ângulo de 45° com o eixo longitudinal do corpo de prova (Fig. 3.21*b*).

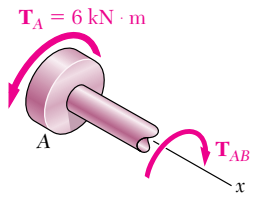
Fig. 3.21

† Tensões em elementos de orientação arbitrária, como o elemento *b* da Fig. 3.18, serão discutidas no Capítulo 7.



PROBLEMA RESOLVIDO 3.1

O eixo de seção circular *BC* é vazado com diâmetros interno e externo de 90 mm e 120 mm, respectivamente. Os eixos de seção circular *AB* e *CD* são cheios e têm diâmetro *d*. Para o carregamento mostrado na figura, determine (*a*) as tensões de cisalhamento máxima e mínima no eixo *BC*, (*b*) o diâmetro *d* necessário para os eixos *AB* e *CD*, se a tensão de cisalhamento admissível nesses eixos for de 65 MPa.

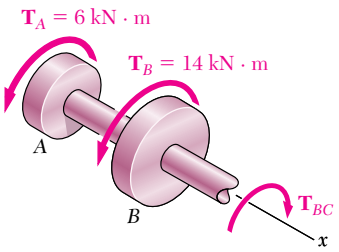


SOLUÇÃO

Equações da estática. Chamando de $\mathbf{T}_{AB}$ o torque no eixo *AB*, cortamos uma seção através do eixo *AB* e, para o diagrama de corpo livre mostrado, escrevemos

$$\Sigma M_x = 0: \qquad (6 \text{ kN} \cdot \text{m}) - T_{AB} = 0 \qquad T_{AB} = 6 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Cortamos agora uma seção através do eixo *BC* e, para o corpo livre mostrado, temos

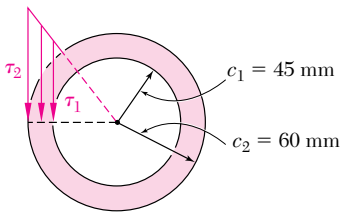


$$\Sigma M_x = 0: \qquad (6 \text{ kN} \cdot \text{m}) + (14 \text{ kN} \cdot \text{m}) - T_{BC} = 0 \qquad T_{BC} = 20 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

***a. Eixo* BC.** Para esse eixo circular vazado temos

$$J = \frac{\pi}{2}(c_2^4 - c_1^4) = \frac{\pi}{2}[(0{,}060)^4 - (0{,}045)^4] = 13{,}92 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

Tensão de cisalhamento máxima. Na superfície externa, temos

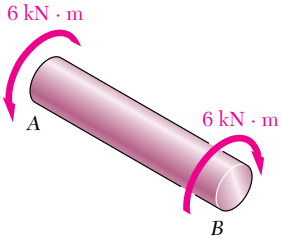


$$\tau_{\text{máx}} = \tau_2 = \frac{T_{BC} c_2}{J} = \frac{(20 \text{ kN} \cdot \text{m})(0{,}060 \text{ m})}{13{,}92 \times 10^{-6} \text{ m}^4} \qquad \tau_{\text{máx}} = 86{,}2 \text{ MPa} \blacktriangleleft$$

Tensão de cisalhamento mínima. Escrevemos que as tensões são proporcionais à distância do centro do eixo.

$$\frac{\tau_{\text{mín}}}{\tau_{\text{máx}}} = \frac{c_1}{c_2} \qquad \frac{\tau_{\text{mín}}}{86{,}2 \text{ MPa}} = \frac{45 \text{ mm}}{60 \text{ mm}} \qquad \tau_{\text{mín}} = 64{,}7 \text{ MPa} \blacktriangleleft$$

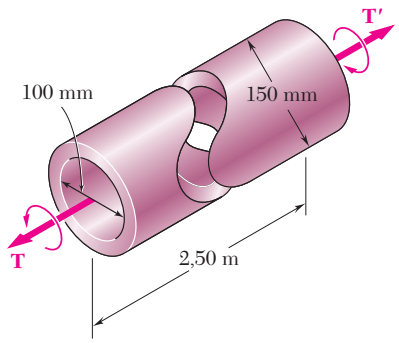
***b. Eixos* AB *e* CD.** Notamos que em ambos os eixos a intensidade do torque é $T = 6$ kN · m e $\tau_{\text{adm}} = 65$ MPa. Chamando de *c* o raio dos eixos, escrevemos



$$\tau = \frac{Tc}{J} \qquad 65 \text{ MPa} = \frac{(6 \text{ kN} \cdot \text{m})c}{\frac{\pi}{2}c^4}$$

$$c^3 = 58{,}8 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \qquad c = 38{,}9 \times 10^{-3} \text{ m}$$

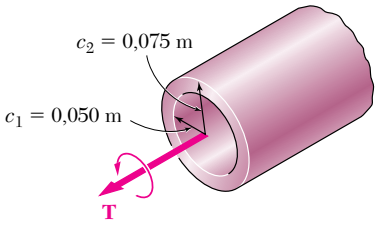
$$d = 2c = 2(38{,}9 \text{ mm}) \qquad d = 77{,}8 \text{ mm} \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESOLVIDO 3.2

O projeto preliminar de um grande eixo conectando um motor a um gerador determinou que o eixo escolhido fosse vazado e com diâmetros interno e externo de 100 mm e 150 mm, respectivamente. Sabendo que a tensão de cisalhamento admissível é de 82 MPa, determine o valor do torque máximo que pode ser transmitido (*a*) pelo eixo conforme o projeto preliminar, (*b*) por um eixo de seção cheia com o mesmo peso, (*c*) por um eixo de seção vazada com o mesmo peso e com diâmetro externo de 200 mm.

SOLUÇÃO



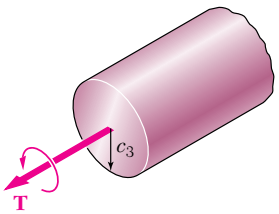
***a*. Eixo vazado conforme foi projetado.** Para o eixo vazado, temos

$$J = \frac{\pi}{2}(c_2^4 - c_1^4) = \frac{\pi}{2}[(0{,}075\text{ m})^4 - (0{,}050\text{ m})^4] = 39{,}9 \times 10^{-6}\text{ m}^4$$

Utilizando a Equação (3.9), escrevemos

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc_2}{J} \qquad 82\text{ MPa} = \frac{T(0{,}075\text{ m})}{39{,}9 \times 10^{-6}\text{ m}^4} \qquad T = 43{,}6\text{ kN} \cdot \text{m} \blacktriangleleft$$

***b*. Eixo de seção cheia de mesmo peso.** Para que o eixo projetado e a seção transversal cheia tenham o mesmo peso e comprimento, suas áreas de seção transversal devem ser iguais.

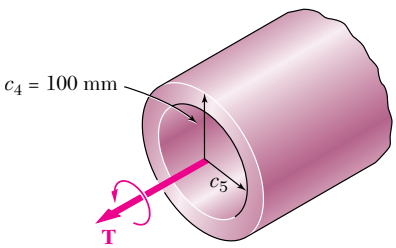


$$A_{(a)} = A_{(b)}$$
$$\pi[(0{,}075\text{ m})^2 - (0{,}050\text{ m})^2] = \pi c_3^2 \qquad c_3 = 0{,}056\text{ m}$$

Como $\tau_{\text{adm}} = 82$ MPa, escrevemos

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc_3}{J} \qquad 82\text{ MPa} = \frac{T(0{,}056\text{ m})}{\frac{\pi}{2}(0{,}056\text{ m})^4} \qquad T = 22{,}62\text{ kN} \cdot \text{m} \blacktriangleleft$$

***c*. Eixo vazado com 200 mm de diâmetro externo.** Para ter o mesmo peso, as áreas das seções transversais devem ser iguais. Determinamos o diâmetro interno do eixo escrevendo



$$A_{(a)} = A_{(c)}$$
$$\pi[(0{,}075\text{ m})^2 - (0{,}050\text{ m})^2] = \pi[(0{,}100\text{ m})^2 - c_5^2] \qquad c_5 = 0{,}083\text{ m}$$

Para $c_5 = 0{,}083$ m e $c_4 = 100$ mm

$$J = \frac{\pi}{2}[(0{,}100\text{ m})^4 - (0{,}083\text{ m})^4] = 8{,}25 \times 10^{-5}\text{ m}^4$$

Com $\tau_{\text{adm}} = 82$ MPa e $c_4 = 100$ mm

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc_4}{J} \qquad 82\text{ MPa} = \frac{T(0{,}10\text{ m})}{8{,}25 \times 10^{-5}\text{ m}^4} \qquad T = 67{,}65\text{ kN} \cdot \text{m} \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

3.1 Para o eixo cilíndrico mostrado, determine a tensão de cisalhamento máxima provocada por um torque de intensidade $T = 1{,}5$ kN · m.

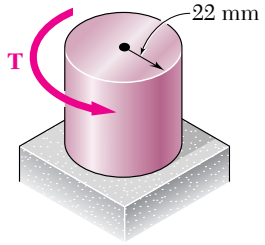


Fig. P3.1 e P3.2

3.2 Determine o torque **T** que provoca uma tensão de cisalhamento máxima de 80 MPa no eixo cilíndrico de aço mostrado.

3.3 Sabendo que o diâmetro interno do eixo vazado mostrado é $d = 22{,}9$ mm, determine a máxima tensão de cisalhamento causada por um torque de intensidade $T = 1{,}017$ kN · m aplicado.

3.4 Sabendo que $d = 30{,}5$ mm, determine o torque **T** que causa a máxima tensão de cisalhamento de 51,7 MPa no eixo vazado mostrado.

3.5 (*a*) Determine o torque que pode ser aplicado a um eixo de seção cheia com diâmetro de 20 mm, sem exceder a tensão de cisalhamento admissível do material do eixo de 80 MPa. (*b*) Resolva a parte *a* considerando que a seção transversal cheia foi substituída por um eixo vazado com a mesma área de seção transversal e com um diâmetro interno igual à metade de seu próprio diâmetro externo.

3.6 Um torque $T = 3$ kN · m é aplicado ao cilindro sólido de bronze mostrado. Determine (*a*) a máxima tensão de cisalhamento, (*b*) a tensão de cisalhamento no ponto *D* que se encontra sobre um círculo de raio 15 mm situado na extremidade do cilindro e (*c*) a porcentagem do torque total absorvido pela porção do eixo compreendida pelo raio de 15 mm.

3.7 O sistema da figura é constituído por um eixo de seção transversal cheia *AB* e com uma tensão de cisalhamento admissível de 82,7 MPa, e por um tubo *CD* feito de latão com uma tensão de cisalhamento admissível de 48,3 MPa. Determine (*a*) o maior torque **T** que pode ser aplicado em *A*, sem que a tensão de cisalhamento admissível do material do tubo *CD* seja excedida e (*b*) o valor correspondente necessário para o diâmetro *d* do eixo *AB*.

3.8 O sistema da figura é constituído por um eixo de aço com seção transversal cheia *AB*, com diâmetro $d = 38$ mm e tensão de cisalhamento admissível de 82 MPa, e por um tubo *CD* feito de latão com uma tensão de cisalhamento admissível de 48 MPa. Determine o maior torque **T** que pode ser aplicado em *A*.

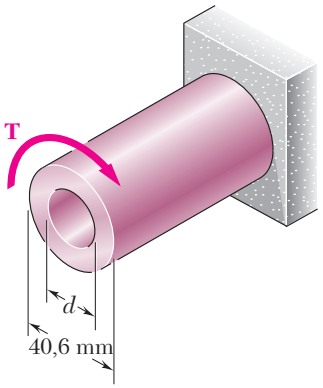


Fig. P3.3 e P3.4

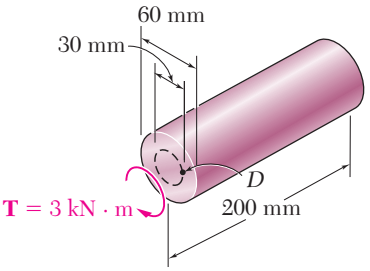


Fig. P3.6

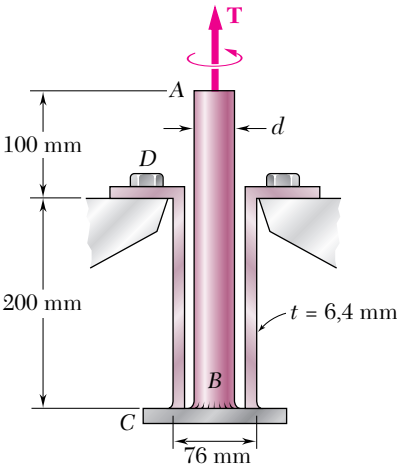


Fig. *P3.7* e P3.8

3.9 Os torques mostrados são aplicados nas polias *A* e *B*. Sabendo que os eixos de aço tem seção cheia, determine a máxima tensão de cisalhamento (*a*) no eixo *AB* e (*b*) no eixo *BC*.

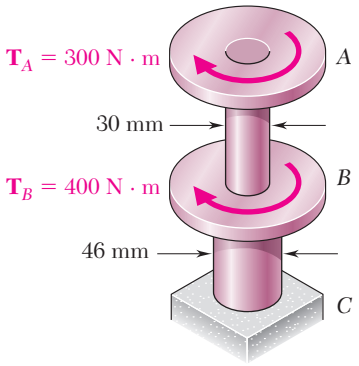


Fig. P3.9

3.10 Para reduzir a massa total do conjunto do Problema 3.9, está sendo considerado um novo projeto no qual o diâmetro do eixo *BC* será menor. Determine o menor diâmetro do eixo *BC* para o qual o valor máximo da tensão de cisalhamento no conjunto não será aumentado.

3.11 Sob condições normais de operação, o motor elétrico aplica um torque de 2,8 kN · m no eixo *AB*. Sabendo que cada um dos eixos tem seção transversal cheia, determine a tensão de cisalhamento máxima no (*a*) eixo *AB*, (*b*) eixo *BC* e (*c*) eixo *CD*.

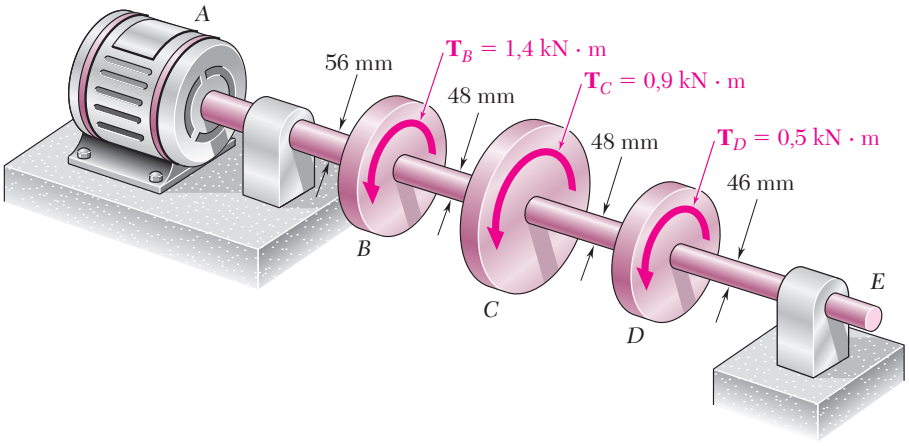


Fig. P3.11

3.12 Para reduzir a massa total do conjunto do Problema 3.11, está sendo considerado um novo projeto no qual o diâmetro do eixo *BC* será menor. Determine o menor diâmetro do eixo *BC* para o qual o valor máximo da tensão de cisalhamento no conjunto não será aumentado.

3.13 Os torques mostrados são aplicados nas polias *A*, *B* e *C*. Sabendo que ambos os eixos são cheios, determine a tensão de cisalhamento máxima no (*a*) eixo *AB* e (*b*) eixo *BC*.

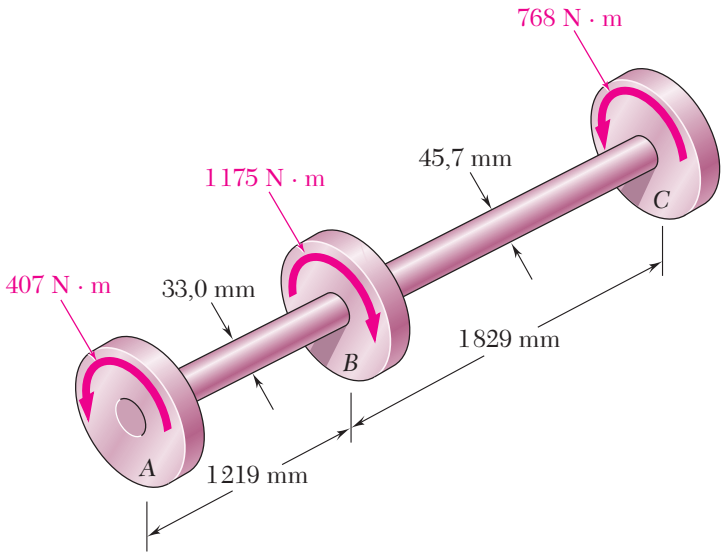


Fig. P3.13 e P3.14

3.14 Os eixos do conjunto de polias mostrado na figura deve ser redimensionado. Sabendo que a tensão de cisalhamento admissível em cada eixo é de 58,6 MPa, determine o menor diâmetro admissível para (*a*) o eixo *AB*, (*b*) o eixo *BC*.

3.15 A tensão de cisalhamento admissível é de 103 MPa na barra de aço *AB* e 55 MPa na barra de latão *BC*. Sabendo que um torque de intensidade $T = 1130$ N · m é aplicado em *A* e desprezando o efeito das concentrações de tensão, determine o diâmetro necessário de (*a*) barra *AB* e (*b*) barra *BC*.

3.16 A tensão de cisalhamento admissível é de 103 MPa na barra de aço *AB* de 38,1 mm de diâmetro e 55 MPa na barra *BC* de 45,7 mm de diâmetro. Desprezando o efeito das concentrações de tensão, determine o maior torque que pode ser aplicado em *A*.

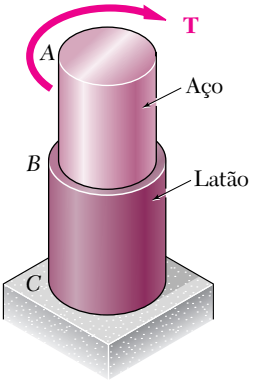


Fig. P3.15 e P3.16

3.17 A seção transversal cheia mostrada na figura é feita de latão para o qual a tensão de cisalhamento admissível é de 55 MPa. Desprezando o efeito das concentrações de tensão, determine os menores diâmetros d_{AB} e d_{BC} para os quais a tensão de cisalhamento admissível não é excedida.

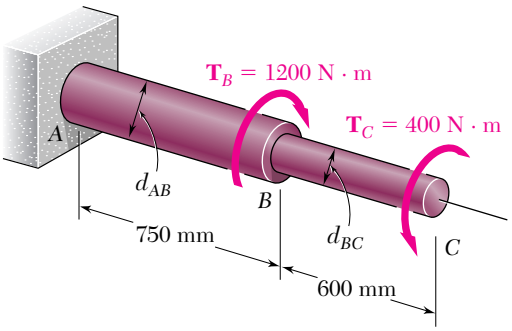


Fig. *P3.17*

3.18 Resolva o Problema 3.17, considerando que a direção de $\mathbf{T}_C$ seja invertida.

3.19 A tensão admissível é de 50 MPa na barra de latão *AB* e de 25 MPa na barra de alumínio *BC*. Sabendo que um torque de intensidade $\boldsymbol{T} = 1\,250$ N · m é aplicado em *A*, determine o diâmetro necessário (*a*) da barra *AB* e (*b*) da barra *BC*.

3.20 A barra *BC* de seção *cheia* tem diâmetro de 30 mm e é feita de um alumínio para o qual a tensão de cisalhamento admissível é de 25 MPa. A barra *AB* é *vazada* e tem um diâmetro externo de 25 mm; ela é feita de um latão para o qual a tensão de cisalhamento admissível é de 50 MPa. Determine (*a*) o maior diâmetro interno da barra *AB* para o qual o coeficiente de segurança seja o mesmo para cada barra e (*b*) o maior torque que pode ser aplicado em *A*.

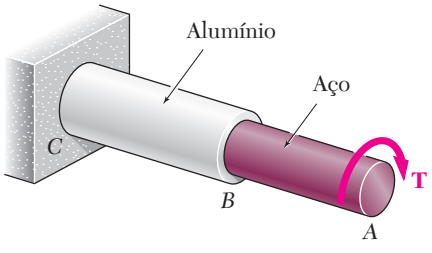


Fig. P3.19 e P3.20

3.21 Um torque de intensidade $T = 904$ kN · mm é aplicado em D, como mostra a figura. Sabendo que a tensão de cisalhamento admissível é de 51,7 MPa em cada eixo, determine o diâmetro necessário do (*a*) eixo *AB* e (*b*) eixo *CD*.

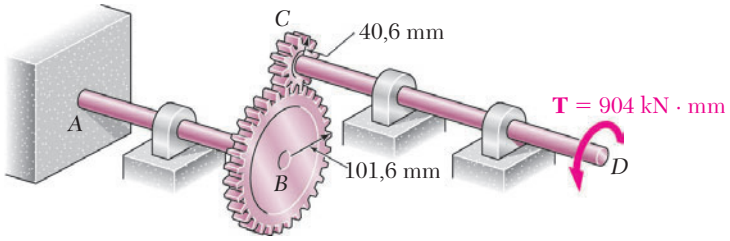


Fig. P3.21 e *P3.22*

3.22 Um torque de $T = 904$ kN · mm é aplicado em D, como mostra a figura. Sabendo que o diâmetro do eixo *AB* é de 57,1 mm e que o diâmetro do eixo *CD* é de 45 mm, determine a tensão de cisalhamento máxima no (*a*) eixo *AB* e (*b*) eixo *CD*.

3.23 Dois eixos de aço com seção transversal cheia são conectados por engrenagens conforme mostra a figura. É aplicado um torque de intensidade $T = 900$ N · m no eixo *AB*. Sabendo que a tensão de cisalhamento admissível é de 50 MPa e considerando somente tensões causadas por torção, determine o diâmetro necessário para (*a*) o eixo *AB* e (*b*) o eixo *CD*.

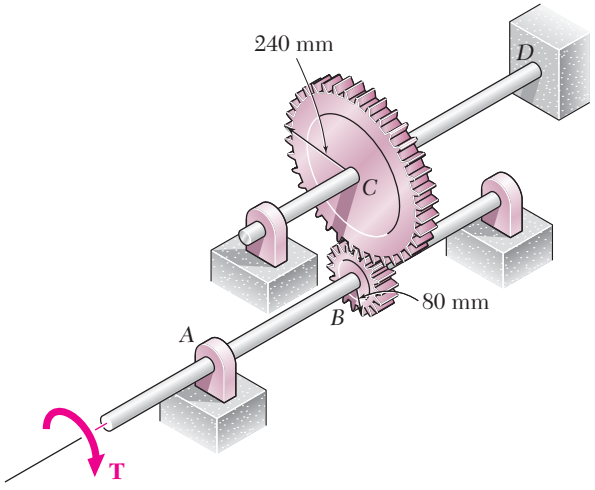


Fig. P3.23 e P3.24

3.24 O eixo *CD* é feito de uma barra de 66 mm de diâmetro e está conectado ao eixo *AB* de 48 mm de diâmetro, como mostra a figura. Considerando somente tensões em decorrência da torção e sabendo que a tensão de cisalhamento admissível é de 60 MPa para cada eixo, determine o maior torque **T** que pode ser aplicado.

3.25 Os dois eixos de seção transversal cheia estão conectados por engrenagens como você pode ver na figura e são feitos de um aço para o qual a tensão de cisalhamento admissível é de 48,3 MPa. Sabendo que os diâmetros dos dois eixos são, respectivamente, $d_{BC} = 40{,}6$ mm e $d_{EF} = 31{,}8$ mm, determine o maior torque $\mathbf{T}_C$ que pode ser aplicado em C.

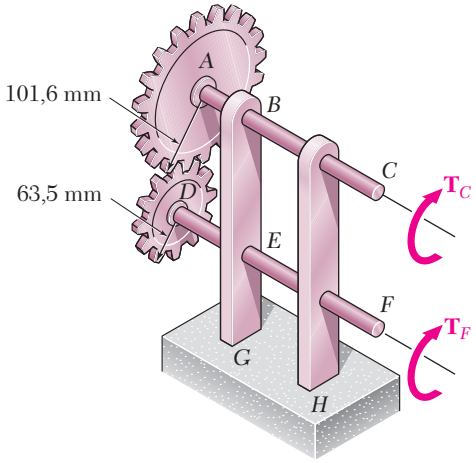


Fig. *P3.25* e P3.26

3.26 Os dois eixos de seção transversal cheia estão conectados por engrenagens, como mostra a figura, e são feitos de um aço para o qual a tensão de cisalhamento admissível é de 58,6 MPa. Sabendo que um torque de intensidade $T_C = 565$ kN · mm é aplicado em C e que o conjunto está em equilíbrio, determine o diâmetro necessário do (*a*) eixo BC e do (*b*) eixo EF.

3.27 Um torque de intensidade $T = 120$ kN · m é aplicado ao eixo AB do trem de engrenagem mostrado. Sabendo que a tensão de cisalhamento é de 75 MPa em cada um dos três eixos sólidos, determine o diâmetro necessário para (*a*) o eixo AB, (*b*) o eixo CD e (*c*) o eixo EF.

3.28 Um torque de intensidade $T = 100$ kN · m é aplicado ao eixo AB do trem de engrenagem mostrado. Sabendo que os diâmetros dos três eixos sólidos são respectivamente, $d_{AB} = 21$ mm, $d_{CD} = 30$ mm, e $d_{EF} = 40$ mm, determine a máxima tensão de cisalhamento no (*a*) eixo AB, (*b*) eixo CD e (*c*) eixo EF.

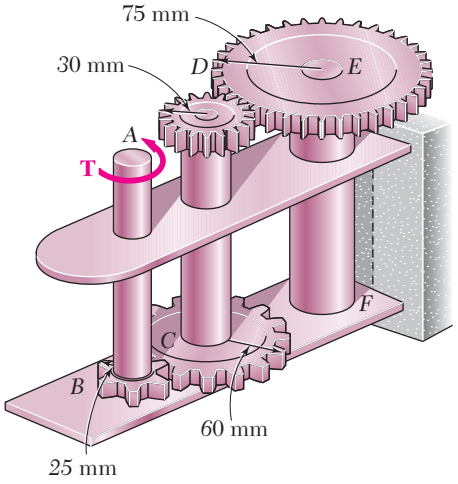


Fig. P3.27 e P3.28

3.29 Embora a distribuição exata das tensões de cisalhamento em um eixo cilíndrico vazado seja como mostra a Fig. P3.29*a*, pode-se obter um valor aproximado para $\tau_{máx}$ considerando que as tensões são uniformemente distribuídas sobre a área A da seção transversal, como mostra a Fig. P3.29*b*, e supondo ainda que todas as forças de cisalhamento elementares agem a determinada distância do ponto O dada pelo raio médio da seção transversal $\frac{1}{2}(c_1 + c_2)$. Esse valor é uma aproximação de $\tau_0 = T/Ar_m$, em que T é o torque aplicado. Determine a relação $\tau_{máx}/\tau_0$, em que $\tau_{máx}$ é a tensão de cisalhamento exata e τ_0 é a tensão aproximada para valores da relação c_1/c_2, respectivamente iguais a 1,00; 0,95; 0,75; 0,50 e 0.

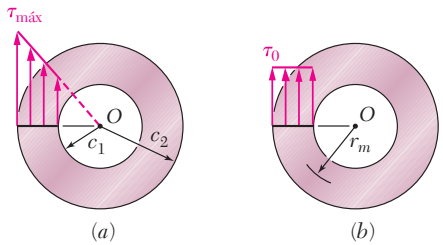


Fig. P3.29

3.30 (*a*) Para uma dada tensão de cisalhamento admissível, determine a relação T/w do torque T máximo admissível e o peso por unidade de comprimento w para o eixo vazado mostrado na figura. (*b*) Chamando de $(T/w)_0$ o valor dessa relação para uma seção transversal cheia com o mesmo raio c_2, expresse a relação T/w para o eixo vazado em termos de $(T/w)_0$ e c_1/c_2.

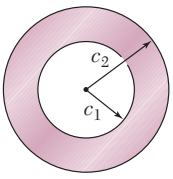


Fig. P3.30

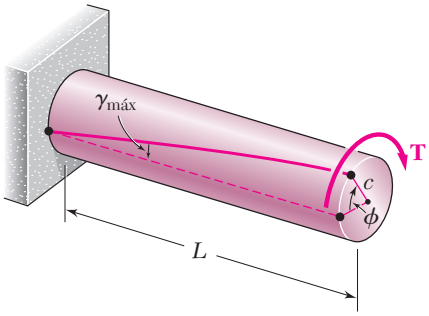


Fig. 3.22

3.5. Ângulo de torção no regime elástico

Nesta seção, será determinada uma relação entre o ângulo de torção ϕ de um eixo circular e o momento torçor **T** aplicado no eixo. Vamos considerar que o eixo permanece elástico em qualquer parte. Considerando primeiro o caso de um eixo de comprimento L e de seção transversal uniforme de raio c submetido a um momento torçor **T** em sua extremidade livre (Fig. 3.22), lembramos da Seção 3.3 que o ângulo de torção ϕ e a deformação de cisalhamento máxima $\gamma_{máx}$ estão relacionados da seguinte forma:

$$\gamma_{máx} = \frac{c\phi}{L} \tag{3.3}$$

Contudo, no regime elástico, a tensão de escoamento não é excedida em nenhum ponto do eixo, assim aplica-se a lei de Hooke da seguinte forma: $\gamma_{máx} = \tau_{máx}/G$. Dessa relação e da Equação (3.9), obtém-se

$$\gamma_{máx} = \frac{\tau_{máx}}{G} = \frac{Tc}{JG} \tag{3.15}$$

Igualando os dois membros direitos das Equações (3.3) e (3.15), e resolvendo para ϕ, escrevemos

$$\phi = \frac{TL}{JG} \tag{3.16}$$

em que ϕ é expresso em radianos. A relação obtida mostra que, dentro do regime elástico, *o ângulo de torção ϕ é proporcional ao momento torçor T aplicado no eixo*. Isso está de acordo com a evidência experimental citada no início da Seção 3.3.

A Equação (3.16) nos proporciona um método conveniente para determinar o módulo de elasticidade transversal de um material. Um corpo de prova do material a ser analisado, na forma de uma barra cilíndrica de diâmetro e comprimento conhecidos, é colocado em uma *máquina para ensaios de torção* (Fig. 3.23). Torques T de intensidades crescentes são aplicados ao corpo de prova e os valores correspondentes do ângulo de torção ϕ em determinado comprimento L do corpo de prova são registrados. Enquanto a tensão de escoamento do material não é excedida, os pontos obtidos em um gráfico de T em função de ϕ estarão em uma linha reta. A inclinação dessa linha representa a quantidade JG/L, por meio da qual pode ser calculado o módulo de elasticidade transversal G.

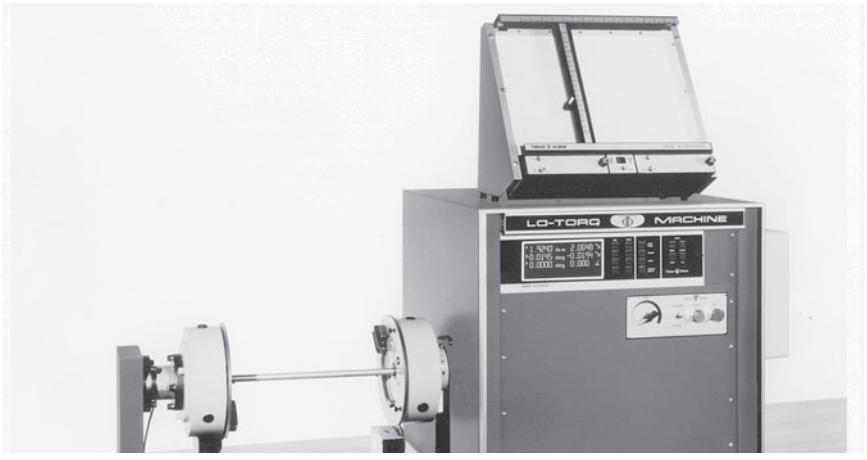


Fig. 3.23 Máquina de teste de torção.

EXEMPLO 3.2

Qual o torque que deverá ser aplicado à extremidade do eixo do Exemplo 3.1 para produzir um ângulo de torção de 2°? Use o valor $G = 77$ GPa para o módulo de elasticidade transversal do aço.

Resolvendo a Equação (3.16) para T, escrevemos

$$T = \frac{JG}{L}\phi$$

Substituindo os valores dados

$$G = 77 \times 10^9 \text{ Pa} \qquad L = 1{,}5 \text{ m}$$

$$\phi = 2°\left(\frac{2\pi \text{ rad}}{360°}\right) = 34{,}9 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

e lembrando do Exemplo 3.1 que, para a seção transversal, dada,

$$J = 1{,}021 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

temos

$$T = \frac{JG}{L}\phi = \frac{(1{,}021 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(77 \times 10^9 \text{ Pa})}{1{,}5 \text{ m}}(34{,}9 \times 10^{-3} \text{ rad})$$

$$T = 1{,}829 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} = 1{,}829 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

EXEMPLO 3.3

Qual o ângulo de torção que criará uma tensão de cisalhamento de 70 MPa na superfície interna do eixo vazado de aço dos Exemplos 3.1 e 3.2?

O método de abordagem para resolver esse problema que vem à mente, em primeiro lugar, é usar a Equação (3.10) para encontrar o torque T correspondente ao valor fornecido de τ, e a Equação (3.16) para determinar o ângulo de torção ϕ correspondente ao valor de T que acabamos de encontrar.

No entanto, pode ser utilizada uma solução mais direta. Pela lei de Hooke, primeiro calculamos a deformação de cisalhamento na superfície interna do eixo:

$$\gamma_{\text{mín}} = \frac{\tau_{\text{mín}}}{G} = \frac{70 \times 10^6 \text{ Pa}}{77 \times 10^9 \text{ Pa}} = 909 \times 10^{-6}$$

Lembrando a Equação (3.2), que foi obtida expressando o comprimento do arco AA' na Fig. 3.14*c* em termos de γ e ϕ, temos

$$\phi = \frac{L\gamma_{\text{mín}}}{c_1} = \frac{1500 \text{ mm}}{20 \text{ mm}}(909 \times 10^{-6}) = 68{,}2 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

Para obtermos o ângulo de torção em graus, escrevemos

$$\phi = (68{,}2 \times 10^{-3} \text{ rad})\left(\frac{360°}{2\pi \text{ rad}}\right) = 3{,}91°$$

A Equação (3.16) para o ângulo de torção só pode ser utilizada se o eixo for homogêneo (G constante), se a seção transversal for uniforme, e se o carregamento for aplicado somente nas extremidades. Se o eixo estiver submetido a torques em outras localizações que não as suas extremidades, ou se ele consistir em várias partes com diferentes seções transversais e possivelmente em diferentes materiais, devemos dividi-lo em partes componentes que satisfaçam individualmente às condições necessárias para a aplicação da Equação (3.16). No caso do eixo AB mostrado na Fig. 3.24, por exemplo, devem ser consideradas quatro partes diferentes: AC, CD, DE e EB. O ângulo de torção total do eixo, isto é, o ângulo pelo qual a extremidade A gira com relação à extremidade B, é obtido somando-se *algebricamente* os ângulos de torção de cada parte componente. Chamando, respectivamente, de T_i, L_i, J_i e G_i o momento torçor interno, o comprimento, o momento polar de inércia da secção transversal e o módulo de elasticidade transversal correspondente à parte i, o ângulo de torção total do eixo é expresso como

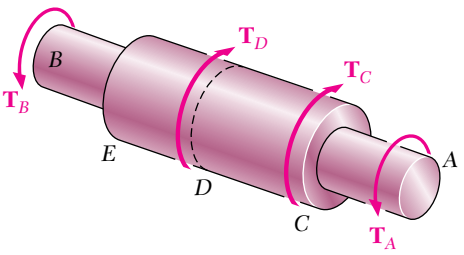


Fig. 3.24

$$\phi = \sum_i \frac{T_i L_i}{J_i G_i} \tag{3.17}$$

O momento torçor interno T_i em qualquer parte do eixo é obtido cortando-se uma seção do eixo através daquela parte e desenhando o diagrama de corpo livre da parte do eixo localizada em um dos lados da seção. Esse procedimen-

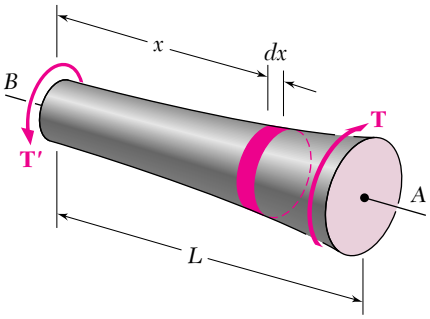


Fig. 3.25

to, que já foi explicado na Seção 3.4 e ilustrado na Fig. 3.17, é aplicado no Problema Resolvido 3.3.

No caso de um eixo com uma seção circular variável, como mostra a Fig. 3.25, a Equação (3.16) pode ser aplicada a um disco de espessura dx. O ângulo segundo o qual uma face do disco gira em relação a outra é, portanto,

$$d\phi = \frac{T\,dx}{JG}$$

em que J é uma função de x que pode ser determinada. Integrando em x de 0 a L, obtemos o ângulo total de torção do eixo:

$$\phi = \int_0^L \frac{T\,dx}{JG} \tag{3.18}$$

O eixo mostrado na Fig. 3.22, utilizado para deduzir a Equação (3.16) e o eixo da Fig. 3.16, discutido nos Exemplos 3.2 e 3.3, tinham ambos uma das extremidades engastada a um suporte fixo. Em cada caso, portanto, o ângulo de torção ϕ do eixo era igual ao ângulo de rotação de sua extremidade livre. No entanto, quando ambas as extremidades de um eixo giram, o ângulo de torção do eixo é igual ao ângulo pelo qual uma extremidade do eixo gira *em relação a outra*. Considere, por exemplo, o conjunto mostrado na Fig. 3.26*a*, que consiste em dois eixos elásticos AD e BE, cada um deles com comprimento L, raio c e módulo de elasticidade transversal G, que estão ligados a engrenagens acopladas em C. Se for aplicado um torque **T** em E (Fig. 3.26*b*), ambos os eixos sofrerão torção. Como a extremidade D do eixo AD está fixa, o ângulo de torção de AD é medido pelo ângulo de rotação ϕ_A da extremidade A. No entanto, como ambas as extremidades do eixo BE giram, o ângulo de torção de BE é igual à diferença entre os ângulos de rotação ϕ_B e ϕ_E, isto é, o ângulo de torção é igual ao ângulo segundo o qual a extremidade E gira em relação à extremidade B. Designando esse ângulo relativo de rotação por $\phi_{E/B}$, escrevemos

$$\phi_{E/B} = \phi_E - \phi_B = \frac{TL}{JG}$$

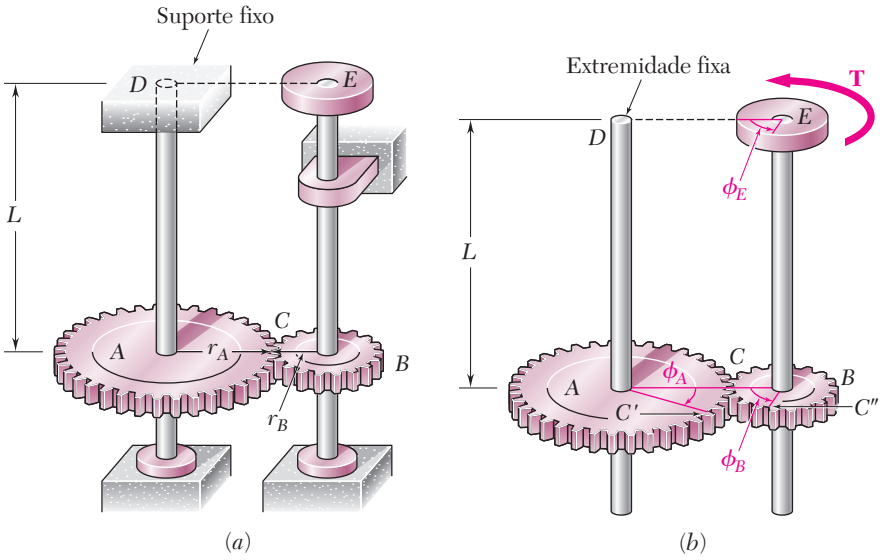


Fig. 3.26

EXEMPLO 3.4

Para o conjunto da Fig. 3.26, sabendo que $r_A = 2r_B$, determine o ângulo de rotação da extremidade E do eixo BE quando lhe é aplicado o torque **T** em E.

Primeiro determinamos o torque $\mathbf{T}_{AD}$ aplicado ao eixo AD. Observando que forças **F** e **F′** iguais e opostas são aplicadas nas duas engrenagens em C (Fig. 3.27), e lembrando que $r_A = 2r_B$, concluímos que o torque aplicado no eixo AD é duas vezes maior que o torque aplicado no eixo BE; assim, $T_{AD} = 2T$.

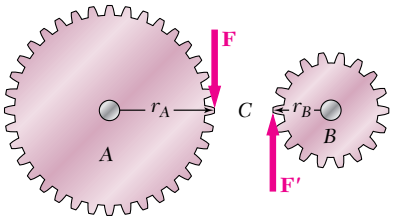


Fig. 3.27

Como a extremidade D do eixo AD está fixa, o ângulo de rotação ϕ_A da engrenagem A é igual ao ângulo de torção do eixo, e é obtido escrevendo-se

$$\phi_A = \frac{T_{AD}L}{JG} = \frac{2TL}{JG}$$

Observando que os arcos CC' e CC'' na Fig. 3.26*b* devem ser iguais, escrevemos que $r_A\phi_A = r_B\phi_B$ e obtemos

$$\phi_B = (r_A/r_B)\phi_A = 2\phi_A$$

Temos, portanto,

$$\phi_B = 2\phi_A = \frac{4TL}{JG}$$

Considerando agora o eixo BE, lembramos que o ângulo de torção desse eixo é igual a $\phi_{E/B}$ e corresponde ao giro da extremidade E em relação à extremidade B. Temos

$$\phi_{E/B} = \frac{T_{BE}L}{JG} = \frac{TL}{JG}$$

O ângulo de rotação da extremidade E é obtido escrevendo-se

$$\phi_E = \phi_B + \phi_{E/B}$$

$$= \frac{4TL}{JG} + \frac{TL}{JG} = \frac{5TL}{JG}$$

3.6. Eixos estaticamente indeterminados

Vimos na Seção 3.4 que, para determinar as tensões em um eixo, era necessário primeiro calcular os momentos torçores internos nas várias seções do eixo. Esses momentos eram obtidos por meio da estática, desenhando o diagrama de corpo livre da parte do eixo localizada em um lado de determinada seção e escrevendo que a soma dos momentos exercidos naquela parte era zero.

No entanto, há situações nas quais os momentos de torção internos não podem ser determinados somente pela estática. Na verdade, nesses casos os próprios momentos externos, isto é, os torques aplicados no eixo pelos apoios e conexões não podem ser determinados pelo diagrama de corpo livre do eixo inteiro. As equações de equilíbrio devem ser complementadas por relações que envolvem as deformações do eixo e obtidas considerando-se a geometria do problema. Em virtude da estática não ser suficiente para determinar os momentos externos e internos, dizemos que os eixos são *estaticamente indeterminados*. O exemplo apresentado a seguir e o Problema Resolvido 3.5 mostrarão como analisar eixos estaticamente indeterminados.

EXEMPLO 3.5

Um eixo circular *AB* consiste em um cilindro de aço de 240 mm de comprimento e 22 mm de diâmetro, no qual foi feito um furo de 120 mm de profundidade e 16 mm de diâmetro na extremidade *B*. O eixo está engastado a suportes fixos em ambas as extremidades, e é aplicado um torque de 120 N · m na sua seção média (Fig. 3.28). Determine o torque aplicado no eixo por cada um dos suportes.

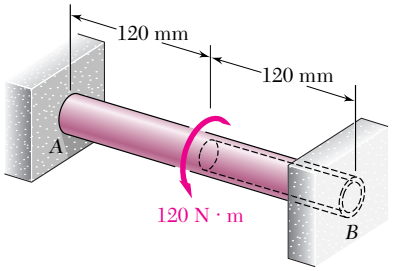


Fig. 3.28

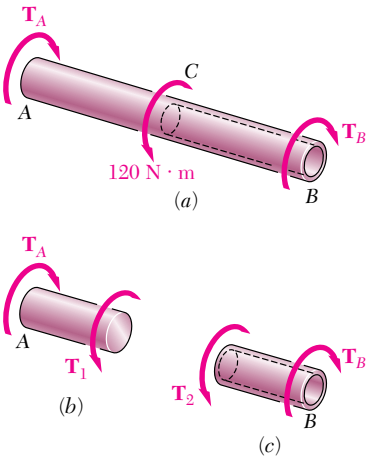


Fig. 3.29

Desenhando o diagrama de corpo livre do eixo e chamando de $\mathbf{T}_A$ e $\mathbf{T}_B$ os torques aplicados pelos suportes (Fig. 3.29*a*), obtemos a equação de equilíbrio

$$T_A + T_B = 120 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Como essa equação não é suficiente para determinar os dois torques desconhecidos $\mathbf{T}_A$ e $\mathbf{T}_B$, o eixo é estaticamente indeterminado.

No entanto, $\mathbf{T}_A$ e $\mathbf{T}_B$ podem ser determinados se observarmos que o ângulo de torção total do eixo *AB* deve ser zero, pois ambas as extremidades estão rigidamente fixadas. Chamando de ϕ_1 e ϕ_2, respectivamente, os ângulos de torção das partes *AC* e *CB*, escrevemos

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = 0$$

Com base no diagrama de corpo livre de uma pequena parte do eixo incluindo a extremidade *A* (Fig. 3.29*b*), notamos que o momento torçor interno T_1 em *AC* é igual a T_A. Por meio do diagrama de corpo livre de uma pequena parte do eixo incluindo a extremidade *B* (Fig. 3.29*c*), notamos que o momento torçor interno T_2 em *CB* é igual a T_B. Usando a Equação (3.16) e observando que as partes *AC* e *CB* do eixo giram em sentidos opostos, escrevemos

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = \frac{T_A L_1}{J_1 G} - \frac{T_B L_2}{J_2 G} = 0$$

Resolvendo para o torque T_B, temos

$$T_B = \frac{L_1 J_2}{L_2 J_1} T_A$$

Substituindo os valores numéricos

$$L_1 = L_2 = 120 \text{ mm}$$
$$J_1 = \tfrac{1}{2}\pi(0{,}011 \text{ m})^4 = 2{,}30 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$
$$J_2 = \tfrac{1}{2}\pi[(0{,}011 \text{ m})^4 - (0{,}008 \text{ m})^4] = 1{,}66 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

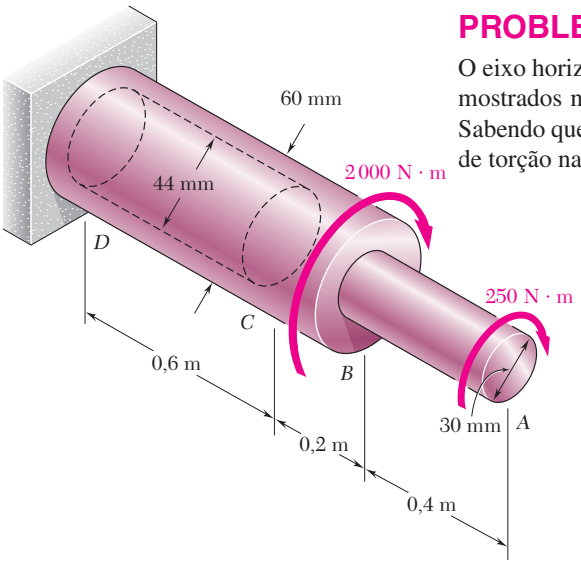
obtemos

$$T_B = 0{,}720\, T_A$$

Substituindo essa expressão na equação de equilíbrio original, escrevemos

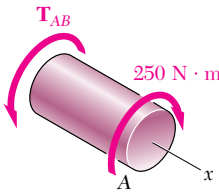
$$1{,}720\, T_A = 120 \text{ N} \cdot \text{m}$$

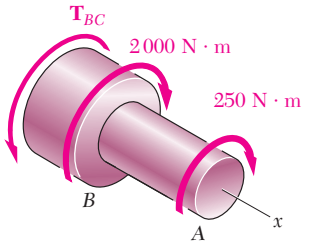
$$T_A = 69{,}77 \text{ N} \cdot \text{m} \qquad T_B = 50{,}23 \text{ N} \cdot \text{m}$$

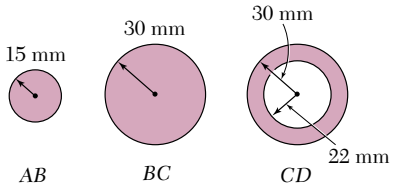


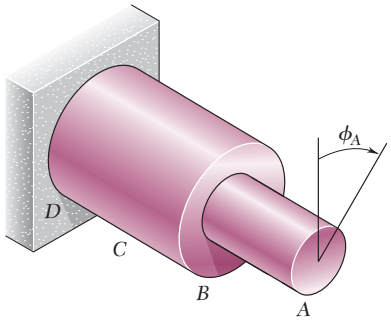
PROBLEMA RESOLVIDO 3.3

O eixo horizontal *AD* está engastado a uma base rígida em *D* e submetido aos torques mostrados na figura. Foi feito um furo de 44 mm de diâmetro na parte *CD* do eixo. Sabendo que o eixo inteiro é feito de aço para o qual $G = 77$ GPa, determine o ângulo de torção na extremidade *A*.









SOLUÇÃO

Como o eixo consiste em três partes *AB*, *BC* e *CD*, cada uma delas com seção transversal constante e momento torçor interno constante, pode ser utilizada a Equação (3.17).

Estática. Cortando o eixo em uma seção transversal entre *A* e *B* e utilizando o diagrama de corpo livre mostrado na figura, encontramos

$$\Sigma M_x = 0: \quad (250 \text{ N} \cdot \text{m}) - T_{AB} = 0 \qquad T_{AB} = 250 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Cortando agora o eixo em uma seção entre *B* e *C*, temos

$$\Sigma M_x = 0: \ (250 \text{ N} \cdot \text{m}) + (2\,000 \text{ N} \cdot \text{m}) - T_{BC} = 0 \qquad T_{BC} = 2\,250 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Como não é aplicado nenhum torque em *C*,

$$T_{CD} = T_{BC} = 2\,250 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Momentos polares de inércia

$$J_{AB} = \frac{\pi}{2} c^4 = \frac{\pi}{2} (0{,}015 \text{ m})^4 = 0{,}0795 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$J_{BC} = \frac{\pi}{2} c^4 = \frac{\pi}{2} (0{,}030 \text{ m})^4 = 1{,}272 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$J_{CD} = \frac{\pi}{2} (c_2^4 - c_1^4) = \frac{\pi}{2} [(0{,}030 \text{ m})^4 - (0{,}022 \text{ m})^4] = 0{,}904 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

Ângulo de torção. Utilizando a Equação (3.17) e lembrando que $G = 77$ GPa para o eixo inteiro, temos

$$\phi_A = \sum_i \frac{T_i L_i}{J_i G} = \frac{1}{G}\left(\frac{T_{AB}L_{AB}}{J_{AB}} + \frac{T_{BC}L_{BC}}{J_{BC}} + \frac{T_{CD}L_{CD}}{J_{CD}}\right)$$

$$\phi_A = \frac{1}{77 \text{ GPa}}\left[\frac{(250 \text{ N} \cdot \text{m})(0{,}4 \text{ m})}{0{,}0795 \times 10^{-6} \text{ m}^4} + \frac{(2\,250)(0{,}2)}{1{,}272 \times 10^{-6}} + \frac{(2\,250)(0{,}6)}{0{,}904 \times 10^{-6}}\right]$$

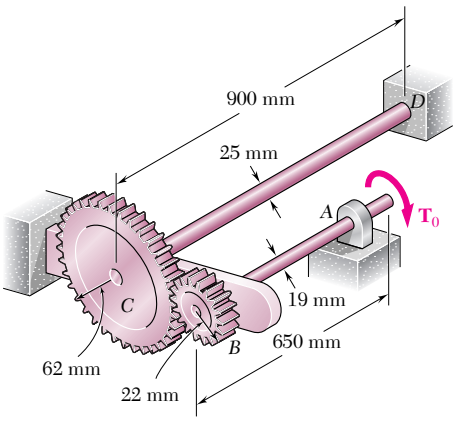
$$= 0{,}01634 + 0{,}00459 + 0{,}01939 = 0{,}0403 \text{ rad}$$

$$\phi_A = (0{,}0403 \text{ rad}) \frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}}$$

$$\phi_A = 2{,}31^\circ \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESOLVIDO 3.4

Dois eixos cheios de aço estão acoplados pelas engrenagens mostradas na figura. Sabendo que para cada eixo $G = 77{,}2$ GPa, e que a tensão de cisalhamento admissível é de 55 MPa, determine (*a*) o maior torque $\mathbf{T}_0$ que pode ser aplicado à extremidade *A* do eixo *AB* e (*b*) o ângulo correspondente pelo qual a extremidade *A* do eixo *AB* gira.



SOLUÇÃO

Estática. Chamando de F a intensidade da força tangencial entre os dentes da engrenagem, temos

$$\begin{aligned} &\textit{Engrenagem B.} \quad \Sigma M_B = 0: \quad F(22\text{ mm}) - T_0 = 0 \\ &\textit{Engrenagem C.} \quad \Sigma M_C = 0: \quad F(62\text{ mm}) - T_{CD} = 0 \end{aligned} \qquad T_{CD} = 2{,}82T_0 \qquad (1)$$

Cinemática. Notando que os movimentos periféricos das engrenagens são iguais, escrevemos

$$r_B\phi_B = r_C\phi_C \qquad \phi_B = \phi_C\frac{r_C}{r_B} = \phi_C\frac{62\text{ mm}}{22\text{ mm}} = 2{,}82\phi_C \qquad (2)$$

a. Torque T_0

***Eixo* AB.** Com $T_{AB} = T_0$ e $c = 9{,}5$ mm, juntamente com uma tensão de cisalhamento máxima admissível de 55 MPa, escrevemos

$$\tau = \frac{T_{AB}c}{J} \qquad 55\text{ MPa} = \frac{T_0(9{,}5\text{ mm})}{\frac{1}{2}\pi(9{,}5\text{ mm})^4} \qquad T_0 = 74{,}07\text{ N}\cdot\text{m} \quad \triangleleft$$

***Eixo* CD.** De (1) temos $T_{CD} = 2{,}82\ T_0$. Com $c = 12{,}5$ mm e $\tau_{\text{adm}} = 55$ MPa, escrevemos

$$\tau = \frac{T_{CD}c}{J} \qquad 55\text{ MPa} = \frac{2{,}82T_0(12{,}5\text{ mm})}{\frac{1}{2}\pi(12{,}5\text{ mm})^4} \qquad T_0 = 59{,}84\text{ N}\cdot\text{m} \quad \triangleleft$$

Torque máximo permitido. Escolhemos o menor valor obtido para T_0

$$T_0 = 59{,}84\text{ N}\cdot\text{m} \quad \blacktriangleleft$$

b. Ângulo de rotação da extremidade A.

Primeiro calculamos o ângulo de torção para cada eixo.

***Eixo* AB.** Para $T_{AB} = T_0 = 59{,}84$ N · m, temos

$$\phi_{A/B} = \frac{T_{AB}L}{JG} = \frac{(59{,}84\text{ N}\cdot\text{m})(0{,}650\text{ m})}{\frac{1}{2}\pi(0{,}0095\text{ m})^4(77{,}2\times10^9\text{ N/m}^2)} = 0{,}0394\text{ rad} = 2{,}26°$$

***Eixo* CD.** $T_{CD} = 2{,}82\ T_0 = 2{,}82(59{,}84\text{ N}\cdot\text{m})$

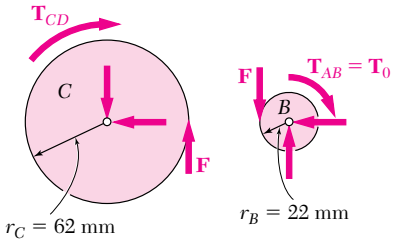
$$\phi_{C/D} = \frac{T_{CD}L}{JG} = \frac{2{,}82(59{,}84\text{ N}\cdot\text{m})(0{,}900\text{ m})}{\frac{1}{2}\pi(0{,}012\text{ m})^4(77{,}2\times10^9\text{ N/m}^2)} = 0{,}0604\text{ rad} = 3{,}46°$$

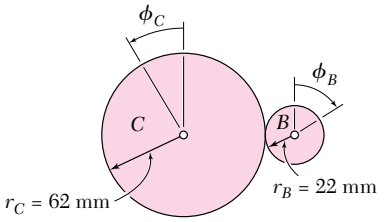
Como a extremidade *D* do eixo *CD* está fixa, temos $\phi_C = \phi_{C/D} = 3{,}46°$. Usando (2), calculamos que o ângulo de rotação da engrenagem *B* deve ser

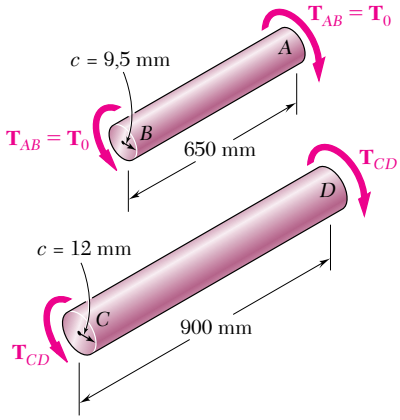
$$\phi_B = 2{,}82\phi_C = 2{,}82(3{,}46°) = 9{,}76°$$

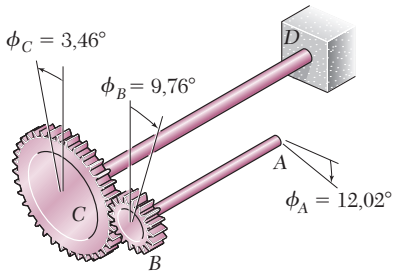
Para a extremidade *A* do eixo *AB*, temos

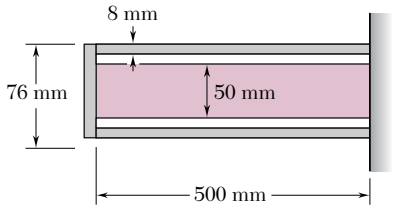
$$\phi_A = \phi_B + \phi_{A/B} = 9{,}76° + 2{,}26° \qquad \phi_A = 12{,}02° \quad \blacktriangleleft$$





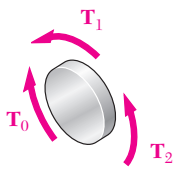






PROBLEMA RESOLVIDO 3.5

Um eixo de aço e um tubo de alumínio são engastados a um suporte rígido e conectados a um disco também rígido, conforme está indicado na figura. Sabendo que as tensões iniciais são iguais a zero, determine o torque máximo $\mathbf{T}_0$ que pode ser aplicado ao disco se as tensões admissíveis são de 120 MPa no eixo de aço e 70 MPa no tubo de alumínio. Use $G = 77$ GPa para o aço e $G = 27$ GPa para o alumínio.



SOLUÇÃO

Estática. ***Diagrama de corpo livre do disco.*** Chamando de $\mathbf{T}_1$ o torque exercido pelo tubo no disco, e de $\mathbf{T}_2$ o torque exercido pelo eixo no disco, encontramos

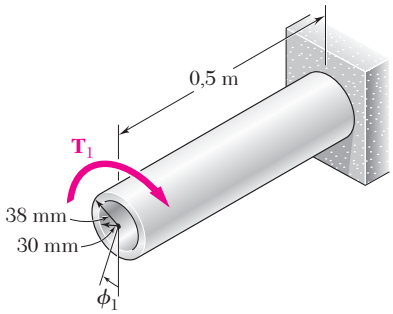
$$T_0 = T_1 + T_2 \tag{1}$$

Deformações. Como o tubo e o eixo estão conectados ao disco rígido, temos

$$\phi_1 = \phi_2: \qquad \frac{T_1 L_1}{J_1 G_1} = \frac{T_2 L_2}{J_2 G_2}$$

$$\frac{T_1(0{,}5\text{ m})}{(2{,}003 \times 10^{-6}\text{ m}^4)(27\text{ GPa})} = \frac{T_2(0{,}5\text{ m})}{(0{,}614 \times 10^{-6}\text{ m}^4)(77\text{ GPa})}$$

$$T_2 = 0{,}874 T_1 \tag{2}$$



Alumínio
$G_1 = 27$ GPa
$J_1 = \frac{\pi}{2}[(38\text{ mm})^4 - (30\text{ mm})^4]$
$= 2{,}003 \times 10^{-6}\text{m}^4$

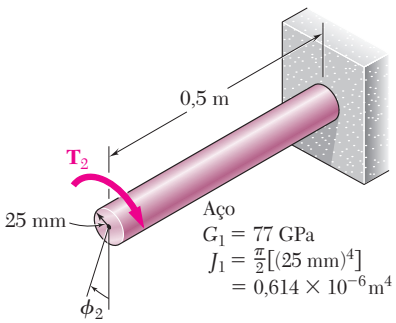
Tensões de cisalhamento. Vamos, inicialmente, *considerar* que a condição $\tau_{\text{alum}} \leq 70$ MPa é crítica. Para o tubo de alumínio, temos

$$T_1 = \frac{\tau_{\text{alum}} J_1}{c_1} = \frac{(70\text{ MPa})(2{,}003 \times 10^{-6}\text{ m}^4)}{0{,}038\text{ m}} = 3\,690\text{ N} \cdot \text{m}$$

Utilizando a Equação (2), calculamos o valor correspondente de T_2 e depois encontramos a tensão de cisalhamento máxima no eixo de aço.

$$T_2 = 0{,}874 T_1 = 0{,}874(3\,690) = 3\,225\text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\tau_{\text{aço}} = \frac{T_2 c_2}{J_2} = \frac{(3\,225\text{ N} \cdot \text{m})(0{,}025\text{ m})}{0{,}614 \times 10^{-6}\text{ m}^4} = 131{,}3\text{ MPa}$$



Aço
$G_1 = 77$ GPa
$J_1 = \frac{\pi}{2}[(25\text{ mm})^4]$
$= 0{,}614 \times 10^{-6}\text{m}^4$

Notamos que a tensão admissível de 120 MPa no aço é excedida, logo, a nossa suposição estava *errada*. Então o torque máximo $\mathbf{T}_0$ será obtido fazendo $\tau_{\text{aço}} = 120$ MPa. Primeiro determinamos o torque T_2.

$$T_2 = \frac{\tau_{\text{aço}} J_2}{c_2} = \frac{(120\text{ MPa})(0{,}614 \times 10^{-6}\text{ m}^4)}{0{,}025\text{ m}} = 2\,950\text{ N} \cdot \text{m}$$

Da Equação (2), temos

$$2\,950\text{ N} \cdot \text{m} = 0{,}874 T_1 \qquad T_1 = 3\,375\text{ N} \cdot \text{m}$$

Utilizando a Equação (1), obtemos o torque máximo admissível

$$T_0 = T_1 + T_2 = 3\,375\text{ N} \cdot \text{m} + 2\,950\text{ N} \cdot \text{m}$$

$$T_0 = 6{,}325\text{ kN} \cdot \text{m} \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

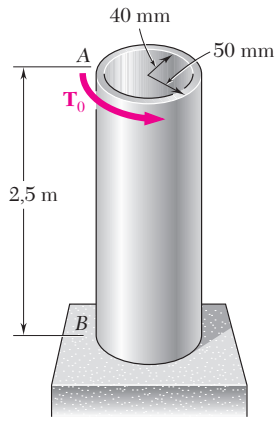


Fig. P3.31

3.31 (*a*) Para o eixo de alumínio mostrado ($G = 27$ GPa), determine o torque $\mathbf{T}_0$ que provoca um ângulo de torção de 2° e (*b*) o ângulo de torção provocado pelo mesmo torque $\mathbf{T}_0$ em um eixo cilíndrico cheio de mesmo comprimento e mesma área.

3.32 (*a*) Para o eixo de aço com seção transversal cheia mostrado ($G = 77$ GPa), determine o ângulo de torção em *A*. (*b*) Resolva a parte (*a*) considerando que o eixo de aço é vazado com 30 mm de diâmetro externo e 20 mm de diâmetro interno.

3.33 O navio em *A* está começando a perfurar um poço de petróleo no fundo do oceano a uma profundidade de 1524 m. Sabendo que o topo da broca de aço ($G = 77{,}2$ GPa) de 203 mm de diâmetro dá duas voltas completas até que a broca em *B* comece a girar, determine a tensão de cisalhamento máxima provocada na broca pela torção.

3.34 Determine o maior diâmetro possível para uma barra de aço com 3,0 m de comprimento ($G = 77{,}2$ GPa), se a barra deve ser girada em 30° sem exceder a tensão de cisalhamento de 82,7 MPa.

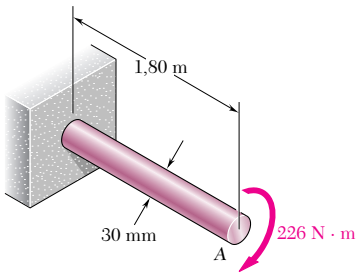


Fig. *P3.32*

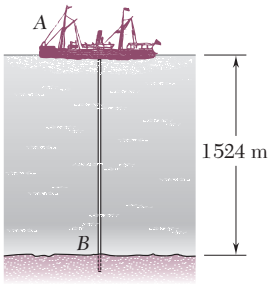


Fig. P3.33

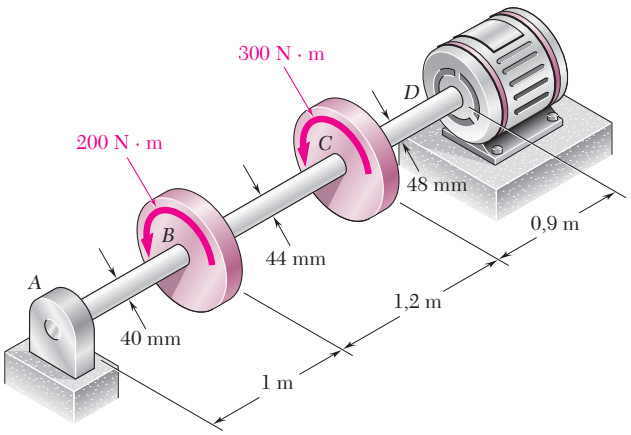


Fig. *P3.35*

3.35 O motor elétrico aplica um torque de 500 N · m no eixo de alumínio *ABCD*, quando ele está girando a uma rotação constante. Sabendo que $G = 27$ GPa e que os torques exercidos sobre as polias *B* e *C* são aqueles mostrados na figura, determine o ângulo de torção entre (a) *B* e *C* e (*b*) *B* e *D*.

3.36 Os torques mostrados são aplicados nas polias *A*, *B* e *C*. Sabendo que ambos os eixos têm seção transversal cheia e são feitos de latão ($G = 39$ GPa), determine o ângulo de torção entre (a) *A* e *B* e (*b*) *A* e *C*.

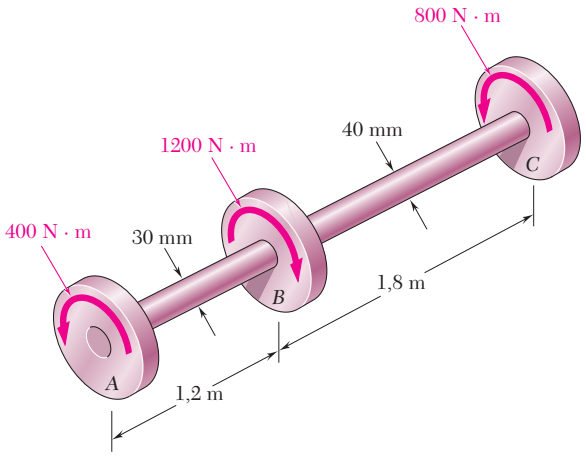


Fig. P3.36

3.37 A barra de alumínio *BC* ($G = 26$ GPa) está ligada à barra de latão *AB* ($G = 39$ GPa). Sabendo que cada barra é de seção cheia e tem um diâmetro de 12 mm, determine o ângulo de torção (*a*) em *B* e (*b*) em *C*.

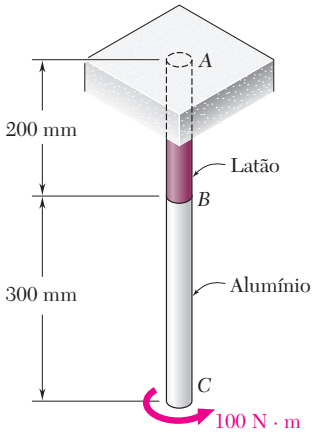


Fig. P3.37

3.38 A barra de alumínio *AB* ($G = 27$ GPa) está ligada à barra de latão *BD* ($G = 39$ GPa). Sabendo que a parte *CD* da barra de latão é vazada e tem um diâmetro interno de 40 mm, determine o ângulo de torção em *A*.

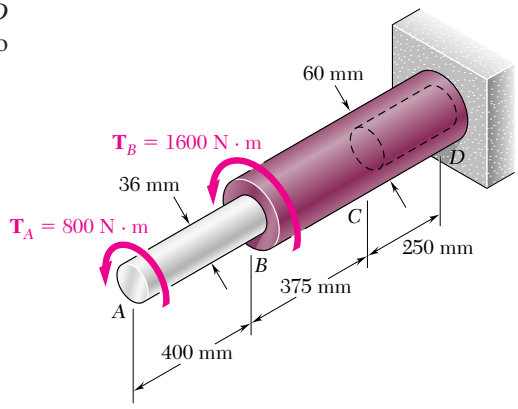


Fig. P3.38

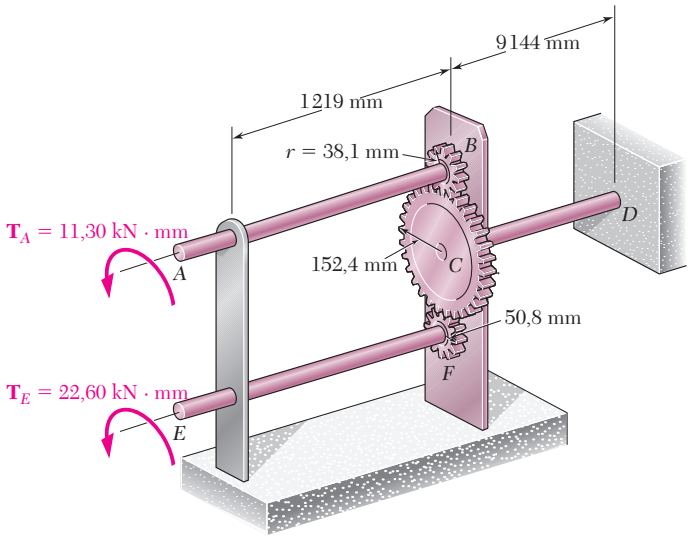


Fig. *P3.39*

3.39 Três eixos sólidos, cada um deles com 19,05 mm de diâmetro, são conectados pelas engrenagens mostradas. Sabendo que $G = 77{,}2$ GPa, determine (*a*) o ângulo de torção na seção *A* do eixo *AB* e (*b*) o ângulo de torção da seção *E* do eixo *EF*.

3.40 Dois eixos, cada um com diâmetro de 22,2 mm, são conectados pelas engrenagens mostradas na figura. Sabendo que $G = 77{,}2$ GPa e que o eixo está fixo em F, determine o ângulo pelo qual a extremidade A gira, quando lhe é aplicado um torque de 135,6 N · m.

3.41 Dois eixos de seção transversal cheia estão acoplados por engrenagens, conforme mostra a figura. Sabendo que $G = 77{,}2$ GPa para cada eixo, determine o ângulo de rotação da extremidade A quando $T_A = 1\,200$ N · m.

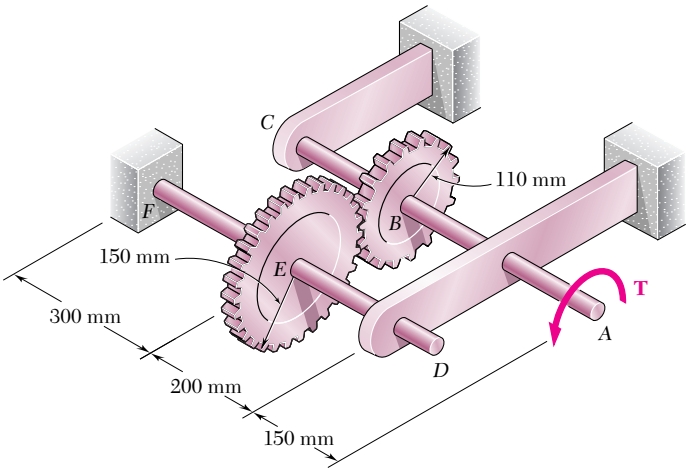


Fig. P3.40

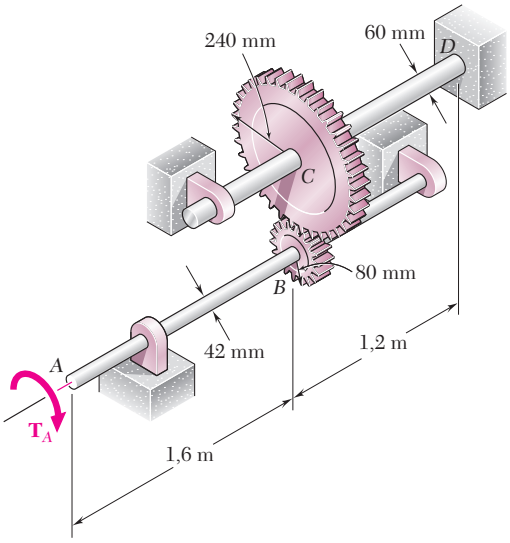


Fig. P3.41

3.42 Resolva o Problema 3.41, considerando que o diâmetro de cada eixo seja de 54 mm.

3.43 Um tacômetro F, utilizado para registrar em forma digital a rotação do eixo A, é conectado ao eixo por meio do trem de engrenagens mostrado, valendo-se de quatro engrenagens e três eixos de aço de seção cheia e diâmetro d. Duas das engrenagens têm raio r e as outras duas têm raios nr. Se a rotação do tacômetro F for impedida, determine em termos de T, l, G, J e n, o ângulo pelo qual a extremidade A gira.

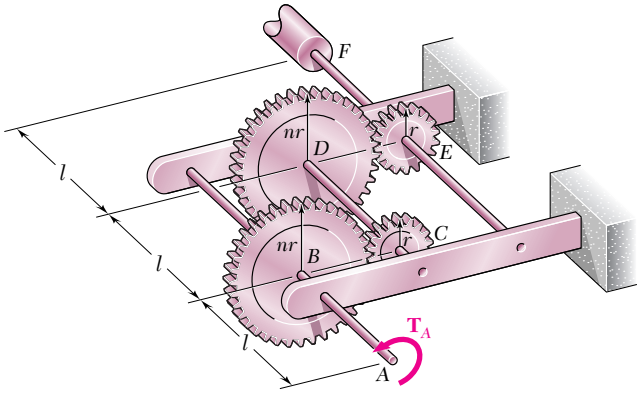


Fig. *P3.43*

3.44 Para o trem de engrenagens descrito no Problema 3.43, determine o ângulo pelo qual a extremidade A gira quando $T = 565$ N · mm, $l = 61$ mm, $d = 1{,}59$ mm, $G = 77{,}2$ GPa e $n = 2$.

3.45 As especificações de projeto de um eixo de transmissão de seção cheia de 1,2 m de comprimento requerem que o ângulo de torção do eixo não exceda 4° quando for aplicado um torque de 750 N · m. Determine o diâmetro necessário para o eixo, sabendo que ele é feito de um aço com tensão de cisalhamento admissível de 90 MPa e um módulo de elasticidade transversal de 77,2 GPa.

3.46 Um furo é feito em uma chapa de plástico em *A* através de uma força **P** de 600 N, aplicada à extremidade *D* da alavanca *CD*, que está rigidamente conectada ao eixo cilíndrico *BC*. Especificações de projeto exigem que o deslocamento do ponto *D* não exceda 15 mm desde o momento em que o punção toca a chapa até o ponto em que ele efetivamente penetra no plástico. Determine o diâmetro necessário para o eixo *BC* feito com aço de $G = 77$ GPa e $\tau_{adm} = 80$ MPa.

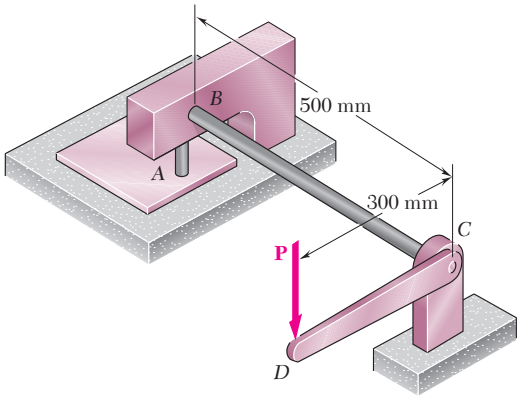


Fig. P3.46

3.47 As especificações de projeto para o sistema de engrenagem e eixo de transmissão mostrados requerem que o mesmo diâmetro seja utilizado para os dois eixos e que o ângulo de torção da polia *A* quando submetida a um torque de 226 N · m ao mesmo tempo em que a polia *D* é mantida fixa não pode sofrer giro superior a 7,5°. Determine o diâmetro necessário para ambos os eixos feitos de aço com $G = 77{,}2$ GPa e tensão de cisalhamento admissível $\tau_{adm} = 82{,}7$ MPa.

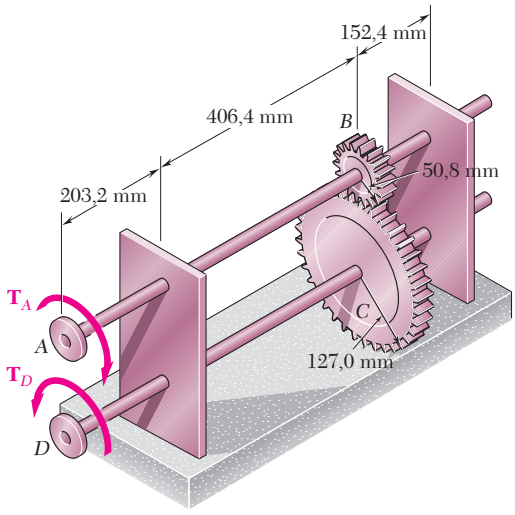


Fig. P3.47

3.48 Resolva o Problema 3.47, considerando que ambos os eixos são feitos de latão com $G = 38{,}6$ GPa e $\tau_{adm} = 55{,}2$ MPa.

3.49 O projeto do sistema de engrenagem e eixo mostrado na figura requer que sejam utilizados eixos de aço de mesmo diâmetro para *AB* e *CD*. É necessário também que $\tau_{adm} \leq 60$ MPa e que o ângulo ϕ_D pelo qual a extremidade *D* do eixo *CD* gira não exceda 1,5°. Sabendo que $G = 77$ GPa, determine o diâmetro necessário para os eixos.

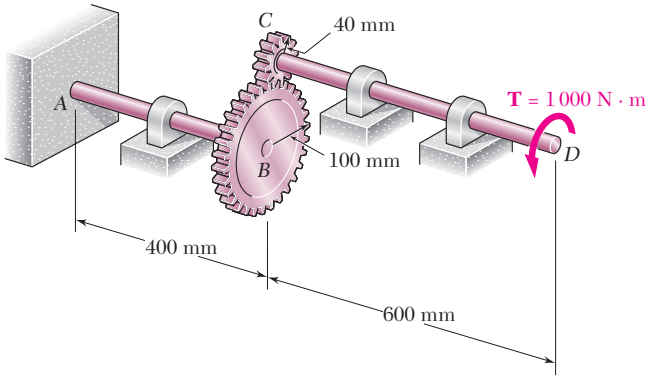


Fig. P3.49

3.50 O motor elétrico aplica um torque de 800 N · m ao eixo de aço *ABCD* quando a rotação tem velocidade constante. Especificações de projeto requerem que o diâmetro do eixo seja uniforme entre *A* e *D* e que o ângulo de torção entre *A* e *D* não exceda 1,5°. Sabendo que $\tau_{adm} \leq 60$ MPa e $G = 77$ GPa, determine o menor diâmetro possível para esse eixo.

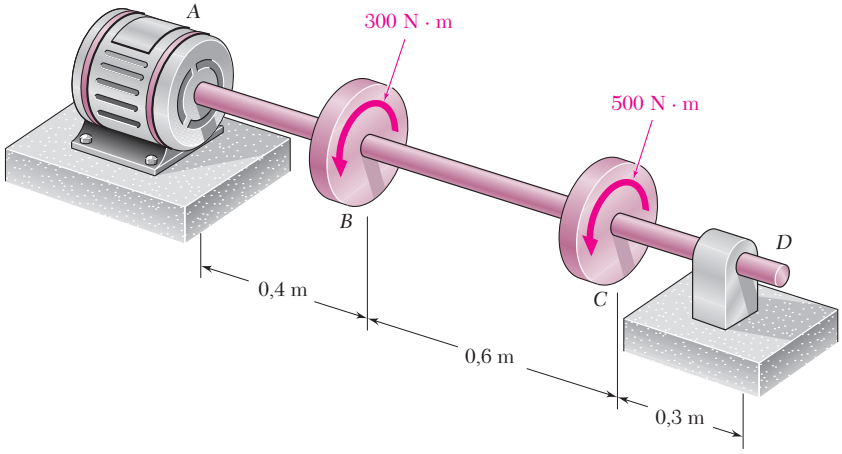


Fig. P3.50

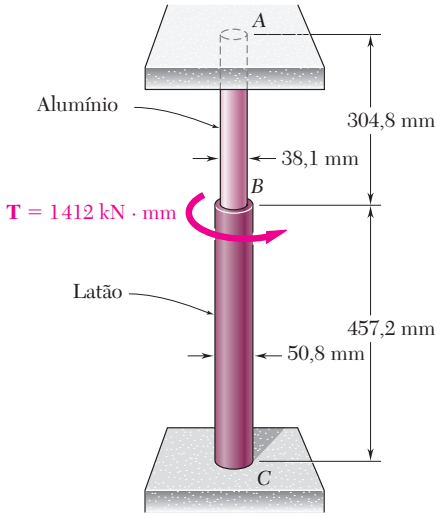


Fig. *P3.51*

3.51 Os cilindros sólidos *AB* e *BC* estão conectados em *B* e estão engastados em suportes fixos em *A* e em *C*. Sabendo que os módulos de rigidez são 25,5 GPa para o alumínio e 38,6 GPa para o latão, determine a máxima tensão de cisalhamento (*a*) no cilindro *AB* e (*b*) no cilindro *BC*.

3.52 Resolva o Problema 3.51, considerando que o cilindro *AB* é feito de aço com $G = 77{,}2$ GPa.

3.53 O eixo composto mostrado consiste em uma jaqueta de latão de 5 mm de espessura ($G_{\text{latão}} = 39$ GPa) unido a um núcleo de aço de 40 mm de diâmetro ($G_{\text{aço}} = 77{,}2$ GPa). Sabendo que o eixo está submetido a um torque de 600 N · m, determine (*a*) a tensão de cisalhamento máxima na jaqueta de latão, (*b*) a tensão de cisalhamento máxima no núcleo de aço e (*c*) o ângulo de torção de *B* relativo a *A*.

3.54 Para o eixo composto do Problema 3.53, as tensões de cisalhamento admissíveis são: para o latão, 20 MPa e para o aço, 45 MPa. Determine (*a*) o maior torque que pode ser aplicado ao eixo composto e (*b*) o ângulo de torção correspondente de *B* relativo a *A*.

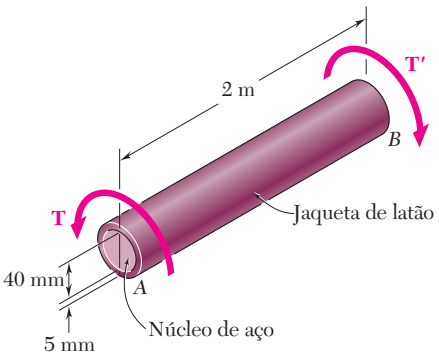


Fig. P3.53 e P3.54

3.55 Ao mesmo tempo em que a rotação da extremidade inferior de cada eixo é impedida, aplica-se um torque de 50 N · m à extremidade *A* do eixo *AB*. Sabendo que $G = 77{,}2$ GPa para ambos os eixos, determine (*a*) a tensão de cisalhamento máxima no eixo *CD* e (*b*) o ângulo de rotação em *A*.

3.56 Resolva o Problema 3.55 considerando que seja aplicado um torque de 80 N · m à extremidade *C* do eixo *CD*.

3.57 e 3.58 Dois eixos sólidos de aço são ajustados com flanges que em seguida são conectadas por parafusos como mostrado. Os parafusos são ligeiramente subdimensionados de modo que permitam uma rotação relativa entre as flanges de até 1,5° antes que ambas passem a girar juntas. Sabendo que $G = 77{,}2$ GPa, determine a máxima tensão de cisalhamento em cada eixo quando um torque **T** de intensidade igual a 474,5 N · m é aplicado na flange indicada.

3.57 O torque **T** é aplicado na flange *B*.

3.58 O torque **T** é aplicado na flange *C*.

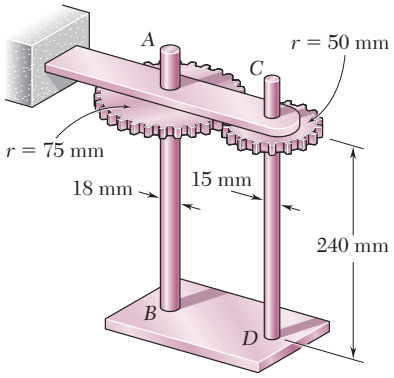


Fig. *P3.55*

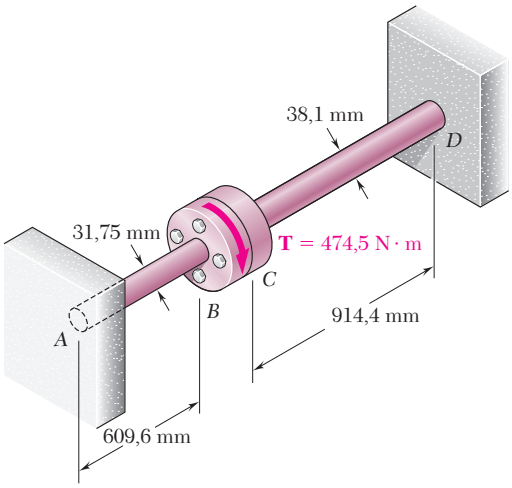


Fig. P3.57 e P3.58

3.59 O tubo de aço *CD* foi fixado ao eixo de aço *AE* de 40 mm de diâmetro por meio de flanges *rígidas* soldadas ao tubo e à barra. O diâmetro externo do tubo é de 80 mm e a espessura da parede é de 4 mm. Se forem aplicados torques de 500 N · m, como mostra a figura, determine a tensão de cisalhamento máxima no tubo.

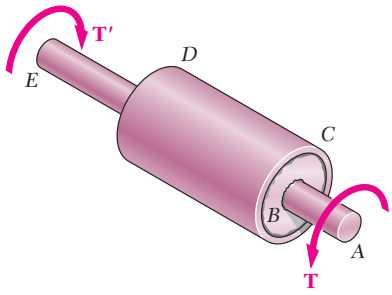


Fig. P3.59

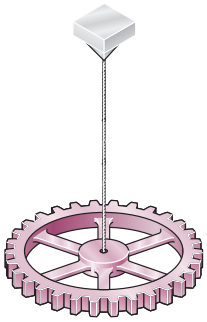


Fig. P3.60

3.60 O momento de inércia de massa da engrenagem será determinado experimentalmente utilizando um pêndulo de torção que consiste em um fio de aço com 1829 mm de comprimento. Sabendo que $G = 77{,}2$ GPa, determine o diâmetro desse fio para o qual a constante de mola torcional será igual a 5,789 N · m/rad.

3.61 Uma placa anular de espessura t e módulo de elasticidade transversal G é utilizada para conectar o eixo AB de raio r_1 ao tubo CD de raio interno r_2. Sabendo que é aplicado um torque **T** à extremidade A do eixo AB e que a extremidade D do tubo CD está engastada, (a) determine a intensidade e localização da tensão de cisalhamento máxima na placa anular e (b) mostre que o ângulo pelo qual a extremidade B do eixo gira com relação à extremidade C do tubo é

$$\phi_{BC} = \frac{T}{4\pi Gt}\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right)$$

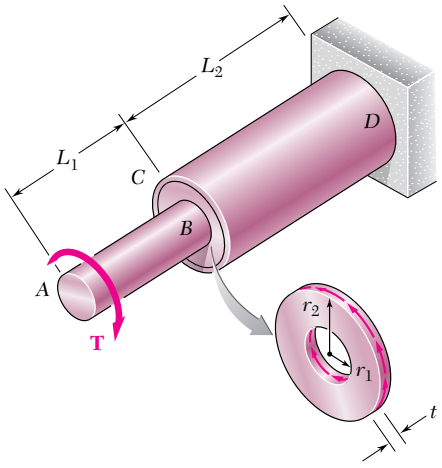


Fig. P3.61 e P3.62

3.62 Uma placa anular de latão ($G = 39$ GPa), de espessura $t = 6$ mm, é utilizada para conectar o eixo de latão AB, de comprimento $L_1 = 50$ mm e raio $r_1 = 30$ mm, ao tubo de latão CD, de comprimento $L_2 = 125$ mm, raio interno $r_2 = 75$ mm e espessura $t = 3$ mm. Sabendo que é aplicado um torque **T** de 2,8 kN · m à extremidade A do eixo AB e que a extremidade D do tubo CD está engastada, determine (a) a tensão de cisalhamento máxima no sistema eixo, placa e tubo, (b) o ângulo de giro da extremidade A. (*Sugestão*: Utilize a fórmula derivada do Problema 3.62 para resolver a parte b.)

3.63 Considere dois eixos de mesmo material, mesmo peso e mesmo comprimento, um com seção transversal cheia e outro com seção transversal vazada. Chamando de n a relação c_1/c_2, mostre que a relação T_c/T_v entre o torque T_c na seção transversal cheia e o torque T_v no eixo vazado é (a) $\sqrt{(1 - n^2)}/(1 + n^2)$ se a tensão de cisalhamento máxima for a mesma em cada eixo e (b) $(1 - n)/(1 + n^2)$ se o ângulo de torção for também o mesmo para cada eixo.

3.7. Projeto de eixos de transmissão

As principais especificações a serem observadas no projeto de um eixo de transmissão são a *potência* a ser transmitida e a *velocidade de rotação* do eixo. O papel do projetista é selecionar o material e as dimensões da seção transversal do eixo, de modo que as tensões de cisalhamento máximas admissíveis do material não sejam ultrapassadas quando o eixo estiver transmitindo a potência necessária com a velocidade especificada.

Para determinarmos o torque aplicado ao eixo, recordamos que no estudo da dinâmica elementar vimos que a potência P associada à rotação de um corpo rígido submetido a um torque $\mathbf{T}$ é

$$P = T\omega \tag{3.19}$$

em que ω é a velocidade angular do corpo expressa em radianos por segundo. Contudo, $\omega = 2\pi f$, em que f é a frequência da rotação, isto é, o número de revoluções por segundo. A unidade de frequência é, então, $1\ s^{-1}$ e é chamada de um *hertz* (Hz). Substituindo ω na Equação (3.19), escrevemos

$$P = 2\pi fT \tag{3.20}$$

Se forem utilizadas unidades SI, verificamos que, com f expressa em Hz e T em N · m, a potência é expressa em N · m/s, ou seja, em *watts* (W). Da Equação (3.20), obtemos o torque aplicado T em um eixo, quando ele transmite uma potência P a uma frequência de rotação f,

$$T = \frac{P}{2\pi f} \tag{3.21}$$

em que P, f e T são expressos nas unidades indicadas acima.

Após determinar o torque $\mathbf{T}$ que será aplicado ao eixo e tendo selecionado o material a ser utilizado, o projetista usará os valores de T e da tensão máxima admissível na fórmula da torção elástica (3.9). Resolvendo esta equação para J/c, temos

$$\frac{J}{c} = \frac{T}{\tau_{\text{máx}}} \tag{3.22}$$

e obtemos dessa maneira o valor mínimo admissível para o parâmetro J/c. Verificamos que, se forem utilizadas unidades SI, T será expresso em N · m, $\tau_{\text{máx}}$ em Pa (ou N/m^2), e J/c será obtido em m^3. No caso de um eixo circular cheio, $J = \frac{1}{2}\pi c^4$ e $J/c = \frac{1}{2}\pi c^3$ substituindo esse valor de J/c na Equação (3.22) e resolvendo-a para c, obtemos o valor mínimo admissível do raio do eixo. No caso de um eixo circular vazado, o parâmetro crítico é J/c_2, em que c_2 é o raio externo do eixo; o valor desse parâmetro pode ser calculado da Equação (3.11) da Seção 3.4 para determinar se uma dada seção transversal será aceitável.

Quando forem utilizadas unidades inglesas, a frequência geralmente será expressa em rpm e a potência, em hp. É necessário então, antes de aplicar a fórmula (3.21), converter a frequência em rotações por segundo

(isto é, hertz) e a potência em pé · lb/s ou pol · lb/s com o uso das seguintes relações:

$$1 \text{ rpm} = \frac{1}{60}\text{ s}^{-1} = \frac{1}{60}\text{ Hz}$$
$$1 \text{ hp} = 746 \text{ N} \cdot \text{m/s} = 746 \text{ kN} \cdot \text{mm/s}$$

Se expressarmos a potência em N · m/s, a Equação (3.21) dará o valor do torque T em N · m. Usando esse valor de T na Equação (3.22), e expressando $\tau_{máx}$ em N/m^2, obtemos o valor do parâmetro J/c em m^3.

EXEMPLO 3.6

Qual a dimensão do diâmetro do eixo que deverá ser utilizado para o rotor de um motor de 5 hp que opera a 3 600 rpm, se a tensão de cisalhamento não deve exceder 60 MPa no eixo?

Primeiro expressamos a potência do motor em m · N/s e sua frequência em ciclos por segundo (ou hertz).

$$P = (5 \text{ hp})\left(\frac{746 \text{ N} \cdot \text{m/s}}{1 \text{ hp}}\right) = 3\,730 \text{ N} \cdot \text{m/s}$$
$$f = (3\,600 \text{ rpm})\frac{1 \text{ Hz}}{60 \text{ rpm}} = 60 \text{ Hz} = 60 \text{ s}^{-1}$$

O torque aplicado ao eixo é dado pela Equação (3.21):

$$T = \frac{P}{2\pi f} = \frac{3\,730 \text{ N} \cdot \text{m/s}}{2\pi\,(60 \text{ s}^{-1})} = 9{,}89 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Substituindo T e $\tau_{máx}$ na Equação (3.22), escrevemos

$$\frac{J}{c} = \frac{T}{\tau_{máx}} = \frac{9{,}89 \text{ N} \cdot \text{m}}{60 \times 10^6 \text{ N/m}^2} = 0{,}165 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

Contudo, $J/c = \frac{1}{2}\pi c^3$ para um eixo sólido. Temos, portanto,

$$\tfrac{1}{2}\pi c^3 = 0{,}165 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$
$$c = 4{,}7 \times 10^{-3} \text{ m}$$
$$d = 2c = 9{,}4 \text{ mm}$$

Deverá ser utilizado um eixo de 9,4 mm.

EXEMPLO 3.7

Um eixo que consiste em um tubo de aço com 50 mm de diâmetro externo deve transmitir 100 kW de potência girando a uma frequência de 20 Hz. Determine a espessura do tubo que deverá ser utilizado de modo que a tensão de cisalhamento não exceda 60 MPa.

O torque aplicado ao eixo é dado pela Equação (3.21):

$$T = \frac{P}{2\pi f} = \frac{100 \times 10^3 \text{ W}}{2\pi\,(20 \text{ Hz})} = 795{,}8 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Da Equação (3.22) concluímos que o parâmetro J/c_2 deve ser pelo menos igual a

$$\frac{J}{c_2} = \frac{T}{\tau_{máx}} = \frac{795{,}8 \text{ N} \cdot \text{m}}{60 \times 10^6 \text{ N/m}^2} = 13{,}26 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \qquad (3.23)$$

Contudo, da Equação (3.10), temos

$$\frac{J}{c_2} = \frac{\pi}{2c_2}(c_2^4 - c_1^4) = \frac{\pi}{0{,}050}[(0{,}025)^4 - c_1^4] \qquad (3.24)$$

Igualando os membros da direita das Equações (3.23) e (3.24):

$$(0{,}025)^4 - c_1^4 = \frac{0{,}050}{\pi}(13{,}26 \times 10^{-6})$$
$$c_1^4 = 390{,}6 \times 10^{-9} - 211{,}0 \times 10^{-9} = 179{,}6 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$
$$c_1 = 20{,}6 \times 10^{-3} \text{ m} = 20{,}6 \text{ mm}$$

A espessura correspondente do tubo é

$$c_2 - c_1 = 25 \text{ mm} - 20{,}6 \text{ mm} = 4{,}4 \text{ mm}$$

Deverá ser utilizado um tubo com espessura de 5 mm.

3.8. Concentração de tensões em eixos circulares

A fórmula da torção $\tau_{máx} = Tc/J$ foi deduzida na Seção 3.4 para um eixo circular de seção transversal uniforme. Além do mais, consideramos anteriormente, na Seção 3.3, que o eixo estava carregado em suas extremidades por placas rígidas presas a ele solidamente. No entanto, na prática, os torques são geralmente aplicados ao eixo por meio de acoplamentos com flange (Fig. 3.30*a*) ou de engrenagens conectadas ao eixo por chavetas que se encaixam em cortes (Fig. 3.30*b*). Em ambos os casos espera-se que a distribuição de tensões na seção e proximidades, em que os torques são aplicados, seja diferente daquela dada pela fórmula de torção. Por exemplo, ocorrerão altas concentrações de tensões nas proximidades do corte da chaveta mostrada na Fig. 3.30*b*. A determinação dessas tensões localizadas pode ser feita por métodos experimentais de análise de tensão ou, em alguns casos, por meio da teoria matemática da elasticidade.

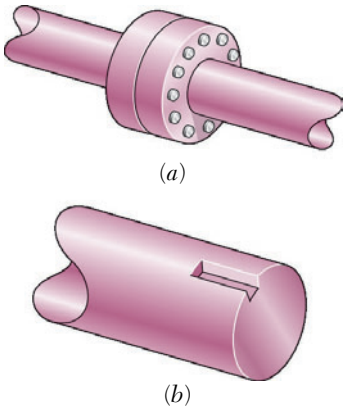


Fig. 3.30

Conforme indicamos na Seção 3.4, a fórmula da torção também pode ser utilizada para um eixo de seção transversal variável. No entanto, no caso de um eixo com uma mudança abrupta no diâmetro de sua seção transversal, as concentrações de tensões ocorrerão próximas da descontinuidade, com as mais altas tensões ocorrendo em *A* (Fig. 3.31). Essas tensões podem ser reduzidas com o adoçamento do ângulo, e o valor máximo da tensão de cisalhamento no adoçamento pode ser expresso como

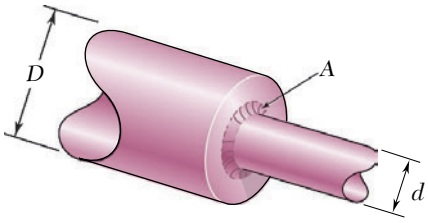


Fig. 3.31

$$\tau_{máx} = K\frac{Tc}{J} \tag{3.25}$$

em que a tensão Tc/J é a tensão calculada para o menor diâmetro de eixo, e na qual K é o coeficiente de concentração de tensão. Como o coeficiente K depende somente da relação entre os diâmetros e da relação entre o raio do adoçamento e o menor diâmetro, ele pode ser calculado e registrado na forma de uma tabela ou gráfico, como mostra a Fig. 3.32. Devemos notar, no entanto, que esse procedimento para determinar tensões de cisalhamento localizadas é válido somente quando o valor de $\tau_{máx}$, dado pela Equação (3.25), não exceder o limite de proporcionalidade do material. Isso ocorre porque os valores de K representados graficamente na Fig. 3.32 foram obtidos admitindo-se a hipótese de que a relação tensão-deformação no cisalhamento é linear. Se ocorrerem deformações plásticas, elas resultarão em valores de tensão máxima menores do que aqueles indicados pela Equação (3.25).

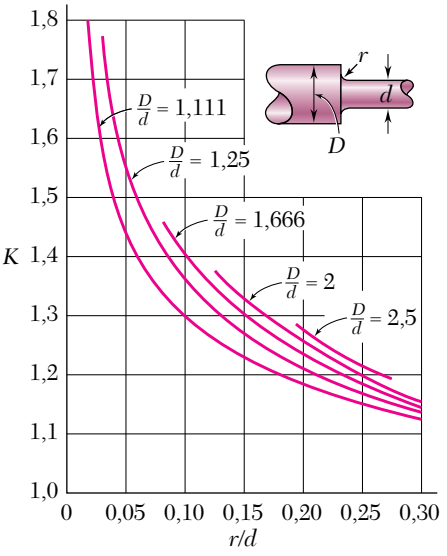
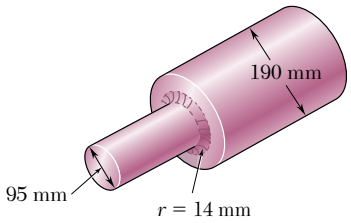


Fig. 3.32 Coeficientes de concentração de tensão para adoçamentos em eixos circulares.†

† PILKEY, W. D. *Petersons stress concentration factors*. 2. ed. Nova York: John Wiley & Sons, 1997.



PROBLEMA RESOLVIDO 3.6

O eixo de seção variável mostrado deve girar a 900 rpm transmitindo potência de uma turbina para um gerador. A classe do aço especificado no projeto tem uma tensão de cisalhamento admissível de 55 MPa. (*a*) Para o projeto preliminar mostrado, determine a potência máxima que pode ser transmitida. (*b*) Se no projeto final o raio do adoçamento for aumentado de modo que $r = 24$ mm, qual será a variação percentual em relação ao projeto preliminar, na potência que pode ser transmitida?

SOLUÇÃO

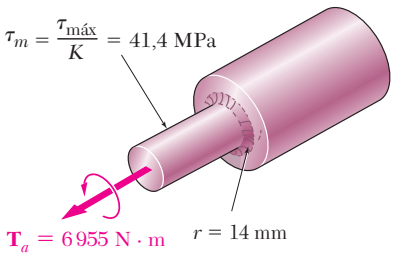
***a*. Projeto preliminar.** Usando a notação da Fig. 3.32, temos $D = 190$ mm, $d = 95$ mm, $r = 14$ mm.

$$\frac{D}{d} = \frac{190 \text{ mm}}{95 \text{ mm}} = 2 \qquad \frac{r}{d} = \frac{14 \text{ mm}}{95 \text{ mm}} = 0{,}15$$

Da Fig. 3.32 foi encontrado um coeficiente de concentração de tensão $K = 1{,}33$.

Torque. Usando a Equação (3.25), escrevemos

$$\tau_{\text{máx}} = K\frac{Tc}{J} \qquad T = \frac{J}{c}\frac{\tau_{\text{máx}}}{K} \tag{1}$$



em que J/c refere-se ao diâmetro menor do eixo:

$$J/c = \tfrac{1}{2}\pi c^3 = \tfrac{1}{2}\pi\,(47{,}5 \times 10^{-3}\text{ m})^2 = 1{,}68 \times 10^{-4}\text{ m}^3$$

e em que

$$\frac{\tau_{\text{máx}}}{K} = \frac{55 \text{ MPa}}{1{,}33} = 41{,}4 \text{ MPa}$$

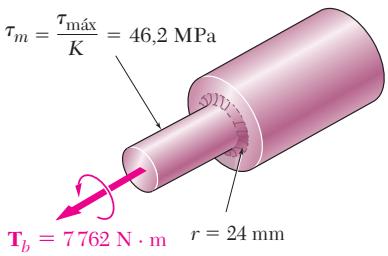
Substituindo na Equação (1), encontramos $T = (1{,}68 \times 10^{-4}\text{ m}^3)(4{,}14\text{ MPa}) = 6\,955\text{ N} \cdot \text{m}$.

Potência. Como $f = (900 \text{ rpm})\dfrac{1 \text{ Hz}}{60 \text{ rpm}} = 15 \text{ Hz} = 15 \text{ s}^{-1}$, escrevemos

$$P_a = 2\pi fT = 2\pi(15 \text{ s}^{-1})(6\,955 \text{ N} \cdot \text{m}) = 655\,493 \text{ N} \cdot \text{m/s}$$
$$P_a = (655\,493 \text{ N} \cdot \text{m/s})(1 \text{ hp}/746 \text{ N} \cdot \text{m/s}) \qquad P_a = 878 \text{ hp} \blacktriangleleft$$

***b*. Projeto final.** Para $r = 24$ mm

$$\frac{D}{d} = 2 \qquad \frac{r}{d} = \frac{24 \text{ mm}}{95 \text{ mm}} = 0{,}253 \qquad K = 1{,}19$$



Seguindo o procedimento utilizado acima, escrevemos

$$\frac{\tau_{\text{máx}}}{K} = \frac{55 \text{ MPa}}{1{,}19} = 46{,}2 \text{ MPa}$$

$$T = \frac{J}{c}\frac{\tau_{\text{máx}}}{K} = (1{,}68 \times 10^{-4}\text{ m}^3)(46{,}2\text{ MPa}) = 7\,762\text{ N} \cdot \text{m}$$
$$P_b = 2\pi fT = 2\pi\,(15\text{ s}^{-1})(7\,762\text{ N} \cdot \text{m}) = 731\,552\text{ N} \cdot \text{m/s}$$
$$P_b = (731\,552\text{ N} \cdot \text{m/s})(1\text{ hp}/746\text{ N} \cdot \text{m/s}) = 981\text{ hp}$$

Variação percentual na potência

$$\text{Variação percentual} = 100\frac{P_b - P_a}{P_a} = 100\frac{981 - 878}{878} = \qquad +12\,\% \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

3.64 Determine a tensão de cisalhamento máxima em um eixo de seção transversal cheia, de 38 mm de diâmetro, quando ele transmite 75 hp a uma velocidade de (*a*) 750 rpm e (*b*) 1 500 rpm.

3.65 Determine a tensão de cisalhamento máxima em um eixo de seção transversal cheia, de 12 mm de diâmetro, quando ele transmite 2,5 kW a uma frequência de (*a*) 25 Hz e (*b*) 50 Hz.

3.66 Utilizando um valor de tensão de cisalhamento admissível igual a 50 MPa, projete um eixo de seção transversal cheia, feito de aço, para transmitir 15 kW à frequência de (*a*) 30 Hz e (*b*) 60 Hz.

3.67 Utilizando uma tensão de cisalhamento admissível de 31 MPa, projete um eixo de seção transversal cheia feito de aço para transmitir 12 hp na velocidade de (*a*) 1 200 rpm e (*b*) 2 400 rpm.

3.68 Enquanto o eixo vazado de aço rotaciona a 180 rpm, uma medida estroboscópica indica que o ângulo de torção é igual a 3°. Sabendo que $G = 77{,}2$ GPa, determine (*a*) a potência transmitida e (*b*) a máxima tensão de cisalhamento no eixo.

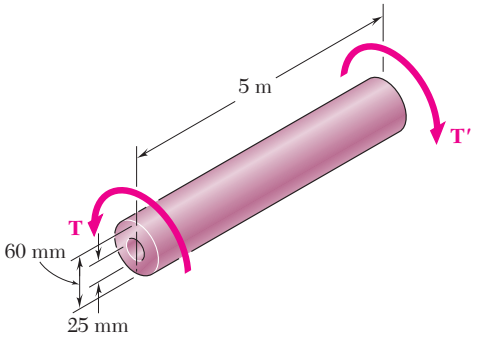


Fig. P3.68 e P3.69

3.69 O eixo de seção vazada de aço mostrado ($G = 77{,}2$ GPa, $\tau_{adm} = 50$ MPa) rotaciona a 240 rpm. Determine (*a*) a maior potência que pode ser transmitida e (*b*) o correspondente ângulo de torção do eixo.

3.70 Um dos dois eixos de acionamento de um navio tem 38,1 m de comprimento e seção vazada; seus diâmetros, externo e interno, são, respectivamente, 406,4 mm e 203,2 mm. O eixo é feito de um aço para o qual $\tau_{adm} = 58{,}6$ MPa e $G = 77{,}2$ GPa. Sabendo que a rotação máxima do eixo é de 160 rpm, determine (*a*) a potência máxima que pode ser transmitida pelo eixo para a hélice e (*b*) o ângulo de torção correspondente do eixo.

3.71 Um eixo de aço com seção vazada ($G = 77{,}2$ GPa) tem 2438 mm de comprimento e seus diâmetros externo e interno são respectivamente iguais a 63,5 mm e 31,8 mm. Sabendo que o eixo transmite uma potência de 200 hp enquanto rotaciona a 1500 rpm, determine (*a*) a máxima tensão de cisalhamento e (*b*) o ângulo de giro do eixo.

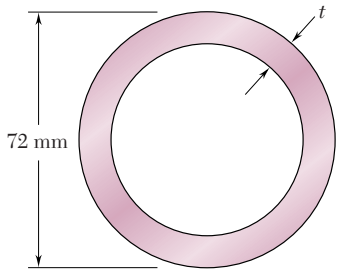


Fig. P3.72

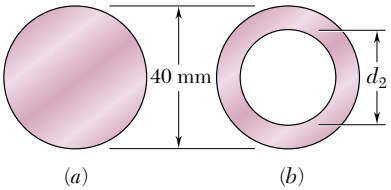


Fig. *P3.73*

3.72 Um tubo de aço de 72 mm de diâmetro externo deve ser utilizado para transmitir um torque de 2 500 N · m sem exceder a tensão de cisalhamento admissível de 55 MPa. Há disponível para uso uma série de tubos com diâmetro externo de 72 mm. Sabendo que as espessuras da parede dos tubos disponíveis variam de 4 mm a 10 mm em incrementos de 2 mm, escolha o tubo mais leve que pode ser utilizado.

3.73 O projeto de um elemento de máquina especifica um eixo com diâmetro externo de 40 mm para transmitir 45 kW. (*a*) Se a rotação for de 720 rpm, determine a tensão de cisalhamento máxima no eixo *a*. (*b*) Se a rotação do eixo pode ser aumentada em 50% passando a 1080 rpm, determine o maior diâmetro interno do eixo *b* para o qual a tensão de cisalhamento máxima será a mesma em cada eixo.

3.74 Um eixo de aço de seção transversal cheia de 1,5 m de comprimento e 22 mm de diâmetro deve transmitir 12 kW. Determine a frequência mínima na qual o eixo pode girar, sabendo que $G = 77{,}2$ GPa, que a tensão de cisalhamento admissível é de 30 MPa e que o ângulo de torção não deve exceder 3,5°.

3.75 Um eixo de aço com seção transversal cheia de 2,5 m de comprimento deve transmitir 10 kW a uma frequência de 25 Hz. Determine o diâmetro necessário para o eixo, sabendo que $G = 77{,}2$ GPa, que a tensão de cisalhamento admissível é de 30 MPa e que o ângulo de torção não deve exceder 4°.

3.76 Os dois eixos de seção cheia e as engrenagens mostrados são utilizados para transmitir 16 hp do motor em *A* operando a uma rotação de 1 260 rpm, para uma máquina-ferramenta em *D*. Sabendo que a tensão de cisalhamento máxima admissível é de 55,2 MPa, determine o diâmetro necessário (*a*) do eixo *AB* e (*b*) do eixo *CD*.

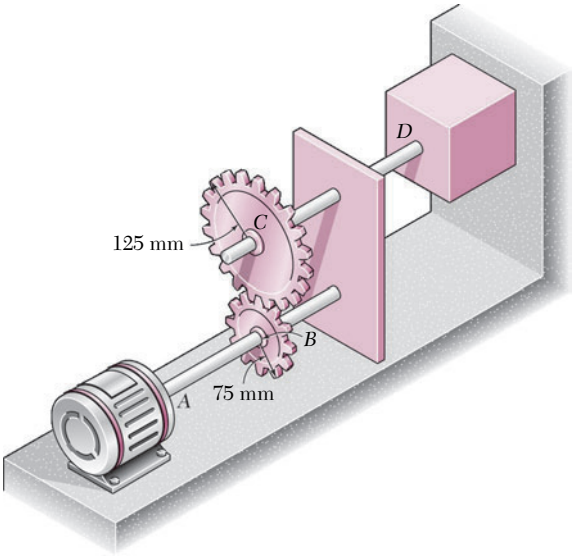


Fig. P3.76 e P3.77

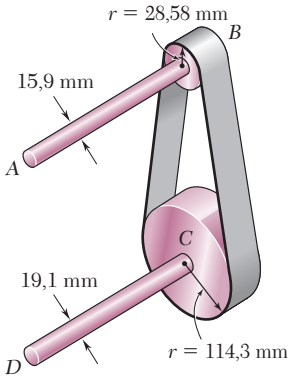


Fig. P3.78

3.77 Os dois eixos de seção cheia e as engrenagens mostrados são utilizados para transmitir 16 hp do motor em *A* operando a uma rotação de 1 260 rpm, para uma máquina-ferramenta em *D*. Sabendo que cada eixo tem diâmetro de 25 mm, determine a tensão de cisalhamento máxima (*a*) no eixo *AB* e (*b*) no eixo *CD*.

3.78 O sistema eixo-disco-correia mostrado na figura é utilizado para transmitir 3 hp do ponto *A* ao ponto *D*. (*a*) Usando um valor de tensão de cisalhamento admissível de 65,5 MPa, determine a velocidade necessária para o eixo *AB*. (*b*) Resolva a parte *a* considerando que os diâmetros dos eixos *AB* e *CD* são, respectivamente, 19,1 mm e 15,9 mm.

3.79 Um eixo de seção transversal cheia feita de aço com 1 524 mm de comprimento e 22,2 mm de diâmetro deve transmitir 18 hp. Determine a velocidade mínima na qual o eixo pode girar, sabendo que $G = 77{,}2$ GPa, que a tensão de cisalhamento admissível é de 31 MPa e que o ângulo de torção não deve exceder 3,5°.

3.80 Um eixo de aço de 2,5 m de comprimento e 30 mm de diâmetro gira a uma frequência de 30 Hz. Determine a potência máxima que o eixo pode transmitir, sabendo que $G = 77{,}2$ GPa, que a tensão de cisalhamento admissível é de 50 MPa e que o ângulo de torção não deve exceder 7,5°.

3.81 Um eixo de aço deve transmitir 150 kW à velocidade de 360 rpm. Sabendo que $G = 77{,}2$ GPa, projete um eixo de seção transversal cheia de modo que a tensão máxima não exceda 50 MPa e que o ângulo de torção em um comprimento de 2,5 m não exceda 3°.

3.82 Um eixo de aço tubular de 1,5 m de comprimento, com diâmetro externo d_1 de 38 mm e diâmetro interno d_2 de 30 mm, deve transmitir 100 kW entre uma turbina e um gerador. Determine a frequência mínima na qual o eixo pode girar, sabendo que $G = 77{,}2$ GPa, que a tensão de cisalhamento admissível é 60 MPa e que o ângulo de torção não deve exceder 3°.

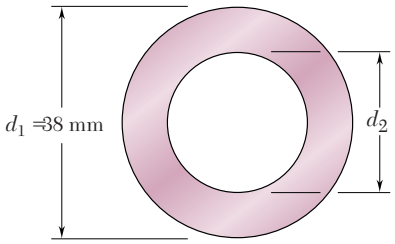


Fig. *P3.82* e P3.83

3.83 Um eixo de aço tubular de 1,5 m de comprimento e diâmetro externo d_1 de 38 mm deve ser feito de um aço para o qual $\tau_{adm} = 65$ MPa e $G = 77{,}2$ GPa. Sabendo que o ângulo de torção não deve exceder 4° quando o eixo é submetido a um torque de 600 N · m, determine o maior diâmetro d_2 que pode ser especificado no projeto.

3.84 O eixo de seção variável mostrado gira a 450 rpm. Sabendo que $r = 5{,}08$ mm, determine a potência máxima que pode ser transmitida sem exceder a tensão de cisalhamento admissível de 51,7 MPa.

3.85 O eixo de seção variável da figura gira a 450 rpm. Sabendo que $r = 12{,}7$ mm, determine a potência máxima que pode ser transmitida sem exceder a tensão de cisalhamento admissível de 51,7 MPa.

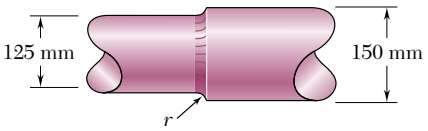


Fig. *P3.84* e *P3.85*

3.86 O eixo de seção variável mostrado na figura deve rotacionar com uma frequência de 50 Hz. Sabendo que o raio do adoçamento é $r = 8$ mm e que a tensão de cisalhamento admissível é de 45 MPa, determine a potência máxima que pode ser transmitida.

3.87 Sabendo que o eixo de seção variável mostrado na figura deve transmitir 45 kW na velocidade de 2 100 rpm, determine o raio r mínimo do adoçamento para que a tensão de cisalhamento admissível de 50 MPa não seja excedida.

3.88 O eixo de seção variável mostrado na figura deve transmitir 45 kW. Sabendo que a tensão de cisalhamento admissível no eixo é de 40 MPa e que o raio do adoçamento é $r = 6$ mm, determine a rotação mínima possível no eixo.

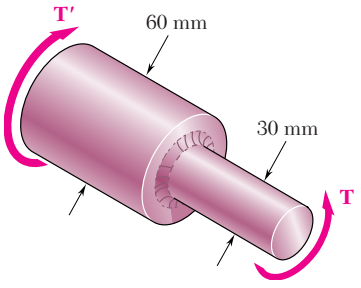
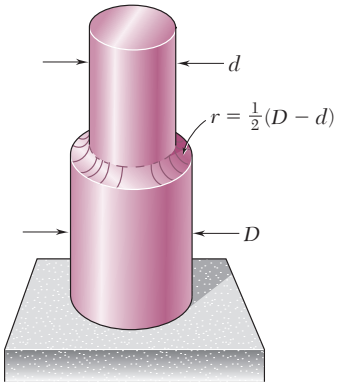


Fig. P3.86, P3.87 e P3.88



O adoçamento de um quarto de circunferência completa estende-se até a borda do eixo maior.

Fig. P3.89, P3.90 e P3.91

3.89 No eixo de seção variável mostrado na figura, que tem um adoçamento de um quarto de circunferência completa, a tensão de cisalhamento admissível é de 80 MPa. Sabendo que $D = 30$ mm, determine o maior torque admissível que pode ser aplicado ao eixo se (*a*) $d = 26$ mm e (*b*) $d = 24$ mm.

3.90 O eixo de seção variável mostrado na figura tem um adoçamento de um quarto de circunferência completa, $D = 31{,}8$ mm e $d = 25{,}4$ mm. Sabendo que a velocidade do eixo é 2400 rpm e que a tensão de cisalhamento admissível é de 51,7 MPa, determine a potência máxima que pode ser transmitida pelo eixo.

3.91 Um torque de intensidade $T = 22{,}6$ N · m é aplicado ao eixo de seção variável mostrado na figura, que tem um adoçamento de um quarto de circunferência completa. Sabendo que $D = 25{,}4$ mm, determine a tensão de cisalhamento máxima no eixo quando (*a*) $d = 20{,}3$ mm e (*b*) $d = 22{,}9$ mm.

*3.9. Deformações plásticas em eixos circulares

Quando deduzimos as Equações (3.10) e (3.16), que definem, respectivamente, a distribuição de tensão e o ângulo de torção de um eixo circular submetido a um *momento torçor* **T**, consideramos que a lei de Hooke se aplicava ao eixo todo. Se a tensão de escoamento for excedida em uma parte do eixo, ou se o material envolvido for um material frágil com um gráfico tensão-deformação não linear no cisalhamento, essas relações deixam de ser válidas. A finalidade dessa seção é desenvolver um método mais geral, que pode ser utilizado quando a lei de Hooke não pode ser aplicada, para determinar a distribuição de tensões em um eixo de seção circular cheia, e para calcular o torque necessário para produzir um ângulo de torção.

Primeiro lembramos que nenhuma relação entre a tensão e a deformação específica foi considerada na Seção 3.3, quando provamos que a deformação de cisalhamento γ varia linearmente com a distância ρ do centro do eixo (Fig. 3.33).

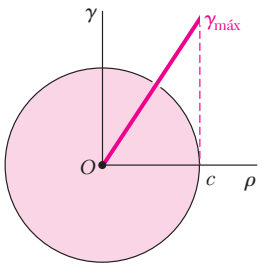


Fig. 3.33

Assim, podemos ainda usar essa propriedade em nossa análise atual e escrever

$$\gamma = \frac{\rho}{c}\gamma_{\text{máx}} \tag{3.4}$$

em que c é o raio do eixo.

Considerando que o valor máximo $\tau_{máx}$ da tensão de cisalhamento τ foi especificado, o gráfico de τ em função de ρ pode ser obtido da seguinte forma. Primeiro determinamos, por meio do gráfico tensão-deformação no cisalhamento, o valor de $\gamma_{máx}$ correspondente a $\tau_{máx}$ (Fig. 3.34), e usamos esse valor na Equação (3.4). Depois, para cada valor de ρ, determinamos o valor

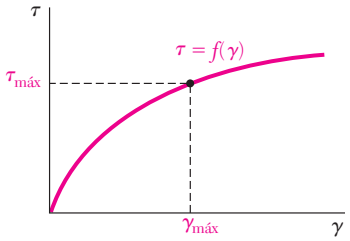


Fig. 3.34

correspondente de γ da Equação (3.4) ou da Fig. 3.33 e obtemos, do gráfico da tensão em função da deformação da Fig. 3.34, a tensão de cisalhamento τ correspondente a esse valor de γ. Construindo um gráfico de τ em função de ρ, obtemos a distribuição desejada de tensões (Fig. 3.35).

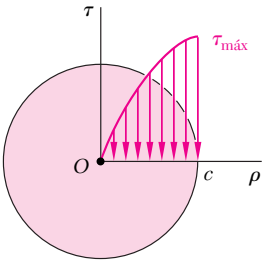


Fig. 3.35

Lembramos agora que, quando deduzimos a Equação (3.1) na Seção 3.2, não consideramos nenhuma relação particular entre tensão e deformação no cisalhamento. Podemos portanto utilizar a Equação (3.1) para determinar o torque **T** correspondente à distribuição de tensão de cisalhamento obtida na Fig. 3.35. Considerando um elemento anular de raio ρ e espessura $d\rho$, expressamos o elemento de área na Equação (3.1) como $dA = 2\pi\rho\, d\rho$ e escrevemos

$$T = \int_0^c \rho\tau(2\pi\rho\, d\rho)$$

ou

$$T = 2\pi \int_0^c \rho^2\tau\, d\rho \tag{3.26}$$

em que τ é a função de ρ representada na Fig. 3.35.

Se τ for uma função analítica conhecida de γ, a Equação (3.4) pode ser utilizada para expressar τ em função de ρ, e a integral em (3.26) pode ser determinada analiticamente. Em contrapartida, o torque **T** pode ser obtido por meio de uma integração numérica. Esse cálculo torna-se mais significativo se notarmos que a integral na Equação (3.26) representa o momento de segunda ordem, ou momento de inércia, com relação ao eixo vertical da área localizada acima do eixo horizontal e limitada pela curva de distribuição de tensões mostrada na Fig. 3.35.

Um valor importante do torque é o torque-limite T_L, que provoca a falha do eixo. Esse valor pode ser determinado por meio do limite da tensão de cisalhamento τ_L do material, impondo $\tau_{máx} = \tau_L$ e executando os cálculos indicados anteriormente. No entanto, considera-se mais conveniente na prática determinar T_L experimentalmente ensaiando um corpo de prova de um material, em torção, até que ele se rompa. Considerando uma distribuição linear fictícia de tensões, a Equação (3.9) é utilizada para determinar a tensão de cisalhamento máxima correspondente R_T:

$$R_T = \frac{T_L c}{J} \tag{3.27}$$

A tensão fictícia R_T é chamada de *módulo de ruptura em torção* de um material. Ela pode ser utilizada para determinar o torque-limite T_L de um eixo feito do mesmo material, mas de dimensões diferentes, resolvendo a Equação (3.27) para T_L. Como as distribuições de tensões real e linear fictícia mostradas na Fig. 3.36 devem resultar no mesmo valor T_L para o torque-limite, as

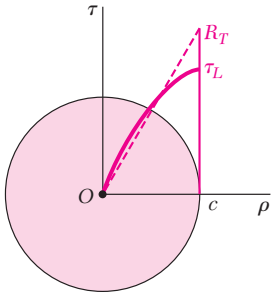


Fig. 3.36

áreas que elas definem precisam ter o mesmo momento de inércia com relação ao eixo vertical. É claro então que o módulo de ruptura R_T será sempre maior que o limite da tensão de cisalhamento real τ_L.

Em alguns casos, podemos querer determinar a distribuição de tensões e o torque **T** correspondente a determinado ângulo de torção ϕ. Isso pode ser feito lembrando a expressão obtida na Seção 3.3 para a deformação de cisalhamento γ em termos de ϕ, ρ, e o comprimento L do eixo:

$$\gamma = \frac{\rho\phi}{L} \tag{3.2}$$

Com ϕ e L dados, podemos determinar da Equação (3.2) o valor de γ correspondente a determinado valor de ρ. Utilizando o gráfico da tensão em função da deformação do material, podemos então obter o valor correspondente da tensão de cisalhamento τ e construir um gráfico de τ em função de ρ. Uma vez obtida a distribuição de tensão de cisalhamento, o *momento torçor* **T** pode ser determinado analiticamente ou numericamente conforme já explicado.

*3.10. Eixos circulares feitos de um material elastoplástico

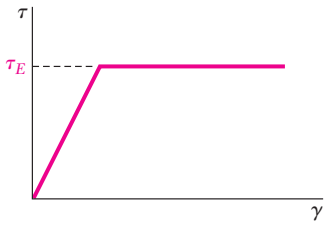


Fig. 3.37

Obtém-se um melhor conhecimento do comportamento plástico de um eixo em torção considerando o caso idealizado de um *eixo circular cheio feito de um material elastoplástico.* O gráfico da tensão de cisalhamento em função da deformação de cisalhamento desse material é mostrado na Fig. 3.37. Utilizando esse diagrama, podemos proceder conforme indicado anteriormente e determinar a distribuição de tensões por meio de uma seção do eixo para qualquer valor do *momento torçor* **T**.

Desde que a tensão de cisalhamento τ não exceda a tensão de escoamento τ_E, aplica-se a lei de Hooke, e a distribuição de tensão ao longo da seção é linear (Fig. 3.38*a*), com $\tau_{\text{máx}}$ dada pela Equação (3.9):

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc}{J} \tag{3.9}$$

À medida que o torque aumenta, $\tau_{máx}$ eventualmente atinge o valor τ_E (Fig. 3.38*b*). Substituindo esse valor na Equação (3.9), e resolvendo em relação ao valor correspondente de T, obtemos o valor T_E do *momento torçor* no início do escoamento:

$$T_E = \frac{J}{c}\tau_E \tag{3.28}$$

O valor obtido é conhecido como *momento torçor elástico máximo*, porque ele é o maior momento para o qual a deformação permanece totalmente elástica. Lembrando que, para um eixo circular cheio $J/c = \frac{1}{2}\pi c^3$, temos

$$T_E = \tfrac{1}{2}\pi c^3 \tau_E \tag{3.29}$$

À medida que o momento aumenta, desenvolve-se uma região plástica no eixo, ao redor de um núcleo elástico de raio ρ_E (Fig. 3.38*c*). Na região plástica a tensão é uniformemente igual a τ_E, enquanto no núcleo elástico a tensão varia linearmente com ρ e pode ser expressa como

$$\tau = \frac{\tau_E}{\rho_E}\rho \tag{3.30}$$

Se o momento T aumenta, a região plástica se expande até que, no limite, a deformação é totalmente plástica (Fig. 3.38*d*).

A Equação (3.26) será utilizada para determinar o valor do *momento torçor* T correspondente a determinado raio ρ_E do núcleo elástico. Lembrando que τ é dado pela Equação (3.30) para $0 \le \rho \le \rho_E$, e é igual a τ_E para $\rho_E \le \rho \le c$, escrevemos

$$\begin{aligned} T &= 2\pi \int_0^{\rho_E} \rho^2 \left(\frac{\tau_E}{\rho_E}\rho\right) d\rho + 2\pi \int_{\rho_E}^{c} \rho^2 \tau_E \, d\rho \\ &= \frac{1}{2}\pi\rho_E^3\tau_E + \frac{2}{3}\pi c^3\tau_E - \frac{2}{3}\pi\rho_E^3\tau_E \\ T &= \frac{2}{3}\pi c^3\tau_E\left(1 - \frac{1}{4}\frac{\rho_E^3}{c^3}\right) \end{aligned} \tag{3.31}$$

ou, em vista da Equação (3.29),

$$T = \frac{4}{3}T_E\left(1 - \frac{1}{4}\frac{\rho_E^3}{c^3}\right) \tag{3.32}$$

em que T_E é o *momento torçor* elástico máximo. Notamos que, à medida que ρ_E se aproxima de zero, o momento torçor se aproxima do valor-limite

$$T_p = \frac{4}{3}T_E \tag{3.33}$$

Esse valor do momento, que corresponde a uma deformação totalmente plástica (Fig. 3.38*d*), é chamado de *momento torçor plástico* do eixo considerado. Notamos que a Equação (3.33) é válida somente para um *eixo circular cheio feito de um material elastoplástico.*

Como a distribuição de *deformação* ao longo da seção permanece linear após o início do escoamento, a Equação (3.2) permanece válida e pode ser utilizada para expressar o raio ρ_E do núcleo elástico em termos do ângulo de torção ϕ. Se ϕ for suficientemente grande para provocar uma deformação

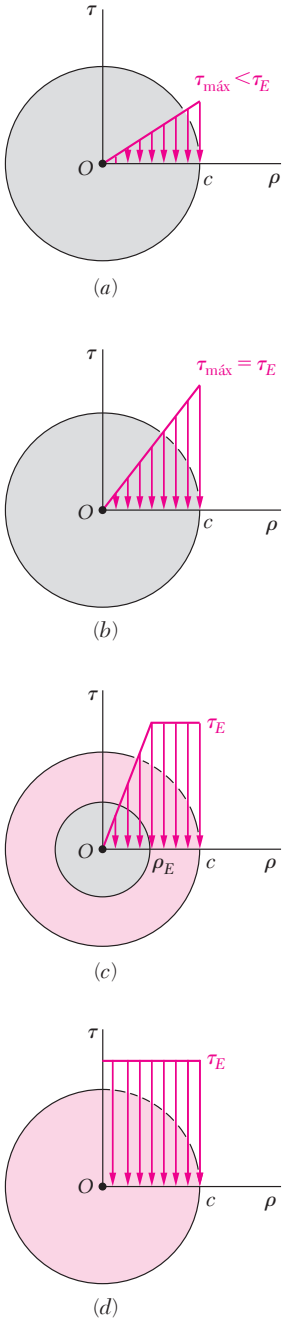


Fig. 3.38

plástica, o raio ρ_E do núcleo elástico é obtido fazendo-se γ igual à deformação de escoamento γ_E na Equação (3.2) e resolvendo para o valor correspondente ρ_E da distância ρ. Temos

$$\rho_E = \frac{L\gamma_E}{\phi} \tag{3.34}$$

Vamos chamar de ϕ_E o ângulo de torção no início do escoamento, isto é, quando $\rho_E = c$. Fazendo $\phi = \phi_E$, e $\rho_E = c$ na Equação (3.34), temos

$$c = \frac{L\gamma_E}{\phi_E} \tag{3.35}$$

Dividindo (3.34) por (3.35), membro a membro, obtemos a seguinte relação:†

$$\frac{\rho_E}{c} = \frac{\phi_E}{\phi} \tag{3.36}$$

Se usarmos na Equação (3.32) a expressão obtida para ρ_E/c, expressamos o *momento torçor* T como uma função do ângulo de torção ϕ,

$$T = \frac{4}{3}T_E\left(1 - \frac{1}{4}\frac{\phi_E^3}{\phi^3}\right) \tag{3.37}$$

em que T_E e ϕ_E representam, respectivamente, o *momento torçor* e o ângulo de torção no início do escoamento. Note que a Equação (3.37) pode ser utilizada somente para valores de ϕ maiores do que ϕ_E. Para $\phi < \phi_E$, a relação entre T e ϕ é linear e dada pela Equação (3.16). Combinando ambas as equações, obtemos o gráfico de T em função de ϕ representado na Fig. 3.39. Verificamos que, à medida que ϕ cresce indefinidamente, T aproxima-se do valor-limite $T_P = \frac{4}{3}T_E$ correspondente ao caso de uma zona totalmente plastificada (Fig. 3.38*d*). Embora o valor T_p na realidade não possa ser atingido, notamos pela Equação (3.37) que ele se aproxima rapidamente conforme ϕ aumenta. Para $\phi = 2\phi_E$, T está a uma distância de aproximadamente 3% de T_p, e para $\phi = 3\phi_E$, de aproximadamente 1%.

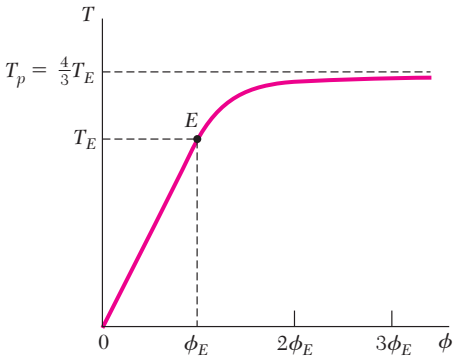


Fig. 3.39

Como o gráfico de T em função de ϕ, obtido para um material elasto-plástico ideal (Fig. 3.39), difere muito do gráfico tensão-deformação de cisalhamento daquele material (Fig. 3.37), está claro que o gráfico da tensão-deformação de cisalhamento de um material real não pode ser obtido diretamente de um ensaio de torção executado em uma barra circular cheia feita com aquele material. No entanto, pode ser obtido um gráfico razoavelmente preciso por meio de um ensaio de torção, se o corpo de prova utilizado possuir uma parte tubular em que a seção seja de parede fina.‡ Sem dúvida, podemos considerar que nessa parte, a tensão de cisalhamento τ terá um valor constante. A Equação (3.1), portanto, se reduz a

$$T = \rho A\tau$$

em que ρ é o raio médio do tubo e A, sua área de seção transversal. A tensão de cisalhamento é então proporcional ao *momento torçor*, e valores sucessivos de τ podem ser facilmente calculados por meio dos valores correspondentes de T. Em contrapartida, os valores da deformação de cisalhamento γ podem ser obtidos da Equação (3.2) e dos valores de ϕ e L medidos na parte tubular do corpo de prova.

†A Equação (3.36) aplica-se a qualquer material dúctil com um ponto de escoamento bem definido, pois sua determinação é independente da forma do gráfico da tensão em função da deformação além do ponto de escoamento.

‡Para minimizar a possibilidade de falha por flambagem, o corpo de prova deverá ser feito com o comprimento da parte tubular menor que seu diâmetro.

EXEMPLO 3.8

Um eixo circular cheio, com 1,2 m de comprimento e 50 mm de diâmetro, está submetido a um torque de 4,60 kN · m em cada extremidade (Fig. 3.40). Considerando que o eixo é feito de um material elastoplástico com uma tensão de escoamento em cisalhamento de 150 MPa e um módulo de elasticidade transversal de 77 GPa, determine (*a*) o raio do núcleo elástico e (*b*) o ângulo de torção do eixo.

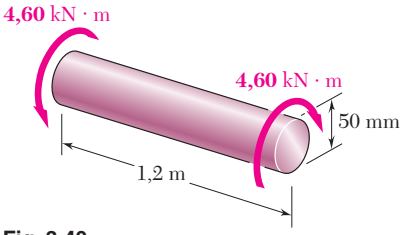


Fig. 3.40

(a) Raio do núcleo elástico. Primeiro determinamos o torque T_E no início do escoamento. Utilizando a Equação (3.28) com $\tau_E = 150$ MPa, $c = 25$ mm e

$$J = \tfrac{1}{2}\pi c^4 = \tfrac{1}{2}\pi(25 \times 10^{-3}\text{ m})^4 = 614 \times 10^{-9}\text{ m}^4$$

escrevemos

$$T_E = \frac{J\tau_E}{c} = \frac{(614 \times 10^{-9}\text{ m}^4)(150 \times 10^{6}\text{ Pa})}{25 \times 10^{-3}\text{ m}} = 3{,}68\text{ kN} \cdot \text{m}$$

Resolvendo a Equação (3.32) para $(\rho_E/c)^3$ e substituindo os valores de T e T_E, temos

$$\left(\frac{\rho_E}{c}\right)^3 = 4 - \frac{3T}{T_E} = 4 - \frac{3(4{,}60\text{ kN} \cdot \text{m})}{3{,}68\text{ kN} \cdot \text{m}} = 0{,}250$$

$$\frac{\rho_E}{c} = 0{,}630 \qquad \rho_E = 0{,}630(25\text{ mm}) = 15{,}8\text{ mm}$$

(b) Ângulo de torção. Primeiramente, determinamos o ângulo de torção ϕ_E no início do escoamento da Equação (3.16):

$$\phi_E = \frac{T_E L}{JG} = \frac{(3{,}68 \times 10^{3}\text{ N} \cdot \text{m})(1{,}2\text{ m})}{(614 \times 10^{-9}\text{ m}^4)(77 \times 10^{9}\text{ Pa})} = 93{,}4 \times 10^{-3}\text{ rad}$$

Resolvendo a Equação (3.36) para ϕ e substituindo os valores obtidos para ϕ_E e ρ_E/c, escrevemos

$$\phi = \frac{\phi_E}{\rho_E/c} = \frac{93{,}4 \times 10^{-3}\text{ rad}}{0{,}630} = 148{,}3 \times 10^{-3}\text{ rad}$$

ou

$$\phi = (148{,}3 \times 10^{-3}\text{ rad})\left(\frac{360^\circ}{2\pi\text{ rad}}\right) = 8{,}50^\circ$$

*3.11. Tensão residual em eixos circulares

Nas duas seções anteriores, vimos que em um eixo submetido a um *momento torçor* suficientemente alto, desenvolve-se uma região plástica, e que as tensões de cisalhamento τ em qualquer ponto nessa região podem ser obtidas do gráfico de tensão em função da deformação de cisalhamento da Fig. 3.34. Se o *momento torçor* for removido, a redução da tensão e da deformação que ocorrerá no ponto considerado ocorrerá ao longo de uma linha reta (Fig. 3.41). Conforme será visto mais adiante nesta seção, o valor final da tensão em geral não será zero. Haverá uma tensão residual em muitos pontos, e ela pode ser positiva ou negativa. Notamos que, como no caso das tensões normais, a tensão de cisalhamento continuará diminuindo até atingir um valor igual ao seu valor máximo em *C* menos duas vezes a tensão de escoamento do material.

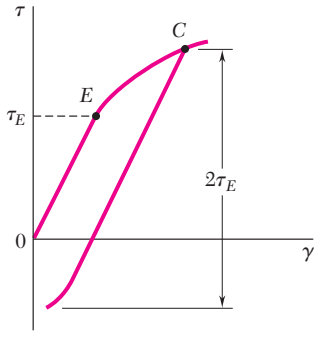


Fig. 3.41

Considere novamente o caso ideal do material elastoplástico caracterizado pelo gráfico da tensão em função da deformação de cisalhamento da Fig. 3.37. Considerando que a relação entre τ e γ em qualquer ponto do eixo permanece linear desde que a tensão não caia por mais do que $2\tau_E$, podemos utilizar a Equação (3.16) para obter o ângulo por meio do qual o eixo desfaz a rotação de torção à medida que o *momento torçor* volta a zero. Consequentemente, o descarregamento do eixo será representado por uma linha reta no gráfico T-ϕ (Fig. 3.42). Notamos que o ângulo de torção não retorna a zero depois que o *momento torçor* é removido. Sem dúvida, o carregamento e o descarregamento do eixo resultam em uma deformação permanente caracterizada pelo ângulo

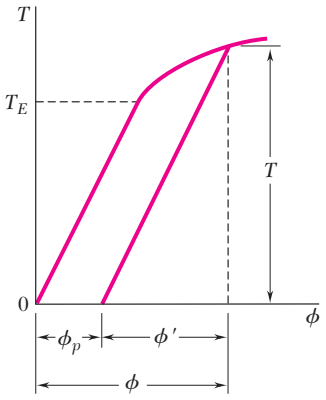


Fig. 3.42

$$\phi_p = \phi - \phi' \tag{3.38}$$

em que ϕ corresponde à fase de carregamento e pode ser obtido de T resolvendo a Equação (3.38), e na qual ϕ' corresponde à fase de descarregamento e pode ser obtido da Equação (3.16).

As tensões residuais em um material elastoplástico são obtidas aplicando-se o princípio da superposição de uma maneira similar àquela descrita na Seção 2.20 para um carregamento axial. Não obstante, consideramos as tensões decorrentes da aplicação do *momento torçor* **T** e, simultaneamente, as tensões decorrentes do *momento torçor* igual e oposto aplicado para descarregar o eixo. O primeiro grupo de tensões reflete o comportamento elastoplástico do material durante a fase de carregamento (Fig. 3.43*a*), e o segundo grupo, o

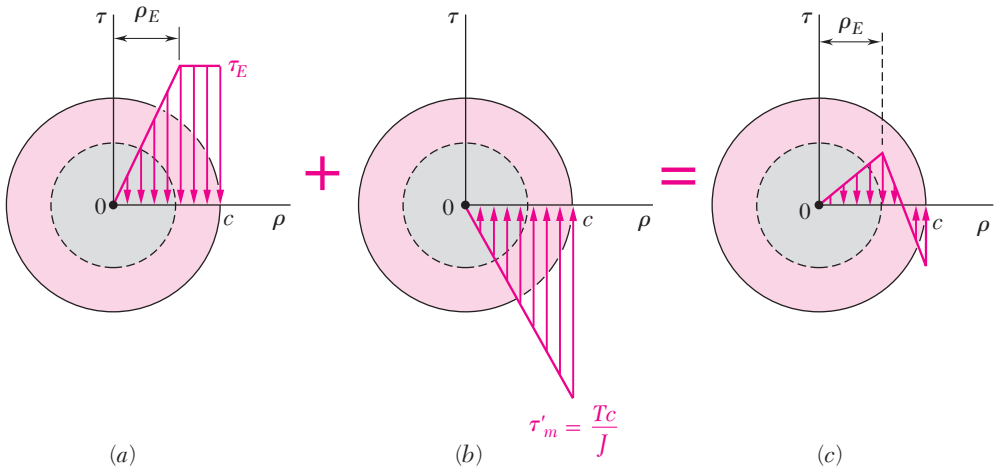


Fig. 3.43

comportamento linear do mesmo material durante a fase de descarregamento (Fig. 3.43*b*). Somando os dois grupos de tensões, obtemos a distribuição das tensões residuais no eixo (Fig. 3.43*c*).

Notamos da Fig. 3.43*c* que algumas tensões residuais têm o mesmo sentido das tensões originais, enquanto outras têm o sentido oposto. Isso era esperado, pois, de acordo com a Equação (3.1), a relação

$$\int \rho(\tau \, dA) = 0 \tag{3.39}$$

deve ser verificada depois que o *momento torçor* foi removido.

EXEMPLO 3.9

Para o eixo do Exemplo 3.8, determine (*a*) o ângulo de torção permanente e (*b*) a distribuição de tensões residuais, depois que o torque de 4,60 kN · m foi removido.

(a) Ângulo de torção permanente. Recordamos do Exemplo 3.8 que o ângulo de torção correspondente ao torque dado é $\phi = 8{,}50°$. O ângulo ϕ' por meio do qual o eixo desfaz a rotação de torção, quando o torque é removido, é obtido da Equação (3.16). Substituindo os dados fornecidos,

$$T = 4{,}60 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$L = 1{,}2 \text{ m}$$

$$G = 77 \times 10^9 \text{ Pa}$$

e o valor $J = 614 \times 10^{-9} \text{ m}^4$ obtido na solução do Exemplo 3.8, temos

$$\phi' = \frac{TL}{JG} = \frac{(4{,}60 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m})(1{,}2 \text{ m})}{(614 \times 10^{-9} \text{ m}^4)(77 \times 10^9 \text{ Pa})} = 116{,}8 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

ou

$$\phi' = (116{,}8 \times 10^{-3} \text{ rad}) \frac{360°}{2\pi \text{ rad}} = 6{,}69°$$

O ângulo de torção permanente é, portanto

$$\phi_p = \phi - \phi' = 8{,}50° - 6{,}69° = 1{,}81°$$

(b) Tensões residuais. Recordamos do Exemplo 3.8 que a tensão de escoamento é $\tau_E = 150$ MPa e que o raio do núcleo elástico correspondente ao torque dado é $\rho_E = 15{,}8$ mm. A distribuição das tensões no eixo durante o carregamento é mostrada na Fig. 3.44*a*.

A distribuição de tensões em razão do torque oposto de 4,60 kN · m necessário para descarregar o eixo é linear e está ilustrada na Fig. 3.44*b*. A tensão máxima na distribuição de tensões reversas é obtida da Equação (3.9):

$$\tau'_{\text{máx}} = \frac{Tc}{J} = \frac{(4{,}60 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m})(25 \times 10^{-3} \text{ m})}{614 \times 10^{-9} \text{ m}^4} = 187{,}3 \text{ MPa}$$

Superpondo as duas distribuições de tensões, obtemos as tensões residuais mostradas na Fig. 3.44*c*. Verificamos que, apesar das tensões reversas excederem a tensão de escoamento τ_E, a suposição de uma distribuição linear dessas tensões é válida, pois elas não excedem $2\tau_E$.

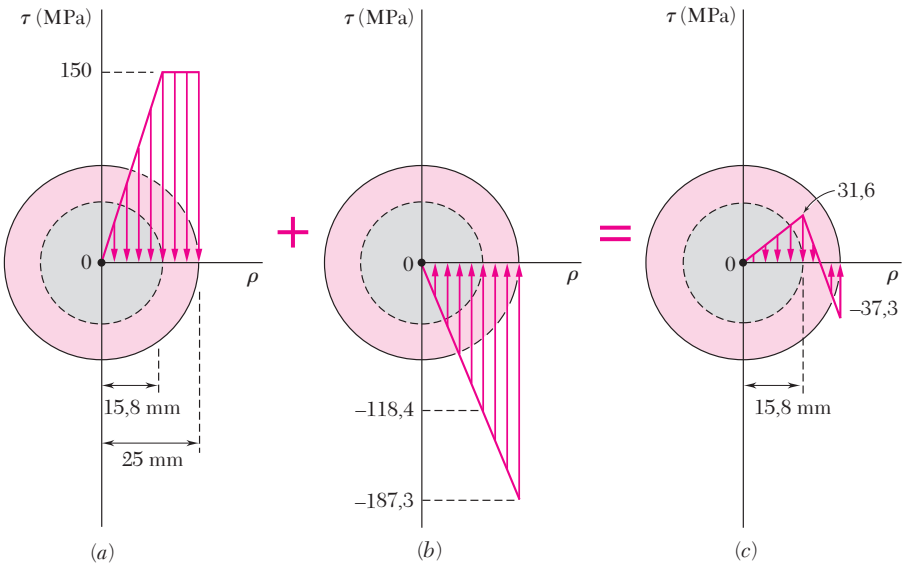
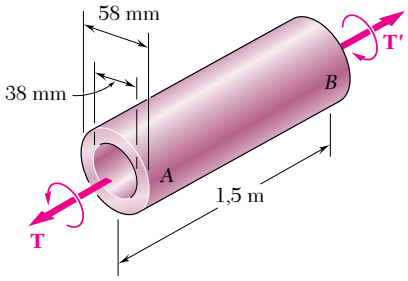


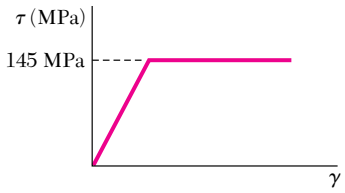
Fig. 3.44



PROBLEMA RESOLVIDO 3.7

O eixo *AB* é feito de um aço doce considerado elastoplástico com $G = 77{,}2$ GPa e $\tau_E = 145$ MPa. Um torque **T** é aplicado e gradualmente aumentado em sua intensidade. Determine a intensidade de **T** e o ângulo de torção correspondente (*a*) quando se inicia o escoamento e (*b*) quando a deformação da seção transversal já se tornou totalmente plástica.

SOLUÇÃO

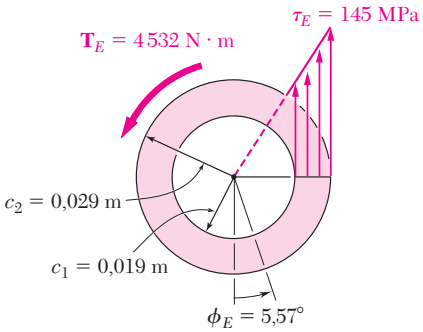


Propriedades geométricas

As propriedades geométricas da seção transversal são

$$c_1 = \tfrac{1}{2}(0{,}038\text{ m}) = 0{,}019\text{ m} \qquad c_2 = \tfrac{1}{2}(0{,}058\text{ m}) = 0{,}029\text{ m}$$

$$J = \tfrac{1}{2}\pi(c_2^4 - c_1^4) = \tfrac{1}{2}\pi[(0{,}029\text{ m})^4 - (0{,}019\text{ m})^4] = 90{,}63 \times 10^{-8}\text{ m}^4$$



***a*. Início do escoamento.** Para $\tau_{máx} = \tau_E = 145$ MPa, encontramos

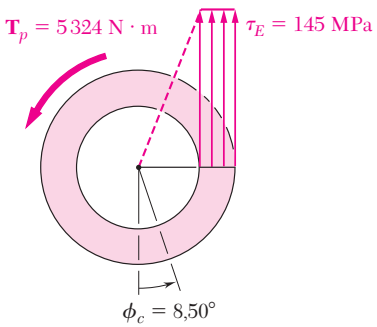
$$T_E = \frac{\tau_E J}{c_2} = \frac{(145 \times 10^6\text{ N/m}^2)(90{,}63 \times 10^{-8}\text{ m}^4)}{0{,}029\text{ m}}$$

$$T_E = 4\,532\text{ N} \cdot \text{m} \blacktriangleleft$$

Fazendo $\rho = c_2$ e $\gamma = \gamma_E$ na Equação (3.2) e resolvendo em função de ϕ, obtemos o valor de ϕ_E:

$$\phi_E = \frac{\gamma_E L}{c_2} = \frac{\tau_E L}{c_2 G} = \frac{(145 \times 10^6\text{ N/m}^2)(1{,}5\text{ m})}{(0{,}029\text{ m})(77{,}2 \times 10^9\text{ N/m}^2)} = 0{,}097\text{ rad}$$

$$\phi_E = 5{,}57° \blacktriangleleft$$



***b*. Deformação totalmente plástica.** Quando a zona plástica atinge a superfície interna, as tensões são distribuídas uniformemente, como mostra a figura. Utilizando a Equação (3.26), escrevemos

$$T_p = 2\pi\tau_E \int_{c_1}^{c_2} \rho^2\, d\rho = \tfrac{2}{3}\pi\tau_E(c_2^3 - c_1^3)$$

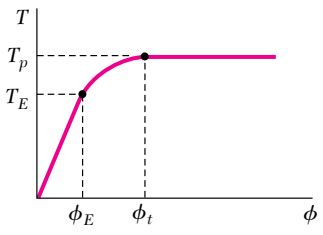
$$= \tfrac{2}{3}\pi(145 \times 10^6\text{ N/m}^2)[(0{,}029\text{ m})^3 - (0{,}019\text{ m})^3]$$

$$T_p = 5\,324\text{ N} \cdot \text{m} \blacktriangleleft$$

Quando ocorre o escoamento na superfície interna, a seção transversal está totalmente sob deformação plástica; temos da Equação (3.2):

$$\phi_c = \frac{\gamma_E L}{c_1} = \frac{\tau_E L}{c_1 G} = \frac{(145 \times 10^6\text{ N/m}^2)(1{,}5\text{ m})}{(0{,}019\text{ m})(77{,}2 \times 10^9\text{ N/m}^2)} = 0{,}148\text{ rad}$$

$$\phi_c = 8{,}50° \blacktriangleleft$$



Para ângulos de torção maiores, o torque permanece constante; o gráfico de T em função de ϕ do eixo é aquele mostrado na figura.

PROBLEMA RESOLVIDO 3.8

Para o eixo do Problema Resolvido 3.7, determine as tensões residuais e o ângulo permanente de torção depois que o torque $T_p = 5\,324$ N · m foi removido.

SOLUÇÃO

Referindo-nos ao Problema Resolvido 3.7, recordamos que, quando a zona plástica atingiu a superfície interna, o torque aplicado era $T_p = 5\,324$ N · m e o ângulo de torção correspondente era $\phi_c = 8{,}50°$. Esses valores são mostrados na Fig. 1.

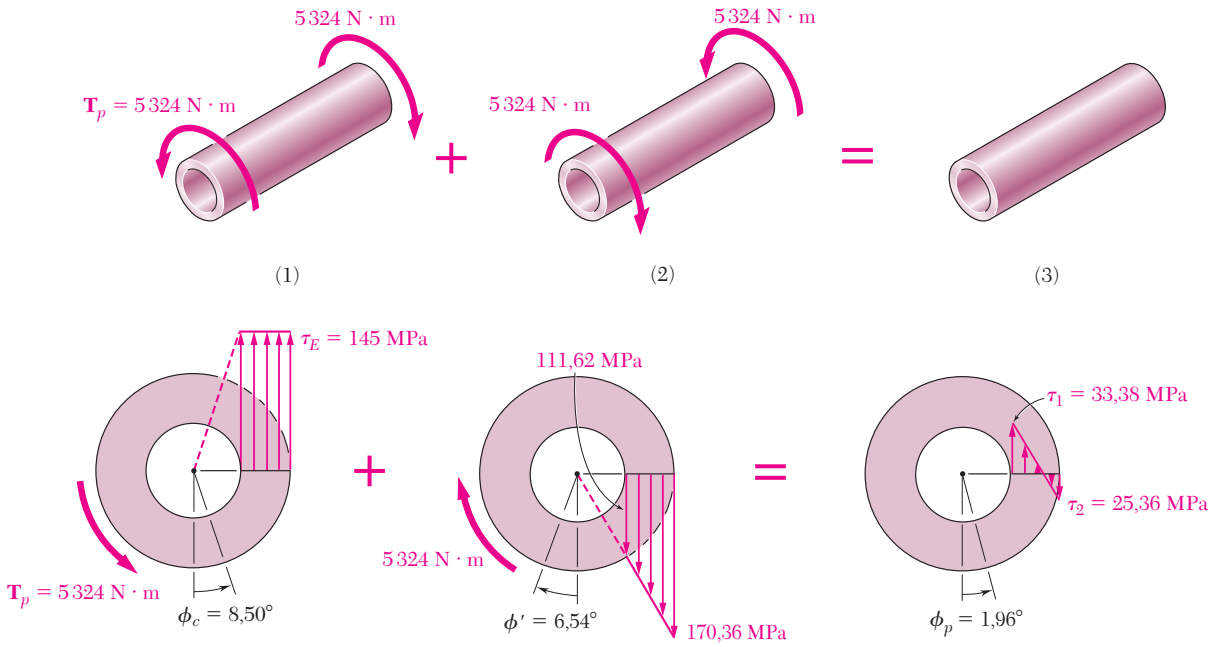
Descarregamento elástico. Descarregamos o eixo aplicando um torque de 5 324 N · m no sentido mostrado na Fig. 2. Durante esse descarregamento, o comportamento do material é linear. Utilizando os valores encontrados para c_1, c_2 e J no Problema Resolvido 3.7, obtemos as seguintes tensões e ângulo de torção:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc_2}{J} = \frac{(5\,324\text{ N}\cdot\text{m})(0{,}029\text{ m})}{90{,}63 \times 10^{-8}\text{ m}^4} = 170{,}36\text{ MPa}$$

$$\tau_{\text{mín}} = \tau_{\text{máx}}\frac{c_1}{c_2} = (170{,}36\text{ MPa})\frac{0{,}019\text{ m}}{0{,}029\text{ m}} = 111{,}62\text{ MPa}$$

$$\phi' = \frac{TL}{JG} = \frac{(5\,324\text{ N}\cdot\text{m})(15\text{ m})}{(90{,}63 \times 10^{-8}\text{ m}^4)(77{,}2 \times 10^{9}\text{ N/m}^2)} = 0{,}1141\text{ rad} = 6{,}54°$$

Tensões residuais e ângulo de torção permanente. Os resultados do carregamento (Fig. 1) e do descarregamento (Fig. 2) são superpostos (Fig. 3) para obter as tensões residuais e o ângulo de torção permanente ϕ_P.



PROBLEMAS

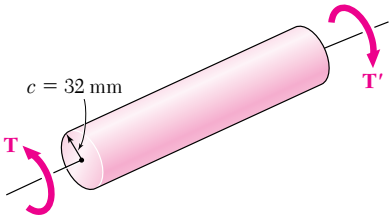


Fig. P3.92

3.92 O eixo circular de seção cheia mostrado na figura é feito de um aço considerado elastoplástico com $\tau_E = 145$ MPa. Determine a intensidade T do torque aplicado quando a zona plástica tem (*a*) 16 mm de profundidade e (*b*) 24 mm de profundidade.

3.93 Uma barra de seção cheia de 31,8 mm de diâmetro é feita de um material elastoplástico com $\tau_E = 34{,}5$ MPa. Sabendo que o núcleo elástico da barra tem um diâmetro de 25,4 mm, determine a intensidade do torque aplicado à barra.

3.94 Um eixo de seção transversal cheia de 50,8 mm de diâmetro é feito de um aço doce considerado elastoplástico com $\tau_E = 138$ MPa. Determine a tensão de cisalhamento máxima e o raio do núcleo elástico provocado pela aplicação de um torque de intensidade (*a*) 3,4 kN · m e (*b*) 4,5 kN · m.

3.95 O eixo de aço doce mostrado na figura é considerado elastoplástico com $G = 77{,}2$ GPa e $\tau_E = 145$ MPa. Determine a máxima tensão de cisalhamento e o raio do núcleo elástico causado pela aplicação de um torque de intensidade (*a*) $T = 600$ N · m e (*b*) $T = 1\,000$ N · m.

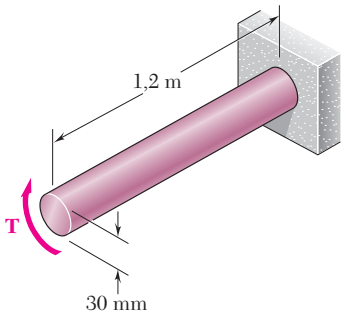


Fig. *P3.95* e P3.96

3.96 O eixo sólido mostrado é feito de aço doce considerado elastoplástico com $\tau_E = 145$ MPa. Determine o raio do núcleo elástico causado pela aplicação de um torque igual a 1,1 T_E, em que T_E é a intensidade do torque no limiar do escoamento.

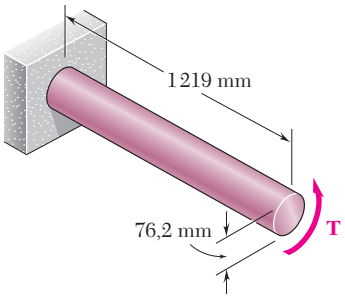


Fig. P3.98

3.97 Observa-se que um clipe de papel pode ser girado por várias voltas com a aplicação de um torque de aproximadamente 60 mN · m. Sabendo que o diâmetro do fio utilizado no clipe é de 0,9 mm, determine o valor aproximado da tensão de escoamento do aço.

3.98 Um eixo circular sólido mostrado é feito de um aço considerado elastoplástico com $\tau_E = 144{,}8$ MPa e $G = 77{,}2$ GPa. Determine o ângulo de giro causado pela aplicação de um torque com intensidade (*a*) $T = 9\,038$ kN · mm e (*b*) $T = 14\,687$ kN · mm.

3.99 Para o eixo de seção circular do Problema 3.95, determine o ângulo de giro causado pela aplicação de um torque de intensidade (*a*) $T = 600$ N · m e (*b*) $T = 1\,000$ N · m.

3.100 O eixo *AB* é feito de um material elastoplástico com $\tau_E = 90$ MPa e $G = 30$ GPa. Para o carregamento mostrado, determine (*a*) o raio do núcleo elástico da seção transversal do eixo e (*b*) o ângulo de torção na extremidade *B*.

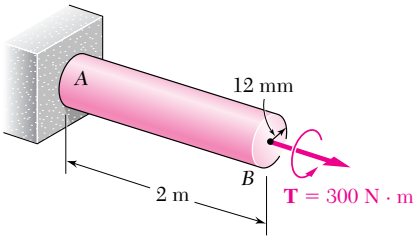


Fig. P3.100

3.101 Um eixo circular de seção transversal cheia com 31,8 mm de diâmetro é feito de um material considerado elastoplástico com $\tau_E = 124$ MPa e $G = 77{,}2$ GPa. Para um comprimento de 2 438 mm do eixo, determine a tensão de cisalhamento máxima e o ângulo de torção provocado por um torque de 847,3 N · m.

3.102 Um eixo circular de seção transversal cheia com 19 mm de diâmetro é feito de um material considerado elastoplástico com $\tau_E = 138$ MPa e $G = 77{,}2$ GPa. Para um comprimento de 1 219 mm do eixo, determine a tensão de cisalhamento máxima e o ângulo de torção provocado por um torque de 203,4 N · m.

3.103 Uma barra circular cheia é feita de um material considerado elastoplástico. Chamando de $\boldsymbol{\tau}_E$ e ϕ_E, respectivamente, o torque e o ângulo de torção no início do escoamento, determine o ângulo de torção se o torque for aumentado para (*a*) $T = 1{,}1\ T_E$, (*b*) $T = 1{,}25\ T_E$ e (*c*) $T_E = 1{,}3\ T_E$.

3.104 Uma barra de seção circular com 914,4 mm de comprimento tem um diâmetro de 63,5 mm e é feita de aço doce considerado elastoplástico com $\tau_E = 144{,}8$ MPa e $G = 77{,}2$ GPa. Determine o torque necessário para produzir um ângulo de torção de (*a*) 2,5° e (*b*) 5,0°.

3.105 Para o eixo de seção circular do Problema 3.95, determine (*a*) a intensidade do torque *T* necessário para que o eixo sofra um giro de 15° e (*b*) o raio do correspondente núcleo elástico.

3.106 Um eixo de seção vazada tem 0,9 m de comprimento e a seção transversal mostrada. O aço é considerado elastoplástico com $\tau_E = 180$ MPa e $G = 77{,}2$ GPa. Determine o torque aplicado e o correspondente ângulo de giro (*a*) no limiar do escoamento e (*b*) quando a zona plástica atinge 10 mm de profundidade.

3.107 Um eixo de seção vazada tem 0,9 m de comprimento e a seção transversal mostrada. O aço é considerado elastoplástico com $\tau_E = 180$ MPa e $G = 77{,}2$ GPa. Determine (*a*) o ângulo de giro quando a seção se torna inteiramente plástica e (*b*) a correspondente intensidade do torque aplicado.

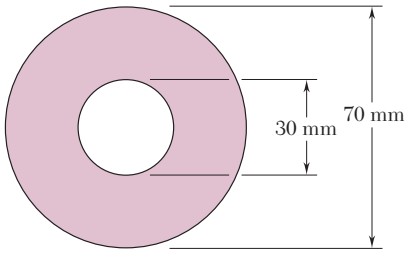


Fig. P3.106 e P3.107

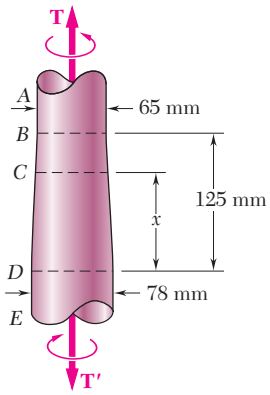


Fig. P3.108

3.108 Uma barra de aço é usinada até a forma mostrada na figura, para obter um eixo cônico de seção transversal cheia ao qual são aplicados torques de intensidade $T = 8\,473$ kN · mm. Considerando que o aço seja elastoplástico com $\tau_E = 144{,}8$ MPa e $G = 77{,}2$ GPa, determine (*a*) o raio do núcleo elástico na parte *AB* do eixo e (*b*) o comprimento da parte *CD* que permanece totalmente elástica.

3.109 Se os torques aplicados ao eixo cônico do Problema 3.108 forem aumentados lentamente, determine (*a*) a intensidade *T* dos maiores torques que podem ser aplicados ao eixo e (*b*) o comprimento da parte *CD* que permanece totalmente elástica.

3.110 Utilizando o diagrama tensão-deformação mostrado, determine (*a*) o torque que causa a máxima tensão de cisalhamento de 103,4 MPa em uma haste sólida com 20,3 mm de diâmetro e (*b*) o correspondente ângulo de giro para a distância de 508 mm da haste.

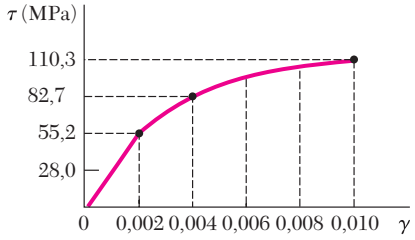


Fig. *P3.110* e *P3.111*

3.111 Um eixo de seção vazada com diâmetros externo e interno respectivamente iguais a 15,24 mm e 5,08 mm é fabricado a partir de uma liga de alumínio para a qual o diagrama tensão-deformação é o mostrado. Determine o torque necessário para produzir um giro de 10° em um eixo de 228,6 mm de comprimento.

3.112 Uma barra de alumínio de seção cheia, de 40 mm de diâmetro, está submetida a um torque que produz uma deformação de cisalhamento máxima de 0,008. Utilizando o gráfico de τ em função de γ para a liga de alumínio utilizada, determine (*a*) a intensidade do torque aplicado à barra e (*b*) o ângulo de torção para uma barra de 750 mm de comprimento.

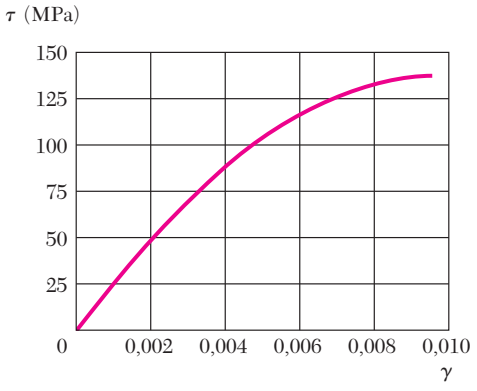


Fig. P3.112

3.113 A curva mostrada na Fig. P3.112 pode ser aproximada pela relação

$$\tau = 27{,}8 \times 10^{9}\gamma - 1{,}390 \times 10^{12}\gamma^{2}$$

Utilizando essa relação e as Equações (3.2) e (3.26), resolva o Problema 3.112.

3.114 A barra circular de seção cheia *AB* é feita de aço elastoplástico com $\tau_E = 151{,}7$ MPa e $G = 77{,}2$ GPa. Sabendo que um torque $T = 8\,473$ kN · mm é aplicado à barra e depois removido, determine a tensão de cisalhamento residual máxima na barra.

3.115 No Problema 3.114, determine o ângulo de torção permanente da barra.

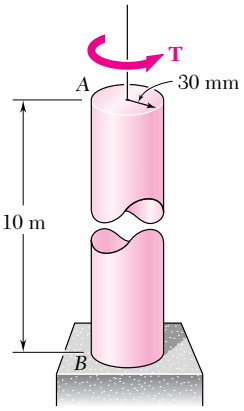


Fig. P3.114

3.116 O eixo vazado da figura é feito de aço elastoplástico com $\tau_E = 145$ MPa e $G = 77{,}2$ GPa. A intensidade T dos torques é lentamente incrementada até que a região plástica atinja a superfície interna do eixo; os torques são então removidos. Determine a intensidade e a localização da máxima tensão de cisalhamento residual na barra.

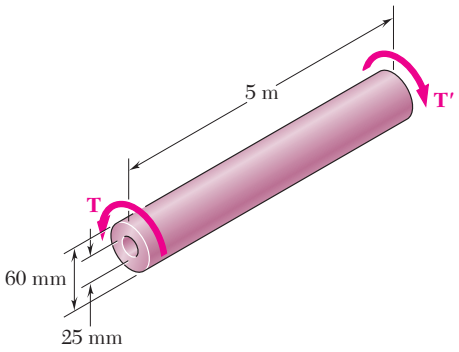


Fig. *P3.116*

3.117 No Problema 3.116, determine o ângulo de torção permanente da barra.

3.118 A seção transversal cheia mostrada é feita de aço elastoplástico com $\tau_E = 145$ MPa e $G = 77{,}2$ GPa. O torque é aumentado em intensidade até que o eixo tenha sido girado de 6°; em seguida, o torque é removido. Determine (*a*) a intensidade e a localização da tensão de cisalhamento residual máxima e (*b*) o ângulo de torção permanente.

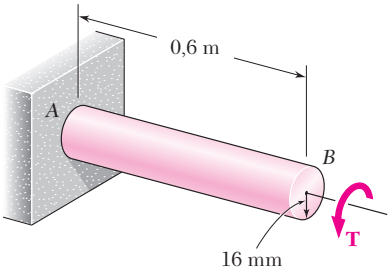


Fig. P3.118

3.119 Um torque **T** aplicado a uma barra de seção cheia feita de material elastoplástico é aumentado até que a seção dessa barra esteja totalmente plastificada; em seguida o torque **T** é removido. (*a*) Mostre que a distribuição de tensões de cisalhamento residuais é a representada na figura. (*b*) Determine a intensidade do torque em virtude das tensões que agem na parte da barra localizada dentro de um círculo de raio c_0.

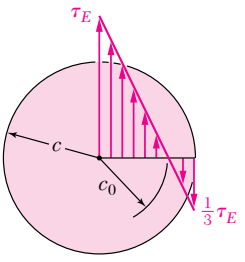


Fig. P3.119

3.120 Depois que o eixo de seção cheia do Problema 3.118 foi carregado e descarregado conforme descrito no problema, um torque $\mathbf{T}_1$ de sentido oposto ao torque **T** original é aplicado ao eixo. Considerando que não haja alteração no valor de ϕ_E, determine o ângulo de giro ϕ_1 para o qual se inicia o escoamento neste segundo carregamento e compare-o com o ângulo ϕ_E para o qual inicia-se o escoamento no carregamento original.

*3.12. Torção de elementos de seção não circular

As fórmulas obtidas nas Seções 3.3 e 3.4 para as distribuições de deformação e tensão sob um carregamento torcional aplicam-se somente a elementos com uma seção transversal circular. Sem dúvida, as deduções foram fundamentadas na hipótese de que a seção transversal do elemento permanecia plana e indeformável; e vimos na Seção 3.3 que a validade dessa hipótese depende da *axissimetria* do elemento, isto é, depende do fato de que sua aparência permaneça a mesma quando ele é visto de uma posição fixa e girado sobre seu eixo por um ângulo arbitrário.

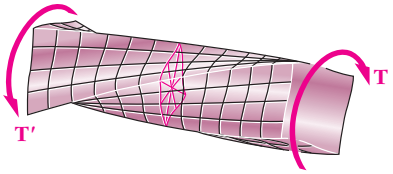


Fig. 3.45

Não obstante, uma barra quadrada mantém a mesma aparência somente quando é girada em 90° ou 180°. Seguindo uma linha de raciocínio similar àquela utilizada na Seção 3.3, pode-se mostrar que as diagonais da seção transversal quadrada da barra e as linhas que unem os pontos médios dos lados daquela seção permanecem retas (Fig. 3.45). No entanto, por causa da falta de axissimetria da barra, qualquer outra linha traçada em sua seção transversal se deformará quando a barra for girada, e a própria seção transversal empenará ficando fora de seu plano original.

Conclui-se que as Equações (3.4) e (3.6), que definem, respectivamente, as distribuições de deformação e tensão elásticas em um eixo de seção circular, não podem ser utilizadas para elementos de seção não circulares. Por exemplo, seria errado supor que a tensão de cisalhamento na seção transversal de uma barra quadrada varie linearmente com a distância a partir do centro da barra e seja, portanto, maior nos cantos da seção transversal. Como será visto, a tensão de cisalhamento na realidade é zero nesses pontos.

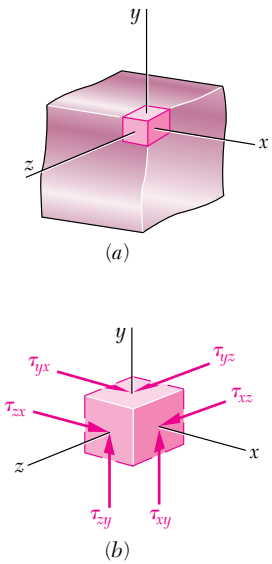


Fig. 3.46

Considere um pequeno elemento cúbico localizado em um dos cantos da seção transversal de uma barra quadrada submetida a momento torçor e selecione eixos coordenados paralelos às arestas do elemento (Fig. 3.46*a*). Como a face do elemento perpendicular ao eixo y é parte da superfície livre da barra, todas as tensões nessa face devem ser zero. Referindo-nos à Fig. 3.46*b*, escrevemos

$$\tau_{yx} = 0 \qquad \tau_{yz} = 0 \tag{3.40}$$

Pela mesma razão, todas as tensões na face do elemento perpendicular ao eixo z devem ser zero, e escrevemos

$$\tau_{zx} = 0 \qquad \tau_{zy} = 0 \tag{3.41}$$

Conclui-se da primeira das Equações (3.40) e da primeira das Equações (3.41) que

$$\tau_{xy} = 0 \qquad \tau_{xz} = 0 \tag{3.42}$$

Assim, ambas as componentes da tensão de cisalhamento na face do elemento perpendicular ao centro da barra são iguais a zero. Portanto, não há tensão de cisalhamento nos cantos da seção transversal da barra.

Ao se torcer um modelo de borracha de uma barra de seção transversal quadrada, pode-se verificar facilmente que não há deformações e, portanto, não há tensões que ocorrem ao longo das arestas da barra, enquanto as maiores deformações, ou seja, as maiores tensões ocorrem ao longo do centro de cada uma das faces da barra (Fig. 3.47).

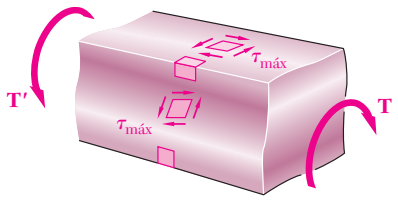


Fig. 3.47

A determinação das tensões em barras de seção transversal não circular submetidas a um carregamento torcional está além do escopo deste texto. No entanto, os resultados obtidos da teoria da elasticidade para barras retas com uma *seção transversal retangular uniforme* serão indicados aqui por conveniência.† Chamando de L o comprimento da barra, por a e b, respectivamente,

†Ver TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N. *Theory of Elasticity*, 3. ed. Nova York: McGraw-Hill, 1969, Seção 109.

o lado maior e o lado menor de sua seção transversal, e por T a intensidade dos *momentos torçores* aplicados à barra (Fig. 3.48), vemos que a tensão de

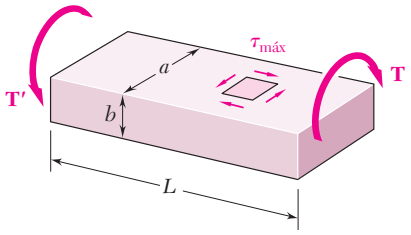


Fig. 3.48

cisalhamento máxima ocorre ao longo da linha de centro da face *maior* da barra e é igual a

$$\tau_{máx} = \frac{T}{c_1 ab^2} \tag{3.43}$$

O ângulo de torção, entretanto, pode ser expresso como

$$\phi = \frac{TL}{c_2 ab^3 G} \tag{3.44}$$

Os coeficientes c_1 e c_2 dependem somente da relação a/b e são dados na Tabela 3.1 para um conjunto de valores daquela relação. Note que as Equações (3.43) e (3.44) são válidas somente dentro do intervalo elástico.

TABELA 3.1. Coeficientes para barras retangulares em torção

a/b	c_1	c_2
1,0	0,208	0,1406
1,2	0,219	0,1661
1,5	0,231	0,1958
2,0	0,246	0,229
2,5	0,258	0,249
3,0	0,267	0,263
4,0	0,282	0,281
5,0	0,291	0,291
10,0	0,312	0,312
∞	0,333	0,333

Observamos da Tabela 3.1 que, para $a/b \geq 5$, os coeficientes c_1 e c_2 são iguais. Pode ser mostrado que, para esses valores de a/b, temos

$$c_1 = c_2 = \tfrac{1}{3}(1 - 0{,}630b/a) \qquad \textbf{\textit{(somente para a/b} $\geq$ \textit{5)}} \tag{3.45}$$

A distribuição de tensões de cisalhamento em um elemento não circular pode ser visualizada mais facilmente utilizando-se a *analogia de membrana*. Uma membrana elástica e homogênea presa a uma moldura rígida e submetida a uma pressão uniforme em um dos seus lados constitui um problema *análogo* ao de uma barra submetida a *momento torçor*, isto é, a determinação da

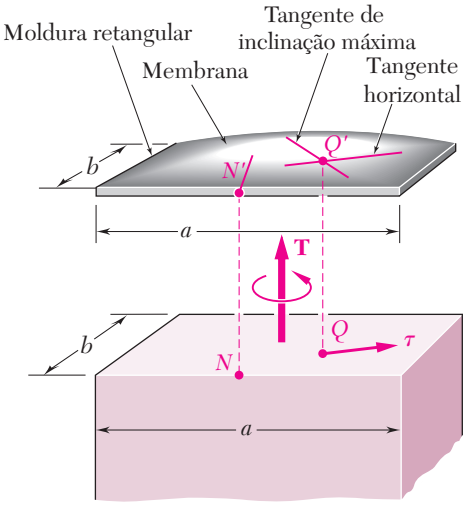


Fig. 3.49

deformação da membrana depende da solução da mesma equação diferencial parcial da determinação das tensões de cisalhamento na barra.† Mais especificamente, se Q é um ponto da seção transversal da barra e Q' o ponto correspondente da membrana (Fig. 3.49), a tensão de cisalhamento τ em Q terá a mesma direção da tangente horizontal à membrana em Q', e sua intensidade será proporcional à inclinação máxima da membrana em Q'.‡ Além disso, o torque aplicado será proporcional ao volume entre a membrana e o plano da moldura rígida. No caso da membrana da Fig. 3.49, que está presa a uma moldura retangular, a curva mais inclinada ocorre no ponto médio N' do lado maior da moldura. Assim, verificamos que a tensão de cisalhamento máxima em uma barra de seção transversal retangular ocorrerá no ponto médio N do lado maior daquela seção.

A analogia de membrana pode ser utilizada com a mesma eficiência para visualizar as tensões de cisalhamento em qualquer barra reta de seção transversal não circular, uniforme. Particularmente, vamos considerar vários elementos de paredes finas com seções transversais mostradas na Fig. 3.50, que estão submetidas ao mesmo torque. Utilizando a analogia de membrana para nos ajudar a visualizar as tensões de cisalhamento, notamos que, como o mesmo torque é aplicado a cada elemento, o mesmo volume estará localizado sob cada membrana, e a inclinação máxima será a mesma em cada caso. Assim, para um elemento de paredes finas de espessura uniforme e de forma arbitrária, a tensão de cisalhamento máxima é a mesma que para uma barra retangular com um valor muito grande de a/b, e pode ser determinada pela Equação (3.43) com $c_1 = 0{,}333$.§

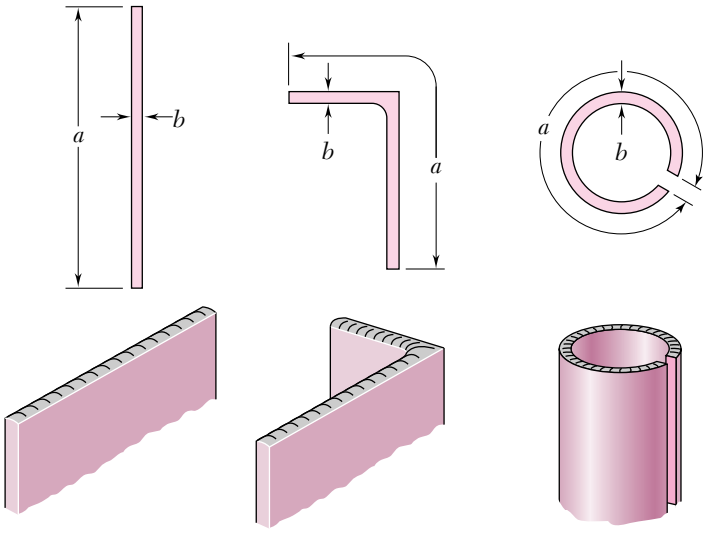


Fig. 3.50

†Ver a Seção 107.

‡Essa é a inclinação medida em uma direção perpendicular à tangente horizontal em Q'.

§Poderia ser mostrado também que o ângulo de torção pode ser determinado pela Equação (3.44) com $c_2 = 0{,}333$.

*3.13. Eixos vazados de paredes finas

Na seção anterior vimos que a determinação das tensões em componentes não circulares geralmente requer o uso de métodos matemáticos avançados. No caso de eixos vazados não circulares de paredes finas, no entanto, uma boa aproximação da distribuição das tensões no eixo pode ser obtida por um cálculo simples.

Considere um componente vazado cilíndrico de seção *não circular* submetido a um carregamento torcional (Fig. 3.51).† Embora a espessura t da parede possa variar ao longo da seção transversal, será considerado que ela permanece pequena comparada com as outras dimensões do componente. Agora, destacamos do componente a parte colorida da parede AB limitada por dois planos transversais por uma distância Δx uma da outra, e por dois planos longitudinais perpendiculares à parede. Como a parte AB está em equilíbrio, a soma das forças que atuam sobre ela na direção longitudinal x deve ser zero (Fig. 3.52). Contudo, as únicas forças envolvidas são as forças de cisalhamento $\mathbf{F}_A$ e $\mathbf{F}_B$ que atuam nas extremidades da parte AB. Temos, portanto,

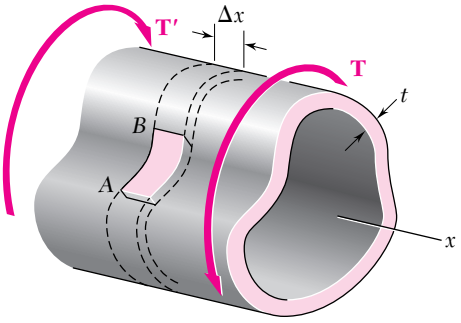


Fig. 3.51

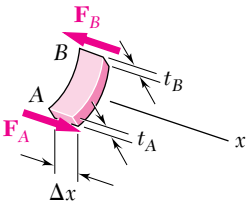


Fig. 3.52

$$\Sigma F_x = 0: \qquad F_A - F_B = 0 \tag{3.46}$$

Agora expressamos F_A como o produto da tensão de cisalhamento longitudinal τ_A, na pequena face em A, pela área $t_A\,\Delta x$ daquela face:

$$F_A = \tau_A(t_A\,\Delta x)$$

Notamos que, embora a tensão de cisalhamento seja independente da coordenada x do ponto considerado, ela pode variar através da parede; assim, τ_A representa o valor médio da tensão calculado através da parede. Expressando F_B de maneira similar e substituindo F_A e F_B em (3.46), escrevemos

$$\tau_A(t_A\,\Delta x) - \tau_B(t_B\,\Delta x) = 0$$

ou

$$\tau_A t_A = \tau_B t_B \tag{3.47}$$

Como A e B foram escolhidas arbitrariamente, a Equação (3.47) expressa que o produto τt da tensão de cisalhamento longitudinal τ e da espessura t da parede é constante através do componente. Designando esse produto por q, temos

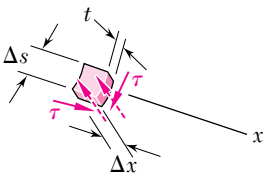


Fig. 3.53

$$q = \tau t = \text{constante} \tag{3.48}$$

Agora destacamos um pequeno elemento da parte AB da parede (Fig. 3.53). Como as faces superior e inferior desse elemento são partes da superfície livre do componente vazado, as tensões nessas faces são iguais a zero. Lembrando as relações (1.21) e (1.22) da Seção 1.12, segue que as componentes de tensão indicadas nas outras faces por setas tracejadas também são zero, enquanto aquelas representadas por setas sólidas são iguais. Assim, a tensão de cisalhamento em qualquer ponto de uma seção transversal de um componente vazado é paralela à parede da superfície (Fig. 3.54) e seu valor médio calculado através da parede satisfaz a Equação (3.48).

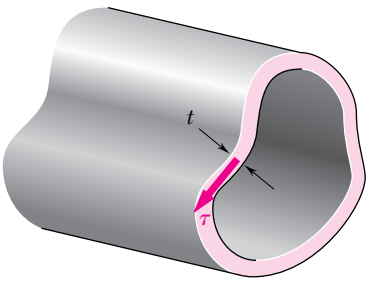


Fig. 3.54

†A parede do componente deve conter uma única cavidade e não pode ser aberta por um rasgo. Em outras palavras, o componente deve ser topologicamente equivalente a um eixo circular vazado.

Neste ponto podemos notar uma analogia entre a distribuição de tensões de cisalhamento τ na seção transversal de uma barra vazada de parede fina e a distribuição de velocidades v da água que flui por um canal fechado de profundidade constante e largura (espessura) variável. Embora a velocidade v da água varie de um ponto a outro por causa da variação na largura t do canal, o fluxo $q = vt$ permanece constante no canal, assim como τt na Equação (3.48). Por causa dessa analogia, o produto $q = \tau t$ é chamado de *fluxo de cisalhamento* na parede da barra de seção vazada.

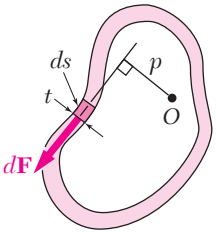


Fig. 3.55

Vamos agora determinar uma relação entre o torque T aplicado a um componente de seção vazada e o fluxo de cisalhamento q em sua parede. Consideramos um pequeno elemento da seção da parede, de comprimento ds (Fig. 3.55). A área do elemento é $dA = t\,ds$, e a intensidade da força de cisalhamento $d\mathbf{F}$ que atua no elemento é

$$dF = \tau\,dA = \tau(t\,ds) = (\tau t)\,ds = q\,ds \tag{3.49}$$

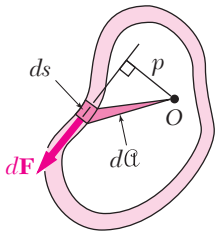


Fig. 3.56

O momento dM_0 dessa força em relação a um ponto arbitrário O dentro da cavidade do elemento pode ser obtido multiplicando-se $d\mathbf{F}$ pela distância perpendicular p do ponto O até à linha de ação de $d\mathbf{F}$. Temos

$$dM_O = p\,dF = p(q\,ds) = q(p\,ds) \tag{3.50}$$

Contudo, o produto $p\,ds$ é igual a duas vezes a área $d\mathcal{A}$ do triângulo colorido na Fig. 3.56. Temos então

$$dM_O = q(2d\mathcal{A}) \tag{3.51}$$

Como a integral através da seção da parede do membro esquerdo da Equação (3.51) representa a soma dos momentos de todas as forças de cisalhamento elementares que atuam sobre a seção da parede, e como essa soma é igual ao torque T aplicado ao componente vazado, temos

$$T = \oint dM_O = \oint q(2d\mathcal{A})$$

Sendo constante o fluxo de cisalhamento q, escrevemos

$$T = 2q\mathcal{A} \tag{3.52}$$

em que $\mathcal{A}$ é a área limitada pela linha de centro da parede através da seção (Fig. 3.57).

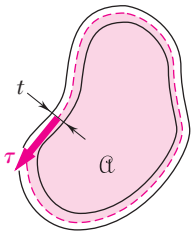


Fig. 3.57

A tensão de cisalhamento τ em qualquer ponto da parede pode ser expressa em termos do torque T, se substituirmos q de (3.48) em (3.52) e resolvermos para τ a equação obtida. Temos

$$\tau = \frac{T}{2t\mathcal{A}} \tag{3.53}$$

em que t é a espessura da parede no ponto considerado e $\mathcal{A}$ a área limitada pela linha de centro. Lembramos que τ representa o valor médio da tensão

de cisalhamento através da parede. No entanto, para deformações elásticas, a distribuição de tensões de um lado a outro da parede pode ser considerada uniforme, e a Equação (3.53) lhe dará o valor real da tensão de cisalhamento em um determinado ponto.

O ângulo de torção de uma barra de seção vazada de parede fina pode ser obtido utilizando-se o método da energia (Capítulo 11). Supondo uma deformação elástica, pode ser mostrado† que o ângulo de torção de uma barra de parede fina de comprimento L e módulo de elasticidade transversal G é

$$\phi = \frac{TL}{4\mathcal{A}^2 G}\oint\frac{ds}{t} \tag{3.54}$$

em que a integral é calculada ao longo da linha de centro da seção da parede.

EXEMPLO 3.10

Uma barra de alumínio de seção transversal vazada retangular que mede 64 mm × 100 mm foi fabricada por extrusão. Determine a tensão de cisalhamento em cada uma das quatro paredes da barra quando ela é submetida a um torque de 2,7 kN · m, supondo (*a*) uma espessura de parede uniforme de 4 mm (Fig. 3.58*a*), (*b*) que, como resultado de um defeito de fabricação, as paredes *AB* e *AC* têm espessura de 3 mm, e as paredes *BD* e *CD* têm espessura de 5 mm (Fig. 3.58*b*).

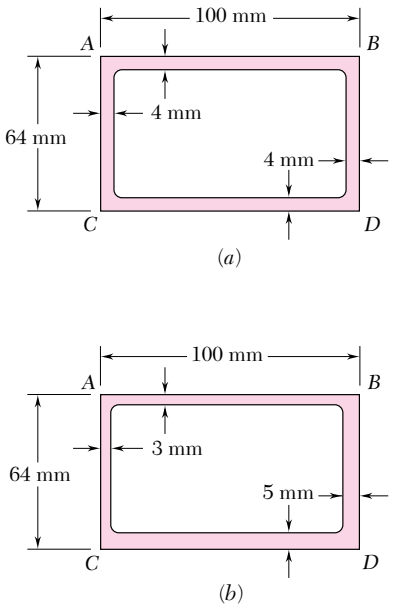


Fig. 3.58

(a) Barra com parede de espessura uniforme. A área limitada pela linha de centro (Fig. 3.59) é

$$\mathcal{A} = (96\text{ mm})(60\text{ mm}) = 5760\text{ mm}^2$$

Como a espessura de cada uma das quatro paredes é $t = 4$ mm, calculamos pela Equação (3.53) que a tensão de cisalhamento em cada parede é

$$\tau = \frac{T}{2t\mathcal{A}} = \frac{2700\text{ N}\cdot\text{m}}{2(0{,}004\text{ m})(5760\times 10^{-6}\text{ m}^2)} = 58{,}6\text{ MPa}$$

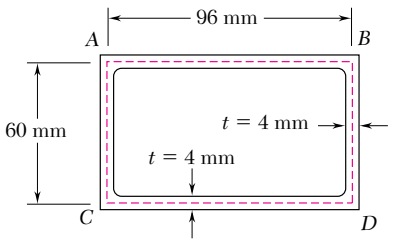


Fig. 3.59

(b) Barra com parede de espessura variável. Observando que a área $\mathcal{A}$ limitada pela linha de centro é a mesma da parte *a*, e substituindo sucessivamente $t = 3$ mm e $t = 5$ mm na Equação (3.53), temos

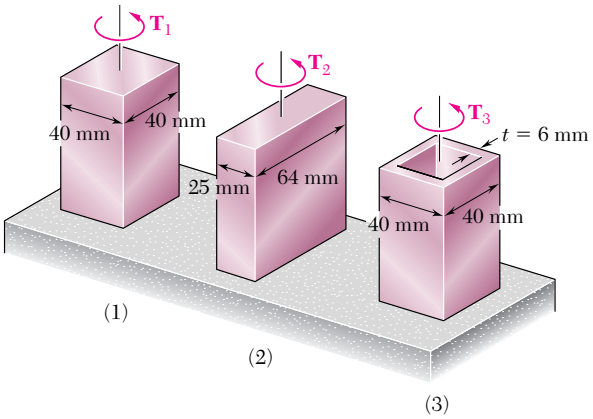
$$\tau_{AB} = \tau_{AC} = \frac{2700\text{ N}\cdot\text{m}}{2(0{,}003\text{ m})(5760\times 10^{-6}\text{ m}^2)} = 78{,}1\text{ MPa}$$

e

$$\tau_{BD} = \tau_{CD} = \frac{2700\text{ N}\cdot\text{m}}{2(0{,}005\text{ m})(5760\times 10^{-6}\text{ m}^2)} = 46{,}9\text{ MPa}$$

Notamos que a tensão em uma parede depende somente de sua espessura.

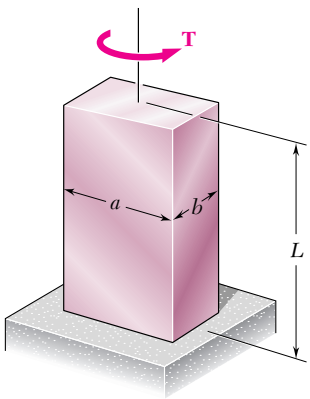
†Ver o Problema 11.70 (Capítulo 11).



PROBLEMA RESOLVIDO 3.9

Utilizando $\tau_{adm} = 40$ MPa, determine o maior torque que pode ser aplicado a cada uma das barras de latão e ao tubo de latão mostrado. Note que as duas barras de seção transversal cheia têm a mesma área, e que a barra quadrada e o tubo quadrado têm as mesmas dimensões externas.

SOLUÇÃO



1. Barra com seção transversal quadrada. Para uma barra de seção transversal retangular cheia, a tensão de cisalhamento máxima é dada pela Equação (3.43)

$$\tau_{máx} = \frac{T}{c_1 ab^2}$$

em que o coeficiente c_1 é obtido da Tabela 3.1 na Seção 3.12. Temos

$$a = b = 0{,}040 \text{ m} \qquad \frac{a}{b} = 1{,}00 \qquad c_1 = 0{,}208$$

Para $\tau_{máx} = \tau_{adm} = 40$ MPa, temos

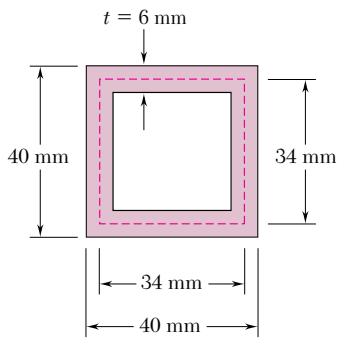
$$\tau_{máx} = \frac{T_1}{c_1 ab^2} \qquad 40 \text{ MPa} = \frac{T_1}{0{,}208(0{,}040 \text{ m})^3} \qquad T_1 = 532 \text{ N} \cdot \text{m} \blacktriangleleft$$

2. Barra com seção transversal retangular. Temos agora

$$a = 0{,}064 \text{ m} \qquad b = 0{,}025 \text{ m} \qquad \frac{a}{b} = 2{,}56$$

Interpolando na Tabela 3.1: $c_1 = 0{,}259$

$$\tau_{máx} = \frac{T_2}{c_1 ab^2} \qquad 40 \text{ MPa} = \frac{T_2}{0{,}259(0{,}064 \text{ m})(0{,}025 \text{ m})^2} \qquad T_2 = 414 \text{ N} \cdot \text{m} \blacktriangleleft$$



3. Tubo quadrado. Para um tubo de espessura t, a tensão de cisalhamento é dada pela Equação (3.53)

$$\tau = \frac{T}{2t\mathcal{A}}$$

em que $\mathcal{A}$ é a área limitada pela linha de centro da seção transversal. Temos

$$\mathcal{A} = (0{,}034 \text{ m})(0{,}034 \text{ m}) = 1{,}156 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

Substituímos $\tau = \tau_{adm} = 40$ MPa e $t = 0{,}006$ m e resolvemos para o torque admissível:

$$\tau = \frac{T}{2t\mathcal{A}} \qquad 40 \text{ MPa} = \frac{T_3}{2(0{,}006 \text{ m})(1{,}156 \times 10^{-3} \text{ m}^2)} \qquad T_3 = 555 \text{ N} \cdot \text{m} \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

3.121 Usando $\tau_{adm} = 70$ MPa e $G = 27$ GPa, determine para cada uma das barras de alumínio mostradas na figura o maior torque **T** que pode ser aplicado e o ângulo de torção correspondente na extremidade *B*.

3.122 Sabendo que a intensidade do torque **T** é de 200 N · m e que $G = 27$ GPa, determine para cada uma das barras de alumínio mostradas na figura a tensão de cisalhamento máxima e o ângulo de torção na extremidade *B*.

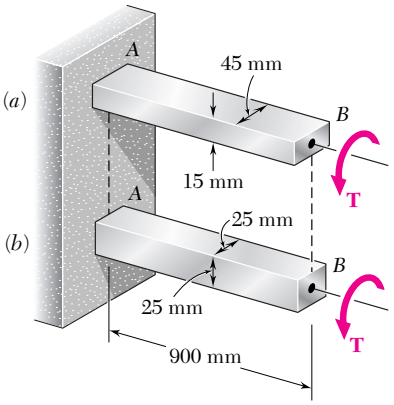


Fig. P3.121 e P3.122

3.123 Usando $\tau_{adm} = 51{,}7$ MPa e sabendo que $G = 38{,}6$ GPa, determine para cada uma das barras de latão laminado a frio mostradas na figura o maior torque **T** que pode ser aplicado e o ângulo de torção correspondente na extremidade *B*.

3.124 Sabendo que $T = 791$ N · m e que $G = 38{,}6$ GPa, determine para cada uma das barras de latão laminado a frio mostradas na figura a tensão de cisalhamento máxima e o ângulo de torção na extremidade *B*.

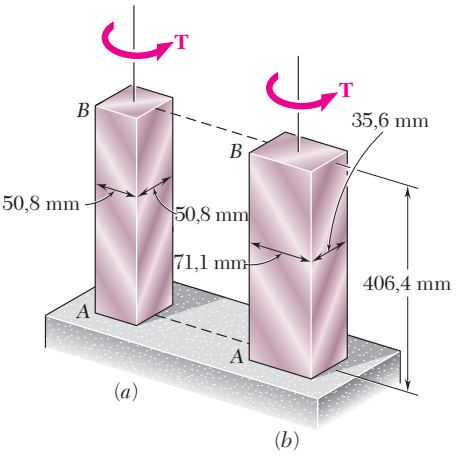


Fig. P3.123 e P3.124

3.125 O torque **T** causa uma rotação de 2° na extremidade B da barra de aço inoxidável mostrada. Sabendo que $b = 20$ mm e que $G = 75$ GPa, determine a máxima tensão de cisalhamento na barra.

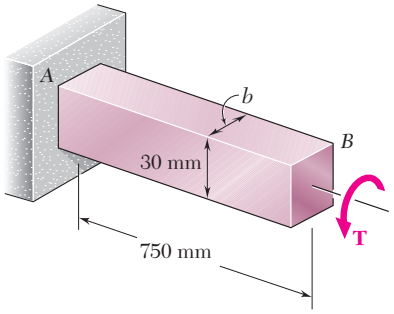


Fig. P3.125 e P3.126

3.126 O torque **T** causa uma rotação de 0,6° na extremidade B da barra de alumínio mostrada. Sabendo que $b = 15$ mm e que $G = 26$ GPa, determine a máxima tensão de cisalhamento na barra.

3.127 Determine a maior seção transversal quadrada admissível de um eixo de aço de 6 096 mm de comprimento, para que a tensão de cisalhamento máxima não exceda 69 MPa quando o eixo for girado em uma volta completa. Use $G = 77{,}2$ GPa.

3.128 Determine o comprimento máximo admissível para o eixo de aço inoxidável com seção transversal de 9,53 × 19,05 mm cuja tensão de cisalhamento não excederá 103,4 MPa quando o eixo for girado em 15°. Adote $G = 77{,}2$ GPa.

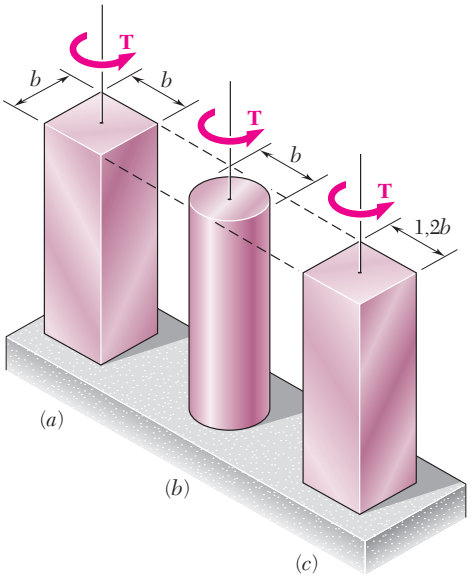


Fig. P3.129, P3.130, P3.131 e P3.132

3.129 Cada uma das três barras de aço mostradas na figura está submetida a um torque de intensidade $T = 275$ N · m. Sabendo que a tensão de cisalhamento admissível é de 50 MPa, determine a dimensão b necessária para cada barra.

3.130 Cada uma das três barras de alumínio mostradas na figura deve ser girada por um ângulo de 2°. Sabendo que $b = 30$ mm, $\tau_{adm} = 50$ MPa, e $G = 27$ GPa, determine o menor comprimento admissível para cada barra.

3.131 Cada uma das três barras de aço mostradas na figura está submetida a um torque conforme mostrado. Sabendo que a tensão de cisalhamento admissível é de 55,2 MPa e que $b = 35{,}6$ mm, determine o máximo torque **T** que pode ser aplicado a cada barra.

3.132 Cada uma das três barras de alumínio mostradas na figura deve ser girada por um ângulo de 1,25°. Sabendo que $b = 38{,}1$ mm, $\tau_{adm} = 51{,}7$ MPa, e $G = 25{,}5$ GPa, determine o menor comprimento admissível para cada barra.

3.133 Os eixos A e B são feitos do mesmo material e têm a mesma área de seção transversal, mas A tem uma seção transversal circular e B tem uma seção transversal quadrada. Determine a relação dos torques máximos T_A e T_B que podem ser aplicados com segurança a A e B, respectivamente.

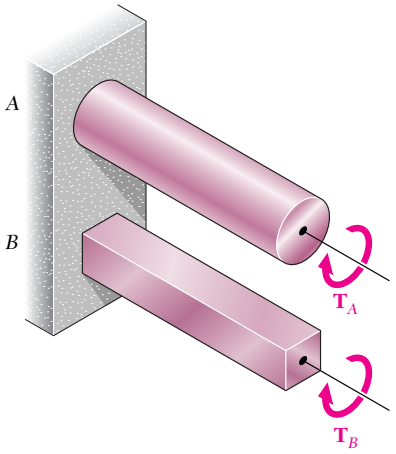


Fig. *P3.133* e *P3.144*

3.134 Os eixos A e B são feitos do mesmo material e têm o mesmo comprimento e mesma área de seção transversal, mas A tem uma seção transversal circular e B tem uma seção transversal quadrada. Determine a relação dos valores máximos dos ângulos ϕ_A e ϕ_B pelos quais os eixos A e B, respectivamente, podem ser girados.

3.135 Um torque de 339 N · m é aplicado a uma cantoneira de aço com abas iguais, de seção transversal L 102 × 102 × 9,5, e com 1 829 mm de comprimento. No Apêndice C verificamos que a espessura da seção é de 9,5 mm e que sua área é de 1 845 mm^2. Sabendo que $G = 77{,}2$ GPa, determine (*a*) a máxima tensão de cisalhamento ao longo da linha *a*-*a* e (*b*) o ângulo de torção correspondente.

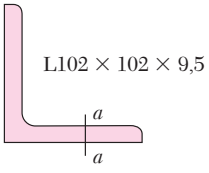


Fig. P3.135

3.136 Uma cantoneira de aço com 3 m de comprimento tem seção L203 × 152 × 12,7 mm. Obtém-se do Apêndice C que sua espessura é de 12,7 mm e que a área de sua seção transversal é 4 350 mm^2. Sabendo que $\tau_{adm} = 50$ MPa e que $G = 77{,}2$ GPa, e ignorando o efeito da concentração de tensões, determine (*a*) o maior torque **T** que pode ser aplicado e (*b*) o correspondente ângulo de giro.

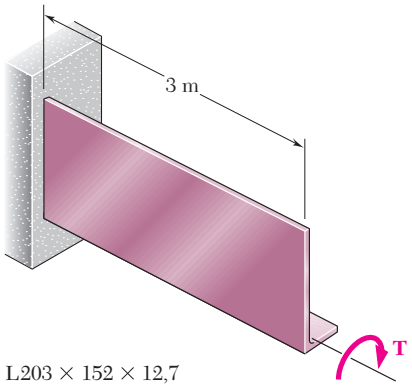


Fig. P3.136

3.137 Uma barra de aço com 2 438 mm de comprimento e seção transversal W200 × 46,1 está submetida a um torque de 565 N · m. As propriedades da seção laminada são dadas no Apêndice C. Sabendo que $G = 77{,}2$ GPa, determine (*a*) a tensão de cisalhamento máxima ao longo da linha *a*-*a*, (*b*) a tensão de cisalhamento máxima ao longo da linha *b*-*b* e (*c*) o ângulo de torção. (*Sugestão:* considere a alma e as mesas separadamente e obtenha uma relação entre os torques aplicados na alma e na mesa, respectivamente, mostrando que os ângulos de torção são iguais.)

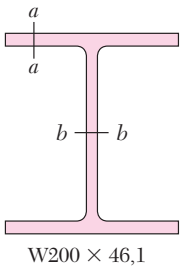


Fig. P3.137

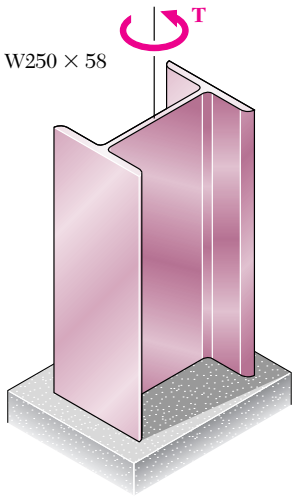


Fig. P3.138

3.138 Uma barra de aço com 3 m de comprimento tem uma seção transversal W250 × 58. Sabendo que $G = 77{,}2$ GPa e que a tensão de cisalhamento admissível é de 35 MPa, determine (*a*) o maior torque **T** que pode ser aplicado e (*b*) o ângulo de torção correspondente. Ver no Apêndice C as dimensões da seção transversal e despreze o efeito das concentrações de tensão. (Ver a sugestão do Problema 3.137.)

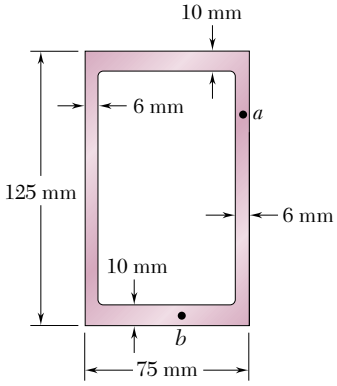


Fig. *P3.139*

3.139 Um torque **T** de 5 kN · m é aplicado a um eixo de seção vazada com a seção transversal mostrada na figura. Desprezando o efeito das concentrações de tensão, determine a tensão de cisalhamento nos pontos *a* e *b*.

3.140 Um torque **T** de 750 kN · m é aplicado a um eixo vazado com a seção transversal mostrada na figura e uma espessura de parede uniforme de 8 mm. Desprezando o efeito das concentrações de tensão, determine a tensão de cisalhamento nos pontos *a* e *b*.

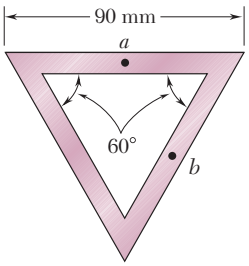


Fig. *P3.140*

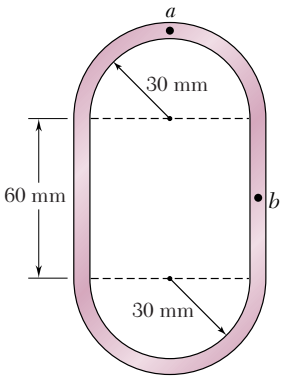


Fig. P3.141

3.141 Um torque de 750 kN · m é aplicado a um eixo vazado com a seção transversal mostrada na figura e com uma espessura de parede uniforme de 6 mm. Desprezando o efeito das concentrações de tensão, determine a tensão de cisalhamento nos pontos *a* e *b*.

3.142 Um torque de 90 N · m é aplicado a um eixo vazado com a seção transversal mostrada na figura. Desprezando o efeito das concentrações de tensão, determine a tensão de cisalhamento nos pontos *a* e *b*.

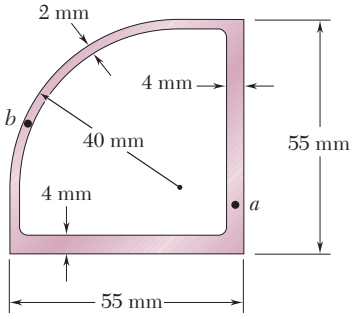


Fig. P3.142

3.143 Uma barra de latão tem a seção vazada mostrada na figura. Sabendo que a tensão de cisalhamento não pode exceder 82,7 MPa e desprezando o efeito da concentração de tensões, determine o maior torque possível de ser aplicado ao eixo.

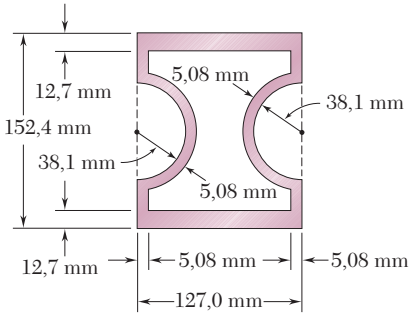


Fig. P3.143

3.144 Uma barra de seção vazada tendo a seção transversal mostrada na figura é formada a partir de chapa metálica de 2 mm de espessura. Sabendo que a tensão de cisalhamento não deve exceder 3 MPa, determine o maior torque que pode ser aplicado à barra.

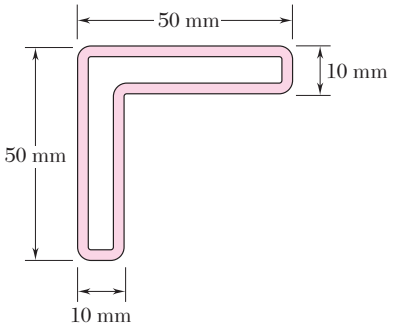


Fig. P3.144

3.145 e *3.146* Uma barra vazada com a seção transversal mostrada na figura deve ser formada a partir de uma chapa metálica de 1,524 mm de espessura. Sabendo que um torque de 141,2 N · m será aplicado à barra, determine a menor dimensão d que pode ser utilizada, considerando que a tensão de cisalhamento não deve exceder 5,17 MPa.

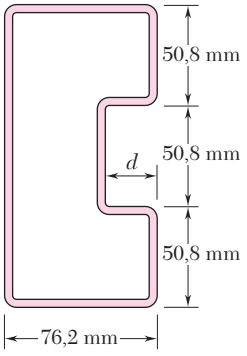


Fig. P3.145

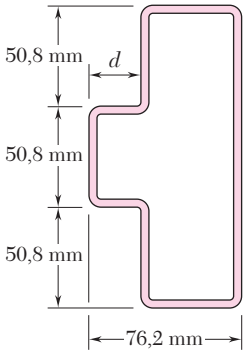


Fig. *P3.146*

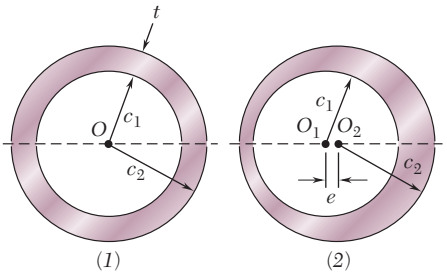


Fig. P3.147

3.147 Um eixo cilíndrico vazado foi projetado com a seção transversal mostrada na Fig. (*1*) para resistir a um torque máximo T_0. No entanto, um defeito de fabricação resultou em uma ligeira excentricidade e entre as superfícies cilíndricas interna e externa do eixo, conforme mostra a Fig. (*2*). (*a*) Expresse o torque T máximo que pode ser aplicado com segurança ao eixo defeituoso em termos de T_0, e, e t. (*b*) Calcule o decréscimo percentual no torque admissível para valores da relação e/t iguais a 0,1, 0,5 e 0,9.

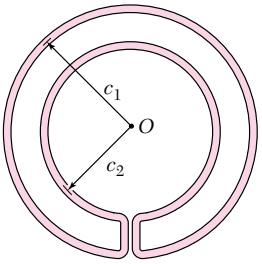


Fig. P3.148

3.148 Um tubo de resfriamento com a seção transversal mostrada na figura foi feito a partir de uma chapa de aço inoxidável de 3 mm de espessura. Os raios $c_1 = 150$ mm e $c_2 = 100$ mm são medidos em relação à linha de centro da chapa metálica. Sabendo que um torque de intensidade $T = 3$ kN · m é aplicado ao tubo, determine (*a*) a tensão de cisalhamento máxima no tubo e (*b*) a intensidade do torque suportado pela capa externa circular. Despreze a dimensão da pequena abertura em que as capas externa e interna são conectadas.

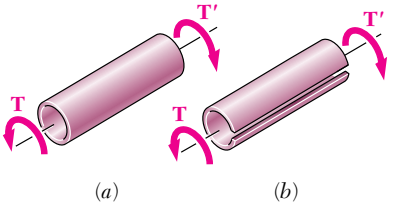


Fig. *P3.149*

3.149 São aplicados torques iguais a tubos com paredes finas de mesmo comprimento L, mesma espessura t e mesmo raio c. Um dos tubos foi cortado no sentido do comprimento, como mostra a figura. Determine (*a*) a relação τ_b/τ_a das tensões de cisalhamento máximas nos tubos e (*b*) a relação ϕ_b/ϕ_a dos ângulos de torção dos eixos.

3.150 Um eixo cilíndrico vazado de comprimento L, raio médio c_m e espessura uniforme t é submetido a um torque de intensidade T. Considere, além disso, os valores das tensões de cisalhamento médias $\tau_{\text{méd}}$ e o ângulo de torção ϕ obtido das fórmulas de torção elástica desenvolvidas nas Seções 3.4 e 3.5 e, também, os valores correspondentes obtidos das fórmulas desenvolvidas na Seção 3.13 para eixos vazados com parede fina. (*a*) Mostre que o erro relativo introduzido pelo uso das fórmulas de eixos vazados com parede fina em lugar das fórmulas de torção elástica é o mesmo para $\tau_{\text{méd}}$ e ϕ, e que o erro relativo é positivo e proporcional à relação t/c_m. (*b*) Compare o erro percentual correspondente a valores da relação t/c_m de 0,1, 0,2 e 0,4.

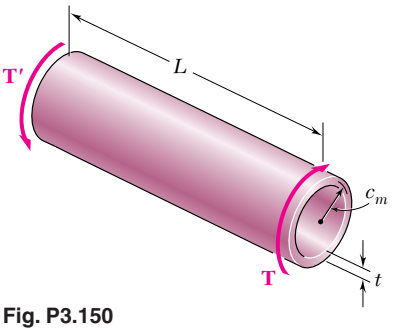


Fig. P3.150

REVISÃO E RESUMO DO CAPÍTULO 3

Este capítulo foi dedicado à análise e ao projeto de *barras* (ou eixos) de seção circular submetidas a momentos torçores, ou *torques*. Exceto nas duas últimas seções do capítulo, nossa discussão se limitou às *barras de seção circular*.

Em uma discussão preliminar [Seção 3.2], dissemos que a distribuição de tensões na seção transversal de uma barra circular é *estaticamente indeterminada*. A determinação dessas tensões, portanto, requer uma análise prévia das *deformações* que ocorrem na barra [Seção 3.3]. Tendo demonstrado que em uma barra de seção circular submetida à torção, *toda seção transversal permanece plana e indeformável*, deduzimos a expressão a seguir para a *deformação de cisalhamento* em um pequeno elemento com lados paralelos e perpendiculares ao eixo da barra e a uma distância ρ daquele eixo:

Deformações em eixos circulares

$$\gamma = \frac{\rho\phi}{L} \tag{3.2}$$

em que ϕ é o ângulo de torção para um comprimento L da barra (Fig. 3.14). A Equação (3.2) mostra que a *deformação de cisalhamento em uma barra de seção circular varia linearmente com a distância do eixo da barra.* Consequentemente, a deformação é máxima na superfície da barra, na qual ρ é igual ao raio c da barra. Escrevemos

$$\gamma_{máx} = \frac{c\phi}{L} \qquad \gamma = \frac{\rho}{c}\gamma_{máx} \tag{3.3, 4}$$

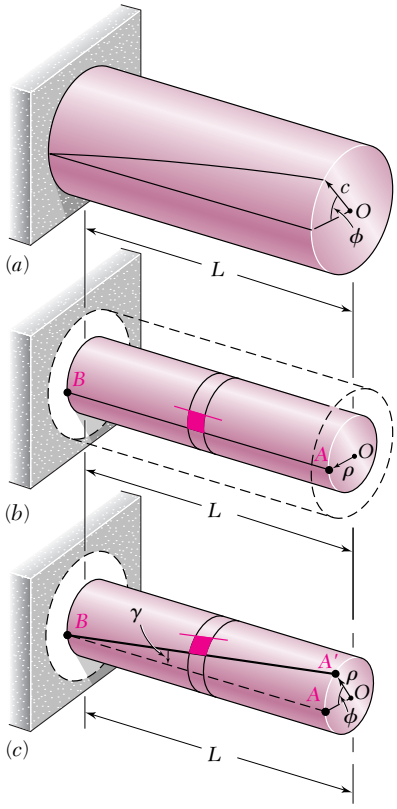


Fig. 3.14

Tensões de cisalhamento em regime elástico

Considerando as *tensões de cisalhamento* em uma barra de seção circular dentro do regime elástico [Seção 3.4] e recordando a lei de Hooke para tensão e deformação de cisalhamento, $\tau = G\gamma$, deduzimos a relação

$$\tau = \frac{\rho}{c}\tau_{máx} \tag{3.6}$$

que mostra que, dentro do regime elástico, a *tensão de cisalhamento τ em uma barra de seção circular também varia linearmente com a distância do eixo da barra*. Impondo a condição que a soma dos momentos das forças elementares exercidas em uma seção transversal da barra é igual à intensidade T do torque aplicado naquela seção da barra, determinamos as *fórmulas de torção elástica*

$$\tau_{máx} = \frac{Tc}{J} \qquad \tau = \frac{T\rho}{J} \tag{3.9, 10}$$

em que c é o raio da seção transversal e J seu momento polar de inércia. Notamos que $J = \frac{1}{2}\pi c^4$ para uma barra de seção cheia e $J = \frac{1}{2}\pi(c_2^4 - c_1^4)$ para uma barra de seção vazada de raio interno c_1 e raio externo c_2.

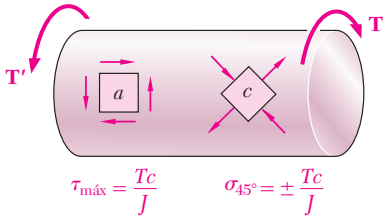


Fig. 3.20

Notamos que, enquanto o elemento *a* na Fig. 3.20 está em cisalhamento puro, o elemento *c* na mesma figura está submetido a tensões normais da mesma intensidade, Tc/J, e que duas das tensões normais são de tração e duas de compressão. Isso explica por que em um ensaio de torção os materiais dúcteis, que geralmente falham em cisalhamento, romperão ao longo de um plano perpendicular ao eixo do corpo de prova, enquanto materiais frágeis, que costumam falhar em tração em vez de em cisalhamento, romperão ao longo de superfícies formando um ângulo de 45° com aquele eixo.

Na Seção 3.5, vimos que dentro do regime elástico, o ângulo de torção ϕ de uma barra de seção circular é proporcional ao torque T aplicado a ele (Fig. 3.22). Expressando ϕ em *radianos*, escrevemos

$$\phi = \frac{TL}{JG} \tag{3.16}$$

em que L = comprimento do eixo
J = momento polar de inércia da seção transversal
G = módulo de elasticidade transversal do material

Se a barra de seção circular está submetida a torques em localizações que não as suas extremidades, ou é formada por várias partes com várias seções transversais e possivelmente de diferentes materiais, o ângulo de torção do eixo deve ser expresso como a *soma algébrica* dos ângulos de torção de suas partes componentes [Problema Resolvido 3.3]:

$$\phi = \sum_i \frac{T_i L_i}{J_i G_i} \tag{3.17}$$

Observamos que, quando ambas as extremidades de uma barra *BE* giram (Fig. 3.26*b*), o ângulo de torção da barra é igual à *diferença* entre os ângulos de rotação ϕ_B e ϕ_E de suas extremidades. Notamos também que quando dois eixos *AD* e *BE* são conectados por engrenagens *A* e *B*, os torques aplicados, respectivamente, pela engrenagem *A* no eixo *AD* e pela engrenagem *B* no eixo *BE* são *diretamente proporcionais* aos raios r_A e r_B das duas engrenagens, pois as forças aplicadas uma à outra pelos dentes da engrenagem em *C* são iguais e opostas. Em contrapartida, os ângulos ϕ_A e ϕ_B pelos quais as duas engrenagens giram são *inversamente proporcionais* a r_A e r_B, pois os arcos CC' e CC'' descritos pelos dentes da engrenagem são iguais [Exemplo 3.4 e Problema Resolvido 3.4].

Se as reações nos suportes de uma barra ou os torques internos não puderem ser determinados somente pela estática, dizemos que o eixo é *estaticamente indeterminado* [Seção 3.6]. As equações de equilíbrio obtidas dos diagramas de corpo livre devem ser então complementadas por relações que envolvem as deformações da barra e obtidas por meio da geometria do problema [Exemplo 3.5, Problema Resolvido 3.5].

Ângulo de torção

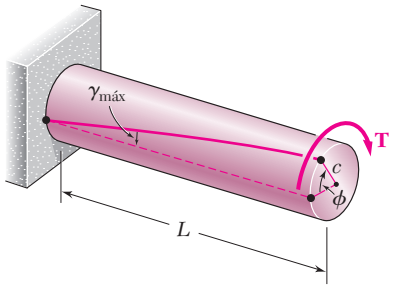


Fig. 3.22

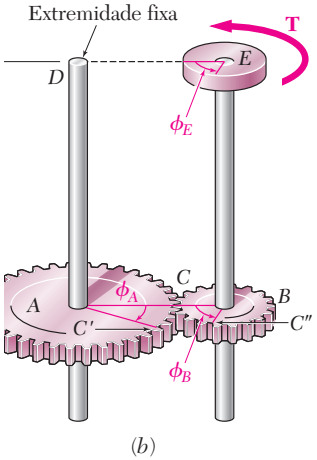


Fig. 3.26b

Eixos estaticamente indeterminados

Eixos de transmissão

Na Seção 3.7, discutimos o *projeto de eixos de transmissão.* Primeiro observamos que a potência P transmitida por um eixo é

$$P = 2\pi f T \tag{3.20}$$

em que T é o torque aplicado em cada extremidade do eixo e f é a *frequência* ou a velocidade de rotação do eixo. A unidade de frequência é o número de rotações por segundo (s^{-1}) ou *hertz* (Hz). Se forem utilizadas as unidades SI, T é expresso em newton-metros (N · m) e P em *watts* (W). A potência dada em *horsepower* (hp) pode ser convertida em unidades SI utilizando-se a relação

$$1 \text{ hp} = 746 \text{ N} \cdot \text{m/s} = 746 \text{ kN} \cdot \text{mm/s}$$

Para projetar um eixo que transmitirá determinada potência P, a uma frequência f, primeiro devemos resolver a Equação (3.20) para T. Utilizando esse valor e o valor máximo admissível de τ para o material utilizando, na fórmula elástica (3.9), obteremos o valor correspondente do parâmetro J/c, por meio do qual pode ser calculado o diâmetro necessário para o eixo [Exemplos 3.6 e 3.7].

Concentração de tensões

Na Seção 3.8, discutimos as *concentrações de tensões* em eixos circulares. Vimos que as concentrações de tensões resultantes de uma mudança abrupta no diâmetro de um eixo podem ser reduzidas com o uso de um *adoçamento* (Fig. 3.31). O valor máximo da tensão de cisalhamento no adoçamento é

$$\tau_{\text{máx}} = K\frac{Tc}{J} \tag{3.25}$$

em que a tensão Tc/J é calculada para o menor diâmetro do eixo, e K é o coeficiente de concentração de tensões. Foram construídos gráficos dos valores de K em função da relação r/d, na Fig. 3.32, na qual r é o raio do adoçamento, para vários valores de D/d.

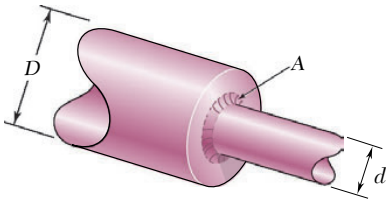


Fig. 3.31

As Seções 3.9, 3.10 e 3.11 foram dedicadas à discussão das *deformações plásticas* e *tensões residuais* em eixos circulares. Primeiro lembramos que mesmo quando a lei de Hooke não se aplica, a distribuição de *deformações* em um eixo circular é sempre linear [Seção 3.9]. Se o gráfico de tensão-deformação de cisalhamento para o material é conhecido, é possível então construir um gráfico da tensão de cisalhamento τ em função da distância ρ em relação ao centro do eixo para determinado valor de $\tau_{\text{máx}}$ (Fig. 3.35).

Deformações plásticas

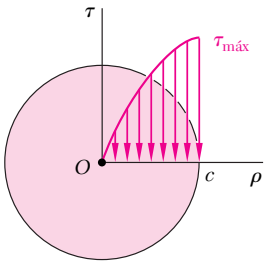


Fig. 3.35

Somando as contribuições dos torques que atuam nos elementos anulares de raio ρ e espessura $d\rho$, expressamos o torque T como

$$T = \int_0^c \rho\tau(2\pi\rho\, d\rho) = 2\pi\int_0^c \rho^2\tau\, d\rho \tag{3.26}$$

em que τ é a função de ρ representada graficamente na Fig. 3.35.

Um valor importante do torque é o torque-limite T_E que provoca a falha do eixo. Esse valor pode ser determinado, experimentalmente, ou executando-se os cálculos indicados anteriormente com $\tau_{máx}$ escolhido igual ao limite da tensão de cisalhamento τ_E do material. A partir de T_E, e considerando uma distribuição de tensão linear (Fig. 3.36), determinamos a tensão fictícia correspondente $R_T = T_L c/J$, conhecida como *módulo de ruptura em torção* do material considerado.

Módulo de ruptura

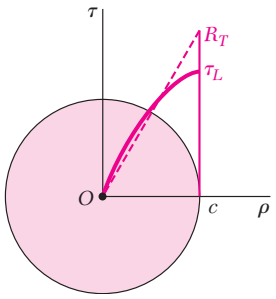


Fig. 3.36

Considerando o caso ideal de um *eixo circular cheio* feito de um *material elastoplástico* [Seção 3.10], primeiro notamos que, desde que $\tau_{máx}$ não exceda a tensão de escoamento τ_E do material, a distribuição de tensão por meio de uma seção transversal do eixo é linear (Fig. 3.38*a*). O torque T_E correspondente a $\tau_{máx} = \tau_E$ (Fig. 3.38*b*) é conhecido como o *torque elástico máximo*. Para um eixo circular cheio de raio c, temos

$$T_E = \tfrac{1}{2}\pi c^3 \tau_E \tag{3.29}$$

Eixo cheio feito de material elastoplástico

À medida que o torque aumenta, desenvolve-se uma região plástica no eixo ao redor de um núcleo elástico de raio ρ_E. O torque T correspondente a um valor de ρ_E foi determinado como

$$T = \frac{4}{3} T_E \left(1 - \frac{1}{4}\frac{\rho_E^3}{c^3}\right) \tag{3.32}$$

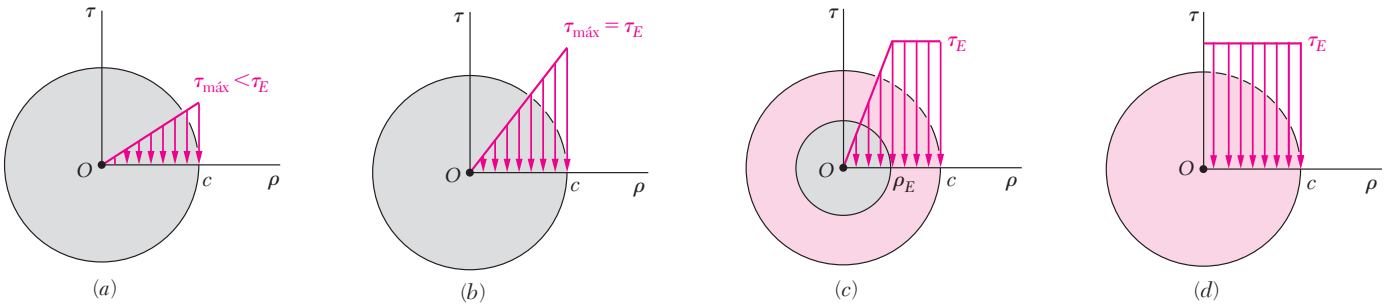


Fig. 3.38

Observamos que, à medida que ρ_E se aproxima de zero, o torque se aproxima de um valor-limite T_P, chamado de *torque plástico* do eixo considerado:

$$T_p = \frac{4}{3} T_E \tag{3.33}$$

Construindo o gráfico do torque T em função do ângulo de torção ϕ de um eixo circular (Fig. 3.39), obtivemos o segmento de linha reta OE definido pela Equação (3.16), seguido de uma curva aproximando-se da linha reta $T = T_p$ e definida pela equação

$$T = \frac{4}{3} T_E \left(1 - \frac{1}{4}\frac{\phi_E^3}{\phi^3}\right) \tag{3.37}$$

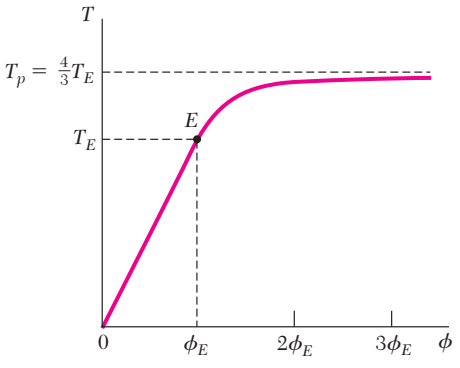


Fig. 3.39

Deformação permanente. Tensões residuais

Aplicando-se um carregamento a um eixo circular além do início do escoamento e, em seguida, descarregando-o [Seção 3.11], obtém-se uma *deformação permanente* caracterizada pelo ângulo de torção $\phi_p = \phi - \phi'$, em que ϕ corresponde à fase de carregamento descrita no parágrafo anterior, e ϕ' à fase de descarregamento representada por uma linha reta na Fig. 3.42.

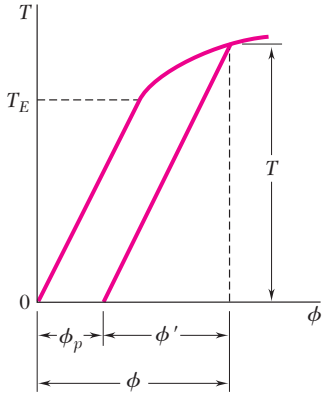


Fig. 3.42

Haverá também *tensões residuais* no eixo, que podem ser determinadas somando as tensões máximas atingidas durante a fase de carregamento e as tensões reversas correspondentes à fase de descarregamento [Exemplo 3.9].

Torção de elementos não circulares

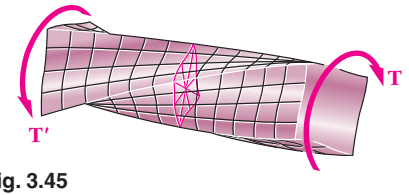


Fig. 3.45

As duas últimas seções do capítulo tratam da torção de *elementos não circulares*. Primeiro recordamos que a determinação das fórmulas para a distribuição de deformação e tensão em barras de seção circular era fundamentada no fato de que, em razão da axissimetria desses elementos, as seções transversais permaneciam planas e indeformáveis. Como essa propriedade não vale para elementos não circulares, como a barra quadrada da Fig. 3.45, nenhuma das fórmulas deduzidas anteriormente pode ser utilizada na análise [Seção 3.12].

Barras de seção transversal retangular

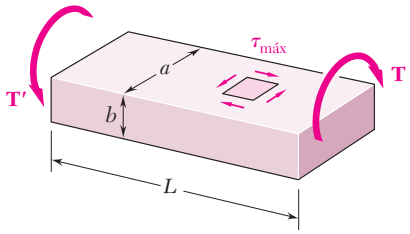


Fig. 3.48

Foi indicado na Seção 3.12 que, no caso de barras retas com uma *seção transversal retangular uniforme* (Fig. 3.48), a tensão de cisalhamento máxima ocorre ao longo da linha de centro da face *mais larga* da barra. As fórmulas para a tensão de cisalhamento máxima e o ângulo de torção foram dadas sem provas. Foi discutida também a *analogia de membrana* para visualizar a distribuição de tensões em um elemento não circular.

Barras de seção vazada de parede fina

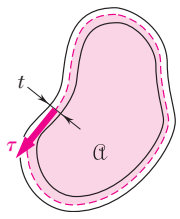


Fig. 3.57

Em seguida, analisamos a distribuição de tensões em *barras de seção vazada não circulares de parede fina* [Seção 3.13]. Vimos que a tensão de cisalhamento é paralela à superfície da parede e varia tanto através da parede quanto ao longo da seção transversal da parede. Chamando de τ o valor médio da tensão de cisalhamento calculada através da parede em determinado ponto da seção transversal, e por t a espessura da parede naquele ponto (Fig. 3.57), mostramos que o produto $q = \tau t$, chamado de *fluxo de cisalhamento,* é constante ao longo da seção transversal.

Além disso, chamando de T o torque aplicado à barra de seção vazada e por $\mathcal{A}$ a área delimitada pela linha de centro da parede da seção transversal, expressamos da seguinte forma a tensão de cisalhamento média τ em um ponto qualquer da seção transversal:

$$\tau = \frac{T}{2t\mathcal{A}} \tag{3.53}$$

PROBLEMAS DE REVISÃO

3.151 Sabendo que um orifício de 10,16 mm de diâmetro foi usinado ao longo de cada um dos eixos *AB*, *BC* e *CD*, determine (*a*) o eixo no qual se desenvolverá a tensão de cisalhamento máxima e (*b*) a intensidade dessa tensão.

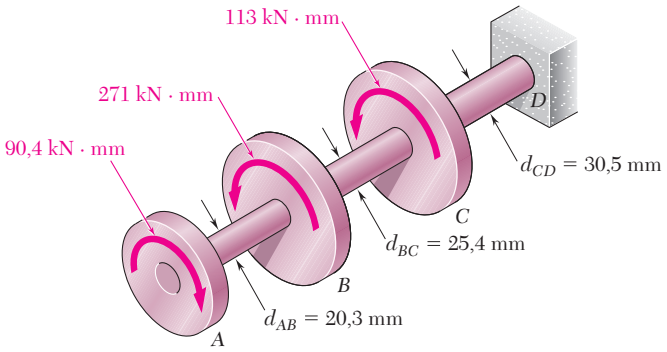


Fig. P3.151

3.152 Um tubo de aço com diâmetro externo de 304,8 mm é fabricado a partir de uma chapa de 6,35 mm de espessura usando-se solda ao longo de uma linha helicoidal que forma um ângulo de 45° com o plano perpendicular ao eixo do tubo. Sabendo que a máxima tensão de tração na solda é de 82,7 MPa, determine o maior torque que pode ser aplicado nesse tubo.

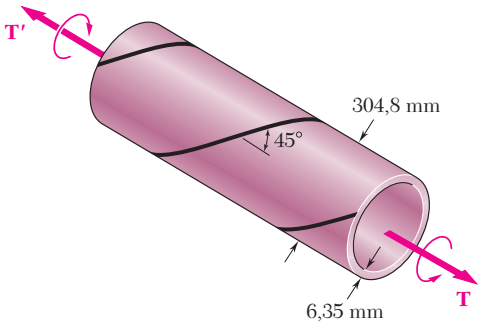


Fig. *P3.152*

3.153 Para o eixo de alumínio mostrado ($G = 27$ GPa), determine (*a*) o torque **T** que causa um ângulo de giro de 4° e (*b*) o ângulo de giro causado pelo mesmo torque **T** em um eixo cilíndrico sólido com o mesmo comprimento e área de seção transversal.

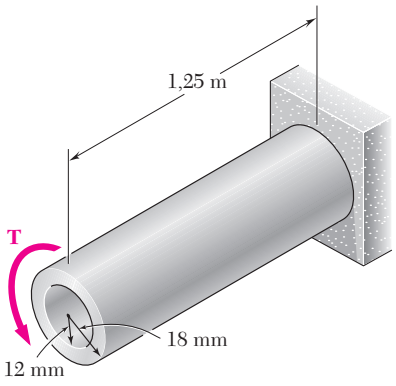


Fig. P3.153

3.154 A barra cilíndrica de seção cheia *BC* está ligada à alavanca rígida *AB* e fixada a um suporte em *C*. A força vertical **P** aplicada em *A* provoca um pequeno deslocamento Δ no ponto *A*. Mostre que a tensão de cisalhamento máxima na barra é

$$\tau = \frac{Gd}{2La}\Delta$$

em que *d* é o diâmetro da barra e *G* seu módulo de elasticidade transversal.

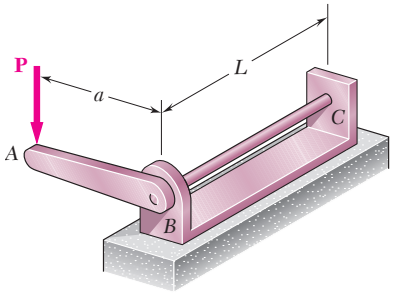


Fig. P3.154

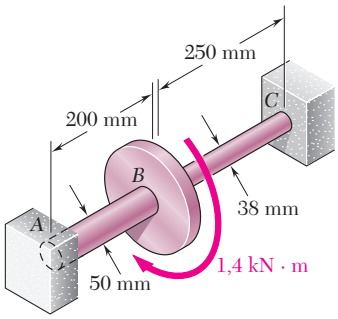


Fig. *P3.155*

3.155 Dois eixos de seção transversal cheia feitos de aço ($G = 77{,}2$ GPa), são conectados a um disco de acoplamento B e engastados a suportes rígidos em A e C. Para o carregamento mostrado, determine (*a*) a reação em cada suporte, (*b*) a tensão de cisalhamento máxima no eixo AB e (*c*) a tensão de cisalhamento máxima no eixo BC.

3.156 O eixo composto mostrado é girado pela aplicação de um torque **T** na extremidade em A. Sabendo que a máxima tensão de cisalhamento na casca de aço é 150 MPa, determine a correspondente tensão de cisalhamento no núcleo de alumínio. Adote $G = 77{,}2$ GPa para o aço e $G = 27$ GPa para o alumínio.

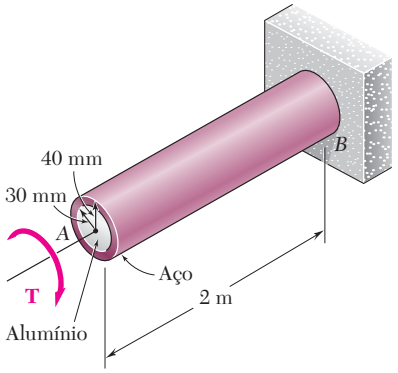


Fig. P3.156

3.157 No sistema de eixos e engrenagens mostrado, os diâmetros são $d_{AB} = 50{,}8$ mm e $d_{CD} = 38{,}1$ mm. Sabendo que $G = 77{,}2$ GPa, determine o ângulo de rotação da extremidade D do eixo CD.

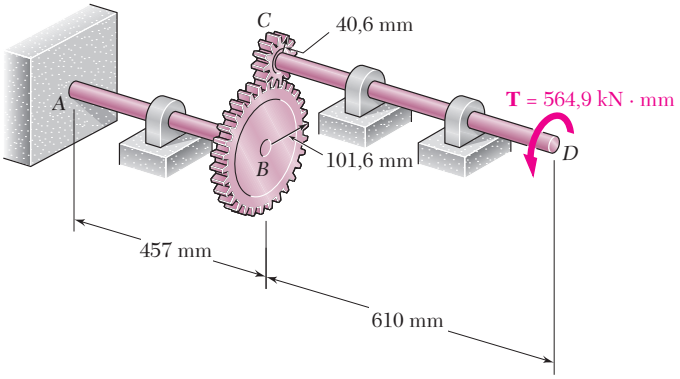


Fig. *P3.157*

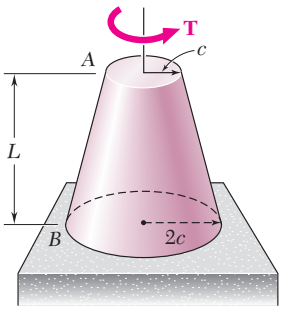


Fig. P3.158

3.158 Um torque **T** é aplicado a uma seção transversal cheia em forma de tronco de cone AB, conforme mostra a figura. Mostre por integração que o ângulo de torção em A é

$$\phi = \frac{7TL}{12\pi Gc^4}$$

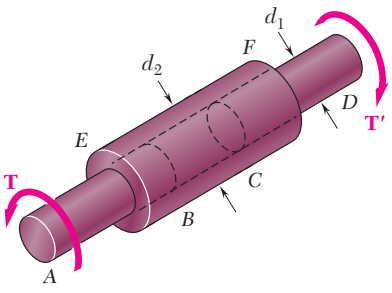


Fig. P3.160

3.159 Um eixo de aço com diâmetro de 38,1 mm e comprimento de 1 219 mm será utilizado para transmitir 60 hp entre um motor e uma bomba. Sabendo que $G = 77{,}2$ GPa, determine a menor rotação na qual a tensão não exceda 58,6 MPa e o ângulo de torção não exceda 2°.

3.160 Duas barras de latão AB e CD são soldadas a uma luva de latão EF. Determine a relação d_2/d_1 para a qual o valor máximo da tensão de cisalhamento ocorre simultaneamente para as barras e para a luva.

3.161 Um dos dois eixos propulsores de uma embarcação oceânica tem 75 m de comprimento e a seção transversal mostrada. Sabendo que $G = 77{,}2$ GPa e que o eixo transmite 44 MW para propulsão quando em rotação a 144 rpm, determine (*a*) a máxima tensão de cisalhamento no eixo e (*b*) o ângulo de giro do eixo.

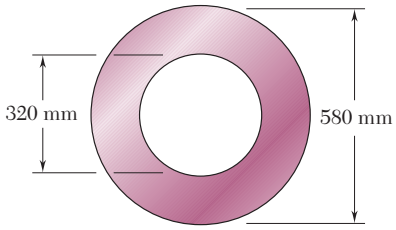


Fig. *P3.161*

3.162 Duas barras são feitas do mesmo material. A seção transversal da barra *A* é um quadrado de lado *b* e a seção transversal da barra *B* é um círculo de diâmetro *b*. Sabendo que as barras estão submetidas ao mesmo torque, determine a relação τ_A/τ_B das tensões de cisalhamento máximas que ocorrem nas barras.

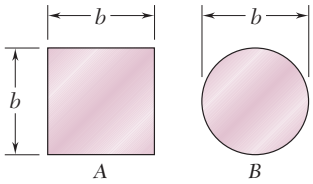


Fig. P3.162

PROBLEMAS PARA COMPUTADOR

Os problemas a seguir devem ser resolvidos com um computador.

3.C1 O eixo *AB* consiste em *n* elementos cilíndricos homogêneos, que podem ser cheios ou vazados. Sua extremidade *A* é fixa, enquanto a extremidade *B* é livre, e está submetido ao carregamento mostrado na figura. O comprimento do elemento *i* é designado por L_i, seu diâmetro externo por OD_i, seu diâmetro interno por ID_i, seu módulo de elasticidade transversal por G_i, e o torque aplicado à extremidade direita por $\mathbf{T}_i$, sendo que a intensidade $\mathbf{T}_i$ desse torque é considerada positiva se $\mathbf{T}_i$ estiver no sentido anti-horário quando se observa a barra da extremidade *B*, e negativa em caso contrário. (Note que $ID_i = 0$ se o elemento for cheio). (*a*) Elabore um programa de computador que possa ser utilizado para determinar a tensão de cisalhamento máxima em cada elemento, o ângulo de torção de cada elemento e o ângulo de torção do eixo inteiro. (*b*) Use esse programa para resolver os Problemas 3.35 e 3.38.

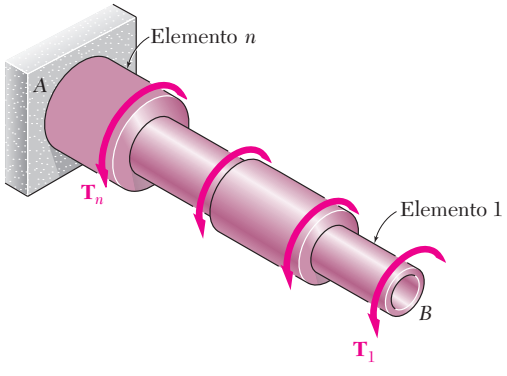


Fig. P3.C1

3.C2 O conjunto mostrado na figura consiste em n eixos cilíndricos, que podem ter seção cheia ou vazada, conectados por engrenagens e suportados por mancais (não mostrados). A extremidade A_1 do primeiro eixo é livre e está submetida ao torque $\mathbf{T}_0$, enquanto a extremidade B_n do último eixo é fixa. O comprimento do eixo A_iB_i é designado por L_i, seu diâmetro externo por OD_i, seu diâmetro interno por ID_i e seu módulo de elasticidade transversal por G_i. (Note que $ID_i = 0$ se o elemento for cheio). O raio da engrenagem A_i é designado por a_i, e o raio da engrenagem B_i por b_i. (a) Elabore um programa de computador que possa ser utilizado para determinar a tensão de cisalhamento máxima em cada eixo, o ângulo de torção de cada eixo e o ângulo pelo qual a extremidade A_i gira. (*b*) Utilize esse programa para resolver os Problemas 3.40 e 3.44.

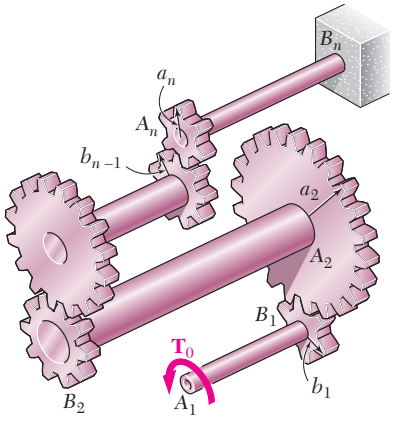


Fig. P3.C2

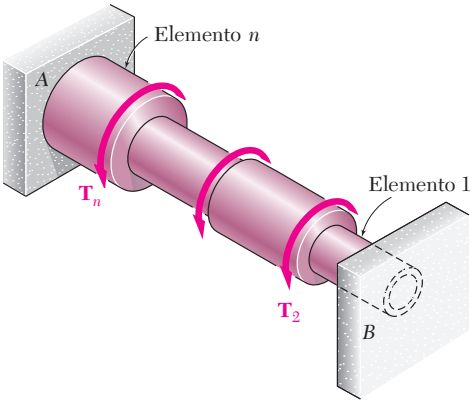


Fig. P3.C3

3.C3 O eixo AB consiste em n elementos cilíndricos homogêneos, que podem ser cheios ou vazados. Ambas as extremidades são fixas, e ele está submetido ao carregamento mostrado na figura. O comprimento do elemento i é designado por L_i, seu diâmetro externo por OD_i, seu diâmetro interno por ID_i, seu módulo de elasticidade transversal por G_i e o torque aplicado à sua extremidade direita por $\mathbf{T}_i$, sendo que a intensidade $\mathbf{T}_i$ desse torque é considerada positiva se $\mathbf{T}_i$ estiver no sentido anti-horário quando se observa a barra da extremidade B, e negativa em caso contrário. Note que $ID_i = 0$ se o elemento é cheio, e também que $\mathbf{T}_1 = 0$. Elabore um programa de computador que possa ser utilizado para determinar as reações em A e B, a tensão de cisalhamento máxima em cada elemento e o ângulo de torção de cada elemento. Utilize esse programa (*a*) para resolver o Problema 3.155 e (*b*) para determinar a tensão de cisalhamento máxima no eixo do Exemplo 3.5.

3.C4 O eixo AB, cilíndrico, de seção cheia e homogêneo tem um comprimento L, um diâmetro d, um módulo de elasticidade transversal G e uma tensão de escoamento τ_E. Ele está submetido a um torque $\mathbf{T}$ que é aumentado gradualmente desde zero até que o ângulo de torção do eixo atinja o valor máximo ϕ_m e depois diminuído novamente até zero. (*a*) Elabore um programa de computador que, para cada um dos 16 valores de ϕ_m igualmente espaçados sobre um intervalo que se estende de 0 até um valor três vezes maior que o ângulo de torção no início do escoamento, possa ser utilizado para determinar o valor máximo T_m do torque, o raio do núcleo elástico, a tensão de cisalhamento máxima, o ângulo de torção permanente e a tensão de cisalhamento residual tanto na superfície do eixo quanto na interface do núcleo elástico e região plástica. (*b*) Utilize esse programa para obter respostas aproximadas dos Problemas 3.114, 3.115 e 3.118.

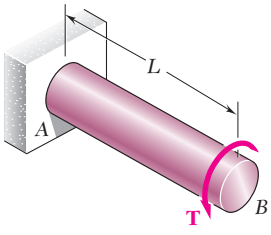


Fig. P3.C4

3.C5 A expressão exata é dada no Problema 3.61 para o ângulo de torção do eixo cônico *AB* de seção cheia, quando é aplicado um torque **T** como mostra a figura. Deduza uma expressão aproximada para o ângulo de torção substituindo o eixo cônico por *n* eixos cilíndricos de igual comprimento e com raios dados por $r_i = (n + i - \frac{1}{2})(c/n)$, em que $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$. Usando para *T*, *L*, *G* e *c* valores de sua escolha, determine o erro percentual na expressão aproximada quando (*a*) $n = 4$, (*b*) $n = 8$, (*c*) $n = 20$ e (*d*) $n = 100$.

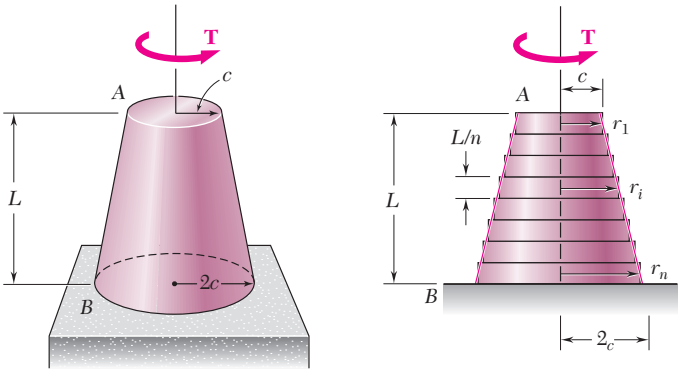


Fig. P3.C5

3.C6 Um torque **T** é aplicado, como mostra a figura, ao eixo *AB*, vazado e cônico, com espessura uniforme *t*. A expressão exata para o ângulo de torção do eixo pode ser obtida da expressão dada no Problema 3.156. Deduza uma expressão aproximada para o ângulo de torção substituindo o eixo cônico por *n* anéis cilíndricos de igual comprimento e de raio $r_i = (n + i - \frac{1}{2})(c/n)$, em que $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$. Utilizando para *T*, *L*, *G*, *c* e *t* valores de sua escolha, determine o erro percentual na expressão aproximada quando (*a*) $n = 4$, (*b*) $n = 8$, (*c*) $n = 20$ e (*d*) $n = 100$.

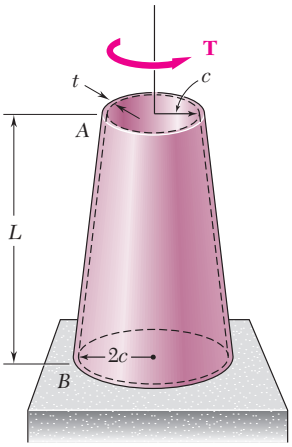


Fig. P3.C6

CAPÍTULO

4

Flexão pura

O atleta da figura segura a barra de levantamento de pesos com as mãos posicionadas a distâncias iguais dos pesos. Isso resulta em flexão pura na parte central da barra. As tensões normais e a curvatura resultante da flexão pura serão determinadas neste capítulo.

4.1. Introdução

Nos capítulos anteriores estudamos como determinar as tensões nos elementos prismáticos ou barras submetidas a forças axiais ou a momentos torçores. Neste capítulo e nos dois seguintes, analisaremos as tensões e deformações em elementos prismáticos submetidos à *flexão*. Flexão é um conceito importante usado no projeto de muitos componentes de máquinas e componentes estruturais, como vigas e traves.

Este capítulo será dedicado à análise dos elementos prismáticos submetidos a momentos fletores **M** e **M′** iguais e opostos atuando no mesmo plano longitudinal. Dizemos que esses elementos estão em *flexão pura*. Na maior parte do capítulo, consideraremos que os elementos possuam um plano de simetria e que os momentos fletores **M** e **M′** estão atuando naquele plano (Fig. 4.1). Um exemplo de flexão pura é dado pela barra de levantamento de

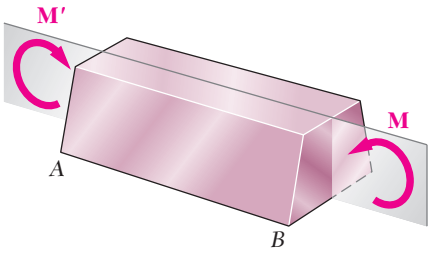


Fig. 4.1

pesos típica quando o atleta a segura acima da cabeça, como mostra a página anterior. A barra suporta pesos iguais a distâncias iguais das mãos do levantador de pesos. Em razão da simetria do diagrama de corpo livre da barra (Fig. 4.2*a*), as reações nas mãos devem ser iguais e opostas aos pesos. Portanto, com relação à parte média *CD* da barra, os pesos e as reações podem ser substituídos por dois momentos fletores iguais e opostos de 108 N · m (Fig. 4.2*b*), mostrando que a parte central da barra está em flexão pura. Uma análise similar do eixo de um pequeno veículo esportivo (Fig. 4.3) mostraria que, entre os dois pontos em que ele está preso ao veículo, o eixo está em flexão pura.

Por mais interessantes que as aplicações diretas da flexão pura possam ser, a dedicação de um capítulo inteiro ao seu estudo não seria justificada se não fosse pelo fato de que os resultados obtidos serão usados na análise de outros tipos de carregamento, como *carregamentos axiais excêntricos* e *carregamentos transversais.*

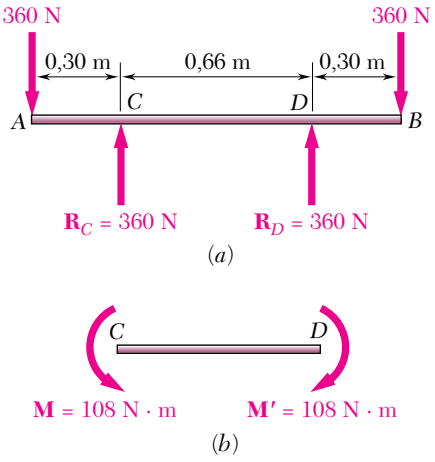


Fig. 4.2

Fig. 4.3 No veículo esportivo mostrado, o segmento central do eixo traseiro está submetido a flexão pura.

A Figura 4.4 mostra um grampo de aço de 305 mm usado para aplicar uma força de 680 N a duas peças de madeira que estão sendo coladas. A Fig. 4.5*a* mostra as forças iguais e opostas exercidas pela madeira no grampo. Essas forças resultam em um *carregamento excêntrico* na parte reta do grampo. Na Fig. 4.5*b* foi feito um corte no grampo na seção CC' e desenhado o diagrama de corpo livre da metade superior do grampo, do qual concluímos

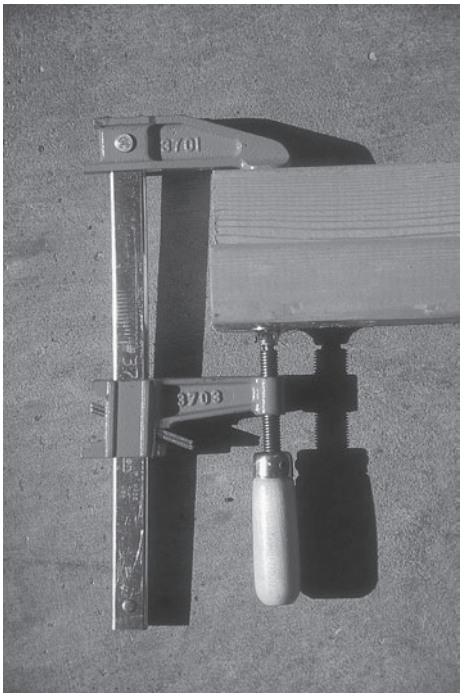


Fig. 4.4

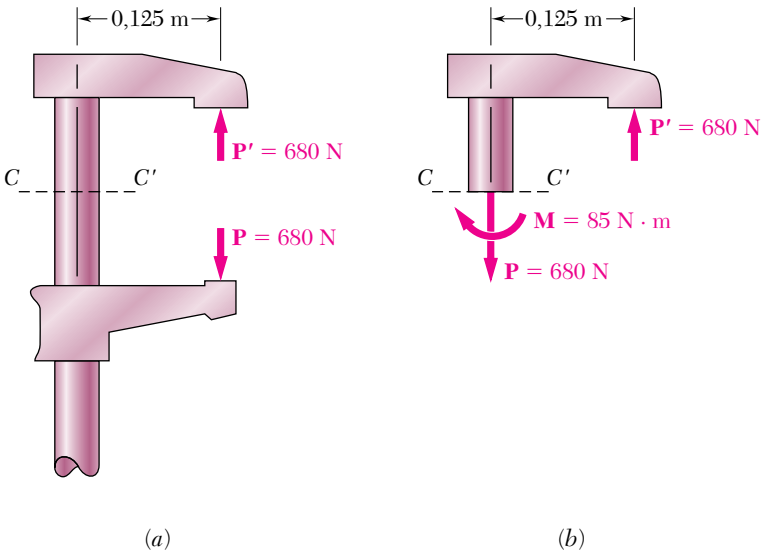


Fig. 4.5

que os esforços internos na seção são equivalentes a uma força de tração axial **P** de 680 N e um momento fletor **M** de 85 N · m. Podemos então combinar as tensões sob uma força *centrada* e os resultados de nossa futura análise de tensões em flexão pura, para obter a distribuição de tensões sob uma força *excêntrica*. Isso será discutido melhor na Seção 4.12.

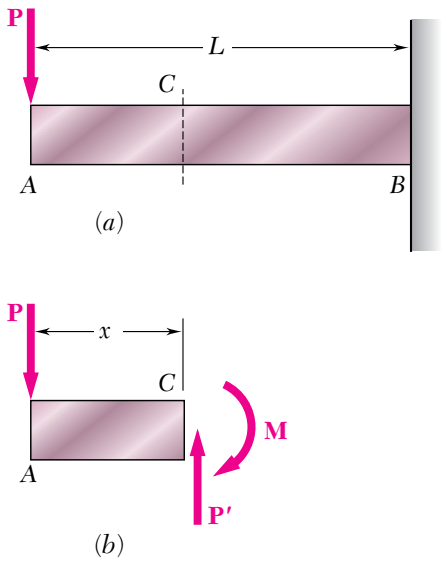


Fig. 4.6

O estudo da flexão pura também terá um papel essencial no estudo das vigas, isto é, o estudo de elementos prismáticos submetidos a vários tipos de *forças transversais* ao eixo longitudinal do elemento. Considere, por exemplo, uma viga em balanço AB suportando uma força concentrada **P** em sua extremidade livre (Fig. 4.6*a*). Se cortarmos a viga em uma seção C a uma distância x de A, observamos no diagrama de corpo livre de AC (Fig. 4.6*b*) que os esforços internos na seção consistem em uma força $\mathbf{P'}$ igual e oposta a **P** e de um momento **M** de intensidade $M = Px$. A distribuição de tensões normais na seção pode ser obtida do momento **M** como se a viga estivesse em flexão pura. Não obstante, as tensões de cisalhamento na seção dependem da força $\mathbf{P'}$, e você aprenderá no Capítulo 6 a determinar sua distribuição sobre uma determinada seção.

A primeira parte do capítulo é dedicada à análise das tensões e deformações provocadas por flexão pura em uma barra homogênea que possui um plano de simetria e é feita de um material que segue a lei de Hooke. Em uma discussão preliminar sobre as tensões em virtude da flexão (Seção 4.2), serão usados os métodos da estática para determinar três equações fundamentais que devem ser satisfeitas pelas tensões normais em uma determinada seção transversal da barra. Na Seção 4.3, provaremos que *seções transversais pla-*

nas permanecem planas em uma barra submetida à flexão pura, enquanto na Seção 4.4 serão desenvolvidas fórmulas que podem ser usadas para determinar as *tensões normais*, bem como o *raio de curvatura* para uma barra dentro do regime elástico.

Na Seção 4.6, você estudará as tensões e deformações em *barras de material composto,* feitas de mais de um material, como vigas reforçadas de concreto, que utilizam as melhores características do aço e do concreto e são usadas extensivamente na construção de edifícios e pontes. Você aprenderá a desenhar uma *seção transformada* representando a seção de uma barra feita de material homogêneo que sofre as mesmas deformações da barra do material composto sob o mesmo carregamento. A seção transformada será usada para determinar as tensões e deformações na barra de material composto original. A Seção 4.7 é dedicada à determinação das *concentrações de tensão* localizadas em posições em que a seção transversal da barra sofre por uma mudança brusca.

Na próxima parte do capítulo, você estudará *deformações plásticas* em flexão, isto é, as deformações das barras feitas de material que não segue a lei de Hooke e estão submetidas à flexão. Após uma discussão geral sobre as deformações dessas barras (Seção 4.8), você investigará as tensões e deformações em barras feitas de *material elastoplástico* (Seção 4.9). Começando com o *momento elástico máximo* M_E, que corresponde ao início do escoamento, discutiremos os efeitos de momentos cada vez maiores até atingir o *momento plástico* M_p, quando então a seção transversal da barra estará totalmente deformada no regime plástico. Você também aprenderá a determinar as *deformações permanentes* e as *tensões residuais* que resultam desses carregamentos (Seção 4.11). Deve-se notar que, durante os últimos 50 anos, a propriedade elastoplástica do aço tem sido amplamente utilizada em projetos que resultam em melhor segurança e economia.

Na Seção 4.12, você aprenderá a analisar um *carregamento axial excêntrico* em um plano de simetria, como aquele mostrado na Fig. 4.4, superpondo as tensões em virtude da flexão pura e as tensões em virtude do carregamento axial centrado.

Seu estudo de flexão de elementos prismáticos concluirá com a análise da *flexão assimétrica* (Seção 4.13), e o estudo do caso geral de *carregamento axial excêntrico* (Seção 4.14). A parte final do capítulo será dedicada à determinação das tensões em *elementos curvos* (Seção 4.15).

4.2. Barra simétrica em flexão pura

Considere uma barra prismática *AB* possuindo um plano de simetria e submetida a conjugados iguais e opostos **M** e **M′** atuando naquele plano (Fig. 4.7*a*). Observamos que, se uma seção da barra *AB* for cortada em algum ponto arbitrário *C*, as condições de equilíbrio da parte *AC* da barra requerem que os esforços internos na seção sejam equivalentes ao conjugado **M** (Fig. 4.7*b*). Assim, os esforços internos em qualquer seção transversal de uma barra de seção simétrica em flexão pura são equivalentes ao conjugado. O momento *M* daquele conjugado é chamado de *momento fletor* na seção. Seguindo a convenção usual, será atribuído um sinal positivo a *M* quando a barra é flexionada, conforme mostra a Fig. 4.7*a*, isto é, quando a concavidade da viga está virada para cima, e um sinal negativo em caso contrário.

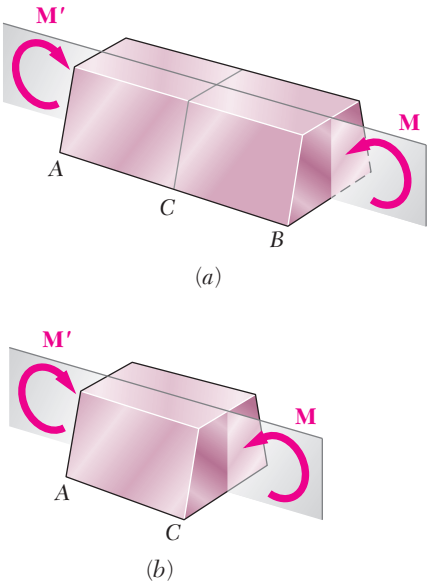


Fig. 4.7

Chamando de σ_x a tensão normal em um ponto da seção transversal e τ_{xy} e τ_{xz} as componentes da tensão de cisalhamento, expressamos que o sistema das forças internas elementares que atuam na seção é equivalente ao momento fletor **M** (Fig. 4.8).

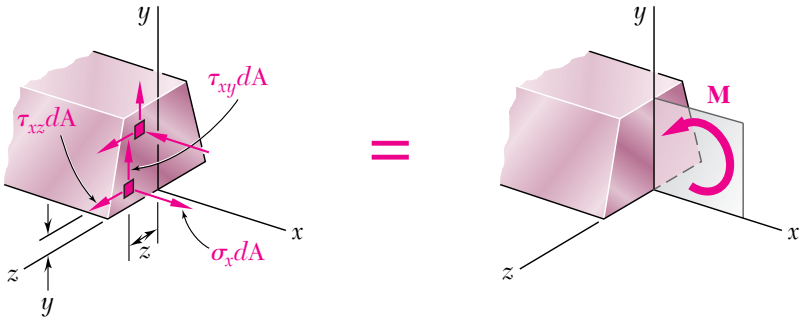


Fig. 4.8

Recordamos da estática que um momento fletor **M** consiste na realidade de duas forças iguais e opostas. A soma das componentes dessas forças em qualquer direção, portanto, é igual a zero. Além disso, o momento fletor é o mesmo em relação a *qualquer* eixo perpendicular a seu plano, e é zero em relação a qualquer eixo contido naquele plano. Selecionando arbitrariamente o eixo z, como mostra a Fig. 4.8, expressamos a equivalência das forças internas elementares e do momento **M** escrevendo que as somas das componentes e dos momentos das forças elementares são iguais às correspondentes componentes e aos correspondentes momentos fletores **M**:

componentes x: $$\int \sigma_x \, dA = 0 \tag{4.1}$$

momentos em torno do eixo y: $$\int z\sigma_x \, dA = 0 \tag{4.2}$$

momentos em torno do eixo z: $$\int (-y\sigma_x \, dA) = M \tag{4.3}$$

Três equações adicionais poderiam ser obtidas igualando a zero as somas das componentes y, componentes z e momentos em torno do eixo x, mas essas equações envolveriam somente as componentes da tensão de cisalhamento e, como você verá na próxima seção, as componentes da tensão de cisalhamento são ambas iguais a zero.

Devem ser feitas duas observações neste ponto. (1) O sinal de menos na Equação (4.3) se deve em razão do fato de que uma tensão de tração ($\sigma_x > 0$) leva a um momento negativo (sentido horário) da força normal $\sigma_x \, dA$ em relação ao eixo z. (2) A Equação (4.2) poderia ter sido prevista, pois a aplicação dos momentos fletores no plano de simetria da barra AB resultará em uma distribuição de tensões normais que é simétrica em relação ao eixo y.

Uma vez mais, notamos que a distribuição real de tensões em uma seção transversal não pode ser determinada somente pela estática. Ela é *estaticamente indeterminada* e pode ser obtida somente analisando-se as *deformações* produzidas na barra.

4.3. Deformações em uma barra de seção simétrica em flexão pura

Vamos agora analisar as deformações de um elemento prismático que possui um plano de simetria e está submetido em suas extremidades a momentos fletores **M** e **M′** iguais e opostos atuando no plano de simetria. O elemento sofrerá flexão sob a ação dos momentos fletores, mas permanecerá simétrico em relação ao outro plano (Fig. 4.9). Além disso, como o momento fletor M é o mesmo em qualquer seção transversal, a barra sofrerá flexão uniforme.

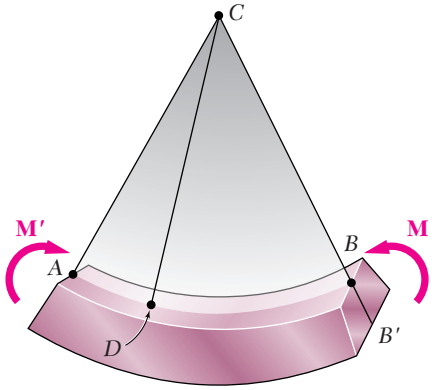


Fig. 4.9

Assim, a linha AB ao longo da qual a face superior da barra intercepta o plano dos momentos fletores terá uma curvatura constante. Em outras palavras, a linha AB, que originalmente era uma linha reta, será transformada em um arco de circunferência de centro C, como também a linha $A'B'$ (não mostrada na figura) ao longo da qual a face inferior da barra intercepta o plano de simetria. Notamos também que a linha AB diminuirá em seu comprimento quando a barra for flexionada conforme mostra a figura, isto é, quando $M > 0$, enquanto $A'B'$ se tornará mais longa.

Em seguida vamos provar que qualquer seção transversal perpendicular ao eixo da barra permanece plana, e que o plano da seção passa por C. Se esse não fosse o caso, poderíamos encontrar um ponto E da seção original, que é a mesma seção à qual D pertence (Fig. 4.10*a*), e que depois de a barra ter sido flexionada, ele *não* estaria mais no plano de simetria que contém a linha CD (Fig. 4.10*b*). Mas, em virtude da simetria da barra, haveria um outro ponto E' que seria transformado exatamente da mesma maneira. Vamos supor que, depois de a viga ter sido flexionada, ambos os pontos estariam localizados à esquerda do plano definido por CD, como mostra a Fig. 4.10*b*. Como o momento fletor M é o mesmo por todo o elemento, uma situação similar seria válida em qualquer outra seção transversal, e os pontos correspondentes a E e E' também se moveriam para a esquerda. Assim, um observador em A concluiria que o carregamento faz os pontos E e E' em várias seções transversais se moverem para a frente (em direção ao observador). Mas um observador em B, para o qual o carregamento parece o mesmo, e que observa os pontos E e E' nas mesmas posições (exceto que agora eles estão invertidos), chegaria a uma conclusão oposta. Essa inconsistência nos leva a concluir que E e E' estarão no mesmo plano definido por CD e, portanto, que a seção permanece plana e passa pelo ponto C. Devemos notar, no entanto, que essa discussão não invalida a possibilidade de deformações *dentro* do plano da seção (veja a Seção 4.5).

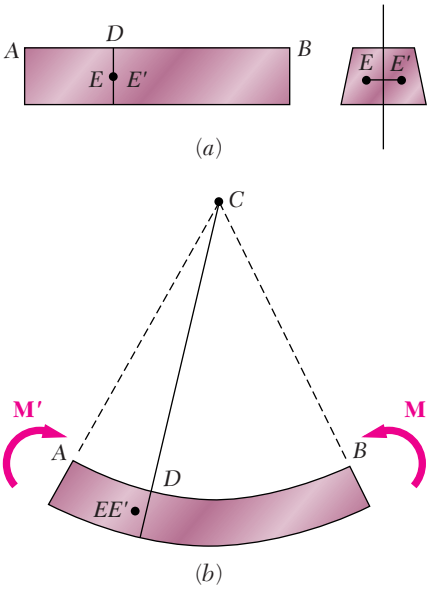
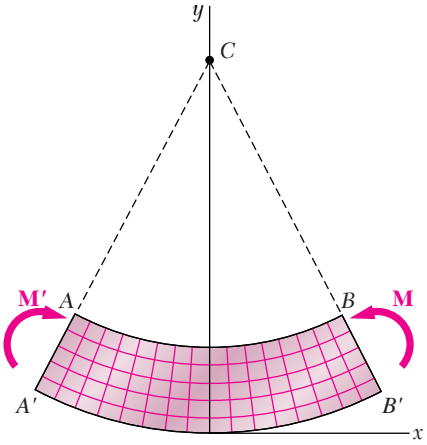
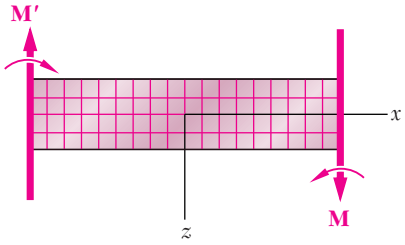


Fig. 4.10



(*a*) Seção vertical, longitudinal (plano de simetria)

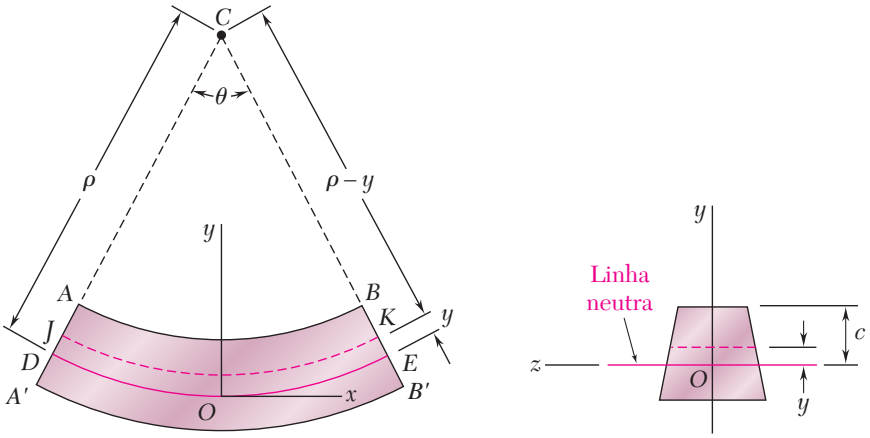


(*b*) Seção horizontal, longitudinal

Fig. 4.11

Imagine que a viga seja dividida em um grande número de pequenos elementos cúbicos com faces respectivamente paralelas aos três planos coordenados. A propriedade que estabelecemos requer que esses elementos sejam transformados quando a viga estiver submetida aos momentos fletores **M** e **M′**, como mostra a Fig. 4.11. Como todas as faces representadas nas duas projeções da Fig. 4.11 estão a 90° uma da outra, concluímos que $\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = 0$ e, portanto, que $\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$. Com relação às três componentes de tensão que não discutimos ainda, ou seja, σ_y, σ_z e τ_{yz}, notamos que elas devem ser zero na superfície da viga. Em contrapartida, como as deformações envolvidas não requerem nenhuma interação entre os elementos de uma seção transversal, podemos supor que essas três componentes de tensão são iguais a zero em toda a viga. Essa suposição é confirmada, tanto pela evidência experimental quanto pela teoria da elasticidade, para vigas delgadas submetidas a pequenas deformações.† Concluímos que a única componente de tensão diferente de zero que atua em qualquer um dos pequenos elementos cúbicos considerados aqui é a componente normal σ_x. Assim, em qualquer ponto de uma viga delgada em flexão pura, temos um estado de *tensão uniaxial*. Lembrando que, para $M > 0$, observa-se que as linhas AB e $A'B'$, respectivamente, diminuem e aumentam em comprimento, notamos que a deformação específica ϵ_x e a tensão σ_x são negativas na parte superior da viga (*compressão*) e positivas na parte inferior (*tração*).

Conclui-se dessa discussão que deve existir uma superfície paralela às faces superior e inferior da viga, em que ϵ_x e σ_x são zero. Essa superfície é chamada de *superfície neutra*. A superfície neutra intercepta o plano de simetria ao longo de um arco de circunferência DE (Fig. 4.12*a*) e intercepta determinada seção transversal por meio de uma linha reta chamada de *linha neutra* da seção (Fig. 4.12*b*).



(*a*) Seção vertical, longitudinal (plano de simetria)

(*b*) Seção transversal

Fig. 4.12

A origem das coordenadas será adotada agora em um ponto na superfície neutra, e não na face inferior da viga, como foi feito antes, de modo que a distância de qualquer ponto até a superfície neutra será medida por sua coordenada y.

†Veja também Prob. 2.32.

Chamando de ρ o raio do arco DE (Fig. 4.12*a*), de θ o ângulo central correspondendo a DE, e observando que o comprimento de DE é igual ao comprimento L da viga não deformada, escrevemos

$$L = \rho\theta \tag{4.4}$$

Considerando agora o arco JK localizado a uma distância y acima da superfície neutra, notamos que seu comprimento L' é

$$L' = (\rho - y)\theta \tag{4.5}$$

Como o comprimento original do arco JK era igual a L, a deformação de JK é

$$\delta = L' - L \tag{4.6}$$

ou, se substituirmos de (4.4) e (4.5) em (4.6),

$$\delta = (\rho - y)\theta - \rho\theta = -y\theta \tag{4.7}$$

A deformação longitudinal específica ϵ_x nos elementos que constituem o arco JK é obtida dividindo-se δ pelo comprimento original L de JK. Escrevemos

$$\epsilon_x = \frac{\delta}{L} = \frac{-y\theta}{\rho\theta}$$

ou

$$\epsilon_x = -\frac{y}{\rho} \tag{4.8}$$

O sinal de menos é em razão do fato de que supomos que o momento fletor seja positivo e, portanto, a viga terá a concavidade para cima.

Em virtude da necessidade de que as seções transversais permaneçam planas, ocorrerão deformações idênticas em todos os planos paralelos ao plano de simetria. Assim, o valor da deformação específica dado pela Equação (4.8) é válido em qualquer lugar, e concluímos que a *deformação normal longitudinal específica* ϵ_x *varia linearmente com a distância* y *da superfície neutra*.

A deformação específica ϵ_x atinge seu valor absoluto máximo quando o valor de y é máximo. Chamando de c a maior distância da superfície neutra (que corresponde à superfície superior ou inferior da viga), e de ϵ_m o *valor absoluto máximo* da deformação, temos

$$\epsilon_m = \frac{c}{\rho} \tag{4.9}$$

Resolvendo (4.9) para ρ e substituindo o valor obtido em (4.8), podemos também escrever

$$\epsilon_x = -\frac{y}{c}\epsilon_m \tag{4.10}$$

Concluímos nossa análise das deformações de uma viga em flexão pura observando que ainda não somos capazes de calcular a deformação específica ou tensão em um determinado ponto da viga, pois ainda não localizamos sua superfície neutra. Para localizarmos essa superfície, devemos primeiro especificar a relação tensão-deformação específica do material utilizado.†

†No entanto, se a viga possui um plano vertical e horizontal de simetria (por exemplo, uma viga com uma seção transversal retangular), e se a curva tensão-deformação específica é a mesma em tração e compressão, a superfície neutra coincidirá com o plano de simetria (cf. Seção 4.8).

4.4. Tensões e deformações no regime elástico

Consideramos agora o caso em que o momento fletor M é tal que as tensões normais na viga permanecem abaixo da tensão de escoamento do material σ_E. Isso significa que, para todos os fins práticos, as tensões na viga permanecerão abaixo dos limites de proporcionalidade e elástico. Não haverá deformação permanente, e vale a lei de Hooke para tensão uniaxial. Considerando que o material seja homogêneo, e chamando de E seu módulo de elasticidade, temos na direção longitudinal x

$$\sigma_x = E\epsilon_x \tag{4.11}$$

Recordando a Equação (4.10), e multiplicando ambos os membros dessa equação por E, escrevemos

$$E\epsilon_x = -\frac{y}{c}(E\epsilon_m)$$

ou, usando (4.11),

$$\sigma_x = -\frac{y}{c}\sigma_m \tag{4.12}$$

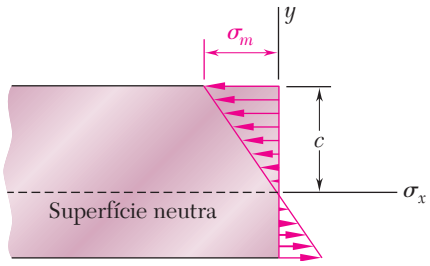


Fig. 4.13

em que σ_m representa o *valor máximo absoluto* da tensão. Esse resultado mostra que no *regime elástico, a tensão normal varia linearmente com a distância da superfície neutra* (Fig. 4.13).

Deve-se notar, neste momento, que não conhecemos a localização da superfície neutra nem o valor máximo σ_m da tensão. Ambos podem ser encontrados se lembrarmos das relações (4.1) e (4.3) obtidas anteriormente da estática. Substituindo primeiro o valor de σ_x dado em (4.12) em (4.1), escrevemos

$$\int \sigma_x \, dA = \int \left(-\frac{y}{c}\sigma_m\right) dA = -\frac{\sigma_m}{c}\int y \, dA = 0$$

da qual concluímos que

$$\int y \, dA = 0 \tag{4.13}$$

Essa equação mostra que o momento estático da seção transversal em relação à linha neutra deve ser zero.† Em outras palavras, para uma viga submetida à flexão pura, e *desde que as tensões permaneçam no regime elástico, a linha neutra passará pelo centro geométrico, ou centroide, da seção transversal.*

Lembramos agora da Equação (4.3), determinada na Seção 4.2 com relação a um eixo z horizontal *arbitrário*,

$$\int (-y\sigma_x \, dA) = M \tag{4.3}$$

Especificando que o eixo z deverá coincidir com a linha neutra da seção transversal, substituímos o valor de σ_x dado em (4.12) em (4.3) e escrevemos

$$\int (-y)\left(-\frac{y}{c}\sigma_m\right) dA = M$$

†Veja o Apêndice A para uma discussão dos momentos estáticos.

ou

$$\frac{\sigma_m}{c}\int y^2\,dA = M \tag{4.14}$$

Lembrando que, no caso de flexão pura, a linha neutra passa pelo centro geométrico da seção transversal, notamos que I é o momento de inércia, ou momento de segunda ordem, da seção transversal em relação a um eixo que passa pelo centro geométrico e é perpendicular ao plano do momento fletor **M**. Resolvendo (4.14) para σ_m, escrevemos então†

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} \tag{4.15}$$

Substituindo σ_m de (4.15) em (4.12), obtemos a tensão normal σ_x para qualquer distância y da linha neutra:

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \tag{4.16}$$

As Equações (4.15) e (4.16) são chamadas de *fórmulas da flexão em regime elástico*, e a tensão normal σ_x provocada pela flexão da viga geralmente é chamada de *tensão de flexão*. Verificamos que a tensão é de compressão ($\sigma_x < 0$) acima da linha neutra ($y > 0$) quando o momento fletor M é positivo, e de tração ($\sigma_x > 0$) quando M é negativo.

Retornando à Equação (4.15), notamos que a relação I/c depende somente da geometria da seção transversal. Essa relação é chamada de *módulo de resistência* e é representada por W. Temos

$$\text{Módulo de resistência} = W = \frac{I}{c} \tag{4.17}$$

Substituindo I/c por W na Equação (4.15), escrevemos essa equação na forma alternativa

$$\sigma_m = \frac{M}{W} \tag{4.18}$$

Como a tensão máxima σ_m é inversamente proporcional ao módulo de resistência W, está claro que as vigas devem ser projetadas com um valor de W o maior possível. Por exemplo, no caso de uma viga de madeira com seção transversal retangular de largura b e altura h, temos

$$W = \frac{I}{c} = \frac{\frac{1}{12}bh^3}{h/2} = \tfrac{1}{6}bh^2 = \tfrac{1}{6}Ah \tag{4.19}$$

em que A é a área da seção transversal da viga. Isso mostra que no caso de duas vigas com a mesma área A de seção transversal (Fig. 4.14), aquela com a altura h maior terá um módulo de resistência maior e, portanto, terá uma capacidade maior para resistir à flexão.‡

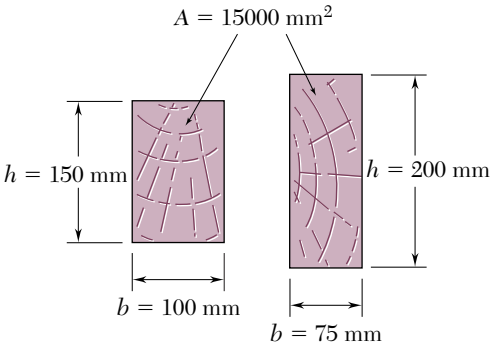


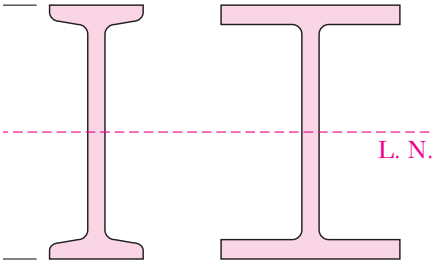
Fig. 4.14

†Lembramos que o momento fletor foi considerado positivo. Se o momento fletor for negativo, M deverá ser substituído na Equação (4.15) por seu valor absoluto $|M|$.

‡No entanto, valores grandes da relação h/b poderiam resultar na instabilidade lateral da viga.

No caso do aço estrutural, as vigas de padrão americano (viga S) e as vigas de mesa larga (viga W), Fig. 4.15, são preferidas em lugar de outros

Fig. 4.15 Vigas de mesa larga de aço formam a estrutura de muitos edifícios.



(*a*) Viga *S* (*b*) Viga *W*

Fig. 4.16

perfis, porque a maior parte de suas seções transversais está localizada bem longe da linha neutra (Fig. 4.16). Assim, para uma determinada área de seção transversal e uma altura dada, o projeto dessas vigas proporciona valores altos de I e, consequentemente, de W. Valores do módulo de resistência das vigas fabricadas normalmente podem ser obtidos das tabelas que listam várias propriedades geométricas dessas vigas. Para determinar a tensão máxima σ_m em uma seção de uma viga padrão, o engenheiro precisa somente ler o valor do módulo de resistência W na tabela, e dividir o momento fletor M na seção por W.

A deformação da viga provocada pelo momento fletor M é medida pela *curvatura* da superfície neutra. A curvatura é definida como o inverso do raio de curvatura ρ, e pode ser obtida resolvendo-se a Equação (4.9) para $1/\rho$:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\epsilon_m}{c} \tag{4.20}$$

Mas, no regime elástico, temos $\epsilon_m = \sigma_m/E$. Substituindo-se ϵ_m na Equação (4.20) e usando a (4.15), escrevemos

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sigma_m}{Ec} = \frac{1}{Ec}\frac{Mc}{I}$$

ou

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \tag{4.21}$$

EXEMPLO 4.1

Uma barra de aço de seção transversal retangular medindo 20,3 mm × 63,5 mm está submetida a dois momentos fletores iguais e opostos atuando no plano vertical de simetria da barra (Fig. 4.17). Determine o valor do momento fletor M que provoca escoamento na barra. Considere $\sigma_E = 248$ MPa.

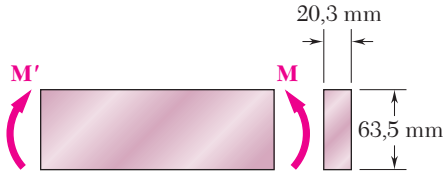


Fig. 4.17

Como a linha neutra deve passar pelo centroide C da seção transversal, temos $c = 31{,}75$ mm (Fig. 4.18). Entretanto, o momento de inércia em relação ao eixo que passa pelo centroide da seção transversal retangular é

$$I = \tfrac{1}{12}bh^3 = \tfrac{1}{12}(2{,}03\text{ cm})(6{,}35\text{ cm})^3 = 43{,}31\text{ cm}^4$$

Resolvendo a Equação (4.15) para M, e usando os dados acima, temos

$$M = \frac{I}{c}\sigma_m = \frac{43{,}31}{3{,}175}(24{,}8\text{ kN/cm}^2)$$
$$M = 338{,}30\text{ kN} \cdot \text{cm}$$

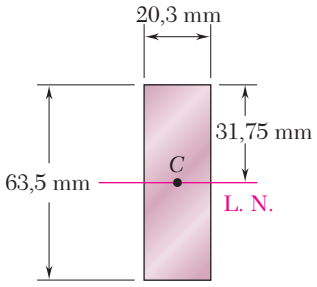


Fig. 4.18

EXEMPLO 4.2

Uma barra de alumínio com uma seção transversal semicircular de raio $r = 12$ mm (Fig. 4.19) é flexionada até atingir a forma de um arco de circunferência de raio médio $\rho = 2{,}5$ m. Sabendo que a face plana da barra está virada para o centro de curvatura do arco, determine as tensões máximas de tração e compressão na barra. Use $E = 70$ GPa.

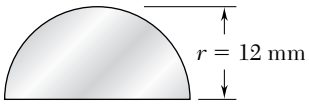


Fig. 4.19

Poderíamos usar a Equação (4.21) para determinar o momento fletor M correspondente ao raio de curvatura ρ dado, e depois usar a Equação 4.15 para determinar σ_m. No entanto, é mais simples usar a Equação (4.9) para determinar ϵ_m e a lei de Hooke para obter σ_m.

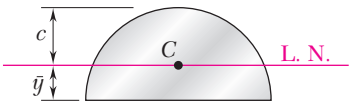


Fig. 4.20

A ordenada $\bar{y}$ do centroide C da seção transversal semicircular é

$$\bar{y} = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4(12\text{ mm})}{3\pi} = 5{,}093\text{ mm}$$

A linha neutra passa pelo ponto C (Fig. 4.20), e a distância c até o ponto da seção transversal mais distante da linha neutra é

$$c = r - \bar{y} = 12\text{ mm} - 5{,}093\text{ mm} = 6{,}907\text{ mm}$$

Usando a Equação (4.9), escrevemos

$$\epsilon_m = \frac{c}{\rho} = \frac{6{,}907 \times 10^{-3}\text{ m}}{2{,}5\text{ m}} = 2{,}763 \times 10^{-3}$$

e, aplicando a lei de Hooke,

$$\sigma_m = E\epsilon_m = (70 \times 10^9\text{ Pa})(2{,}763 \times 10^{-3}) = 193{,}4\text{ MPa}$$

Como esse lado da barra está voltado para direção oposta ao centro de curvatura da barra, a tensão obtida é de tração. A tensão de compressão máxima ocorre no lado plano da barra. Considerando o fato de que a tensão é proporcional à distância da linha neutra, escrevemos

$$\sigma_{\text{comp}} = -\frac{\bar{y}}{c}\sigma_m = -\frac{5{,}093\text{ mm}}{6{,}907\text{ mm}}(193{,}4\text{ MPa})$$
$$= -142{,}6\text{ MPa}$$

4.5. Deformações em uma seção transversal

Quando provamos na Seção 4.3 que a seção transversal de uma viga em flexão pura permanece plana, não excluímos a possibilidade de deformações dentro do plano da seção. É evidente que existirão tais deformações, se lembrarmos que na Seção 2.11, barras em um estado de tensão uniaxial, $\sigma_x \neq 0$, $\sigma_y = \sigma_z = 0$, são deformadas nas direções transversais y e z, bem como na direção axial x. As deformações específicas normais ϵ_y e ϵ_z dependem do coeficiente de Poisson ν para o material utilizado e são expressas como

$$\epsilon_y = -\nu\epsilon_x \qquad \epsilon_z = -\nu\epsilon_x$$

ou, usando a Equação (4.8),

$$\epsilon_y = \frac{\nu y}{\rho} \qquad \epsilon_z = \frac{\nu y}{\rho} \tag{4.22}$$

As relações que obtivemos mostram que os elementos localizados acima da superfície neutra ($y > 0$) expandirão nas direções y e z, enquanto os elementos localizados abaixo da superfície neutra ($y < 0$) contrairão. No caso de uma viga de seção transversal retangular, a expansão e a contração dos vários elementos na direção vertical se compensam e não se observará alteração na dimensão vertical da seção transversal. No entanto, no que se refere às deformações na direção z horizontal, a expansão dos elementos localizados acima da superfície neutra e a correspondente contração dos elementos localizados abaixo daquela superfície resultarão em várias linhas horizontais encurvadas em arcos de circunferência (Fig. 4.21). A situação observada aqui é similar àquela observada anteriormente em uma seção transversal longitudinal. Comparando a segunda das Equações (4.22) com a Equação (4.8), concluímos que a linha neutra da seção transversal se encurvará em um arco de circunferência de raio $\rho' = \rho/\nu$. O centro C' dessa circunferência está localizado abaixo da superfície neutra (supondo $M > 0$), isto é, no lado oposto ao centro de curvatura C da viga. O inverso do raio de curvatura ρ' representa a curvatura da seção transversal e é chamado de *curvatura anticlástica*. Temos

$$\text{Curvatura anticlástica} = \frac{1}{\rho'} = \frac{\nu}{\rho} \tag{4.23}$$

Em nossa discussão das deformações de uma viga simétrica em flexão pura, nessa seção e nas anteriores, ignoramos a maneira pela qual os momentos fletores $\mathbf{M}$ e $\mathbf{M'}$ eram realmente aplicados à viga. Se *todas* as seções transversais da viga, de uma extremidade à outra, devem permanecer planas e isentas de tensões de cisalhamento, devemos nos certificar de que os momentos fletores são aplicados de maneira que as extremidades da viga permaneçam planas e isentas de tensões de cisalhamento. Isso pode ser conseguido

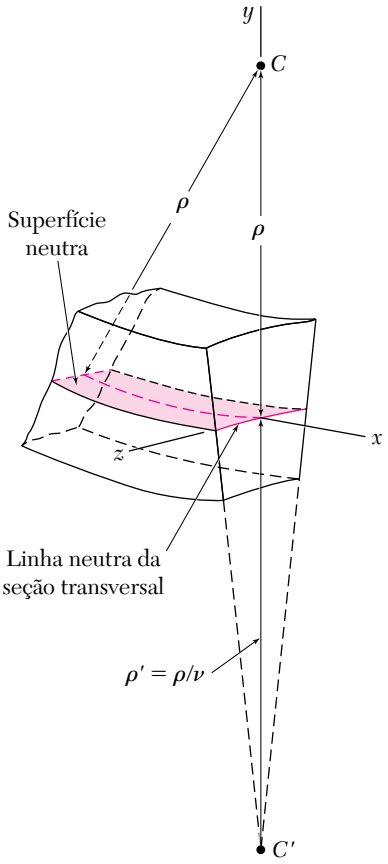


Fig. 4.21

aplicando-se os momentos fletores **M** e **M′** à viga por meio do uso de placas rígidas e planas (Fig. 4.22). As forças elementares exercidas pelas placas sobre a viga serão normais às seções das extremidades, e essas seções, enquanto permanecem planas, estarão livres para se deformar conforme descrito anteriormente nesta seção.

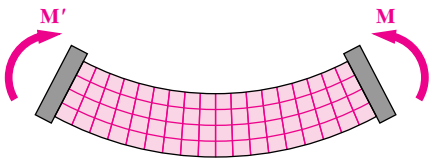
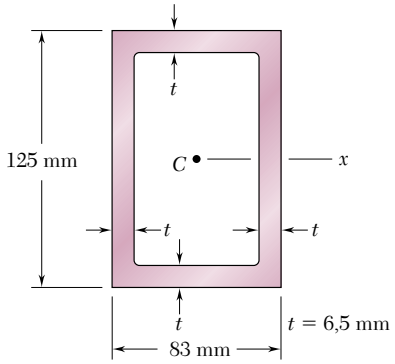


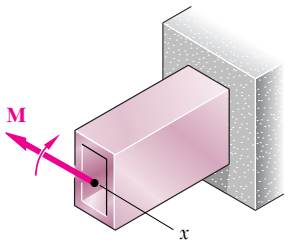
Fig. 4.22

Devemos notar que essas condições de carregamento não podem ocorrer na prática, pois requerem que cada placa exerça forças de tração na seção da extremidade correspondente abaixo de sua linha neutra, ao mesmo tempo em que permite que a seção se deforme livremente em seu próprio plano. No entanto, o fato de que o modelo de placas de extremidades rígidas da Fig. 4.22 não pode ser realizado fisicamente não diminui sua importância, que é a de nos permitir *visualizar* as condições de carregamento que correspondem às relações deduzidas nas seções anteriores. As condições reais de carregamento podem diferir muito desse modelo ideal. No entanto, em virtude do princípio de Saint-Venant, as relações obtidas podem ser usadas para calcular tensões em situações de engenharia, desde que a seção considerada não esteja muito perto dos pontos em que são aplicados os momentos fletores.

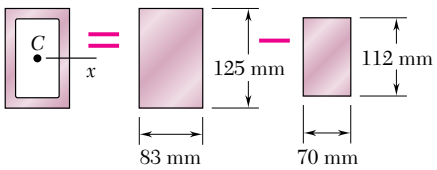
PROBLEMA RESOLVIDO 4.1



O tubo retangular mostrado na figura é um extrudado de uma liga de alumínio para a qual $\sigma_E = 275$ MPa, $\sigma_L = 414$ MPa e $E = 73$ GPa. Desprezando o efeito dos adoçamentos, determine (*a*) o momento fletor M para o qual o coeficiente de segurança será de 3,00 e (*b*) o raio de curvatura correspondente do tubo.



SOLUÇÃO



Momento de inércia. Considerando a área da seção transversal do tubo como a diferença entre os dois retângulos mostrados na figura e usando a fórmula para o momento de inércia de um retângulo, escrevemos

$$I = \tfrac{1}{12}(0{,}083\text{ m})(0{,}125\text{ m})^3 - \tfrac{1}{12}(0{,}070\text{ m})(0{,}112\text{ m})^3 \qquad I = 5{,}3 \times 10^{-6}\text{ m}^4$$

Tensão admissível. Para um coeficiente de segurança de 3,00 e um limite de tensão de 414 MPa, temos

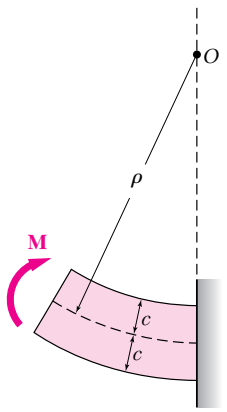
$$\sigma_{\text{adm}} = \frac{\sigma_L}{C.S.} = \frac{414\text{ MPa}}{3{,}00} = 138\text{ MPa}$$

Como $\sigma_{\text{adm}} < \sigma_E$, o tubo permanece no regime elástico e podemos aplicar os resultados da Seção 4.4.

***a.* Momento fletor.** Com $c = \frac{1}{2}(0{,}125\text{ m}) = 0{,}0625$ m, escrevemos

$$\sigma_{\text{adm}} = \frac{Mc}{I} \qquad M = \frac{I}{c}\sigma_{\text{adm}} = \frac{5{,}3 \times 10^{-6}\text{ m}^4}{0{,}0625\text{ m}}(138 \times 10^3\text{ kN/m}^2)$$

$$M = 11{,}7\text{ kN} \cdot \text{m} \blacktriangleleft$$



***b.* Raio de curvatura.** Lembrando que $E = 73 \times 10^6\text{ kN/m}^2$, substituímos esse valor e os valores obtidos para I e M na Equação (4.21) e encontramos

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \frac{11{,}7\text{ kN} \cdot \text{m}}{(73 \times 10^6\text{ kN/m}^2)(5{,}3 \times 10^{-6}\text{ m}^4)} = 0{,}030\text{ m}^{-1}$$

$$\rho = 33{,}07\text{ m} \qquad \rho = 33{,}07\text{ m} \blacktriangleleft$$

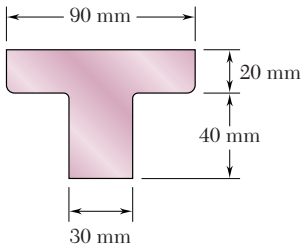
Solução alternativa. Como sabemos que a tensão máxima é $\sigma_{\text{adm}} = 138$ MPa, podemos determinar a deformação específica máxima ϵ_m e então usar a Equação (4.9),

$$\epsilon_m = \frac{\sigma_{\text{adm}}}{E} = \frac{138\text{ MPa}}{73 \times 10^3\text{ MPa}} = 1{,}890 \times 10^{-3}\text{ m/m}$$

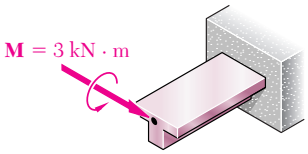
$$\epsilon_m = \frac{c}{\rho} \qquad \rho = \frac{c}{\epsilon_m} = \frac{0{,}0625\text{ m}}{1{,}890 \times 10^{-3}\text{ m/m}}$$

$$\rho = 33{,}07\text{ m} \qquad \rho = 33{,}07\text{ m} \blacktriangleleft$$

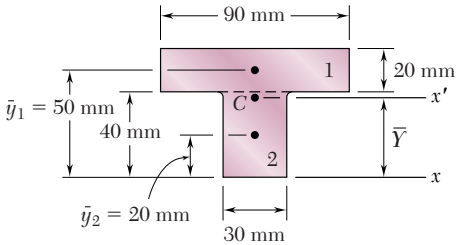
PROBLEMA RESOLVIDO 4.2



Uma peça de máquina feita de ferro fundido está submetida a um momento fletor de 3 kN · m conforme mostra a figura. Sabendo que $E = 165$ GPa e desprezando o efeito dos adoçamentos, determine (*a*) as tensões de tração e compressão máximas na peça fundida e (*b*) o raio de curvatura dessa peça.



SOLUÇÃO

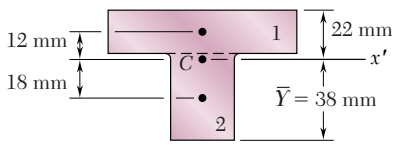


Centroide. Dividimos a seção transversal em forma de T nos dois retângulos mostrados na figura e escrevemos

	Área, mm²	$\bar{y}$, mm	$\bar{y}A$, mm³
1	$(20)(90) = 1.800$	50	90×10^3
2	$(40)(30) = 1.200$	20	24×10^3
	$\Sigma A = 3.000$		$\Sigma\bar{y}A = 114 \times 10^3$

$$\bar{Y}\Sigma A = \Sigma\bar{y}A$$
$$\bar{Y}(3.000) = 114 \times 10^6$$
$$\bar{Y} = 38 \text{ mm}$$

Momento de inércia centroidal. O teorema do eixo paralelo é usado para determinar o momento de inércia de cada retângulo com relação ao eixo x' que passa pelo centroide de toda a seção. Somando os momentos de inércia dos retângulos, escrevemos

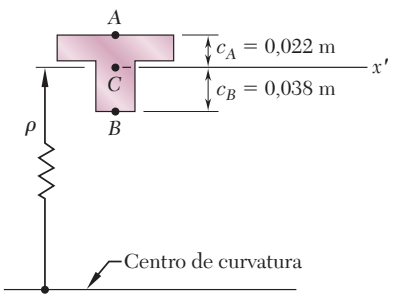


$$\begin{aligned} I_{x'} &= \Sigma(\bar{I} + Ad^2) = \Sigma(\tfrac{1}{12}bh^3 + Ad^2) \\ &= \tfrac{1}{12}(90)(20)^3 + (90 \times 20)(12)^2 + \tfrac{1}{12}(30)(40)^3 + (30 \times 40)(18)^2 \\ &= 868 \times 10^3 \text{ mm}^4 \\ I &= 868 \times 10^{-9} \text{ m}^4 \end{aligned}$$

***a.* Tensão de tração máxima.** Como o momento fletor aplicado flexiona a peça fundida para baixo, o centro de curvatura está localizado abaixo da seção transversal. A tensão de tração máxima ocorre no ponto *A*, que está mais distante do centro de curvatura.

$$\sigma_A = \frac{Mc_A}{I} = \frac{(3 \text{ kN} \cdot \text{m})(0{,}022 \text{ m})}{868 \times 10^{-9} \text{ m}^4} \qquad \sigma_A = +76{,}0 \text{ MPa} \blacktriangleleft$$

Tensão de compressão máxima. Ela ocorre no ponto *B*; temos



$$\sigma_B = -\frac{Mc_B}{I} = -\frac{(3 \text{ kN} \cdot \text{m})(0{,}038 \text{ m})}{868 \times 10^{-9} \text{ m}^4} \qquad \sigma_B = -131{,}3 \text{ MPa} \blacktriangleleft$$

***b.* Raio de curvatura.** Da Equação (4.21), temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} &= \frac{3 \text{ kN} \cdot \text{m}}{(165 \text{ GPa})(868 \times 10^{-9} \text{ m}^4)} \\ &= 20{,}95 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1} \end{aligned} \qquad \rho = 47{,}7 \text{ m} \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

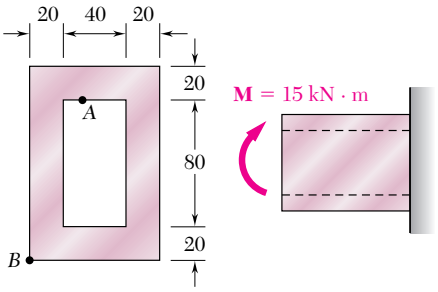


Fig. P4.1

4.1 e *4.2* Sabendo que o momento mostrado atua em um plano vertical, determine a tensão no (*a*) ponto *A* e (*b*) ponto *B*.

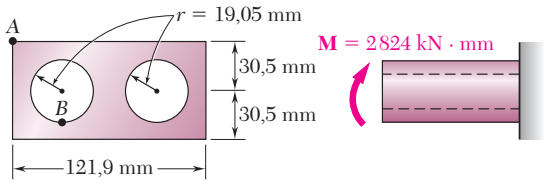


Fig. *P4.2*

4.3 Uma viga com a seção transversal mostrada na figura é extrudada de uma liga de alumínio para a qual $\sigma_E = 250$ MPa e $\sigma_L = 450$ MPa. Usando um coeficiente de segurança de 3,00, determine o maior momento fletor que pode ser aplicado à viga quando ela é flexionada em torno do eixo *z*.

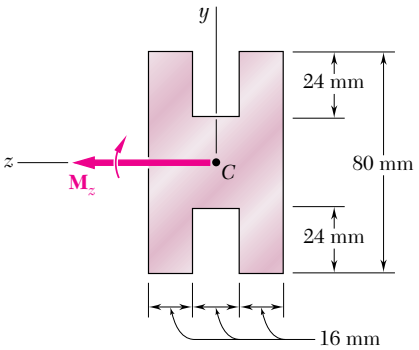


Fig. P4.3

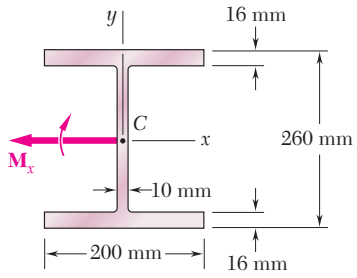


Fig. P4.5

4.4 Resolva o Problema 4.3 considerando que a viga seja flexionada em torno do eixo *y*.

4.5 A viga de aço mostrada é feita com um aço de grau tal que $\sigma_E = 250$ MPa e $\sigma_L = 400$ MPa. Usando um coeficiente de segurança de 2,50, determine o maior momento fletor que pode ser aplicado à viga quando ela é flexionada em torno do eixo *x*.

4.6 Resolva o Problema 4.5 considerando que a viga seja flexionada em torno do eixo *y* por um momento fletor M_y.

4.7 até 4.9 Duas forças verticais são aplicadas à viga com a seção transversal mostrada na figura. Determine as tensões de tração e de compressão máximas na parte *BC* da viga.

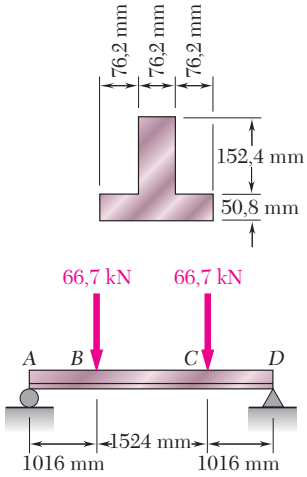


Fig. P4.7

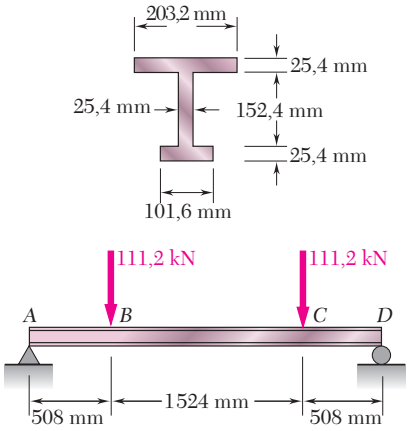
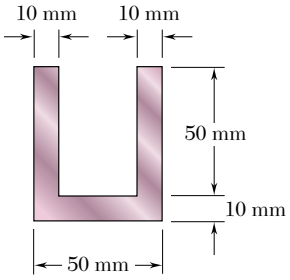


Fig. *P4.8*



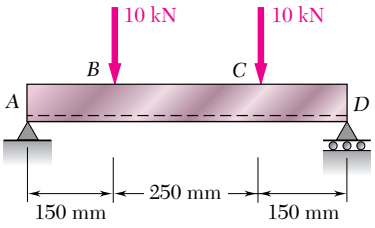


Fig. P4.9

4.10 Dois momentos fletores iguais e opostos de intensidade $M = 25$ kN · m são aplicados à viga *AB* constituída de um perfil U. Observando que fazem a viga flexionar em um plano horizontal, determine a tensão no (*a*) ponto *C*, (*b*) ponto *D* e (*c*) ponto *E*.

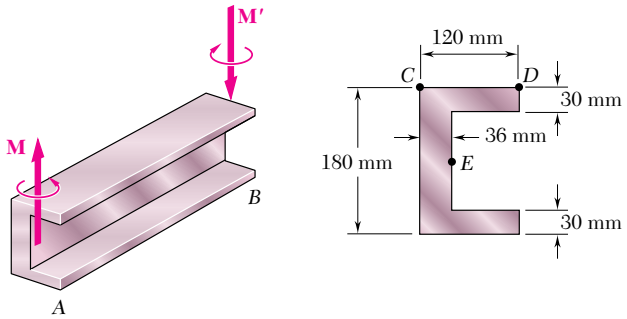


Fig. *P4.10*

4.11 Sabendo que uma viga com a seção transversal mostrada na figura é flexionada em torno do eixo horizontal e que o momento fletor é de 903,8 kN · mm, determine a força total que atua na parte sombreada da viga.

4.12 Resolva o Problema 4.11, considerando que a viga seja flexionada em torno do eixo vertical e que o momento fletor seja de 903,8 kN · mm.

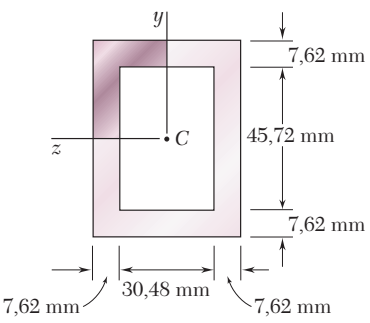


Fig. P4.11

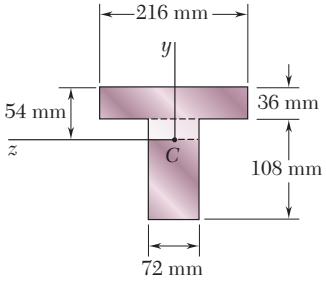


Fig. P4.13 e *P4.14*

4.13 Sabendo que a viga de seção transversal mostrada na figura é flexionada em torno do eixo horizontal e que o momento fletor é de 6 kN · m, determine a força total que atua na mesa superior.

4.14 Sabendo que a viga de seção transversal mostrada na figura é flexionada em torno do eixo horizontal e que o momento fletor é de 6 kN · m, determine a força total que atua na parte sombreada de sua alma.

4.15 Sabendo que para a peça fundida mostrada na figura as tensões admissíveis na tração e na compressão são, respectivamente, $\sigma_{adm} = +41{,}4$ MPa e $\sigma_{adm} = -103{,}4$ MPa, determine o maior momento fletor M que poderá ser aplicado.

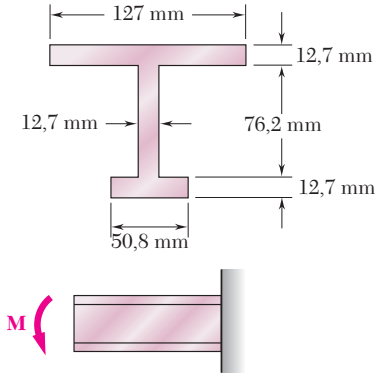


Fig. P4.15

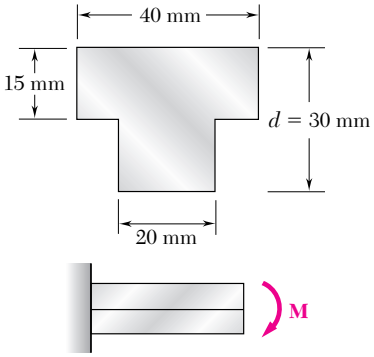


Fig. P4.16

4.16 A viga mostrada na figura é feita de um tipo de náilon para o qual a tensão admisível é de 24 MPa em tração e de 30 MPa em compressão. Determine o maior momento fletor M que pode ser aplicado à viga.

4.17 Resolva o Problema 4.16 considerando que $d = 40$ mm.

4.18 e *4.19* Sabendo que, para a viga extrudada mostrada na figura, a tensão admissível é de 120 MPa em tração e de 150 MPa em compressão, determine o maior momento fletor M que lhe pode ser aplicado.

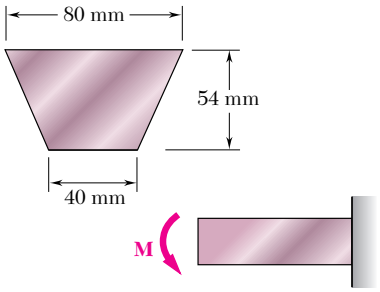


Fig. P4.18

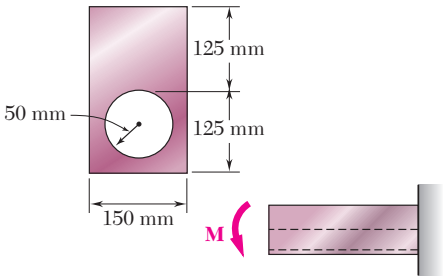


Fig. *P4.19*

4.20 Sabendo que, para a viga mostrada na figura a tensão admissível é de 82,7 MPa em tração e de 110,3 MPa em compressão, determine o maior momento fletor M que lhe pode ser aplicado.

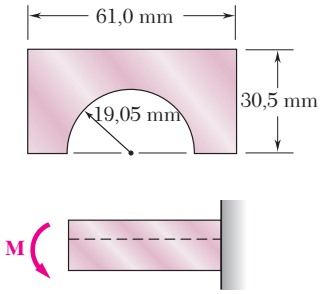


Fig. P4.20

4.21 Uma cinta de aço, originalmente reta, passa por uma polia com 203,2 mm. de diâmetro quando instalada em uma serra de fita. Determine a tensão máxima nessa cinta, sabendo que sua espessura é de 0,457 mm e sua largura de 15,88 mm. Use $E = 200$ GPa.

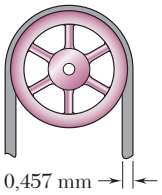


Fig. P4.21

4.22 Sabendo que $\sigma_{adm} = 164$ MPa para a barra de aço AB, determine (a) o maior momento fletor M que pode ser aplicado e (b) o raio de curvatura correspondente. Use $E = 200$ GPa.

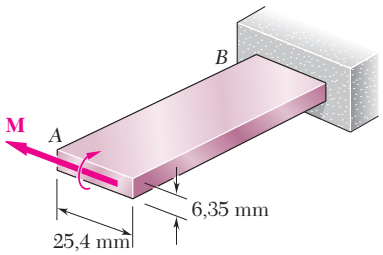


Fig. P4.22

4.23 Barras retas de 6 mm de diâmetro e 30 m de comprimento são armazenadas enrolando-as dentro de um tambor com diâmetro interno de 1,25 m. Considerando que a tensão de escoamento não seja ultrapassada, determine (a) a máxima tensão em uma barra enrolada e (b) o momento fletor correspondente na barra. Use $E = 200$ GPa.

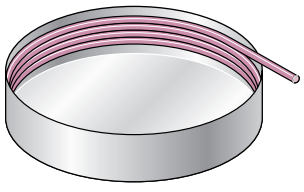


Fig. P4.23

4.24 Um momento fletor de 22,6 kN · m é aplicado a uma viga W200 × 46,1 de aço laminado. (a) Considerando que o momento seja aplicado em torno do eixo z como mostra a figura, determine a tensão máxima e o raio de curvatura da viga. (b) Resolva a parte a levando em conta que o momento fletor seja aplicado em torno do eixo y. Use $E = 200$ GPa.

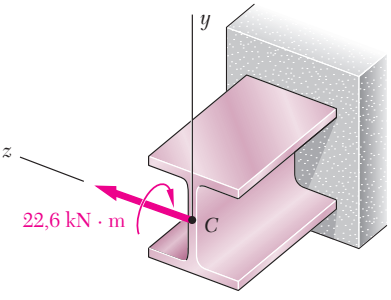


Fig. *P4.24*

4.25 Um momento fletor de 60 N · m é aplicado à barra de aço mostrada na figura. (*a*) Considerando que o momento seja aplicado em torno do eixo *z* conforme mostrado, determine a tensão máxima e o raio de curvatura da barra. (*b*) Resolva a parte *a* levando em conta que o momento seja aplicado em torno do eixo *y*. Use $E = 200$ GPa.

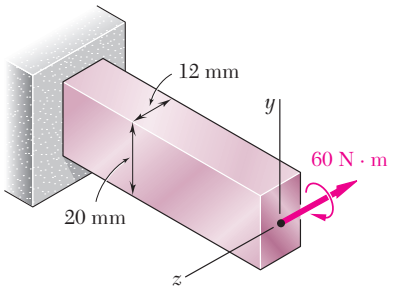


Fig. P4.25

4.26 Um momento fletor de intensidade *M* é aplicado a uma barra quadrada de lado *a*. Para cada uma das orientações mostradas, determine a tensão máxima e a curvatura da barra.

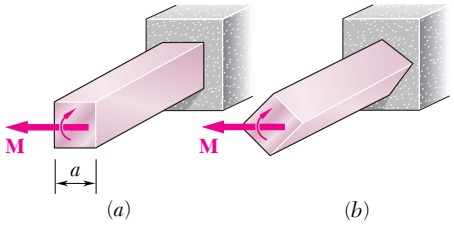


Fig. *P4.26*

4.27 Uma parte de uma barra quadrada é removida por fresagem, de maneira que sua seção transversal assemelha àquela mostrada na figura. A barra é então flexionada em torno do seu eixo horizontal por um momento fletor *M*. Considerando o caso em que $h = 0{,}9h_0$, expresse a tensão máxima na barra na forma $\sigma_m = k\sigma_0$ em que σ_0 é a tensão máxima que teria ocorrido se a barra quadrada original tivesse sido flexionada pelo mesmo momento **M**, e determine o valor de *k*.

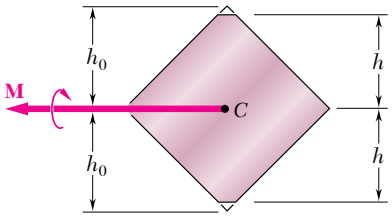


Fig. P4.27

4.28 No Problema 4.27, determine (*a*) o valor de *h* para o qual a tensão máxima σ_m é a menor possível e (*b*) o valor correspondente de *k*.

4.29 Uma viga de aço laminado W200 × 31,3 está submetida a um momento fletor **M** igual a 45 kN · m. Sabendo que $E = 200$ GPa e $\nu = 0{,}29$, determine (*a*) o raio de curvatura ρ e (*b*) o raio de curvatura ρ' da seção transversal.

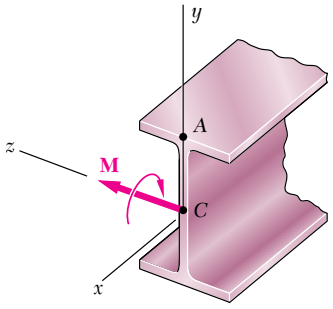


Fig. P4.29

4.30 Para a barra e o carregamento do Exemplo 4.1, determine (*a*) o raio de curvatura ρ, (*b*) o raio de curvatura ρ' de uma seção transversal e (*c*) o ângulo entre os lados da barra que originalmente eram verticais. Use $E = 200$ GPa e $\nu = 0{,}29$.

4.31 Para a barra de alumínio e o carregamento do Problema Resolvido 4.1, determine (*a*) o raio de curvatura ρ' da seção transversal e (*b*) o ângulo entre os lados da barra que originalmente eram verticais. Use $E = 73$ GPa e $\nu = 0{,}33$.

4.32 Considerou-se na Seção 4.3 que as tensões normais σ_y em um elemento em flexão pura são desprezíveis. Para um elemento elástico inicialmente reto de seção transversal retangular, (*a*) determine uma expressão aproximada para σ_y em função de *y* e (*b*) mostre que $(\sigma_y)_{\text{máx}} = -(c/2\rho)(\sigma_x)_{\text{máx}}$ e, portanto, que σ_y pode ser desprezado em todas as situações práticas. (*Sugestão*: considere o diagrama de corpo livre da parte da viga localizada abaixo da superfície de ordenada *y* e suponha que a distribuição de tensões σ_x ainda seja linear.)

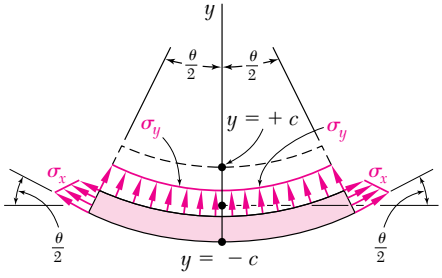


Fig. P4.32

4.6. Flexão de barras constituídas de vários materiais

As deduções dadas na Seção 4.4 eram baseadas na hipótese de que o material era homogêneo com um módulo de elasticidade E. Se a barra submetida à flexão pura for constituída de dois ou mais materiais com diferentes módulos de elasticidade, nossa abordagem para a determinação das tensões na barra precisará ser modificada.

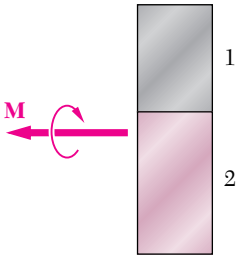


Fig. 4.23

Considere, por exemplo, uma barra formada por duas partes de materiais diferentes unidas como mostra a seção transversal na Fig. 4.23. Essa barra composta se deformará conforme descrito na Seção 4.3, pois sua seção transversal permanece a mesma em todo o comprimento, e não foi feita nenhuma suposição na Seção 4.3 referente à relação tensão-deformação do material ou materiais envolvidos. Assim, a deformação específica normal ϵ_x ainda varia linearmente com a distância y da linha neutra da seção (Fig. 4.24*a* e *b*), e vale a fórmula (4.8):

$$\epsilon_x = -\frac{y}{\rho} \tag{4.8}$$

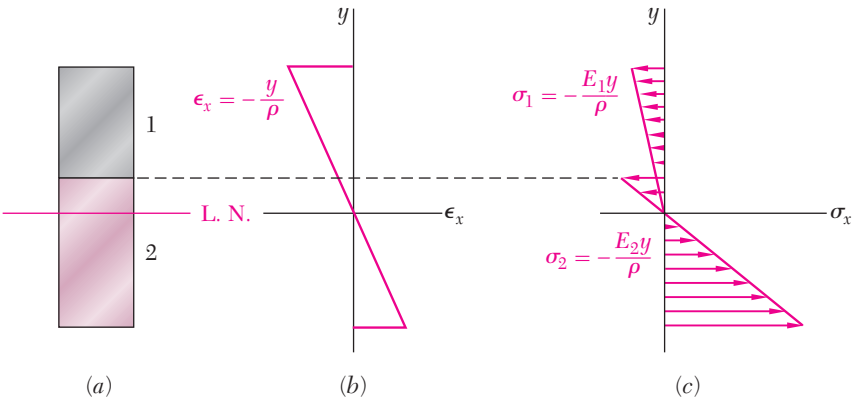


Fig. 4.24 Distribuição de deformação específica e tensão em barra constituída de dois materiais.

No entanto, não podemos supor que a linha neutra passe pelo centroide da seção composta, uma vez que um dos objetivos desta análise será determinar a localização desta linha neutra.

Como os módulos de elasticidade E_1 e E_2 dos dois materiais são diferentes, as expressões obtidas para a tensão normal em cada material também serão diferentes. Escrevemos

$$\sigma_1 = E_1\epsilon_x = -\frac{E_1 y}{\rho}$$
$$\sigma_2 = E_2\epsilon_x = -\frac{E_2 y}{\rho} \tag{4.24}$$

e obtemos uma curva de distribuição de tensões consistindo em dois segmentos de reta (Fig. 4.24*c*). Conclui-se das Equações (4.24) que a força dF_1 que atua no elemento de área dA da parte superior da seção transversal é

$$dF_1 = \sigma_1\, dA = -\frac{E_1 y}{\rho}\, dA \tag{4.25}$$

enquanto a força dF_2, que atua em um elemento de mesma área dA da parte

inferior é

$$dF_2 = \sigma_2\, dA = -\frac{E_2 y}{\rho}\, dA \tag{4.26}$$

Mas, chamando de n a relação E_2/E_1 dos dois módulos de elasticidade, podemos expressar dF_2 como

$$dF_2 = -\frac{(nE_1)y}{\rho}\, dA = -\frac{E_1 y}{\rho}\,(n\, dA) \tag{4.27}$$

Comparando as Equações (4.25) e (4.27), notamos que a mesma força dF_2 atuaria em um elemento de área $n\, dA$ do primeiro material. Em outras palavras, a resistência à flexão da barra permaneceria a mesma se ambas as partes fossem feitas do primeiro material, desde que a largura de cada elemento da parte inferior fosse multiplicada pelo coeficiente n. Note que esse alargamento (se $n > 1$), ou estreitamento (se $n < 1$), deve ser feito em *uma direção paralela à linha neutra da seção*, pois é essencial que a distância y de cada elemento em relação à linha neutra permaneça a mesma. A nova seção transversal obtida dessa maneira é chamada de *seção transformada* da barra (Fig. 4.25).

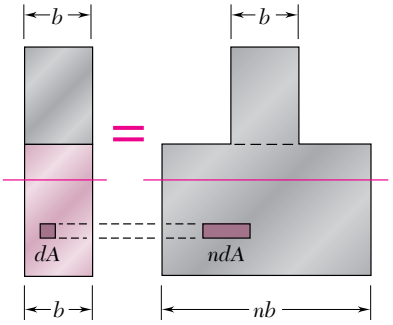


Fig. 4.25 Seção transformada para a barra de seção composta.

Como a seção transformada é equivalente a seção transversal de uma barra feita de um *material homogêneo* com módulo de elasticidade E_1, o método descrito na Seção 4.4 pode ser usado para determinar a linha neutra e a tensão normal em vários pontos da seção. A linha neutra será traçada *através do centroide da seção transformada* (Fig. 4.26), e a tensão σ_x em qualquer ponto da

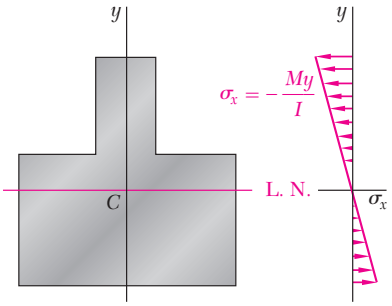


Fig. 4.26 Distribuição de tensões na seção transformada.

seção da barra homogênea fictícia será obtida da Equação (4.16)

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \tag{4.16}$$

em que y é a distância medida a partir da linha neutra, e *I o momento de inércia da seção transformada* em relação ao eixo que passa pelo seu próprio centroide.

Para obtermos a tensão σ_1 em um ponto localizado na parte superior da seção transversal da barra composta original, simplesmente calculamos a tensão σ_x no ponto correspondente da seção transformada. No entanto, para obter a tensão σ_2 em um ponto na parte inferior da seção transversal, devemos *multiplicar por n* a tensão σ_x calculada no ponto correspondente da seção

transformada. Sem dúvida, conforme vimos anteriormente, a mesma força elementar dF_2 é aplicada a um elemento de área $n\,dA$ da seção transformada e a um elemento de área dA da seção original. Assim, a tensão σ_2 em um ponto da seção original deve ser n vezes maior do que a tensão no ponto correspondente da seção transformada.

As deformações de uma barra de material composto também podem ser determinadas usando-se a seção transformada. Recordamos que a seção transformada representa a seção transversal de uma barra feita de material homogêneo de módulo E_1, que se deforma da mesma maneira que a barra composta. Portanto, usando a Equação (4.21), escrevemos que a curvatura de uma barra de material composto é

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E_1 I}$$

na qual I é o momento de inércia da seção transformada em relação à sua linha neutra.

EXEMPLO 4.3

Uma barra obtida unindo-se duas peças de aço ($E_{aço} = 203$ GPa) e latão ($E_{latão} = 105$ GPa) tem a seção transversal mostrada na Fig. 4.27. Determine a tensão máxima no aço e no latão quando a barra estiver em flexão pura com um momento fletor $M = 4{,}5$ kN · m.

A seção transformada correspondente a uma barra equivalente feita inteiramente de latão é mostrada na Fig. 4.28. Como

$$n = \frac{E_{aço}}{E_{latão}} = \frac{203\text{ GPa}}{105\text{ GPa}} = 1{,}933$$

a largura da parte central de latão, que substitui a parte de aço original, é obtida multiplicando-se a largura original por 1,933, temos

$$(19\text{ mm})(1{,}933) = 36{,}7\text{ mm}$$

Note que essa variação na dimensão ocorre em uma direção paralela à linha neutra. O momento de inércia da seção transformada em relação ao seu eixo que passa pelo centroide da seção é

$$I = \tfrac{1}{12}bh^3 = \tfrac{1}{12}(0{,}567\text{ m})(0{,}076\text{ m})^3 = 2 \times 10^{-6}\text{ m}^4$$

e a distância máxima da linha neutra é $c = 0{,}038$ m. Usando a Equação (4.15), encontramos a tensão máxima na seção transformada:

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} = \frac{(4{,}5\text{ kN} \cdot \text{m})(0{,}038\text{ m})}{2 \times 10^{-6}\text{ m}^4} = 85{,}5\text{ MPa}$$

O valor obtido também representa a tensão máxima na parte de latão da barra composta original. No entanto, a tensão máxima na parte de aço será maior que o valor obtido para a seção transformada, pois a área da parte central deve ser reduzida pelo coeficiente $n = 1{,}933$ quando retornamos da seção transformada para a original. Concluímos então que

$$(\sigma_{\text{latão}})_{\text{máx}} = 85{,}5\text{ MPa}$$
$$(\sigma_{\text{aço}})_{\text{máx}} = (1{,}933)(85{,}5\text{ MPa}) = 165{,}3\text{ MPa}$$

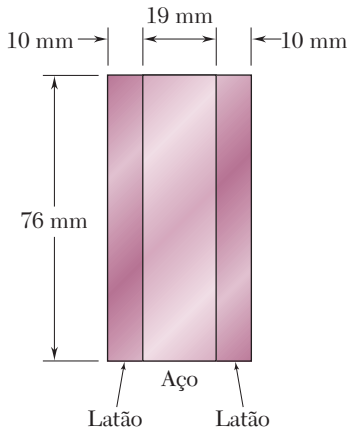


Fig. 4.27

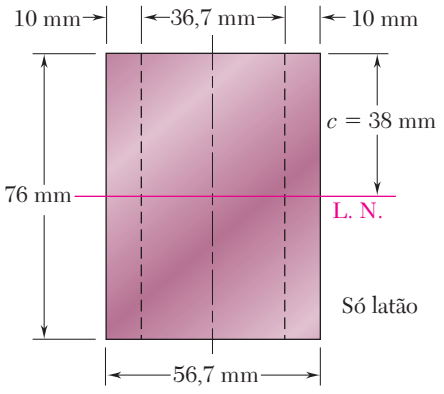


Fig. 4.28

Um exemplo importante de elementos estruturais constituídos de dois materiais diferentes é encontrado em *vigas de concreto reforçado* (Fig. 4.29). Essas vigas, quando submetidas a momentos fletores positivos, são reforçadas por barras de aço colocadas à pequena distância da face inferior (Fig. 4.30*a*). Como o concreto tem baixa resistência à tração, ele trincará abaixo da superfície neutra e as barras de aço suportarão toda a força de tração, enquanto a parte superior da viga de concreto suportará o esforço de compressão.

Fig. 4.29

Para obtermos a seção transformada de uma viga de concreto reforçado, substituímos a área total da seção transversal A_a das barras de aço por uma área equivalente nA_a, em que n é a relação E_a/E_c entre o módulo de elasticidade do aço e do concreto (Fig. 4.30*b*). Em contrapartida, como o concreto na viga atua efetivamente somente em compressão, apenas a parte da seção transversal localizada acima da linha neutra deverá ser usada na seção transformada.

A posição da linha neutra é obtida determinando-se a distância x da face superior da viga até o centroide C da seção transformada. Chamando de b a largura da viga, e de d a distância da face superior até a linha de centro das barras de aço, escrevemos que o momento estático da seção transformada

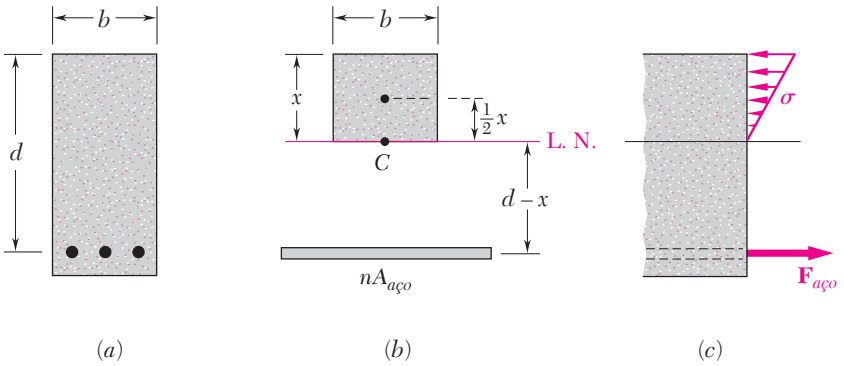


Fig. 4.30

com relação à sua linha neutra deve ser zero. Como o momento estático de cada uma das duas partes da seção transformada é obtido multiplicando-se sua área pela distância de seu próprio centroide até a linha neutra, temos

$$(bx)\frac{x}{2} - nA_{aço}(d - x) = 0$$

ou

$$\frac{1}{2}bx^2 + nA_{aço}x - nA_{aço}d = 0 \tag{4.28}$$

Resolvendo essa equação do segundo grau para x, obtemos a posição da linha neutra da viga, e a parte da seção transversal da viga de concreto que é efetivamente usada.

A determinação das tensões na seção transformada é feita conforme explicado anteriormente nesta seção (veja o Problema Resolvido 4.4). A distribuição das tensões de compressão no concreto e a resultante $F_{aço}$ das forças de tração nas barras de aço são mostradas na Fig. 4.30*c*.

4.7. Concentrações de tensão

A fórmula $\sigma_m = Mc/I$ foi deduzida na Seção 4.4 para uma barra com um plano de simetria e uma seção transversal uniforme, e vimos na Seção 4.5 que ela seria precisa em todo o comprimento da barra somente se os momentos fletores **M** e **M′** fossem aplicados usando-se placas rígidas e planas. Sob outras condições de aplicação das cargas, existirão concentrações de tensão junto dos pontos em que as cargas serão aplicadas.

Tensões maiores também ocorrerão se a seção transversal da barra sofrer uma variação brusca. Foram estudados dois casos de interesse particular:† o caso de uma barra chata com uma mudança brusca na largura e o caso de uma barra chata com ranhuras. Como a distribuição de tensões nas seções transversais críticas depende somente da geometria dos elementos, podem ser determinados coeficientes de concentração de tensão para várias relações dos parâmetros envolvidos e podem ser registrados conforme

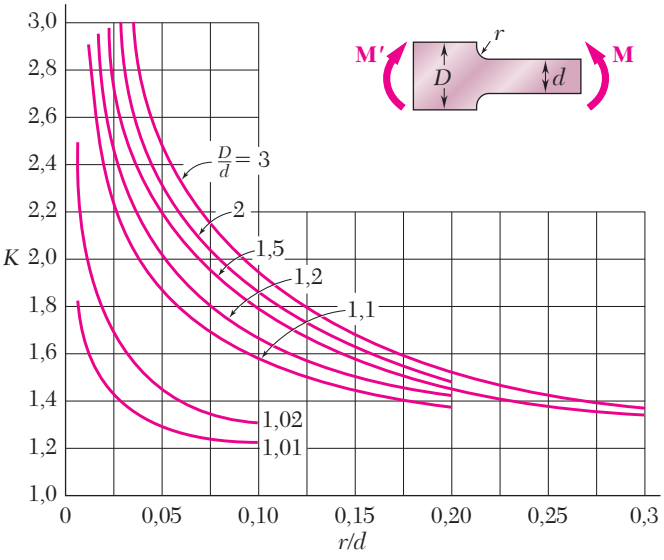


Fig. 4.31 Coeficientes de concentração de tensão para barras chatas com adoçamentos sob flexão pura.†

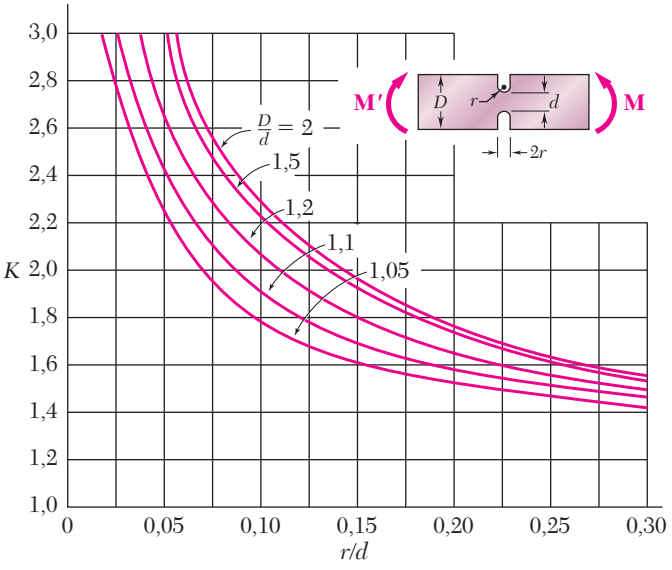


Fig. 4.32 Coeficientes de concentração de tensão para barras chatas com ranhuras sob flexão pura.†

†PILKEY, W. D. *Peterson's Stress Concentration Factors*. 2. ed. John Wiley & Sons. Nova York, 1997.

mostram as Figs. 4.31 e 4.32. O valor da tensão máxima na seção transversal crítica pode então ser expresso como

$$\sigma_m = K\frac{Mc}{I} \tag{4.29}$$

em que K é o coeficiente de concentração de tensão, e c e I se referem à seção crítica, isto é, à seção de largura d em ambos os casos considerados aqui. Um exame das Figs. 4.31 e 4.32 mostra claramente a importância do uso de adoçamentos e ranhuras de raio r, o maior possível na prática.

Finalmente, devemos destacar que, como era o caso para o carregamento axial e de torção, os valores dos coeficientes K foram calculados mediante a hipótese de uma relação linear entre tensão e deformação específica. Em muitas aplicações, ocorrerão deformações plásticas e resultarão em valores de máxima tensão inferiores àqueles indicados pela Equação (4.29).

EXEMPLO 4.4

Devem ser feitas ranhuras de 10 mm de profundidade em uma barra de aço que tem 60 mm de largura e 9 mm de espessura (Fig. 4.33). Determine a menor largura admissível das ranhuras considerando que a tensão na barra não deve ultrapassar 150 MPa quando o momento fletor for igual a 180 N · m.

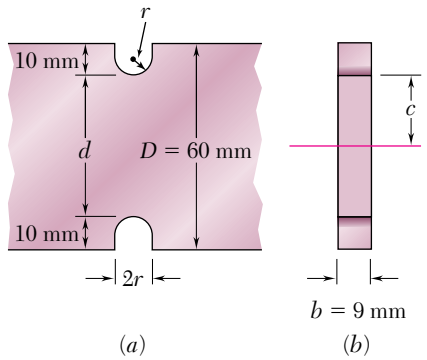


Fig. 4.33

Notamos na Fig. 4.33*a* que

$$d = 60\text{ mm} - 2(10\text{ mm}) = 40\text{ mm}$$
$$c = \tfrac{1}{2}d = 20\text{ mm} \qquad b = 9\text{ mm}$$

O momento de inércia da seção crítica em relação à linha neutra é

$$I = \tfrac{1}{12}bd^3 = \tfrac{1}{12}(9 \times 10^{-3}\text{ m})(40 \times 10^{-3}\text{ m})^3$$
$$= 48 \times 10^{-9}\text{ m}^4$$

O valor da tensão Mc/I é então

$$\frac{Mc}{I} = \frac{(180\text{ N} \cdot \text{m})(20 \times 10^{-3}\text{ m})}{48 \times 10^{-9}\text{ m}^4} = 75\text{ MPa}$$

Substituindo esse valor de Mc/I na Equação (4.29) e fazendo $\sigma_m = 150$ MPa, escrevemos

$$150\text{ MPa} = K(75\text{ MPa})$$
$$K = 2$$

Em contrapartida, temos,

$$\frac{D}{d} = \frac{60\text{ mm}}{40\text{ mm}} = 1{,}5$$

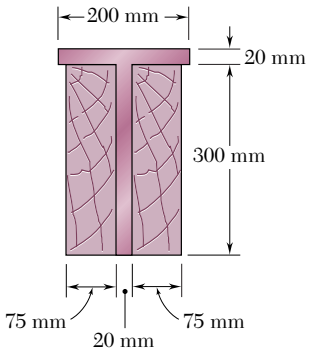
Usando a curva da Fig. 4.32 correspondendo a $D/d = 1{,}5$, verificamos que o valor $K = 2$ corresponde a um valor de r/d igual a 0,13. Temos, portanto,

$$\frac{r}{d} = 0{,}13$$

$$r = 0{,}13d = 0{,}13(40\text{ mm}) = 5{,}2\text{ mm}$$

A menor largura possível da ranhura é então

$$2r = 2(5{,}2\text{ mm}) = 10{,}4\text{ mm}$$



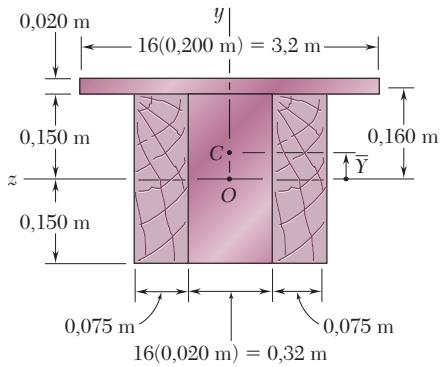
PROBLEMA RESOLVIDO 4.3

Duas placas de aço foram soldadas para formar uma viga em forma de T que foi reforçada aparafusando-se firmemente a ela duas pranchas de carvalho, conforme mostra a figura. O módulo de elasticidade é de 12,5 GPa para a madeira e de 200 GPa para o aço. Sabendo que um momento fletor M = 50 kN · m é aplicado à viga composta, determine (*a*) a tensão máxima na madeira e (*b*) a tensão no aço ao longo da borda superior.

SOLUÇÃO

Seção transformada. Primeiro calculamos a relação

$$n = \frac{E_{aço}}{E_{mad}} = \frac{200\text{ GPa}}{12{,}5\text{ GPa}} = 16$$



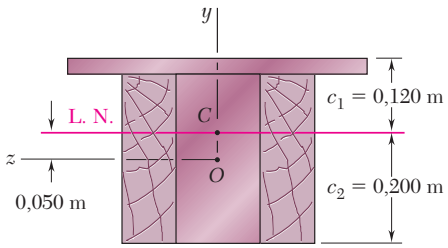
Multiplicando as dimensões horizontais da parte de aço da seção por $n = 16$, obtemos uma seção transformada feita inteiramente de madeira.

Linha neutra. A linha neutra passa pelo centroide da seção transformada. Como a seção consiste em dois retângulos, temos

$$\bar{Y} = \frac{\Sigma \bar{y}A}{\Sigma A} = \frac{(0{,}160\text{ m})(3{,}2\text{ m} \times 0{,}020\text{ m}) + 0}{3{,}2\text{ m} \times 0{,}020\text{ m} + 0{,}470\text{ m} \times 0{,}300\text{ m}} = 0{,}050\text{ m}$$

Momento de inércia. Usando o teorema do eixo paralelo:

$$I = \tfrac{1}{12}(0{,}470)(0{,}300)^3 + (0{,}470 \times 0{,}300)(0{,}050)^2$$
$$+\tfrac{1}{12}(3{,}2)(0{,}020)^3 + (3{,}2 \times 0{,}020)(0{,}160 - 0{,}050)^2$$
$$I = 2{,}19 \times 10^{-3}\text{ m}^4$$



***a.* Tensão máxima na madeira.** A madeira mais distante da linha neutra está localizada ao longo da borda inferior, em que $c_2 = 0{,}200$ m.

$$\sigma_{mad} = \frac{Mc_2}{I} = \frac{(50 \times 10^3\text{ N} \cdot \text{m})(0{,}200\text{ m})}{2{,}19 \times 10^{-3}\text{ m}^4}$$

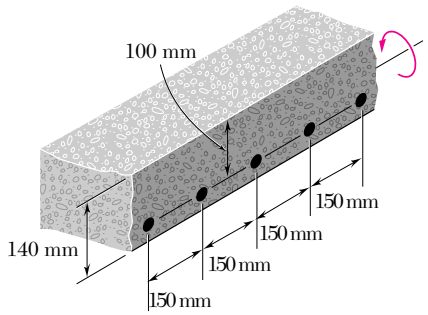
$$\sigma_{mad} = 4{,}57\text{ MPa} \blacktriangleleft$$

***b.* Tensão no aço.** Ao longo da borda superior $c_1 = 0{,}120$ m. Da seção transformada obtemos uma tensão equivalente na madeira, que deve ser multiplicada por n para obter a tensão no aço.

$$\sigma_{aço} = n\frac{Mc_1}{I} = (16)\frac{(50 \times 10^3\text{ N} \cdot \text{m})(0{,}120\text{ m})}{2{,}19 \times 10^{-3}\text{ m}^4}$$

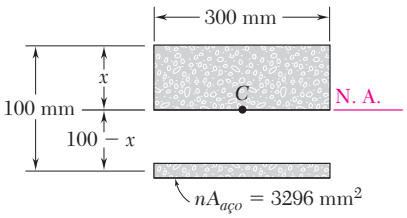
$$\sigma_{aço} = 43{,}8\text{ MPa} \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESOLVIDO 4.4



Uma laje de piso de concreto é reforçada por barras de aço de 16 mm de diâmetro colocadas 38 mm acima da face inferior da laje, com 150 mm de espaço entre seus centros. O módulo de elasticidade é de 25 GPa para o concreto usado e de 205 GPa para o aço. Sabendo que é aplicado um momento fletor de 4,5 kN · m a cada 300 mm de largura da laje, determine (*a*) a tensão máxima no concreto e (*b*) a tensão no aço.

SOLUÇÃO

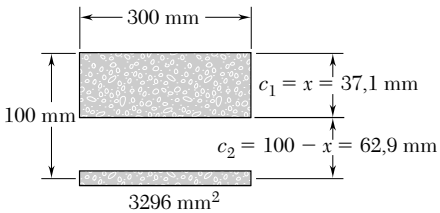


Seção transformada. Consideramos uma parte da laje de 300 mm de largura, sob a qual há duas barras de 16 mm de diâmetro com uma área de seção transversal total de

$$A_{aço} = 2\left[\frac{\pi}{4}(16\ \text{mm})^2\right] = 402\ \text{mm}^2$$

Como o concreto resiste somente em compressão, todas as forças de tração são suportadas pelas barras de aço, e a seção transformada consiste em duas áreas mostradas. Uma é a parte do concreto em compressão (localizada acima da linha neutra), e a outra é a área transformada do aço, $nA_{aço}$. Temos

$$n = \frac{E_{aço}}{E_{conc}} = \frac{205\ \text{GPa}}{25\ \text{GPa}} = 8{,}2$$
$$nA_{aço} = 8{,}2(402\ \text{mm}^2) = 3296\ \text{mm}^2$$

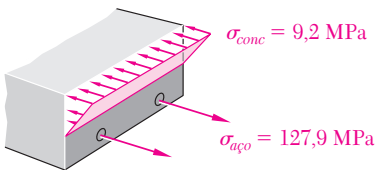


Linha neutra. A linha neutra da laje passa pelo centroide da seção transformada. Somando os momentos da área transformada em relação à linha neutra, escrevemos

$$300x\left(\frac{x}{2}\right) - 3296(100 - x) = 0 \qquad x = 37{,}1\ \text{mm}.$$

Momento de inércia. O momento centroidal de inércia da área transformada é

$$I = \tfrac{1}{3}(300)(37{,}1)^3 + 3296(100 - 37{,}1)^2 = 18{,}15 \times 10^6\ \text{mm}^4$$



***a.* Tensão máxima no concreto.** Na face superior da laje, temos $c_1 = 37{,}1$ mm e

$$\sigma_{conc} = \frac{Mc_1}{I} = \frac{(4500\ \text{kN} \cdot \text{mm})(37{,}1\ \text{mm})}{18{,}15 \times 10^6\ \text{mm}^4} \qquad \sigma_{conc} = 9{,}2\ \text{MPa} \blacktriangleleft$$

***b.* Tensão no aço.** Para o aço, temos $c_2 = 62{,}9$ mm, $n = 8{,}2$ e

$$\sigma_{aço} = n\frac{Mc_2}{I} = 8{,}2\frac{(4500\ \text{kN} \cdot \text{mm})(62{,}9\ \text{mm})}{18{,}15 \times 10^6\ \text{mm}^4} \qquad \sigma_{aço} = 127{,}9\ \text{MPa} \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

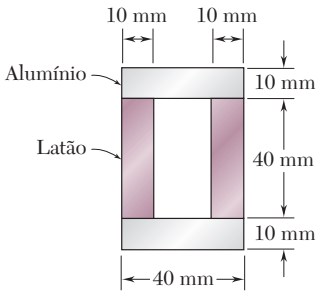


Fig. P4.33

4.33 e *4.34* Uma barra com a seção transversal mostrada na figura foi construída unindo-se firmemente latão e alumínio. Usando os dados fornecidos abaixo, determine o maior momento fletor admissível quando a barra composta é flexionada em torno do eixo horizontal.

	Alumínio	Latão
Módulo de elasticidade	70 GPa	105 GPa
Tensão admissível	100 MPa	160 MPa

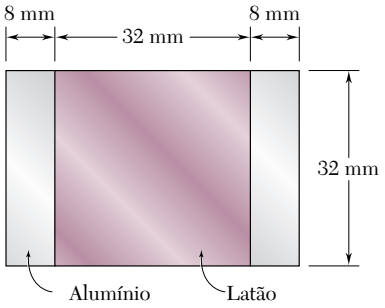


Fig. *P4.34*

4.35 e *4.36* Para a barra composta indicada, determine o maior momento fletor admissível quando a barra é flexionada em torno do eixo vertical.

4.35 Barra do Problema 4.33.

4.36 Barra do Problema 4.34.

4.37 Três vigas de madeira e duas chapas de aço são aparafusadas firmemente para formar o elemento composto mostrado na figura. Usando os dados da tabela abaixo, determine o maior momento fletor admissível quando a viga é flexionada em torno do eixo horizontal.

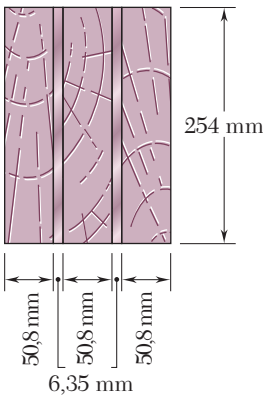


Fig. P4.37

	Madeira	Aço
Módulo de elasticidade	13,8 GPa	207 GPa
Tensão admissível	13,8 MPa	152 MPa

4.38 Para a viga composta da Fig. 4.37, determine o maior momento fletor admissível quando a viga é flexionada em torno do eixo vertical.

4.39 e 4.40 Uma barra de aço ($E_{aço}$ = 210 GPa) e uma barra de alumínio (E_{alum} = 70 GPa) são unidas para formar a barra composta mostrada na figura. Determine a tensão máxima, (*a*) no alumínio e (*b*) no aço, quando a barra é flexionada em torno do eixo horizontal, com $M = 200\ \text{N} \cdot \text{m}$.

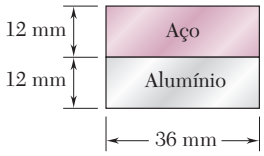


Fig. P4.39

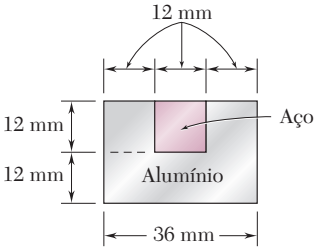


Fig. P4.40

4.41 e *4.42* Uma viga de madeira de 152,4 mm × 304,8 mm foi reforçada aparafusando-se nela o reforço de aço mostrado na figura. O módulo de elasticidade para a madeira é de 12,4 GPa, e para o aço de 200 GPa. Sabendo que a viga é flexionada em torno do eixo horizontal por um momento fletor $M = 50{,}8\ \text{kN} \cdot \text{m}$, determine a tensão máxima (*a*) na madeira e (*b*) no aço.

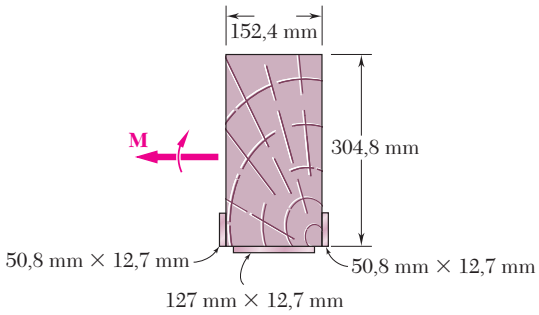


Fig. P4.41

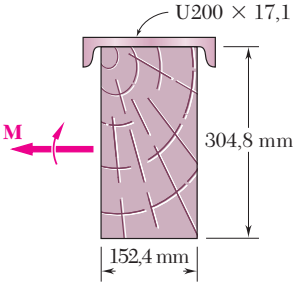


Fig. *P4.42*

4.43 e 4.44 Para a barra composta indicada, determine o raio de curvatura provocado pelo momento fletor de 200 N · m.

4.43 Barra do Problema 4.39.

4.44 Barra do Problema 4.40.

4.45 e *4.46* Para a barra composta indicada, determine o raio de curvatura provocado pelo momento fletor de 50,8 kN · m.

4.45 Barra do Problema 4.41.

4.46 Barra do Problema 4.42.

4.47 Uma viga de concreto é reforçada por três barras de aço colocadas conforme mostra figura. O módulo de elasticidade é de 20,7 GPa para o concreto e de 207 GPa para o aço. Usando uma tensão admissível de 9,31 MPa para o concreto e de 138 MPa para o aço, determine o maior momento fletor admissível positivo que pode ser aplicado à viga.

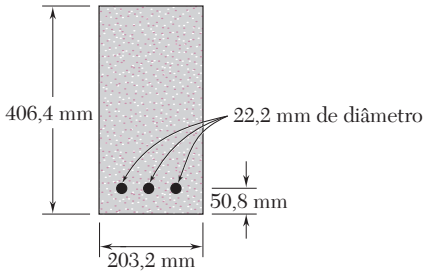


Fig. P4.47

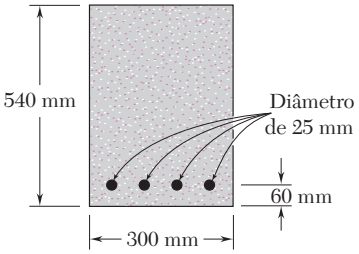


Fig. P4.48

4.48 A viga de concreto reforçado mostrada na figura está submetida a um momento fletor positivo de 175 kN · m. Sabendo que o módulo de elasticidade é de 25 GPa para o concreto e de 200 GPa para o aço, determine (*a*) a tensão no aço e (*b*) a tensão máxima no concreto.

4.49 Resolva o Problema 4.48 considerando que a largura de 300 mm seja aumentada para 350 mm.

4.50 Uma laje de concreto é reforçada por barras de 15,88 mm de diâmetro colocadas com distanciamento de 139,7 mm entre os centros, conforme mostra a figura. O módulo de elasticidade é de 20,7 GPa para o concreto e de 200 GPa para o aço. Usando uma tensão admissível de 9,65 MPa para o concreto e de 137,9 MPa para o aço, determine o maior momento fletor por metro de largura que pode ser aplicado com segurança à laje.

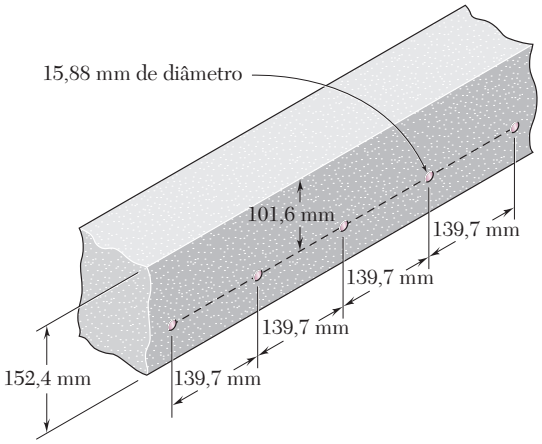


Fig. *P4.50*

4.51 Sabendo que o momento fletor em uma viga de concreto reforçado é de +203,4 kN · m e que o módulo de elasticidade é de 25,9 GPa para o concreto e 206,9 GPa para o aço, determine (*a*) a tensão no aço e (*b*) a tensão máxima no concreto.

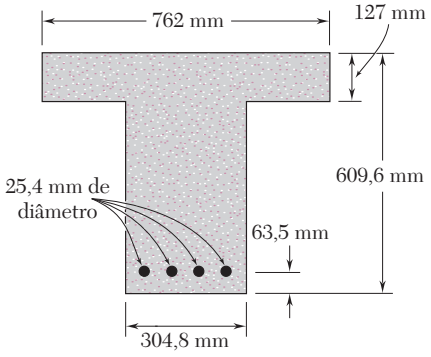


Fig. P4.51

4.52 Dizemos que o projeto de uma viga de concreto reforçado está *balanceado* se as tensões máximas do concreto e do aço forem iguais, respectivamente, às tensões admissíveis $\sigma_{aço}$ e σ_{con}. Mostre que, para conseguir um projeto balanceado, a distância x da superfície superior da viga até a linha neutra deve ser

$$x = \frac{d}{1 + \dfrac{\sigma_{aço} E_{conc}}{\sigma_{conc} E_{aço}}}$$

em que E_{con} e $E_{aço}$ são os módulos do concreto e do aço, respectivamente, e d é a distância da superfície superior da viga até o reforço de aço.

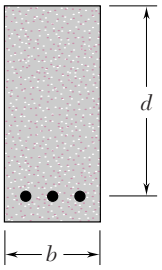


Fig. P4.52

4.53 Para a viga de concreto mostrada na figura, o módulo de elasticidade é de 25 GPa para o concreto e de 200 GPa para o aço. Sabendo que $b = 200$ mm e $d = 450$ mm e usando a tensão admissível de 12,5 MPa para o concreto e 140 MPa para o aço, determine (*a*) a área $A_{aço}$ necessária do reforço de aço considerando que a viga deve ser balanceada e (*b*) o maior momento fletor admissível. (Veja no Problema 4.52 a definição de viga balanceada.)

4.54 Para a viga de concreto mostrada na figura, o módulo de elasticidade é de 24 GPa para o concreto e de 200 GPa para o aço. Sabendo que $b = 203{,}2$ mm e $d = 558{,}8$ mm, e usando a tensão admissível de 12,4 MPa para o concreto e de 137,9 MPa para o aço, determine (*a*) a área $A_{aço}$ necessária do reforço de aço visto que a viga deve ser balanceada e (*b*) o maior momento fletor admissível. (Veja no Problema 4.52 a definição de viga balanceada.)

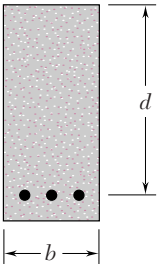


Fig. P4.53 e *P4.54*

4.55 e 4.56 Cinco tiras de metal, cada uma com 15 mm × 45 mm de seção transversal, são unidas para formar uma viga composta, mostrada na figura. O módulo de elasticidade é de 210 GPa para o aço, de 105 GPa para o latão e de 70 GPa para o alumínio. Sabendo que a viga é flexionada em torno do eixo horizontal por um momento de 1400 N · m, determine (*a*) a tensão máxima em cada um dos três metais e (*b*) o raio de curvatura da viga composta.

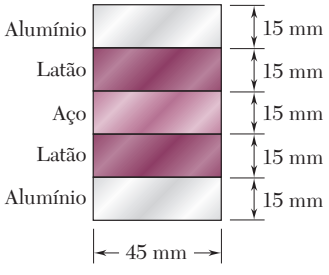


Fig. P4.55

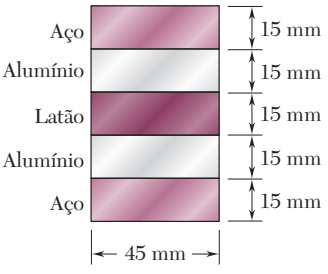


Fig. P4.56

4.57 Um tubo de aço e um tubo de alumínio são unidos firmemente para formar a viga composta mostrada na figura. O módulo de elasticidade é de 207 GPa para o aço e de 69 GPa para o alumínio. Sabendo que a viga composta é flexionada por um momento de 565 N · m, determine a tensão máxima (*a*) no alumínio e (*b*) no aço.

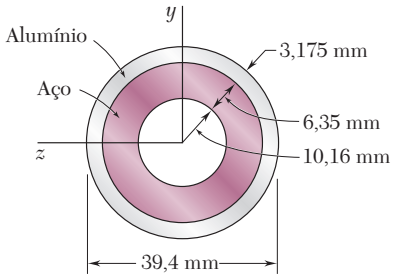


Fig. P4.57

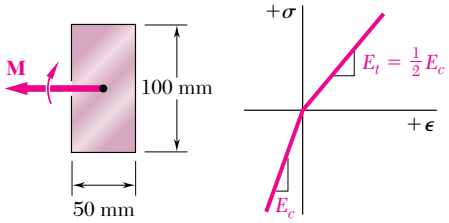


Fig. P4.59

4.58 Resolva o Problema 4.57 considerando que o tubo interno de 6,35 mm de espessura seja feito de alumínio e que o tubo externo de 3,175 mm de espessura seja feito de aço.

4.59 A viga retangular mostrada na figura é feita de um plástico para o qual o módulo de elasticidade em tração é metade de seu valor em compressão. Para um momento fletor M = 600 N · m, determine (*a*) a tensão de tração máxima e (*b*) a tensão de compressão máxima.

***4.60** Uma barra retangular é feita de um material para o qual o módulo de elasticidade é E_t em tração e E_c em compressão. Mostre que a curvatura da barra em flexão pura é

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E_r I}$$

em que

$$E_r = \frac{4E_tE_c}{\left(\sqrt{E_t} + \sqrt{E_c}\right)^2}$$

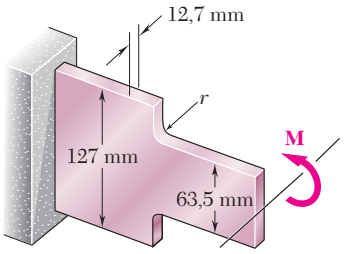


Fig. P4.61 a P4.62

4.61 Sabendo que a tensão admissível para a viga mostrada é de 82,7 MPa, determine o momento fletor *M* admissível quando o raio *r* dos adoçamentos é (*a*) 12,7 mm e (*b*) 19,1 mm.

4.62 Sabendo que *M* = 339 N · m, determine a tensão máxima na barra mostrada quando o raio *r* dos adoçamentos é (*a*) 6,35 mm e (*b*) 12,7 mm.

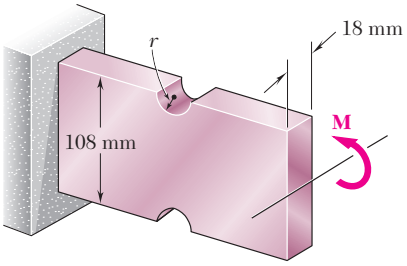
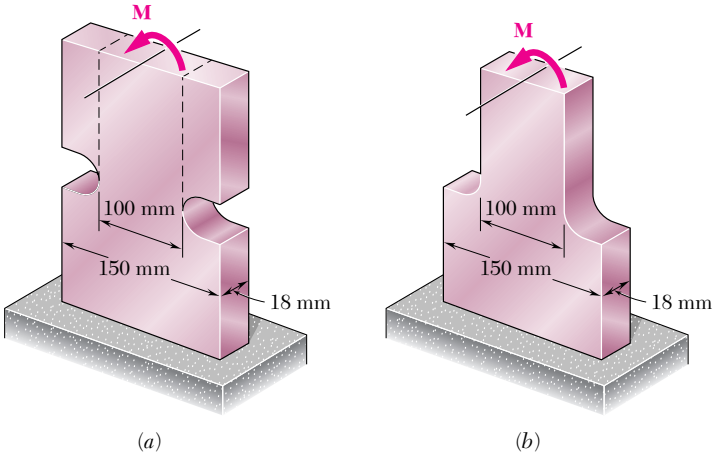


Fig. *P4.63* a P4.64

4.63 Ranhuras semicirculares de raio *r* devem ser fresadas nos lados de uma barra de aço, conforme mostra a figura. Sabendo que *M* = 450 N · m, determine a tensão máxima na barra quando o raio r das ranhuras semicirculares é (*a*) *r* = 9,0 mm e (*b*) *r* = 18 mm.

4.64 Ranhuras semicirculares de raio *r* devem ser fresadas nos lados de uma barra de aço, conforme mostra a figura. Usando uma tensão admissível de 60 MPa, determine o maior momento fletor que pode ser aplicado ao elemento quando o raio *r* das ranhuras semicirculares for (*a*) *r* = 9,0 mm e (*b*) *r* = 18 mm.

4.65 Um momento fletor $M = 2$ kN · m deve ser aplicado à extremidade de uma barra de aço. Determine a tensão máxima na barra (*a*) considerando que a barra foi projetada com ranhuras semicirculares de raio $r = 10$ mm, como mostra a Fig. P4.65*a*, e (*b*) se a barra for reprojetada removendo-se o material acima das ranhuras como mostra a Fig. P4.65*b*.



(*a*) (*b*)

Fig. *P4.65* e P4.66

4.66 A tensão admissível usada no projeto de uma barra de aço é de 80 MPa. Determine o maior momento fletor **M** que pode ser aplicado à barra (*a*) se ela for projetada com ranhuras semicirculares de raio $r = 15$ mm, como mostra a Fig. P4.65*a* e (*b*) se a barra for reprojetada removendo-se o material acima das ranhuras como mostra a Fig. P4.65*b*.

*4.8. Deformações plásticas

Quando deduzimos a expressão fundamental $\sigma = -My/I$ na Seção 4.4, consideramos que a lei de Hooke se aplicava ao elemento inteiro. Se a tensão de escoamento é ultrapassada em alguma parte do elemento, ou se o material envolvido é frágil com uma relação entre tensão e deformação específica não-linear, essa expressão não é mais válida. A finalidade dessa seção é desenvolver um método mais geral para determinação da distribuição de tensões em um elemento em flexão pura, que pode ser usado quando a lei de Hooke não se aplica.

Primeiro recordemos que nenhuma relação entre a tensão e deformação específica foi considerada na Seção 4.3, quando provamos que a deformação específica normal ϵ_x varia linearmente com a distância y da superfície neutra. Assim, podemos ainda usar essa propriedade em nossa análise presente e escrever

$$\epsilon_x = -\frac{y}{c}\epsilon_m \tag{4.10}$$

em que y representa a distância do ponto considerado em relação à superfície neutra, e c o valor máximo de y.

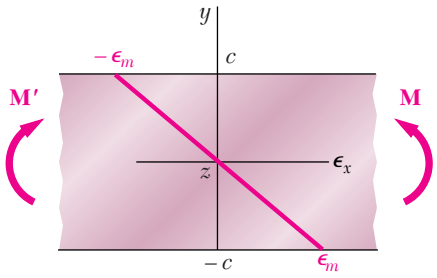


Fig. 4.34

No entanto, não podemos mais considerar que em uma seção a linha neutra passe pelo centroide daquela outra, pois essa propriedade foi deduzida na Seção 4.4 sob a hipótese de deformações elásticas. Em geral, a linha neutra deve ser localizada por tentativa e erro, até ser encontrada uma distribuição de tensões que satisfaça as Equações (4.1) e (4.3) da Seção 4.2. Contudo, no caso particular de um elemento que possui planos de simetria vertical e horizontal, composto de um material caracterizado pela mesma relação tensão-deformação em tração e em compressão, a linha neutra coincidirá com a linha de simetria horizontal da seção. Sem dúvida, as propriedades do material requerem que as tensões sejam simétricas em relação à linha neutra, isto é, com relação a *algum* eixo horizontal, e está claro que essa condição será satisfeita, e a Equação (4.1) satisfeita ao mesmo tempo, somente se aquele eixo coincidir com o eixo de simetria horizontal.

Nossa análise será limitada, em primeiro lugar, ao caso especial que já descrevemos. A distância y na Equação (4.10) é medida então a partir do eixo z de simetria horizontal da seção transversal, e a distribuição de deformação específica ϵ_x é linear e simétrica com relação àquele eixo (Fig. 4.34). Em contrapartida, a curva da tensão-deformação específica é simétrica em relação à origem das coordenadas (Fig. 4.35).

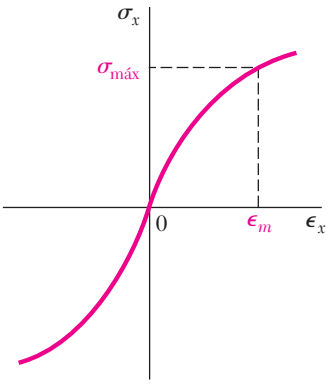


Fig. 4.35

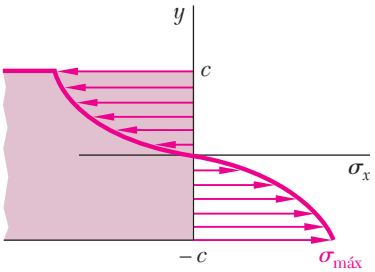


Fig. 4.36

A distribuição de tensões na seção transversal do elemento, isto é, a curva de σ_x em função de y, é obtida da seguinte forma. Considerando que $\sigma_{máx}$ tenha sido especificado, primeiro determinamos o valor correspondente de ϵ_m da curva da tensão-deformação específica e usamos esse valor na Equação (4.10). Depois, para cada valor de y, determinamos o valor correspondente de ϵ_x, da Equação (4.10) ou Fig. 4.34, e obtemos da curva tensão-deformação específica da Fig. 4.35, a tensão σ_x correspondente a esse valor de ϵ_x. Construindo a curva de σ_x para os valores de y obtemos a distribuição de tensões desejada (Fig. 4.36).

Recordamos agora que, quando deduzimos a Equação (4.3) na Seção 4.2, não consideramos nenhuma relação particular entre tensão e deformação específica. Podemos portanto usar a Equação (4.3) para determinar o momento fletor M correspondente à distribuição de tensões obtida na Fig. 4.36. Considerando o caso particular de um elemento com uma seção transversal retangular de largura b, expressamos o elemento de área na Equação (4.3) como $dA = b\,dy$ e escrevemos

$$M = -b\int_{-c}^{c} y\sigma_x\,dy \tag{4.30}$$

em que σ_x é a função de y representada na Fig. 4.36. Como σ_x é uma função ímpar de y, podemos escrever a Equação (4.30) na forma alternativa

$$M = -2b \int_0^c y\sigma_x \, dy \tag{4.31}$$

Se σ_x for uma função analítica conhecida de ϵ_x, a Equação (4.10) pode ser usada para expressar σ_x em função de y, e a integral em (4.31) pode ser determinada analiticamente. No entanto, o momento fletor M pode ser obtido por meio de uma integração numérica. Esse cálculo torna-se mais significativo se notarmos que a integral na Equação (4.31) representa o momento de primeira ordem, em relação ao eixo horizontal, da área na Fig. 4.36 que está localizada acima desse eixo e está limitada pela curva de distribuição de tensões e pelo eixo vertical.

Um valor importante do momento fletor é o seu limite M_L que provoca a falha do elemento. Esse valor pode ser determinado pelo limite de resistência σ_L do material escolhendo $\sigma_{\text{máx}} = \sigma_L$ e executando os cálculos indicados anteriormente. No entanto, considera-se mais conveniente na prática determinar M_L experimentalmente para um corpo de prova de um material. Considerando uma distribuição linear fictícia de tensões, a Equação (4.15) é usada então para determinar a tensão máxima correspondente R_B:

$$R_B = \frac{M_L c}{I} \tag{4.32}$$

A tensão fictícia R_B é chamada de *módulo de ruptura em flexão* do material dado. Esse módulo de ruptura pode ser usado para determinar o limite de momento fletor M_L de um componente feito do mesmo material e com uma

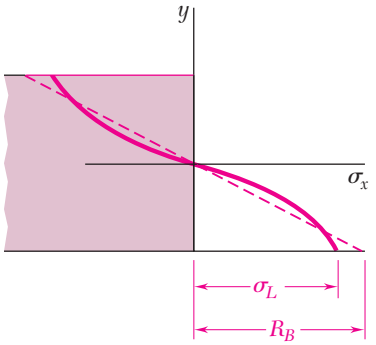


Fig. 4.37

seção transversal da mesma forma, mas de dimensões diferentes, resolvendo a Equação (4.32) para M_L. Uma vez que, no caso de um componente com seção transversal retangular, as distribuições lineares de tensão, reais e fictícias, mostradas na Fig. 4.37 devem dar o mesmo valor M_L para o limite de momento fletor, as áreas que elas definem devem ter o mesmo momento de primeira ordem em relação ao eixo horizontal. Está claro, portanto, que o módulo de ruptura R_B será sempre maior que o limite da resistência real σ_L.

*4.9. Barras constituídas de material elastoplástico

Para obtermos um melhor conhecimento do comportamento plástico de uma barra em flexão, vamos considerar o caso de uma barra constituída de um *material elastoplástico*, supondo que a barra tenha uma *seção transversal retangular* de largura b e altura $2c$ (Fig. 4.38). Recordamos da Seção 2.17 que a curva da tensão em função da deformação específica para um material elastoplástico ideal tem uma forma parecida com a Fig. 4.39.

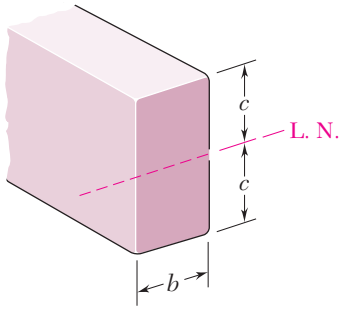


Fig. 4.38

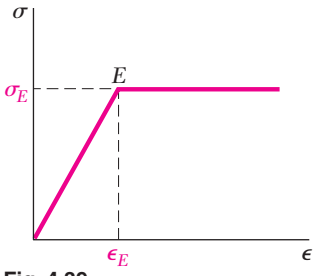


Fig. 4.39

Desde que a tensão normal σ_x não exceda a tensão de escoamento σ_E, aplica-se a lei de Hooke, e a distribuição de tensões pela seção é linear (Fig. 4.40*a*). O valor máximo da tensão é

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} \tag{4.15}$$

À medida que o momento fletor aumenta, σ_m finalmente atinge o valor σ_E (Fig. 4.40*b*). Substituindo esse valor na Equação (4.15), e resolvendo para o valor correspondente de M, obtemos o valor M_E do momento fletor no início do escoamento:

$$M_E = \frac{I}{c}\sigma_E \tag{4.33}$$

O momento M_E é chamado de *momento elástico máximo*, visto que é o maior momento para o qual a deformação permanece totalmente elástica. Recordando que, para a seção transversal retangular considerada aqui,

$$\frac{I}{c} = \frac{b(2c)^3}{12c} = \frac{2}{3}bc^2 \tag{4.34}$$

escrevemos

$$M_E = \frac{2}{3}bc^2\sigma_E \tag{4.35}$$

À medida que o momento fletor aumenta ainda mais, desenvolvem-se zonas plásticas na barra, com as tensões uniformemente iguais a $-\sigma_E$ na zona superior e a $+\sigma_E$ na zona inferior (Fig. 4.40*c*). Entre as zonas plástica um núcleo elástico subsiste, no qual a tensão σ_x varia linearmente com y,

$$\sigma_x = -\frac{\sigma_E}{y_E}y \tag{4.36}$$

em que y_E representa metade da espessura do núcleo elástico. À medida que M aumenta, as zonas plásticas expandem-se até que, no limite, a deformação é totalmente plástica (Fig. 4.40*d*).

A Equação (4.31) será usada para determinar o valor do momento fletor M correspondente a uma espessura $2y_E$ do núcleo elástico. Lembrando que σ_x

é dado pela Equação (4.36) para $0 \le y \le y_E$, e é igual a $-\sigma_E$ para $y_E \le y \le c$, escrevemos

$$M = -2b \int_0^{y_E} y\left(-\frac{\sigma_E}{y_E} y\right) dy - 2b \int_{y_E}^{c} y(-\sigma_E)\, dy$$

$$= \frac{2}{3} b y_E^2 \sigma_E + b c^2 \sigma_E - b y_E^2 \sigma_E$$

$$M = b c^2 \sigma_E \left(1 - \frac{1}{3}\frac{y_E^2}{c^2}\right) \tag{4.37}$$

ou, em vista da Equação (4.35),

$$M = \frac{3}{2} M_E \left(1 - \frac{1}{3}\frac{y_E^2}{c^2}\right) \tag{4.38}$$

na qual M_E é o momento elástico máximo. Note que à medida que y_E se aproxima de zero, o momento fletor se aproxima do valor limite

$$M_p = \frac{3}{2} M_E \tag{4.39}$$

Esse valor do momento fletor, que corresponde a uma deformação plástica total da seção transversal (Fig. 4.40*d*), é chamado de *momento plástico* da barra considerada. Note que a Equação (4.39) é válida somente para uma *barra de seção retangular feita de um material elastoplástico*.

Você deve ter em mente que a distribuição de deformação específica ao longo da seção permanece linear após o início do escoamento. Portanto, a Equação (4.8) da Seção 4.3 permanece válida e pode ser usada para determinar a metade da espessura y_E do núcleo elástico. Temos

$$y_E = \epsilon_E \rho \tag{4.40}$$

em que ϵ_E é a deformação específica de escoamento e ρ é o raio de curvatura correspondente a um momento fletor $M \ge M_E$. Quando o momento fletor é igual a M_E, temos $y_E = c$ e a Equação (4.40) resulta em

$$c = \epsilon_E \rho_E \tag{4.41}$$

em que ρ_E é o raio de curvatura correspondente ao momento elástico máximo M_E. Dividindo (4.40) por (4.41) membro a membro, observamos a relação†

$$\frac{y_E}{c} = \frac{\rho}{\rho_E} \tag{4.42}$$

Substituindo y_E/c de (4.42) na Equação (4.38), expressamos o momento fletor M em função do raio de curvatura ρ da superfície neutra:

$$M = \frac{3}{2} M_E \left(1 - \frac{1}{3}\frac{\rho^2}{\rho_E^2}\right) \tag{4.43}$$

Note que a Equação (4.43) é válida somente após o início do escoamento, isto é, para valores de M maiores que M_E. Para $M < M_E$, deverá ser usada a Equação (4.21) da Seção 4.4.

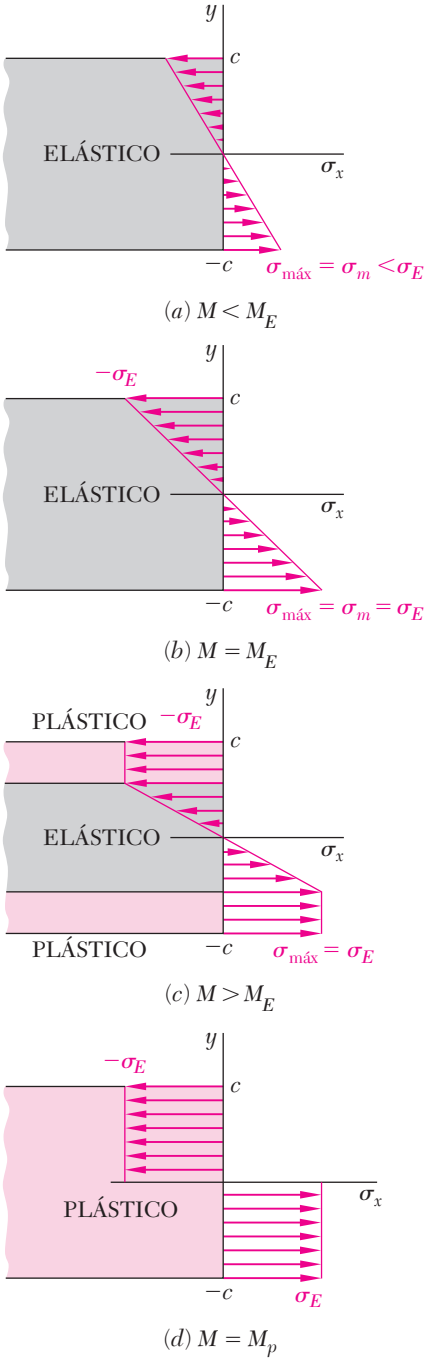


Fig. 4.40

†A Equação (4.42) aplica-se a qualquer elemento feito de qualquer material dúctil com um ponto de escoamento bem definido, pois sua determinação é independente da forma da seção transversal e da forma da distribuição tensão-deformação específica além do ponto de escoamento.

Observamos da Equação (4.43) que o momento fletor atinge o valor $M_p = \frac{3}{2} M_E$ somente quando $\rho = 0$. Como está claro que não podemos ter um raio de curvatura igual a zero em todos os pontos da superfície neutra, concluímos que uma deformação plástica total da seção não pode ocorrer em flexão pura. No entanto, conforme você verá no Capítulo 5, essa situação pode ocorrer em um ponto como no caso de uma viga sob carregamento transversal.

As distribuições de tensão em uma barra de seção retangular, correspondendo, respectivamente, ao momento elástico máximo M_E e ao caso-limite do momento plástico M_p, foram representadas em três dimensões na Fig. 4.41. Como em ambos os casos as resultantes das forças elementares de tração e compressão devem passar pelos centroides dos volumes que representam as distribuições de tensão e devem ser iguais em intensidade a esses volumes, verificamos que

$$R_E = \tfrac{1}{2} bc\sigma_E$$

e

$$R_p = bc\sigma_E$$

e os momentos fletores correspondentes são, respectivamente,

$$M_E = (\tfrac{4}{3}c)R_E = \tfrac{2}{3}bc^2\sigma_E \tag{4.44}$$

e

$$M_p = cR_p = bc^2\sigma_E \tag{4.45}$$

Verificamos então que, para uma barra de seção retangular, $M_p = \frac{3}{2}M_E$ como requer a Equação (4.39).

Para vigas de *seção transversal não retangular*, o cálculo do momento elástico máximo M_E e do momento plástico M_p geralmente será simplificado se for usado um método gráfico de análise, como mostra o Problema Resolvido 4.5. Veremos neste caso mais geral que a relação $k = M_p/M_E$ normalmente não é igual a $\frac{3}{2}$. Por exemplo, para formas estruturais como as vigas de mesa larga, essa relação varia aproximadamente de 1,08 a 1,14. Como ela depende somente da forma da seção transversal, a relação $k = M_p/M_E$ é chamada de *fator de forma* da seção transversal. Notamos que, se forem conhecidos o fator de forma k e o momento elástico máximo M_E de uma viga, o momento plástico M_p da viga pode ser obtido multiplicando-se M_E por k:

$$M_p = kM_E \tag{4.46}$$

A relação M_p/σ_E obtida dividindo-se o momento plástico M_p de uma barra pela tensão de escoamento σ_E de seu material é chamada de *módulo de resistência da seção plástica* da barra e é representada por Z. Quando o módulo de resistência da seção plástica Z e a tensão de escoamento σ_E de uma viga são conhecidos, o momento plástico M_p da viga pode ser obtido multiplicando-se σ_E por Z:

$$M_p = Z\sigma_E \tag{4.47}$$

De acordo com a Equação (4.18) em que $M_E = W\sigma_E$, e comparando essa relação com a Equação (4.47), notamos que o fator de forma $k = M_p/M_E$ de

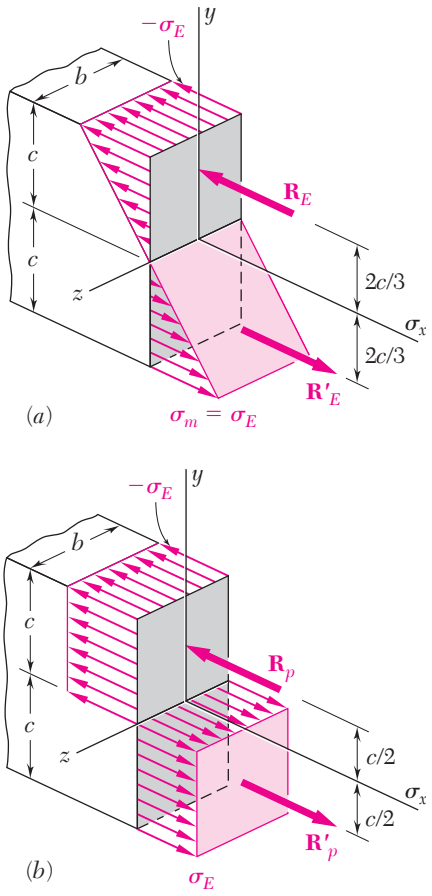


Fig. 4.41

uma seção transversal pode ser expresso como a relação entre os módulos de resistências das seções plástica e elástica:

$$k = \frac{M_p}{M_E} = \frac{Z\sigma_E}{W\sigma_E} = \frac{Z}{W} \tag{4.48}$$

Considerando o caso particular de uma viga de seção retangular de largura b e altura h, notamos segundo as Equações (4.45) e (4.47) que o *módulo de resistência da seção plástica* de uma viga retangular é

$$Z = \frac{M_p}{\sigma_E} = \frac{bc^2\sigma_E}{\sigma_E} = bc^2 = \tfrac{1}{4}bh^2$$

Entretanto, lembramos da Equação (4.19) da Seção 4.4 que o *módulo de resistência da seção elástica* dessa mesma viga é

$$W = \tfrac{1}{6}bh^2$$

Substituindo na Equação (4.48) os valores obtidos para Z e W, verificamos que o fator de forma de uma viga retangular é

$$k = \frac{Z}{W} = \frac{\frac{1}{4}bh^2}{\frac{1}{6}bh^2} = \frac{3}{2}$$

EXEMPLO 4.5

Uma barra de seção transversal retangular uniforme medindo 50 mm por 120 mm (Fig. 4.42) está submetida a um momento fletor $M = 36{,}8$ kN · m. Considerando que a barra é constituída de um material elastoplástico com uma tensão de escoamento de 240 MPa e um módulo de elasticidade de 200 GPa, determine (*a*) a espessura do núcleo elástico e (*b*) o raio de curvatura da superfície neutra.

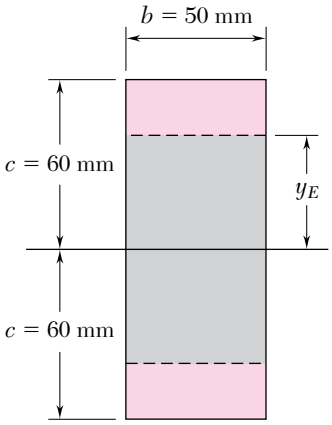


Fig. 4.42

(a) Espessura do núcleo elástico. Primeiro determinamos o momento elástico máximo M_E. Substituindo os dados fornecidos, na Equação (4.34), temos

$$\frac{I}{c} = \frac{2}{3}bc^2 = \frac{2}{3}(50 \times 10^{-3}\text{ m})(60 \times 10^{-3}\text{ m})^2$$
$$= 120 \times 10^{-6}\text{ m}^3$$

e usando esse valor, e também $\sigma_E = 240$ MPa, na Equação (4.33)

$$M_E = \frac{I}{c}\sigma_E = (120 \times 10^{-6}\text{ m}^3)(240\text{ MPa}) = 28{,}8\text{ kN} \cdot \text{m}$$

Substituindo os valores de M e M_E na Equação (4.38), temos

$$36{,}8\text{ kN} \cdot \text{m} = \frac{3}{2}(28{,}8\text{ kN} \cdot \text{m})\left(1 - \frac{1}{3}\frac{y_E^2}{c^2}\right)$$

$$\left(\frac{y_E}{c}\right)^2 = 0{,}444 \qquad \frac{y_E}{c} = 0{,}666$$

e como $c = 60$ mm

$$y_E = 0{,}666(60\text{ mm}) = 40\text{ mm}$$

A espessura $2y_E$ do núcleo elástico é, portanto, 80 mm.

(b) Raio de curvatura. Notamos que a deformação específica de escoamento é

$$\epsilon_E = \frac{\sigma_E}{E} = \frac{240 \times 10^6\text{ Pa}}{200 \times 10^9\text{ Pa}} = 1{,}2 \times 10^{-3}$$

Resolvendo a Equação (4.40) para ρ e substituindo os valores obtidos para y_E e ϵ_E, escrevemos

$$\rho = \frac{y_E}{\epsilon_E} = \frac{40 \times 10^{-3}\text{ m}}{1{,}2 \times 10^{-3}} = 33{,}3\text{ m}$$

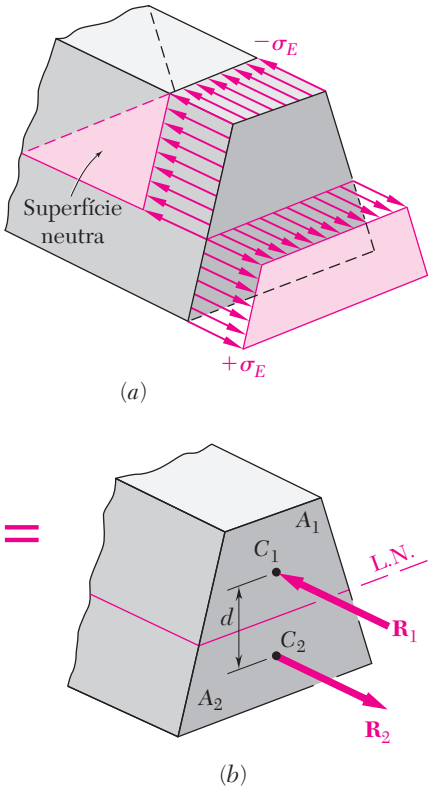


Fig. 4.43

*4.10. Deformações plásticas de barras com um único plano de simetria

Em nossa discussão sobre as deformações plásticas, consideramos até agora que a barra em flexão tinha dois planos de simetria, um contendo os momentos fletores **M** e **M′**, e o outro perpendicular àquele plano. Vamos considerar agora o caso mais geral, quando a barra contém somente um plano de simetria contendo os momentos fletores **M** e **M′**. No entanto, nossa análise será limitada à situação em que a deformação é totalmente plástica, com a tensão normal uniformemente igual a $-\sigma_E$ acima da superfície neutra, e a $+\sigma_E$ abaixo da superfície neutra (Fig. 4.43*a*).

Conforme foi indicado na Seção 4.8, a linha neutra não pode ser considerada coincidente com o eixo que passa pelo centroide da seção transversal quando ela não é simétrica em relação àquele eixo. Para localizarmos a linha neutra, consideramos a resultante $\mathbf{R}_1$ das forças de compressão elementares aplicadas sobre a parte A_1 da seção transversal localizada acima da linha neutra, e a resultante $\mathbf{R}_2$ das forças de tração aplicadas sobre a parte A_2 localizada abaixo da linha neutra (Fig. 4.43*b*). Como as forças $\mathbf{R}_1$ e $\mathbf{R}_2$ formam um momento equivalente ao aplicado na seção da barra, elas devem ter a mesma intensidade. Temos, portanto, $R_1 = R_2$ ou $A_1\sigma_E = A_2\sigma_E$, do qual concluímos que $A_1 = A_2$. Em outras palavras, *a linha neutra divide a seção transversal em partes de áreas iguais*. Note que a linha neutra obtida dessa maneira *não será*, em geral, uma linha que passa pelo centroide da seção transversal.

Observamos também que as linhas de ação das resultantes $\mathbf{R}_1$ e $\mathbf{R}_2$ passam pelos centroides C_1 e C_2 das duas partes que acabamos de definir. Chamando de d a distância entre C_1 e C_2, e de A a área total da seção transversal, expressamos o momento plástico da barra como

$$M_p = \left(\tfrac{1}{2}A\sigma_E\right) d$$

Um exemplo do cálculo do momento plástico de uma barra com apenas um plano de simetria é dado no Problema Resolvido 4.6.

*4.11. Tensões residuais

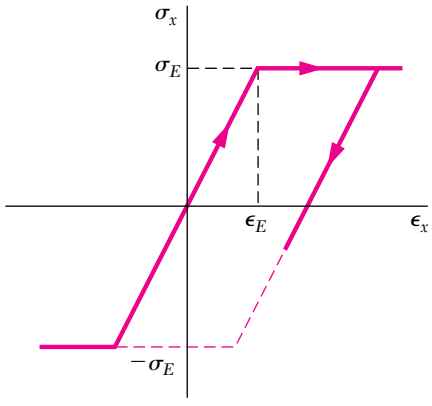


Fig. 4.44

Vimos nas seções anteriores que zonas plásticas poderão ser desenvolvidas em uma barra constituída de material elastoplástico se o momento fletor for suficientemente grande. Quando o momento fletor retorna a zero, a redução correspondente na tensão e deformação em um ponto pode ser representada por uma linha reta no gráfico tensão-deformação específica, como mostra a Fig. 4.44. Conforme veremos agora, o valor final da tensão em determinado ponto, em geral, não será zero. Haverá uma tensão residual na maioria dos pontos, e essa tensão pode ter ou não o mesmo sinal da tensão máxima atingida no fim da fase de carregamento.

Como a relação linear entre σ_x e ϵ_x se aplica em todos os pontos da barra durante a fase de descarregamento, a Equação (4.16) pode ser usada para obter a variação da tensão em um ponto. Em outras palavras, a fase de descarregamento pode ser tratada considerando-se que a barra esteja totalmente no regime elástico.

As tensões residuais são obtidas aplicando-se o princípio da superposição de maneira similar àquela descrita na Seção 2.20, para um carregamento axial centrado e usado novamente na Seção 3.11, para o caso de torção. Não obstante, consideramos as tensões em virtude da aplicação de um momento fletor M e, de outra maneira, as tensões reversas em virtude do momento fletor igual e oposto $-M$ que é aplicado para descarregar a barra. O primeiro grupo de tensões reflete o comportamento *elastoplástico* do material durante a fase de carregamento, e o segundo grupo, o comportamento *linear* do mesmo material durante a fase de descarregamento. Somando os dois grupos de tensões, obtemos a distribuição de tensões residuais no elemento.

EXEMPLO 4.6

Para a barra do Exemplo 4.5, determine (*a*) a distribuição das tensões residuais e (*b*) o raio de curvatura, depois que o momento fletor retornou de seu valor máximo de 36,8 kN · m para zero.

(a) Distribuição das tensões residuais. Recordamos do Exemplo 4.5 que a tensão de escoamento é $\sigma_E = 240$ MPa e que a espessura do núcleo elástico é $2y_E = 80$ mm. A distribuição de tensões na barra sob carga é conforme mostra a Fig. 4.45*a*.

A distribuição das tensões reversas em razão do momento fletor oposto de 36,8 kN · m para descarregar a barra é linear e conforme mostrado na Fig. 4.45*b*. A tensão máxima σ'_m naquela distribuição é obtida da Equação (4.15). Recordando o Exemplo 4.5 em que $I/c = 120 \times 10^{-6}\ \text{m}^3$, escrevemos

$$\sigma'_m = \frac{Mc}{I} = \frac{36{,}8\ \text{kN} \cdot \text{m}}{120 \times 10^{-6}\ \text{m}^3} = 306{,}7\ \text{MPa}$$

Superpondo as duas distribuições de tensões, obtemos as tensões residuais mostradas na Fig. 4.45*c*. Verificamos que, apesar de as tensões reversas excederem a tensão de escoamento σ_E, a suposição de uma distribuição linear das tensões reversas é válida desde que não excedam $2\sigma_E$.

(b) Raio de curvatura após o descarregamento. Podemos aplicar a lei de Hooke em qualquer ponto do núcleo $|y| < 40$ mm já que não ocorreram deformações plásticas naquela parte da barra. Assim, a deformação específica residual na distância $y = 40$ mm é

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{-35{,}5 \times 10^6\ \text{Pa}}{200 \times 10^9\ \text{Pa}} = -177{,}5 \times 10^{-6}$$

Resolvendo a Equação (4.8) para ρ e substituindo os valores apropriados de y e ϵ_x, escrevemos

$$\rho = -\frac{y}{\epsilon_x} = \frac{40 \times 10^{-3}\ \text{m}}{177{,}5 \times 10^{-6}} = 225\ \text{m}$$

O valor obtido para ρ depois de a carga ter sido removida representa uma deformação permanente do elemento.

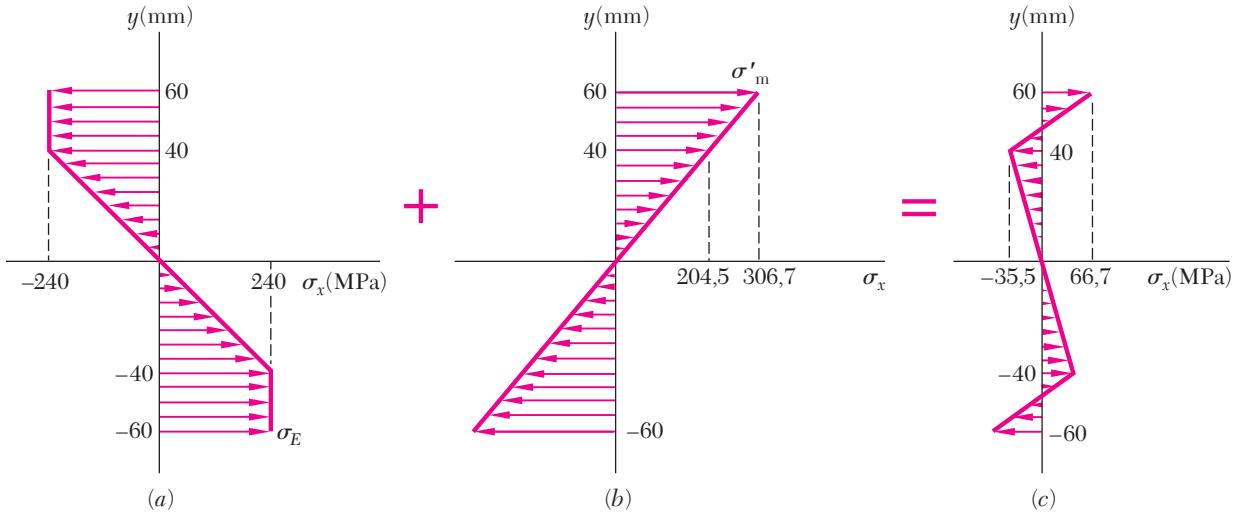
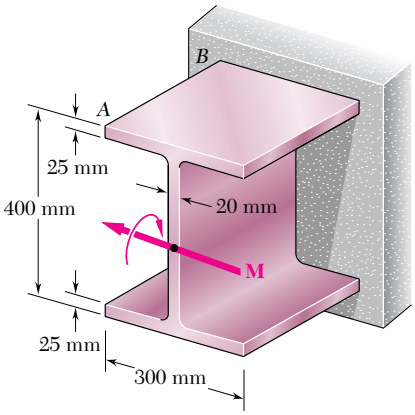


Fig. 4.45



PROBLEMA RESOLVIDO 4.5

A viga *AB* foi fabricada com uma liga de aço de alta resistência considerado elasto-plástico, com E = 200 GPa e $\sigma_E = 345$ MPa. Desprezando o efeito dos adoçamentos, determine o momento fletor M e o raio de curvatura correspondente (*a*) quando o escoamento inicia e (*b*) quando as mesas acabam de se tornar totalmente plásticas.

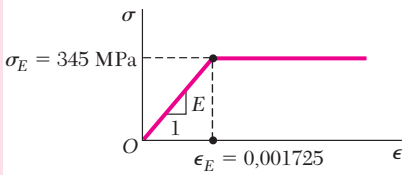
SOLUÇÃO

***a.* Início do escoamento.** O momento de inércia da seção é

$$I = \tfrac{1}{12}(0{,}30\text{ m})(0{,}40\text{ m})^3 - \tfrac{1}{12}(0{,}30\text{ m} - 0{,}02\text{ m})(0{,}35\text{ m})^3 = 6{,}0 \times 10^{-4}\text{ m}^4$$

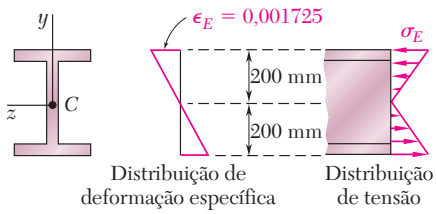
Momento fletor. Para $\sigma_{\text{máx}} = \sigma_E = 345$ MPa e $c = 0{,}20$ m, temos

$$M_E = \frac{\sigma_E I}{c} = \frac{(345\text{ MPa})(6{,}0 \times 10^{-4}\text{ m}^4)}{0{,}20\text{ m}} \qquad M_E = 1035\text{ kN} \cdot \text{m} \blacktriangleleft$$



Raio de curvatura. Observando que, para $c = 0{,}20$ m, a deformação específica é $\epsilon_E = \sigma_E/E = (345\text{ MPa})/(200 \times 10^3\text{ MPa}) = 0{,}001725$, temos, da Equação (4.41)

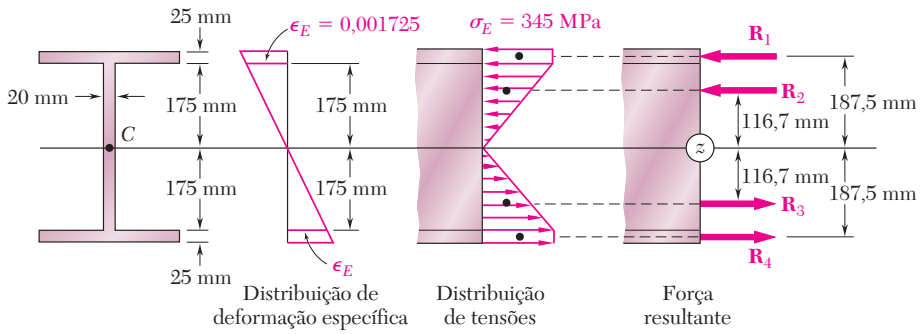
$$c = \epsilon_E \rho_E \qquad 0{,}20\text{ m} = 0{,}001725\rho_E \qquad \rho_E = 116\text{ m} \blacktriangleleft$$



***b.* Mesas totalmente plastificadas.** Quando as mesas já se tornaram totalmente plásticas, as deformações e tensões na seção são de acordo com a figura a seguir.

Substituímos as forças de compressão elementares que atuam na mesa superior e na metade superior da alma por suas resultantes $\mathbf{R}_1$ e $\mathbf{R}_2$, e semelhantemente substituímos as forças de tração por $\mathbf{R}_3$ e $\mathbf{R}_4$.

$$R_1 = R_4 = (345 \times 10^3\text{ kN/m}^2)(0{,}30\text{ m})(0{,}025\text{ m}) = 2588\text{ kN}$$
$$R_2 = R_3 = 1/2(345 \times 10^3\text{ kN/m}^2)(0{,}175\text{ m})(0{,}02\text{ m}) = 604\text{ kN}$$

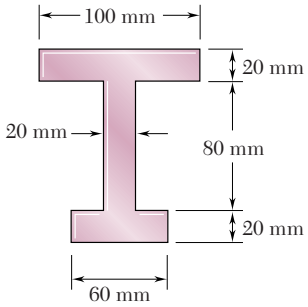


Momento fletor. Somando os momentos de $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$, $\mathbf{R}_3$ e $\mathbf{R}_4$ em relação ao eixo *z*, escrevemos

$$M = 2[R_1(0{,}1875\text{ m}) + R_2(0{,}1167\text{ m})]$$
$$= 2[(2588)(0{,}1875) + (604)(0{,}1167)] \qquad M = 1111\text{ kN} \cdot \text{m} \blacktriangleleft$$

Raio de curvatura. Como $y_E = 0{,}175$ m para esse carregamento, temos, da Equação (4.40)

$$y_E = \epsilon_E \rho \qquad 0{,}175\text{ m} = (0{,}001725)\rho \qquad \rho = 101\text{ m} \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESOLVIDO 4.6

Determine o momento plástico M_p de uma viga com a seção transversal mostrada na figura, quando a viga é flexionada em torno do eixo horizontal. Considere que o material seja elastoplástico com uma tensão de escoamento de 240 MPa.

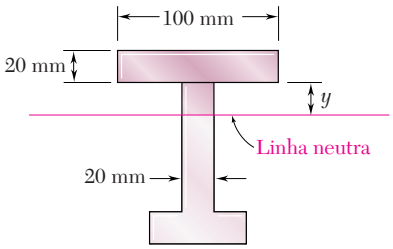
SOLUÇÃO

Linha neutra. Quando a deformação está totalmente no regime plástico, a linha neutra divide a seção transversal em duas partes de áreas iguais. Como a área total é

$$A = (100)(20) + (80)(20) + (60)(20) = 4800 \text{ mm}^2$$

a área localizada acima da linha neutra deve ser de 2400 mm^2. Escrevemos

$$(20)(100) + 20y = 2400 \qquad y = 20 \text{ mm}$$



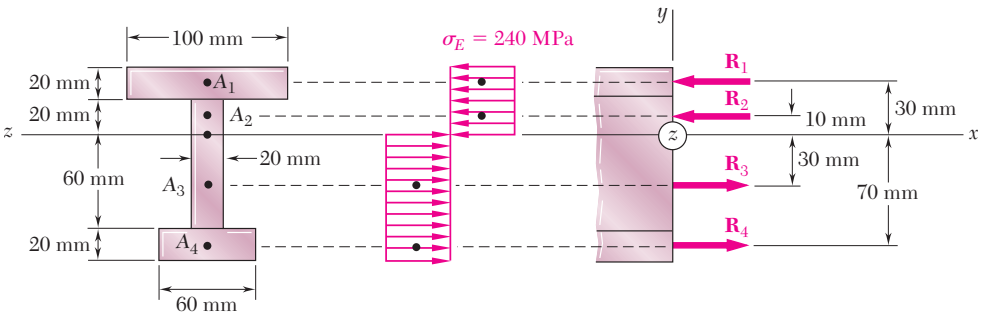
Note que a linha neutra não passa pelo centroide da seção transversal.

Momento plástico. A resultante $\mathbf{R}_i$ das forças elementares que atuam na área parcial A_i é igual a

$$R_i = A_i \sigma_E$$

e passa pelo centroide daquela área. Temos

$$\begin{aligned}
R_1 &= A_1\sigma_E = [(0{,}100 \text{ m})(0{,}020 \text{ m})]\ 240 \text{ MPa} = 480 \text{ kN} \\
R_2 &= A_2\sigma_E = [(0{,}020 \text{ m})(0{,}020 \text{ m})]\ 240 \text{ MPa} = 96 \text{ kN} \\
R_3 &= A_3\sigma_E = [(0{,}020 \text{ m})(0{,}060 \text{ m})]\ 240 \text{ MPa} = 288 \text{ kN} \\
R_4 &= A_4\sigma_E = [(0{,}060 \text{ m})(0{,}020 \text{ m})]\ 240 \text{ MPa} = 288 \text{ kN}
\end{aligned}$$



O momento plástico M_p é obtido somando-se os momentos das forças em relação ao eixo z.

$$\begin{aligned}
M_p &= (0{,}030 \text{ m})R_1 + (0{,}010 \text{ m})R_2 + (0{,}030 \text{ m})R_3 + (0{,}070 \text{ m})R_4 \\
&= (0{,}030 \text{ m})(480 \text{ kN}) + (0{,}010 \text{ m})(96 \text{ kN}) \\
&\quad + (0{,}030 \text{ m})(288 \text{ kN}) + (0{,}070 \text{ m})(288 \text{ kN}) \\
&= 44{,}16 \text{ kN} \cdot \text{m} \qquad M_p = 44{,}2 \text{ kN} \cdot \text{m} \blacktriangleleft
\end{aligned}$$

Nota: Como a seção transversal *não* é simétrica em relação ao eixo z, a soma dos momentos de $\mathbf{R}_1$ e $\mathbf{R}_2$ *não* é igual à soma dos momentos de $\mathbf{R}_3$ e $\mathbf{R}_4$.

PROBLEMA RESOLVIDO 4.7

Para a viga do Problema Resolvido 4.5, determine as tensões residuais e o raio de curvatura permanente depois de ser removido o momento fletor **M** de 1 111 kN · m.

SOLUÇÃO

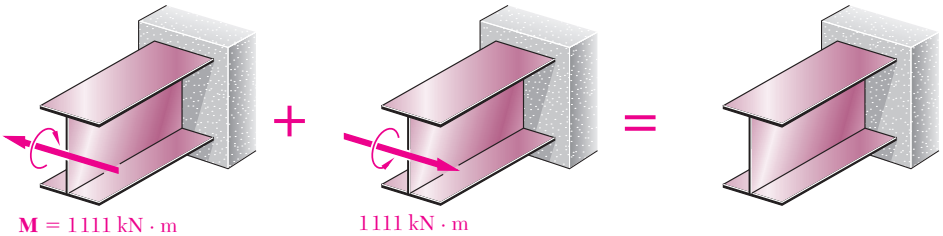
Carregamento. No Problema Resolvido 4.5, foi aplicado um momento $M = 1\,111$ kN · m e foram obtidas as tensões mostradas na Fig. 1.

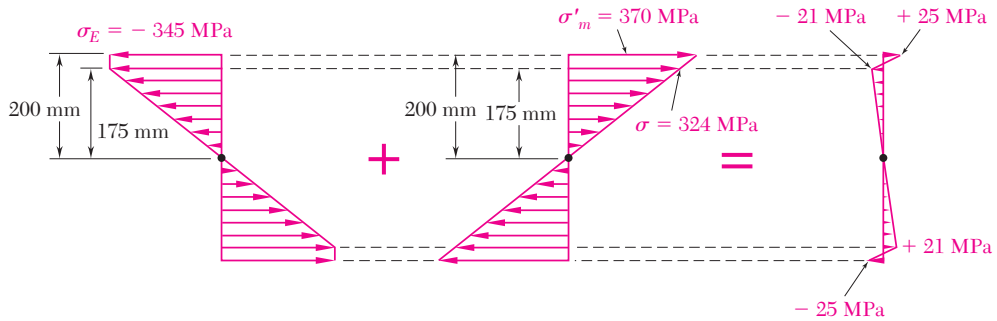
Descarregamento elástico. A viga é descarregada pela aplicação de um momento $M = -1\,111$ kN · m (igual e oposto ao momento aplicado originalmente). Durante esse descarregamento, a ação da viga é totalmente elástica. Lembrando do Problema Resolvido 4.5 que $I = 6{,}0 \times 10^{-4}$ m^4, calculamos a máxima tensão

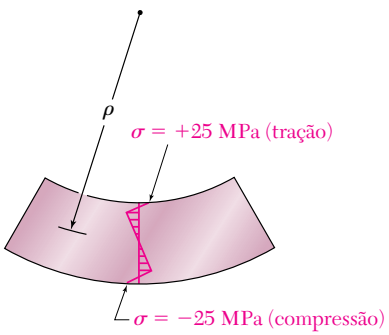
$$\sigma'_m = \frac{Mc}{I} = \frac{(1\,111 \text{ kN} \cdot \text{m})(0{,}20 \text{ m})}{6{,}0 \times 10^{-4} \text{ m}^4} = 370 \text{ MPa}$$

As tensões provocadas pelo descarregamento são mostradas na Fig. 2.

Tensões residuais. Fazemos a superposição das tensões em virtude do carregamento (Fig. 1) e do descarregamento (Fig. 2), e obtemos as tensões residuais na viga (Fig. 3).







Raio de curvatura permanente. Em $y = 0{,}175$ m a tensão residual é $\sigma = -21$ MPa. Como não ocorreu nenhuma deformação plástica nesse ponto, pode ser usada a lei de Hooke e temos $\epsilon_x = \sigma/E$. Recordando a Equação (4.8), escrevemos

$$\rho = -\frac{y}{\epsilon_x} = -\frac{yE}{\sigma} = -\frac{(0{,}175 \text{ m})(200 \times 10^3 \text{ MPa})}{-21 \text{ MPa}} = +1667 \text{ m} \quad \blacktriangleleft$$

Notamos que a tensão residual é de tração na face superior da viga e de compressão na face inferior, apesar de a viga estar com a concavidade para cima.

PROBLEMAS

4.67 A barra prismática mostrada na figura é constituída de aço elastoplástico com $\sigma_E = 300$ MPa e está submetida a um momento **M** paralelo ao eixo x. Determine o valor desse momento para o qual (a) inicia o escoamento e (b) o núcleo elástico da barra com 4 mm de espessura.

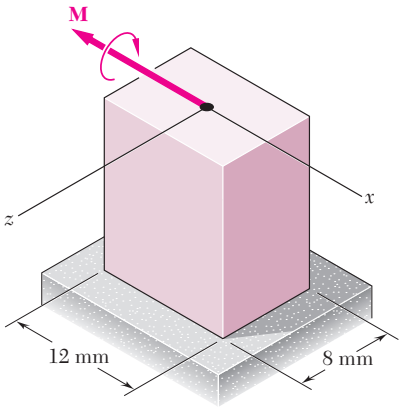


Fig. P4.67

4.68 Resolva o Problema 4.67, considerando que o momento fletor **M** é paralelo ao eixo z.

4.69 Uma barra com a seção transversal mostrada na figura é constituída de aço elastoplástico, com $E = 207$ GPa e $\sigma_E = 331$ MPa. Determine a espessura das zonas plásticas nas porções superior e inferior da barra quando (a) $M = 28{,}3$ N · m e (b) $M = 33{,}9$ N · m.

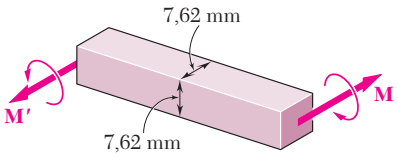


Fig. P4.69

4.70 Para a barra de aço do Problema 4.69, determine o momento fletor M para o qual (a) inicia o escoamento e (b) a região plástica nas partes superior e inferior da barra tem uma espessura igual a 29 mm.

4.71 A barra prismática ao lado, feita de aço elastoplástico, com $E = 200$ GPa e $\sigma_E = 248{,}2$ MPa, está submetida a um conjugado de 152,5 N · m paralelo ao eixo z. Determine (a) a espessura do núcleo elástico e (b) o raio de curvatura da barra.

4.72 Resolva o Problema 4.71, considerando que o conjugado de 152,5 N · m é paralelo ao eixo y.

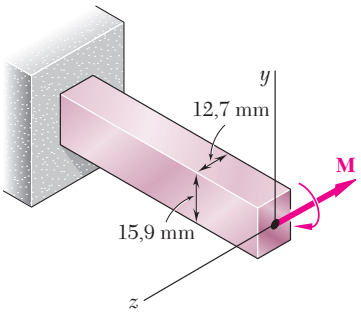


Fig. P4.71

4.73 e 4.74 Uma viga com a seção transversal mostrada na figura é constituída de um aço elastoplástico, com $E = 200$ GPa e $\sigma_E = 240$ MPa. Para flexão em torno do eixo z, determine o momento fletor no qual (*a*) inicia-se o escoamento e (*b*) as zonas plásticas nas partes superior e inferior da barra têm 30 mm de espessura.

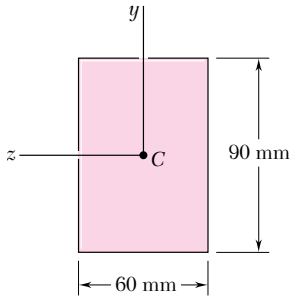


Fig. P4.73

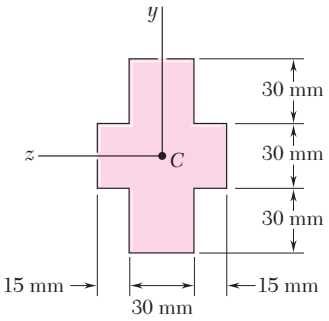


Fig. P4.74

4.75 e 4.76 Uma viga com a seção transversal mostrada na figura é constituída de um aço elastoplástico, com $E = 200$ GPa e $\sigma_E = 290$ MPa. Para flexão em torno do eixo z, determine o momento fletor e o raio de curvatura no qual (*a*) inicia-se o escoamento e (*b*) as zonas plásticas nas partes superior e inferior da barra têm 25,4 mm de espessura.

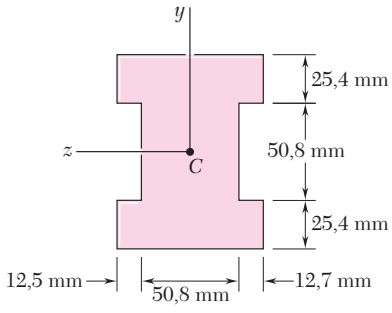


Fig. P4.75

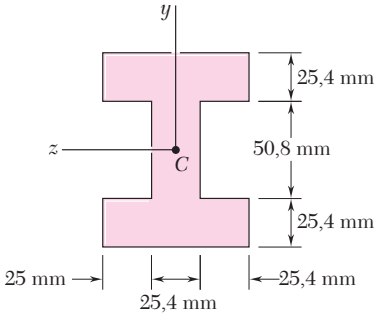


Fig. P4.76

4.77 até 4.80 Para a viga indicada, determine (*a*) o momento plástico M_p e (*b*) o fator de forma da seção transversal.

4.77 Viga do Problema 4.73.
4.78 Viga do Problema 4.74.
4.79 Viga do Problema 4.75.
4.80 Viga do Problema 4.76.

4.81 e 4.82 Determine o momento plástico M_p de uma viga de aço com a seção transversal mostrada na figura, considerando que o aço seja elastoplástico com uma tensão de escoamento de 240 MPa.

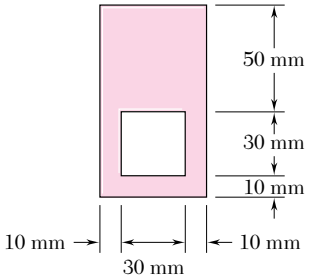


Fig. *P4.81*

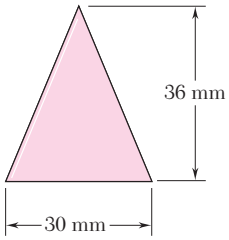


Fig. P4.82

4.83 Um tubo de parede grossa com a seção transversal mostrada na figura é feito de aço elastoplástico com uma tensão de escoamento σ_E. Deduza uma expressão para o momento plástico M_p do tubo em termos de c_1, c_2 e σ_E.

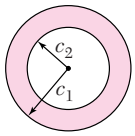


Fig. *P4.83* e P4.84

4.84 Determine o momento plástico M_p de um tubo de parede grossa com a seção transversal mostrada na figura, sabendo que $c_1 = 60$ mm, $c_2 = 40$ mm e $\sigma_E = 240$ MPa.

4.85 Determine o momento plástico M_p da seção transversal mostrada na figura, considerando que o aço é elastoplástico com uma tensão de escoamento de 331 MPa.

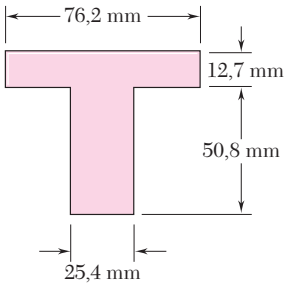


Fig. P4.85

4.86 Determine o momento plástico M_p da seção transversal mostrada na figura, considerando que o aço é elastoplástico com uma tensão de escoamento de 248 MPa.

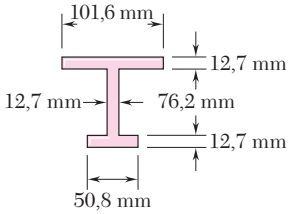


Fig. P4.86

4.87 e 4.88 Para a viga indicada, um momento igual ao momento plástico M_p é aplicado e, em seguida, removido. Usando uma tensão de escoamento de 240 MPa, determine a tensão residual em $y = 45$ mm.

4.87 Viga do Problema 4.73.

4.88 Viga do Problema 4.74.

4.89 e 4.90 Para a viga indicada, um momento igual ao momento plástico M_p é aplicado e em seguida removido. Usando uma tensão de escoamento de 290 MPa, determine a tensão residual em (*a*) $y = 25{,}4$ mm e (*b*) $y = 50{,}8$ mm.

4.89 Viga do Problema 4.75.

4.90 Viga do Problema 4.76.

4.91 Um momento fletor é aplicado à viga do Problema 4.73, provocando o aparecimento de zonas plásticas de 30 mm de espessura nas partes superior e inferior da viga. Após o momento ser removido, determine (*a*) a tensão residual em $y = 45$ mm, (*b*) os pontos onde a tensão residual é zero e (c) o raio de curvatura correspondente à deformação permanente da viga.

4.92 Um momento fletor é aplicado à viga do Problema 4.76, provocando o aparecimento de zonas plásticas de 50,8 mm de espessura nas partes superior e inferior da viga. Após o momento ser removido, determine (*a*) a tensão residual em $y = 50{,}8$ mm, (*b*) os pontos onde a tensão residual é zero e (*c*) o raio de curvatura correspondente à deformação permanente da viga.

***4.93** Uma barra retangular reta e livre de tensões é flexionada formando um arco de circunferência de raio ρ por dois momentos M. Após os momentos serem removidos, observa-se que o raio de curvatura da barra é ρ_R. Chamando de ρ_E o raio de curvatura da barra no início do escoamento, mostre que o raio de curvatura satisfaz a seguinte relação:

$$\frac{1}{\rho_R} = \frac{1}{\rho}\left\{1 - \frac{3}{2}\frac{\rho}{\rho_E}\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{\rho}{\rho_E}\right)^2\right]\right\}$$

4.94 Uma barra de seção transversal retangular cheia é constituída de um material elastoplástico. Chamando de M_E e ρ_E, respectivamente, o momento fletor e o raio de curvatura no início do escoamento, determine (*a*) o raio de curvatura quando é aplicado à barra um momento fletor $M = 1{,}25\,M_E$ e (*b*) o raio de curvatura após o momento ser removido. Verifique os resultados obtidos usando a relação determinada no Problema 4.93.

4.95 A barra prismática *AB* é feita de um aço elastoplástico para o qual $E = 200$ GPa. Sabendo que o raio de curvatura da barra é de 2,4 m quando é aplicado um momento fletor $M = 350$ N · m conforme mostra a figura, determine (*a*) a tensão de escoamento do aço e (*b*) a espessura do núcleo elástico da barra.

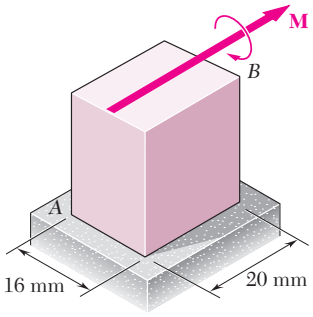


Fig. P4.95

4.96 A barra prismática *AB* é constituída de uma liga de alumínio para a qual a curva de tensão-deformação específica em tração é mostrada na figura. Considerando que a curva de σ em função de ϵ é a mesma em compressão e em tração, determine (*a*) o raio de curvatura da barra quando a tensão máxima é de 250 MPa e (*b*) o valor correspondente do momento fletor. (*Sugestão*: Para a parte *b*, construa uma curva de σ em função de *y* e use um método aproximado de integração.)

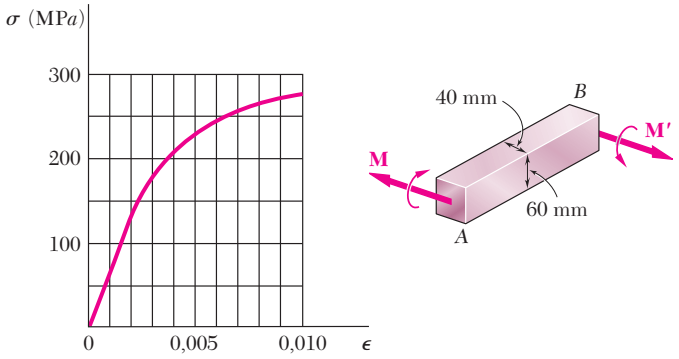


Fig. *P4.96*

4.97 A barra prismática *AB* é feita de uma liga de bronze para a qual a curva tensão-deformação específica em tração é mostrada na figura. Considerando que a curva de σ em função de ϵ é a mesma em compressão e em tração, determine (*a*) a tensão máxima na barra quando o raio de curvatura da barra for de 2 540 mm e (*b*) o valor correspondente do momento fletor. (Ver a sugestão apresentada no Problema 4.96.)

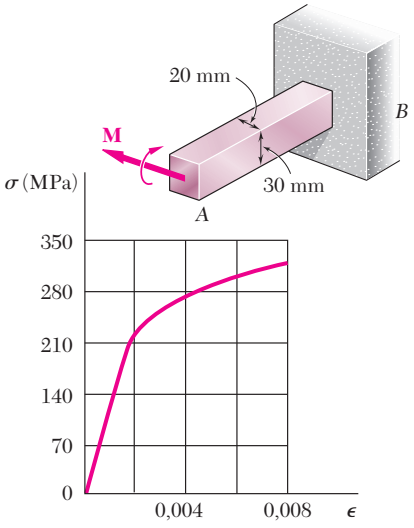


Fig. P4.97

4.98 Uma barra prismática de seção transversal retangular é feita por uma liga para a qual a curva tensão-deformação específica pode ser representada pela relação $\epsilon = k\sigma^n$ para $\sigma > 0$ e $\epsilon = -|k\sigma^n|$ para $\sigma < 0$. Se um momento fletor **M** é aplicado à barra, mostre que a tensão máxima é

$$\sigma_m = \frac{1 + 2n}{3n}\frac{Mc}{I}$$

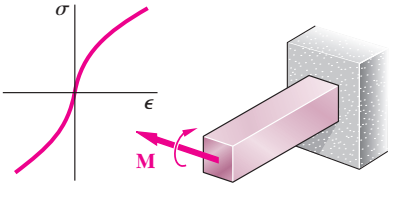


Fig. P4.98

4.12. Carregamento axial excêntrico em um plano de simetria

Vimos na Seção 1.5 que a distribuição de tensões na seção transversal de uma viga sob carregamento axial pode ser considerada uniforme somente quando a linha de ação das cargas **P** e **P′** passa pelo centroide da seção transversal. Dizemos que um carregamento desse tipo é *centrado*. Vamos agora analisar a distribuição de tensões quando a linha de ação das forças *não* passa pelo centroide da seção transversal, isto é, quando o carregamento é *excêntrico*.

As Figs. 4.46 e 4.47 mostram dois exemplos de carregamento excêntrico. No caso do poste de iluminação, o peso da lâmpada provoca um carregamento excêntrico. Da mesma forma, as forças verticais que atuam na prensa provocam um carregamento excêntrico na coluna de trás da prensa.

Fig. 4.46

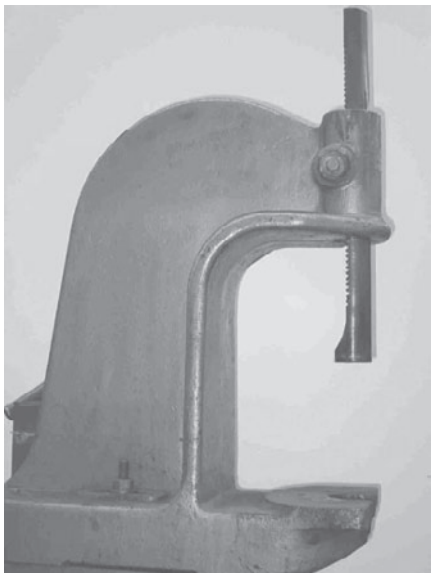


Fig. 4.47

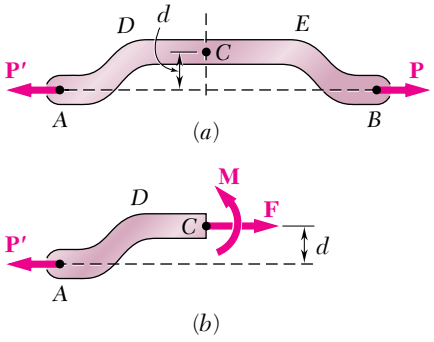


Fig. 4.48

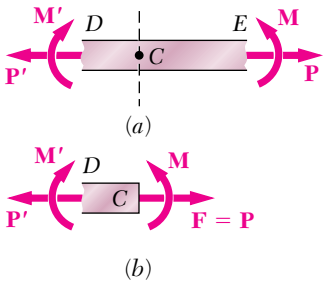


Fig. 4.49

Nessa seção, nossa análise estará limitada a barras que possuem um plano de simetria, e vamos considerar que as forças são aplicadas no plano de simetria da barra (Fig. 4.48*a*). Os esforços internos que atuam sobre uma seção transversal podem ser representados por uma força **F** aplicada no centroide *C* da seção e um momento fletor **M** atuando no plano de simetria da barra (Fig. 4.48*b*). As condições de equilíbrio do diagrama de corpo livre *AC* requerem que a força **F** seja igual e oposta a **P′**, e que o momento fletor **M** seja igual e oposto ao momento de **P′** em relação a *C*. Chamando de *d* a distância do centroide *C* até a linha de ação *AB* das forças **P** e **P′**, temos

$$F = P \qquad \text{e} \qquad M = Pd \tag{4.49}$$

Observamos agora que os esforços internos na seção poderiam ter sido representados pela mesma força e momento, se a parte reta *DE* da barra *AB* tivesse sido destacada de *AB* e submetida simultaneamente às forças centradas **P** e **P′** e aos momentos fletores **M** e **M′** (Fig. 4.49). Assim, a distribuição de tensões por causa do carregamento excêntrico original poderia ser obtida pela superposição da distribuição uniforme de tensão correspondente às forças centradas **P** e **P′**

e da distribuição linear correspondente aos momentos fletores **M** e **M′** (Fig. 4.50). Escrevemos então

$$\sigma_x = (\sigma_x)_{\text{centrada}} + (\sigma_x)_{\text{flexão}}$$

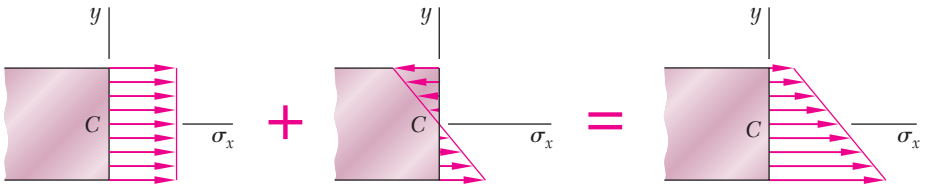


Fig. 4.50

ou, usando as Equações (1.5) e (4.16):

$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{My}{I} \tag{4.50}$$

em que A é a área da seção transversal e I seu momento de inércia em relação ao eixo que passa pelo centroide da seção transversal, e na qual y é medido a partir desse eixo da seção transversal. A relação obtida mostra que a distribuição de tensões ao longo da seção é *linear mas não uniforme*. Dependendo da geometria da seção transversal e da excentricidade da força, as tensões combinadas podem ter todas elas o mesmo sinal, como mostra a Fig. 4.50, ou algumas podem ser positivas e outras negativas, como mostra a Fig. 4.51. Nesse último caso, haverá uma linha na seção ao longo da qual $\sigma_x = 0$. Essa representa a *linha neutra* da seção. Notamos que a linha neutra *não* coincide com o eixo que passa pelo centroide da seção, pois $\sigma_x \neq 0$ para $y = 0$.

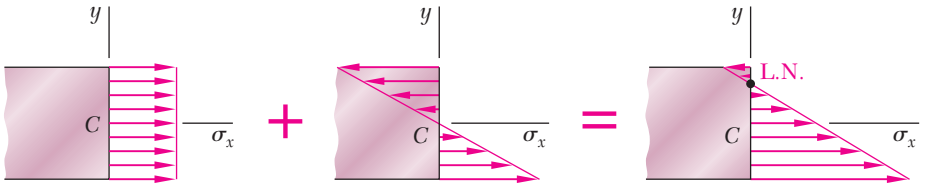


Fig. 4.51

Os resultados obtidos são válidos somente quando satisfeitas as condições de aplicabilidade do princípio da superposição (Seção 2.12) e do princípio de Saint-Venant (Seção 2.17). Isso significa que as tensões envolvidas não devem ultrapassar o limite de proporcionalidade do material, que as deformações provocadas pela flexão não devem afetar de forma considerável a distância d na Fig. 4.48*a*, e que a seção transversal onde as tensões são calculadas não deve estar muito perto dos pontos D ou E na mesma figura. O primeiro desses requisitos mostra claramente que o método da superposição não pode ser aplicado às deformações plásticas.

EXEMPLO 4.7

Uma corrente de elos abertos é obtida dobrando-se barras de aço de baixo teor de carbono, de 12 mm de diâmetro, na forma mostrada (Fig. 4.52). Sabendo que a corrente suporta uma força de 750 N, determine (*a*) as tensões máximas de tração e compressão na parte reta de um elo e (*b*) a distância entre o eixo que passa pelo centroide e a linha neutra de uma seção transversal.

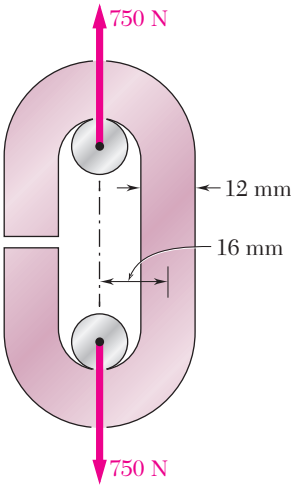


Fig. 4.52

(a) Tensões de tração e de compressão máximas.

Os esforços internos na seção transversal são equivalentes a uma força centrada **P** e a um momento fletor **M** (Fig. 4.53) de intensidades

$$P = 750 \text{ N}$$

$$M = Pd = (750 \text{ N})(0{,}016 \text{ m}) = 12 \text{ N} \cdot \text{m}$$

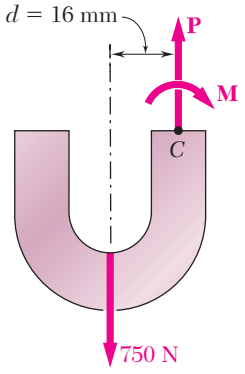


Fig. 4.53

As distribuições de tensão correspondentes são mostradas nas partes *a* e *b* da Fig. 4.54. A distribuição provocada pela força centrada **P** é uniforme e igual a $\sigma_0 = P/A$. Temos

$$A = \pi c^2 = \pi(6 \times 10^{-3} \text{ m})^2 = 1{,}131 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$\sigma_0 = \frac{P}{A} = \frac{750 \text{ N}}{1{,}131 \times 10^{-4} \text{ m}^2} = 6{,}63 \text{ MPa}$$

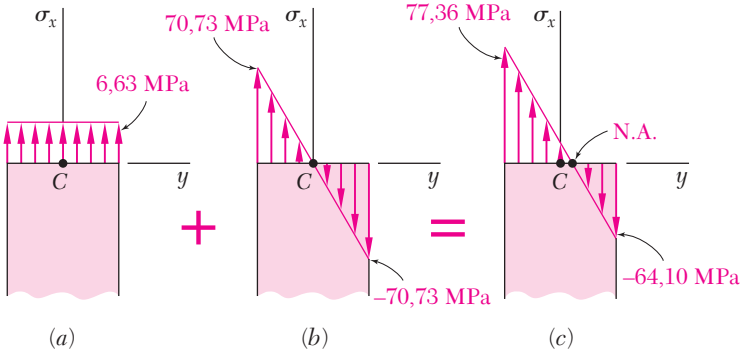


Fig. 4.54

A distribuição provocada pelo momento fletor **M** é linear com uma tensão máxima $\sigma_m = Mc/I$. Escrevemos então

$$I = \tfrac{1}{4}\pi c^4 = \tfrac{1}{4}\pi(6 \times 10^{-3} \text{ m})^4 = 1{,}018 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} = \frac{(12 \text{ N} \cdot \text{m})(6 \times 10^{-3} \text{ m})}{1{,}018 \times 10^{-9} \text{ m}^4} = 70{,}73 \text{ MPa}$$

Superpondo as duas distribuições, obtemos a distribuição de tensões correspondente para o carregamento excêntrico dado (Fig. 4.54*c*). As tensões máximas de tração e compressão na seção resultam, respectivamente,

$$\sigma_t = \sigma_0 + \sigma_m = 6{,}63 + 70{,}73 = 77{,}36 \text{ MPa}$$

$$\sigma_c = \sigma_0 - \sigma_m = 6{,}63 - 70{,}73 = -64{,}10 \text{ MPa}$$

(b) Distância entre o eixo que passa pelo centroide e a linha neutra.

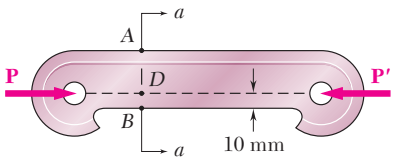
A distância y_0 do eixo que passa pelo centroide para a linha neutra da seção é obtida fazendo-se $\sigma_x = 0$ na Equação (4.50) e resolvendo para y_0:

$$0 = \frac{P}{A} - \frac{My_0}{I}$$

$$y_0 = \left(\frac{P}{A}\right)\left(\frac{I}{M}\right) = (6{,}63 \times 10^6 \text{ N/m}^2)\frac{1{,}018 \times 10^{-9} \text{ m}^4}{12 \text{ N} \cdot \text{m}}$$

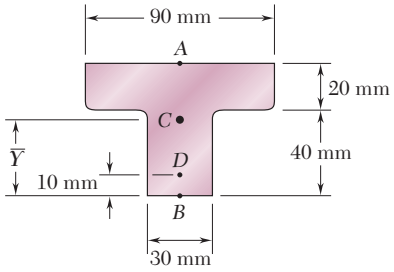
$$y_0 = 0{,}56 \text{ mm}$$

PROBLEMA RESOLVIDO 4.8



Sabendo que para a peça de ferro fundido mostrada as tensões admissíveis são 30 MPa na tração e 120 MPa na compressão, determine a maior força **P** que pode ser aplicada à peça. (*Sugestão*: A seção transversal em forma de T do elo já foi considerada no Problema Resolvido 4.2.)

SOLUÇÃO



Seção *a*–*a*

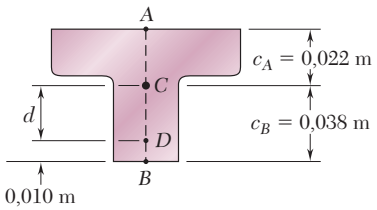
Propriedades da seção transversal. Do Problema Resolvido 4.2, temos

$$A = 3000 \text{ mm}^2 = 3 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \qquad \bar{Y} = 38 \text{ mm} = 0{,}038 \text{ m}$$
$$I = 868 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

Agora escrevemos: $d = (0{,}038 \text{ m}) = (0{,}010 \text{ m}) = 0{,}028 \text{ m}$

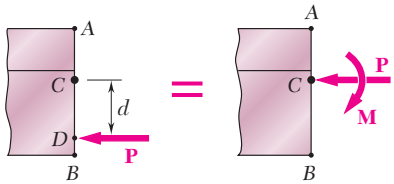
Força e momento em *C*. Substituímos **P** por um sistema equivalente força e momento no centroide *C*.

$$P = P \qquad M = P(d) = P(0{,}028 \text{ m}) = 0{,}028\,P$$



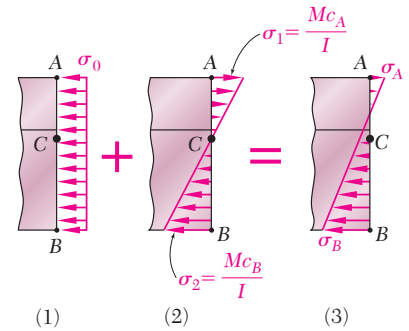
A força **P** atuando no centroide provoca uma distribuição de tensão uniforme (Fig. 1). O momento fletor **M** provoca uma distribuição de tensão linear (Fig. 2).

$$\sigma_0 = \frac{P}{A} = \frac{P}{3 \times 10^{-3}} = 333P \qquad \text{(Compressão)}$$
$$\sigma_1 = \frac{Mc_A}{I} = \frac{(0{,}028P)(0{,}022)}{868 \times 10^{-9}} = 710P \qquad \text{(Tração)}$$
$$\sigma_2 = \frac{Mc_B}{I} = \frac{(0{,}028P)(0{,}038)}{868 \times 10^{-9}} = 1226P \qquad \text{(Compressão)}$$



Superposição. A distribuição total de tensão (Fig. 3) é encontrada superpondo-se as distribuições de tensão provocadas pela força centrada **P** e pelo momento **M**. Como a tração é positiva e a compressão é negativa, temos

$$\sigma_A = -\frac{P}{A} + \frac{Mc_A}{I} = -333P + 710P = +377P \qquad \text{(Tração)}$$
$$\sigma_B = -\frac{P}{A} - \frac{Mc_B}{I} = -333P - 1226P = -1559P \qquad \text{(Compressão)}$$



Maior força admissível. A intensidade de **P** para a qual a tensão de tração no ponto *A* é igual a tensão de tração admissível de 30 MPa é encontrada escrevendo-se

$$\sigma_A = 377P = 30 \text{ MPa} \qquad P = 79{,}6 \text{ kN} \triangleleft$$

Determinamos também a intensidade de **P** para a qual a tensão em *B* é igual a tensão de compressão admissível de 120 MPa.

$$\sigma_B = -1559P = -120 \text{ MPa} \qquad P = 77{,}0 \text{ kN} \triangleleft$$

A intensidade da maior força **P** que pode ser aplicada sem ultrapassar nenhuma das tensões admissíveis é o menor dos dois valores que encontramos

$$P = 77{,}0 \text{ kN} \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

4.99 Determine a tensão nos pontos A e B (a) para o carregamento mostrado, (b) se as forças de 66,7 kN forem aplicadas aos pontos 1 e 2 somente.

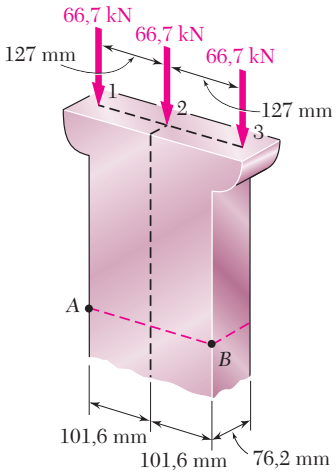


Fig. P4.99 e P4.100

4.100 Determine a tensão nos pontos A e B (a) para o carregamento mostrado, (b) se as forças de 66,7 kN aplicadas aos pontos 2 e 3 forem removidas.

4.101 Duas forças **P** podem ser aplicadas separadamente ou ao mesmo tempo a uma placa que está soldada a uma barra circular cheia de raio r. Determine a maior tensão de compressão na barra circular, (a) quando ambas as forças são aplicadas e (b) quando somente uma das forças é aplicado.

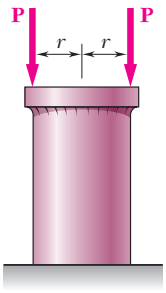


Fig. P4.101

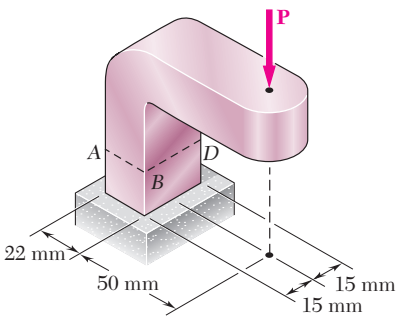


Fig. *P4.102*

4.102 Sabendo que a força P vertical tem intensidade de 2 kN, determine a tensão no (a) ponto A e (b) ponto B.

4.103 A parte vertical da prensa mostrada na figura consiste em um tubo retangular com espessura de parede $t = 10$ mm. Sabendo que a prensa foi usada para prender blocos de madeira que estavam sendo colados, com uma força $P = 20$ kN, determine a tensão no (*a*) ponto *A* e (*b*) ponto *B*.

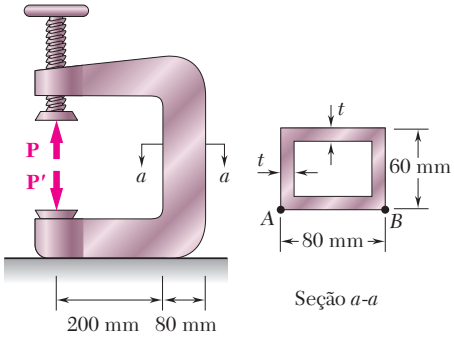


Fig. P4.103

4.104 Resolva o Problema 4.103 considerando que $t = 8$ mm.

4.105 Partes de 12,7 × 12,7 mm de uma barra de seção quadrada foram dobradas para formar os dois componentes de máquina abaixo. Sabendo que a tensão admissível é de 103,4 MPa, determine a máxima carga que pode ser aplicada a cada componente.

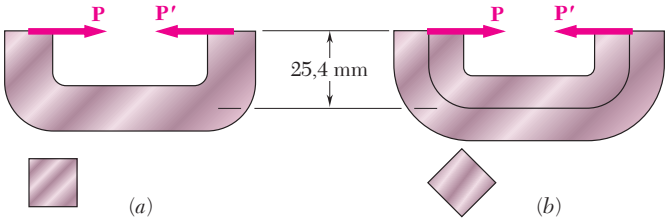


Fig. P4.105

4.106 As quatro forças mostradas na figura abaixo são aplicadas a uma placa rígida suportada por um poste de aço cheio de raio *a*. Sabendo que $P = 100$ kN e $a = 40$ mm, determine a tensão máxima no poste quando (*a*) a força em *D* é removida e quando (*b*) as forças em *C* e *D* também são removidas.

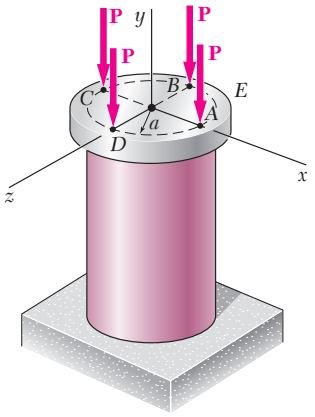


Fig. P4.106

4.107 Uma operação de fresagem foi usada para remover parte de uma barra cheia de seção transversal quadrada. Sabendo que $a = 30$ mm, $d = 20$ mm e $\sigma_{adm} = 60$ MPa, determine a intensidade P das maiores forças que podem ser aplicadas com segurança aos centros das extremidades da barra.

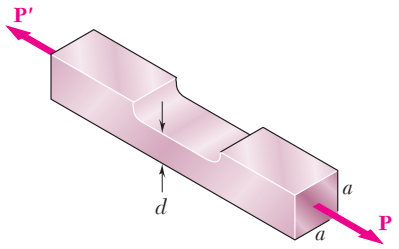


Fig. P4.107 e P4.108

4.108 Uma operação de fresagem foi usada para remover parte de uma barra cheia de seção transversal quadrada. Forças de intensidade $P = 18$ kN são aplicadas aos centros das extremidades da barra. Sabendo que $a = 30$ mm e $\sigma_{adm} = 135$ MPa, determine a menor dimensão d admissível para a parte fresada da barra.

4.109 Deve ser feito um desvio h em uma barra circular cheia, de diâmetro d. Sabendo que a tensão máxima após criar esse desvio não deve exceder 5 vezes a tensão na barra quando estiver reta, determine o maior desvio a ser feito.

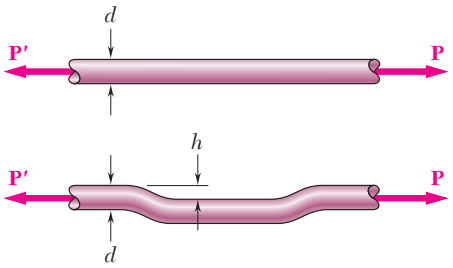


Fig. *P4.109* e P4.110

4.110 Deve ser feito um desvio h em um tubo metálico de 19,05 mm de diâmetro externo e 2,03 mm de espessura na parede. Sabendo que a tensão máxima após criar o desvio não deve exceder 4 vezes a tensão no tubo quando estiver reta, determine o maior desvio a ser feito.

4.111 Sabendo que a tensão admissível na seção *ABD* é de 69 MPa, determine a máxima intensidade da força horizontal **P** a ser aplicada ao suporte mostrado.

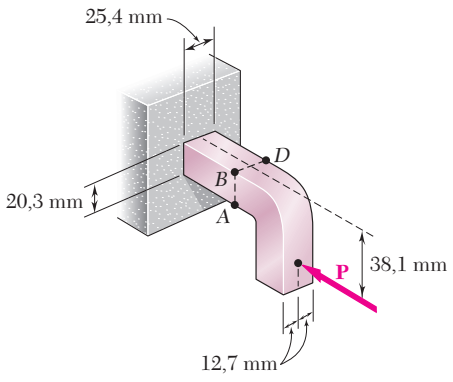


Fig. *P4.111*

4.112 Uma coluna curta é feita pregando-se quatro pranchas de 25,4 × 101,6 mm a um tarugo de madeira com 101,6 × 101,6 mm. Determine a maior tensão de compressão desenvolvida na coluna pela aplicação de uma carga de 71,2 kN no centro da seção no topo dessa coluna se (*a*) a coluna for como o que foi descrito, (*b*) a prancha 1 for removida, (*c*) as pranchas 1 e 2 forem removidas, (*d*) as pranchas 1, 2 e 3 forem removidas e se (*e*) todas as pranchas forem removidas.

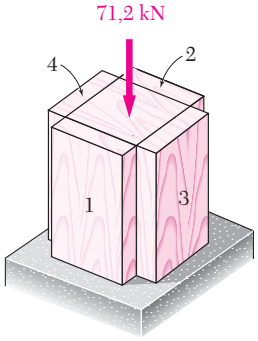


Fig. *P4.112*

4.113 Sabendo que o grampo mostrado na figura foi usado para prensar pranchas de madeira que estão sendo coladas até $P = 400$ N, determine na seção *a-a* (*a*) a tensão no ponto *A*, (*b*) a tensão no ponto *D* e (*c*) a localização da linha neutra.

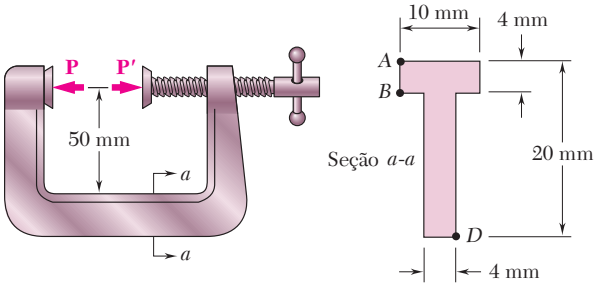


Fig. P4.113

4.114 Três placas de aço, cada uma com uma seção transversal de 25 mm × 150 mm, são soldadas juntas para formar uma coluna curta em forma de H. Posteriormente, por razões arquitetônicas, foi removida uma tira de 25 mm de cada lado de uma das placas. Sabendo que a força permanece centrada em relação à seção transversal original, e que a tensão admissível é de 100 MPa, determine a maior força **P** (*a*) que poderia ser aplicada à coluna original e (*b*) que pode ser aplicada à coluna modificada.

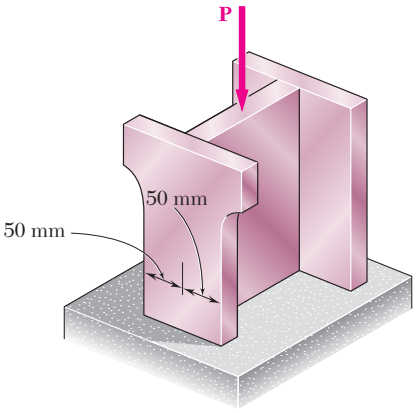


Fig. P4.114

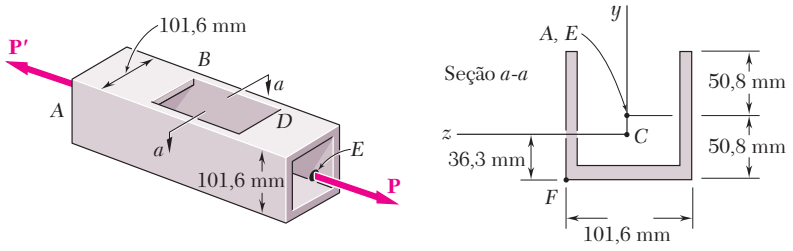
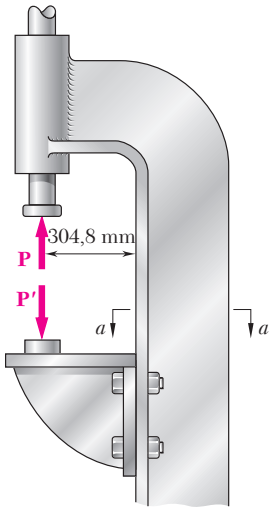


Fig. *P4.115*

4.115 Para possibilitar o acesso ao interior de um tubo quadrado vazado de 6,35 mm de espessura na parede, a parte *BD* de um lado do tubo foi removida. Sabendo que o carregamento do tubo é equivalente a duas forças iguais e opostas de 66,7 kN atuando nos centros geométricos *A* e *E* das extremidades do tubo, determine (*a*) a tensão máxima na seção *a-a*, (*b*) a tensão no ponto *F*. *Dados*: o centroide da seção transversal está em *C* e $I_z = 2{,}0 \times 10^6$ mm^4.

4.116 Sabendo que a tensão admissível na seção *a-a* da prensa hidráulica mostrada na figura é de 41,4 MPa em tração e de 82,7 MPa em compressão, determine a maior força **P** que pode ser aplicada pela prensa.



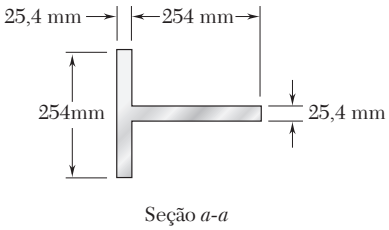


Fig. P4.106

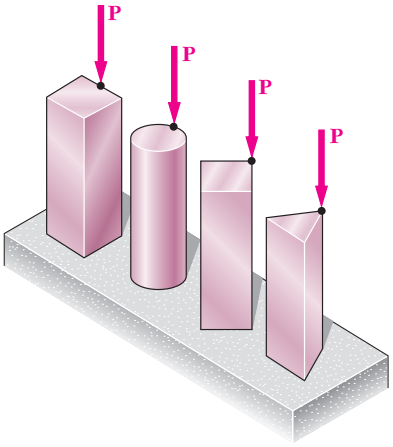
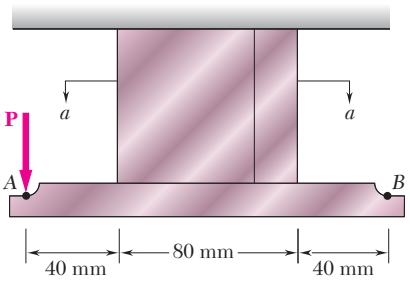


Fig. P4.117

4.117 As quatro barras mostradas na figura têm a mesma área de seção transversal. Para os carregamentos dados, mostre que (*a*) as tensões de compressão máximas estão na relação 4:5:7:9 e (*b*) as tensões de tração máximas estão na relação 2:3:5:3. (*Sugestão*: a seção transversal de uma barra triangular é um triângulo equilátero.)

4.118 Sabendo que a tensão admissível é de 150 MPa na seção *a-a* do pendural mostrado na figura, determine (*a*) a maior força vertical **P** que pode ser aplicada no ponto *A* e (*b*) a localização correspondente da linha neutra da seção *a-a*.



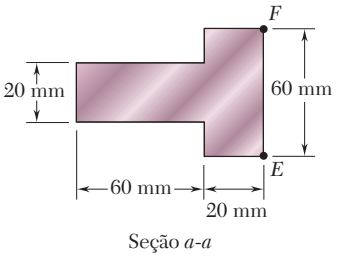


Fig. P4.118

4.119 Resolva o Problema 4.118 considerando que a força vertical **P** é aplicada no ponto *B*.

4.120 A barra de aço em forma de C é usada como um dinamômetro para determinar a intensidade P das forças mostradas. Sabendo que a seção transversal da barra é um quadrado de 40,6 mm de lado e que a deformação na borda interna foi medida e encontrou-se o valor de 450 μ, determine a intensidade P das forças. Use $E = 200$ GPa.

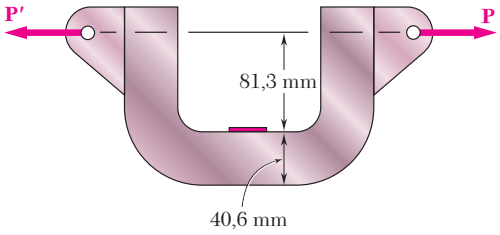


Fig. P4.120

4.121 Uma coluna curta de aço laminado suporta uma placa rígida na qual são aplicadas as duas cargas **P** e **Q**, conforme mostra a figura. As deformações em dois pontos A e B na linha de centro das faces externas das mesas foram medidas e obteve-se os valores:

$$\epsilon_A = -400 \times 10^{-6} \text{ mm/mm} \qquad \epsilon_B = -300 \times 10^{-6} \text{ mm/mm}$$

Sabendo que $E = 200$ GPa, determine a intensidade de cada força.

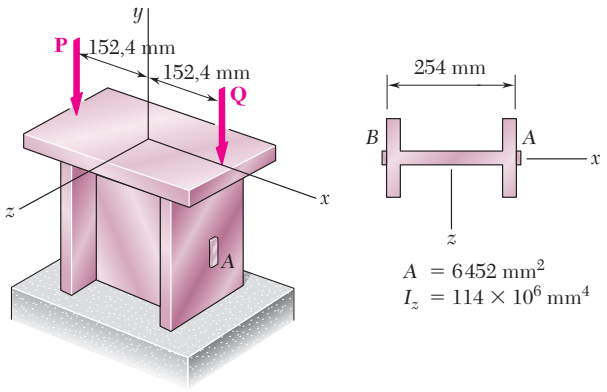


Fig. P4.121

4.122 Uma força excêntrica **P** é aplicada a uma barra de aço com seção transversal de 25 × 90 mm, conforme mostra a figura. As deformações em A e B foram medidas e encontrou-se

$$\epsilon_A = +350\,\mu \qquad \epsilon_B = -70\,\mu$$

Sabendo que $E = 200$ GPa, determine (*a*) a distância d e (*b*) a intensidade da força **P**.

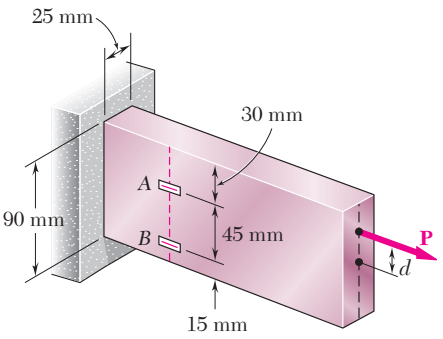


Fig. P4.122

4.123 Resolva o Problema 4.122 considerando que as deformações medidas são

$$\epsilon_A = +600\,\mu \qquad \epsilon_B = +420\,\mu$$

4.124 A força axial excêntrica **P** atua no ponto D, que deve estar localizado 25 mm abaixo da superfície superior da barra de aço mostrada. Para $P = 60$ kN, determine (a) a altura d da barra para a qual a tensão de tração no ponto A é máxima e (b) a tensão correspondente no ponto A.

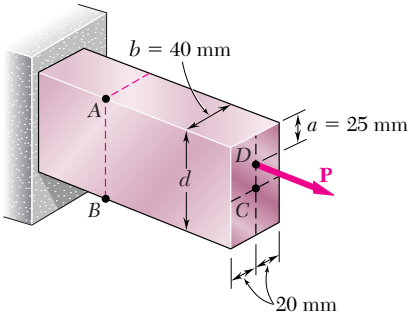


Fig. *P4.124*

4.125 Para a barra e o carregamento do Problema 4.124, determine (a) a altura d da barra para a qual a tensão de compressão no ponto B é máxima e (b) a tensão correspondente no ponto B.

4.13. Flexão assimétrica

Nossa análise de flexão pura esteve limitada até agora a barras que possuem pelo menos um plano de simetria e submetidas a momentos fletores atuando naquele plano. Por causa da simetria dessas barras e de seus carregamentos, concluímos que elas permaneceriam simétricas em relação ao plano dos momentos e, portanto, flexionadas naquele plano (Seção 4.3). Isso está ilustrado na Fig. 4.55: a parte a mostra a seção transversal de uma barra que possui dois planos de simetria, um vertical e um horizontal, e a parte b mostra a seção transversal de uma barra com um único plano de simetria vertical. Em ambos os casos o momento fletor que atua na seção age no plano vertical de simetria da barra e é representado pelo vetor momento **M** horizontal, e em ambos os casos a linha neutra da seção transversal coincide com a direção do vetor momento.

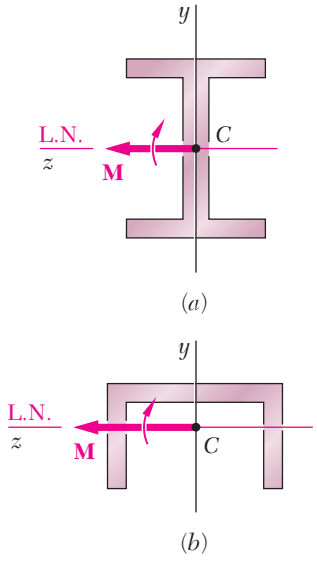


Fig. 4.55

Vamos agora considerar situações nas quais os momentos fletores *não* atuam em um plano de simetria da barra, ou porque eles atuam em um plano diferente ou porque a barra não possui nenhum plano de simetria. Em tais situações, não podemos considerar que a barra será flexionada no plano dos momentos. Isso está ilustrado na Fig. 4.56. Em cada parte da figura, conside-

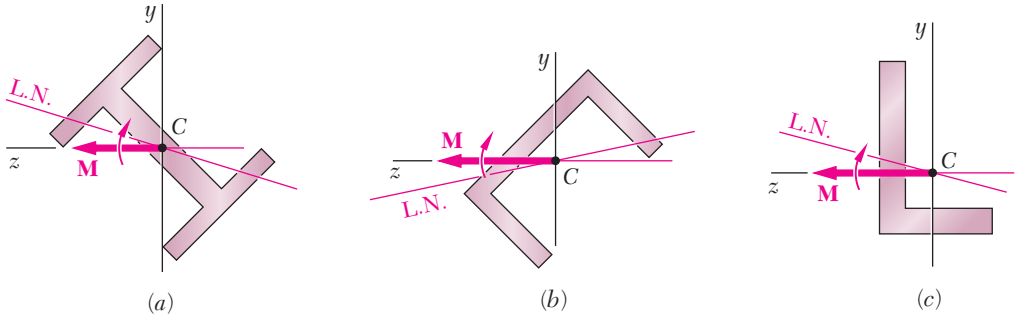


Fig. 4.56

ramos novamente que o momento fletor que atua na seção age em um plano vertical e foi representado por um vetor momento **M** horizontal. No entanto, como o plano vertical não é um plano de simetria, *não podemos esperar que a barra venha a flexionar naquele plano, ou que a linha neutra da seção coincida com a direção do momento*.

Nossa proposta é determinar as condições sob as quais a linha neutra de uma seção transversal de forma arbitrária coincide com a direção do momento **M** representando os esforços que atuam naquela seção. Uma seção assim é mostrada na Fig. 4.57, e consideramos que tanto o vetor momento **M** quanto a linha neutra estão direcionados ao longo do eixo z. Lembramos da Seção 4.2

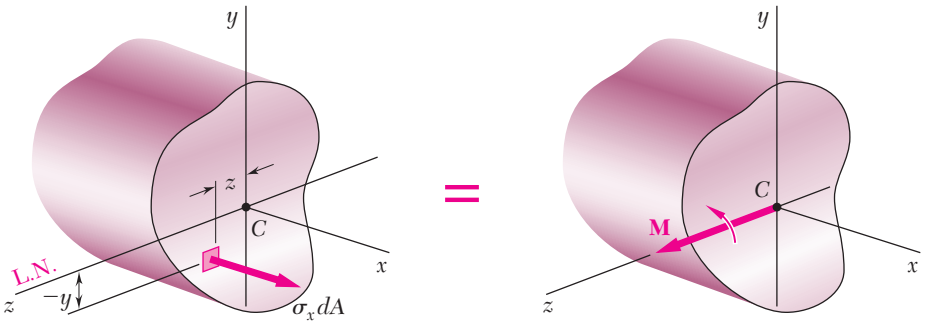


Fig. 4.57

que, se expressarmos que as forças internas elementares $\sigma_x\, dA$ formam um sistema equivalente ao momento **M**, obtemos

componentes x: $$\int \sigma_x dA = 0 \qquad (4.1)$$

momentos em relação ao eixo y: $$\int z\sigma_x dA = 0 \qquad (4.2)$$

momentos em relação ao eixo z: $$\int (-y\sigma_x dA) = M \qquad (4.3)$$

Conforme já vimos, quando todas as tensões estão dentro do limite de proporcionalidade, a primeira dessas equações leva à condição de que a linha neutra deve ser um eixo que passa pelo centroide, e a última equação conduz à relação fundamental $\sigma_x = -M_y/I$. Como supomos na Seção 4.2 que a seção transversal era simétrica com relação ao eixo y, a Equação (4.2) não foi considerada naquele momento. Agora que estamos considerando uma seção transversal de forma arbitrária, a Equação (4.2) torna-se altamente significativa. Considerando que as tensões permanecem dentro do limite de proporcionalidade do material, podemos substituir $\sigma_x = -\sigma_m y/c$ na Equação (4.2) e escrever

$$\int z\left(-\frac{\sigma_m y}{c}\right) dA = 0 \qquad \text{ou} \qquad \int yz\, dA = 0 \qquad (4.51)$$

A integral $\int yz dA$ representa o produto da inércia I_{yz} da seção transversal com relação aos eixos y e z, e será zero se esses eixos forem os *eixos principais de inércia da seção transversal*.† Concluímos então que a linha neutra da seção transversal coincidirá com a direção do momento **M** que representa os esforços que atuam naquela seção *se, e somente se, o vetor momento fletor* **M** *estiver direcionado ao longo de um dos eixos principais da seção transversal*.

†Ver BEER, F. P.; JOHNSTON, Jr. E. R., *Mechanics for Engineers*, 4. ed. Nova York: McGraw-Hill, 1987, ou *Mecânica Vetorial para Engenheiros*, 7. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2006, seções 9.8-9.10.

Observamos que as seções transversais mostradas na Fig. 4.55 são simétricas em relação a pelo menos um dos eixos coordenados. Conclui-se que, em cada caso, os eixos y e z são os principais eixos de inércia da seção. Como o vetor momento **M** está direcionado ao longo de um dos eixos principais de inércia, verificamos que a linha neutra coincidirá com a direção do momento. Notamos também que, se as seções transversais forem rotacionadas em 90° (Fig. 4.58), o vetor momento **M** ainda estará direcionado ao longo do eixo principal de

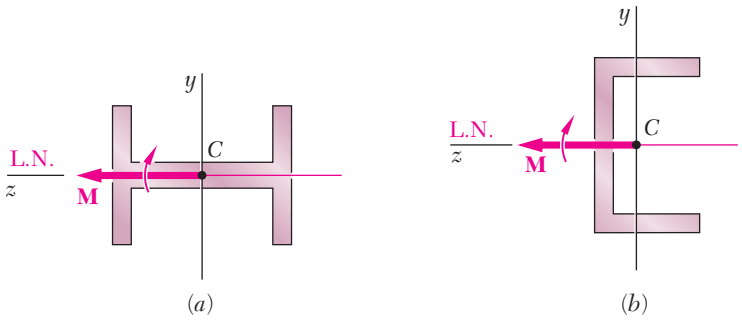


Fig. 4.58

inércia, e a linha neutra novamente coincidirá com a direção do momento, ainda que, no caso *b*, o momento não atue em um plano de simetria da barra.

Em contrapartida, na Fig. 4.56, nenhum dos eixos coordenados é de simetria para as seções mostradas, e os eixos coordenados não são os eixos principais de inércia. Assim, o vetor momento **M** não está direcionado ao longo de um eixo principal de inércia, e a linha neutra não coincide com a direção do momento. No entanto, qualquer seção possui eixos principais de inércia, mesmo que ela seja assimétrica, como a seção mostrada na Fig. 4.56*c*, e esses eixos podem ser determinados analiticamente ou usando o círculo de Mohr.† Se o vetor momento **M** estiver direcionado ao longo de um dos eixos principais de inércia da seção, a linha neutra coincidirá com a direção do momento (Fig. 4.59) e as equações deduzidas nas Seções 4.3 e 4.4 para barras de seção simétrica poderão ser usadas para determinar a tensão nesse caso também.

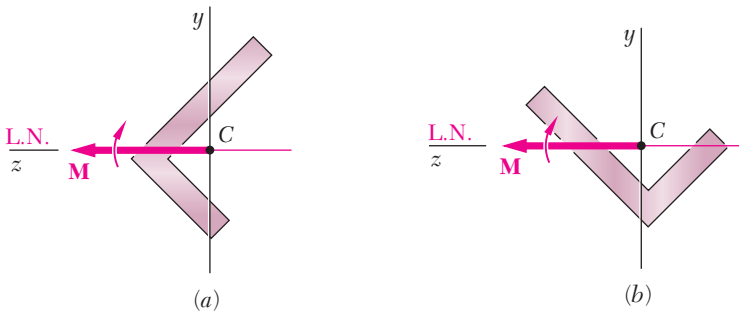


Fig. 4.59

Conforme você verá aqui, o princípio da superposição pode ser usado para determinar tensões no caso mais geral de flexão assimétrica. Considere

†Ver BEER, F. P.; JOHNSTON, Jr. E. R. *Mechanics for Engineers*, 4. ed. Nova York: McGraw-Hill, 1987, ou *Mecânica Vetorial para Engenheiros*, 7. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2006, seções 9.8-9.10.

primeiro uma barra com um plano vertical de simetria, que está submetida aos momentos fletores **M** e **M′** atuando em um plano formando um ângulo θ com o plano vertical (Fig. 4.60). O vetor momento **M** representando os esforços que atuam em uma dada seção transversal formará o mesmo

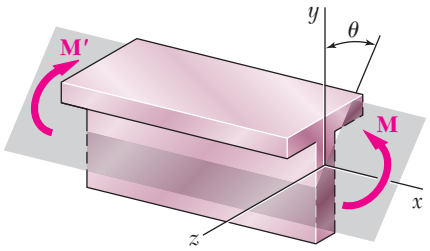


Fig. 4.60

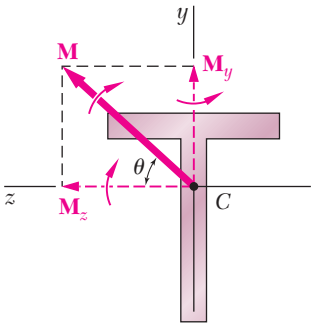


Fig. 4.61

ângulo θ com o eixo z horizontal (Fig. 4.61). Decompondo o vetor **M** nas direções z e y, nas componentes $\mathbf{M}_z$ e $\mathbf{M}_y$, respectivamente, escrevemos

$$M_z = M\cos\theta \qquad M_y = M\,\text{sen}\,\theta \tag{4.52}$$

Como os eixos y e z são eixos principais de inércia da seção transversal, podemos usar a Equação (4.16) para determinar as tensões resultantes da aplicação de qualquer um dos momentos representados por $\mathbf{M}_z$ e $\mathbf{M}_y$. O momento $\mathbf{M}_z$ atua em um plano vertical e flexiona a barra naquele plano (Fig. 4.62). As tensões resultantes são

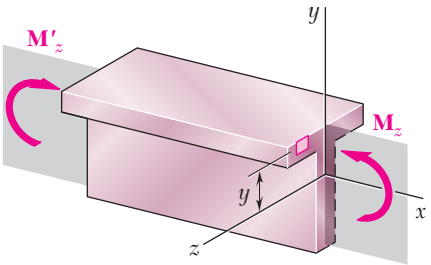


Fig. 4.62

$$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z} \tag{4.53}$$

em que I_z é o momento de inércia da seção em relação ao eixo principal de inércia z. O sinal negativo se deve ao fato de que temos compressão acima do plano xz ($y > 0$) e tração abaixo ($y < 0$). Em contrapartida, o momento $\mathbf{M}_y$ atua em um plano horizontal e flexiona a barra naquele plano (Fig. 4.63). As tensões resultantes são

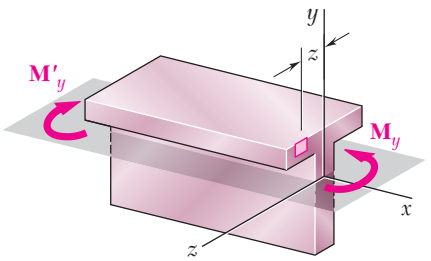


Fig. 4.63

$$\sigma_x = +\frac{M_y z}{I_y} \tag{4.54}$$

em que I_y é o momento de inércia da seção em relação ao eixo principal de inércia y, e no qual o sinal positivo se deve ao fato de que temos tração à esquerda do plano xy vertical ($z > 0$) e compressão à sua direita ($z < 0$). A distribuição das tensões provocada pelo momento **M** original é obtida superpondo-se as distribuições de tensão definidas pelas Equações (4.53) e (4.54), respectivamente. Temos

$$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} \tag{4.55}$$

Notamos que a expressão obtida também pode ser usada para calcular as tensões em uma seção assimétrica, como esta mostrada na Fig. 4.64, uma vez que os eixos principais de inércia y e z foram determinados. No entanto,

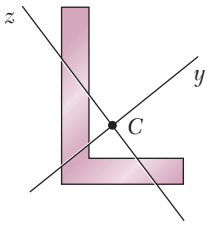


Fig. 4.64

a Equação (4.55) só é válida se forem satisfeitas as condições de aplicabilidade do princípio da superposição. Em outras palavras, ela não deverá ser usada se as tensões combinadas excederem o limite de proporcionalidade do material, ou se as deformações provocadas por um dos momentos componentes afetar de forma considerável a distribuição de tensões provocadas pelo outro.

A Equação (4.55) mostra que a distribuição de tensões provocada pela flexão assimétrica é linear. No entanto, conforme já indicamos nesta seção, a linha neutra da seção transversal, em geral, não coincidirá com a direção do momento fletor. Como a tensão normal é zero em qualquer ponto da linha neutra, a equação que define aquela linha pode ser obtida considerando $\sigma_x = 0$ na Equação (4.55). Escrevemos

$$-\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} = 0$$

ou, resolvendo para y e usando M_z e M_y das Equações (4.52),

$$y = \left(\frac{I_z}{I_y}\operatorname{tg}\theta\right) z \tag{4.56}$$

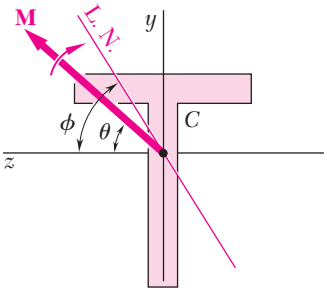


Fig. 4.65

A equação obtida é esta de uma linha reta de inclinação $m = (I_z/I_y)\operatorname{tg}\theta$. Assim, o ângulo ϕ que a linha neutra forma com o eixo z (Fig. 4.65) é definido pela relação

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{I_z}{I_y}\operatorname{tg}\theta \tag{4.57}$$

em que θ é o ângulo que o vetor momento fletor **M** forma com o mesmo eixo z. Como I_z e I_y são ambos positivos, ϕ e θ têm o mesmo sinal. Além disso, notamos que $\phi > \theta$ quando $I_z > I_y$, e $\phi < \theta$ quando $I_z < I_y$. Assim, a linha neutra está sempre localizada entre o vetor momento fletor **M** e o eixo principal correspondente ao momento mínimo de inércia.

EXEMPLO 4.8

Um momento de 180 N · m é aplicado a uma viga de madeira, de seção transversal retangular de 38 × 90 mm em um plano formando um ângulo de 30° com a vertical (Fig. 4.66). Determine (*a*) a tensão máxima na viga e (*b*) o ângulo que a superfície neutra forma com o plano horizontal.

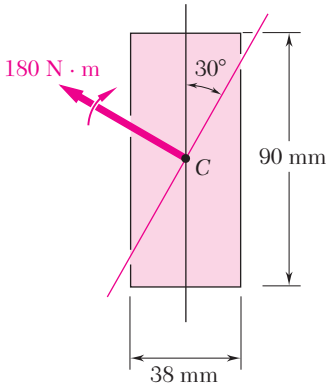


Fig. 4.66

(a) Tensão máxima. As componentes $\mathbf{M}_z$ e $\mathbf{M}_y$ do vetor momento são determinadas em primeiro lugar (Fig. 4.67):

$$M_z = (180 \text{ N} \cdot \text{m}) \cos 30° = 156 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_y = (180 \text{ N} \cdot \text{m}) \text{ sen } 30° = 90 \text{ N} \cdot \text{m}$$

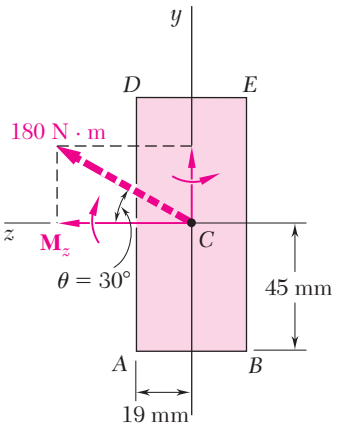


Fig. 4.67

Calculamos também os momentos de inércia da seção transversal em relação aos eixos z e y:

$$I_z = \tfrac{1}{12}(0{,}038 \text{ m})(0{,}090 \text{ m})^3 = 2{,}31 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_y = \tfrac{1}{12}(0{,}090 \text{ m})(0{,}038 \text{ m})^3 = 0{,}41 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

A maior tensão de tração provocada por $\mathbf{M}_z$ ocorre ao longo de AB e é

$$\sigma_1 = \frac{M_z y}{I_z} = \frac{(156 \text{ N} \cdot \text{m})(0{,}045 \text{ m})}{2{,}31 \times 10^{-6} \text{ m}^4} = 3{,}0 \text{ MPa}$$

A maior tensão de tração provocada por $\mathbf{M}_y$ ocorre ao longo de AD e é

$$\sigma_2 = \frac{M_y z}{I_y} = \frac{(90 \text{ N} \cdot \text{m})(0{,}019 \text{ m})}{0{,}41 \times 10^{-6} \text{ m}^4} = 4{,}2 \text{ MPa}$$

A maior tensão de tração provocada pela carga combinada, portanto, ocorre em A e é

$$\sigma_{\text{máx}} = \sigma_1 + \sigma_2 = 3{,}0 + 4{,}2 = 7{,}2 \text{ MPa}$$

A maior tensão de compressão tem a mesma intensidade e ocorre em E.

(b) Ângulo da superfície neutra com o plano horizontal. O ângulo que a superfície neutra forma com o plano horizontal (Fig. 4.68) é obtido da Equação (4.57):

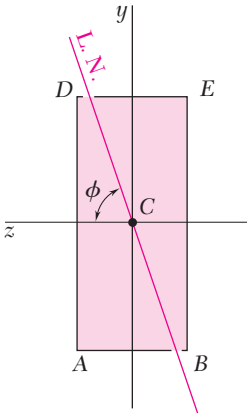


Fig. 4.68

$$\text{tg } \phi = \frac{I_z}{I_y} \text{tg } \theta = \frac{2{,}31 \times 10^{-6} \text{ m}^4}{0{,}41 \times 10^{-6} \text{ m}^4} \text{tg } 30° = 3{,}25$$

$$\phi = 72{,}9°$$

A distribuição das tensões ao longo da seção é mostrada na Fig. 4.69.

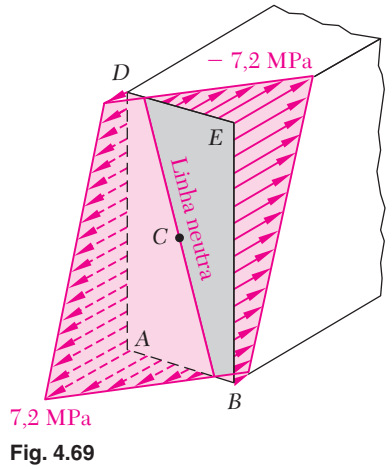


Fig. 4.69

4.14. Caso geral de carregamento axial excêntrico

Na Seção 4.12 analisamos as tensões produzidas em uma barra por uma força axial excêntrica aplicada a um plano de simetria da barra. Agora estudaremos o caso mais geral quando uma força axial não é aplicada a um plano de simetria.

Considere um elemento reto AB submetido a forças axiais centradas, iguais e opostas $\mathbf{P}$ e $\mathbf{P}'$ (Fig. 4.70*a*), e sejam a e b as distâncias da linha de ação das forças até os eixos principais de inércia da seção transversal da barra. A força excêntrica $\mathbf{P}$ é estaticamente equivalente ao sistema consistindo em uma força centrada $\mathbf{P}$ e dois momentos $M_y = Pa$ e $M_z = Pb$ representados na Fig. 4.70*b*. Analogamente, a força excêntrica $\mathbf{P}'$ é equivalente à força centrada $\mathbf{P}'$ e aos momentos $\mathbf{M}'_x$ e $\mathbf{M}'_z$.

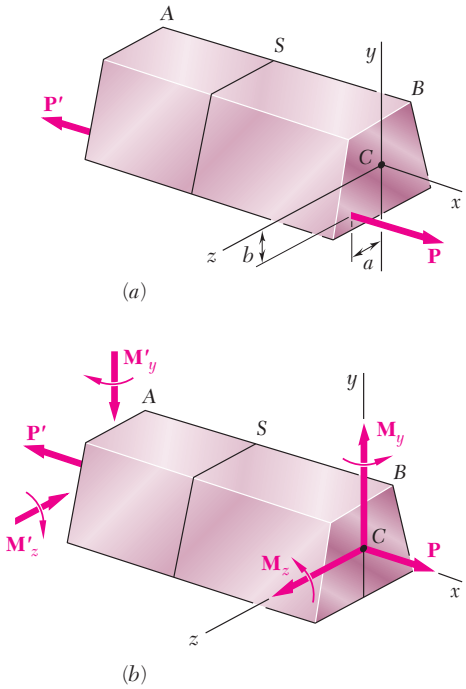


Fig. 4.70

Em virtude do princípio de Saint-Venant (Seção 2.17), podemos substituir o carregamento original da Fig. 4.70*a* pelo carregamento estaticamente equivalente da Fig. 4.70*b* para determinar a distribuição de tensões em uma seção S da barra, desde que aquela seção não esteja muito perto de uma das extremidades da barra. Além do mais, as tensões provocadas pelo carregamento da Fig. 4.70*b* podem ser obtidas superpondo-se as tensões correspondentes pela força axial centrada $\mathbf{P}$ e pelos momentos fletores $\mathbf{M}_y$ e $\mathbf{M}_z$, desde que sejam satisfeitas as condições de aplicabilidade do princípio da superposição (Seção 2.12). As tensões provocadas pela força centrada $\mathbf{P}$ são dadas pela Equação (1.5), e as tensões provocadas pelos momentos fletores pela Equação (4.55), desde que os correspondentes vetores momentos estejam direcionados ao longo dos eixos principais de inércia da seção. Escrevemos então,

$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} \tag{4.58}$$

em que y e z são medidos em relação aos eixos principais de inércia da seção. A relação obtida mostra que a distribuição de tensões ao longo da seção é *linear*.

Ao calcular a tensão combinada σ_x da Equação (4.58), deve-se tomar cuidado para determinar corretamente o sinal de cada um dos três termos no membro da direita, pois cada um desses termos pode ser positivo ou negativo, dependendo do sentido das forças $\mathbf{P}$ e $\mathbf{P}'$ e da localização de suas linhas de ação em relação aos eixos principais de inércia da seção transversal. Dependendo da geometria da seção transversal e da localização da linha de ação de $\mathbf{P}$ e $\mathbf{P}'$, as tensões combinadas σ_x obtidas da Equação (4.58) em vários pontos da seção podem ter todas elas o mesmo sinal; algumas ainda poderão ser positivas e outras negativas. Nesse último caso, haverá uma linha na seção, ao longo da qual as tensões serão zero. Fazendo $\sigma_x = 0$ na Equação (4.58), obtemos a equação de uma linha reta, que representa a *linha neutra* da seção:

$$\frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z = \frac{P}{A}$$

EXEMPLO 4.9

Uma força vertical de 4,80 kN é aplicada em um poste de madeira de seção transversal retangular de 80 × 120 mm, conforme mostra a Fig. 4.71. (*a*) Determine as tensões nos pontos *A*, *B*, *C* e *D*. (*b*) Localize a linha neutra da seção transversal.

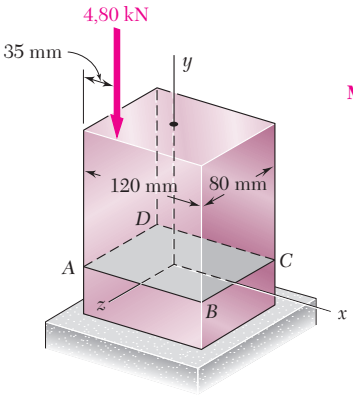


Fig. 4.71

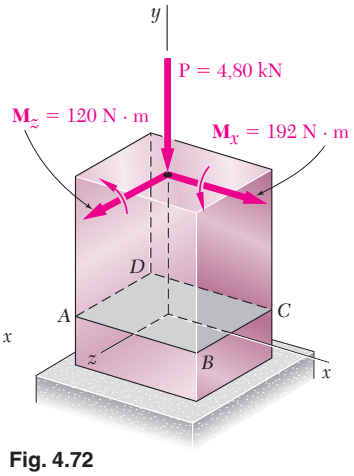


Fig. 4.72

(a) Tensões. A força excêntrica dada é substituída por um sistema equivalente consistindo em uma força centrada **P** e dois momentos $\mathbf{M}_x$ e $\mathbf{M}_z$, representados por vetores direcionados ao longo dos eixos principais de inércia da seção (Fig. 4.72). Temos

$$M_x = (4{,}80\text{ kN})(40\text{ mm}) = 192\text{ N}\cdot\text{m}$$
$$M_z = (4{,}80\text{ kN})(60\text{ mm} - 35\text{ mm}) = 120\text{ N}\cdot\text{m}$$

Calculamos também a área e os momentos de inércia da seção transversal:

$$A = (0{,}080\text{ m})(0{,}120\text{ m}) = 9{,}60 \times 10^{-3}\text{ m}^2$$
$$I_x = \tfrac{1}{12}(0{,}120\text{ m})(0{,}080\text{ m})^3 = 5{,}12 \times 10^{-6}\text{ m}^4$$
$$I_z = \tfrac{1}{12}(0{,}080\text{ m})(0{,}120\text{ m})^3 = 11{,}52 \times 10^{-6}\text{ m}^4$$

A tensão σ_0 em virtude da força centrada **P** é negativa e uniforme ao longo da seção. Temos

$$\sigma_0 = \frac{P}{A} = \frac{-4{,}80\text{ kN}}{9{,}60 \times 10^{-3}\text{ m}^2} = -0{,}5\text{ MPa}$$

As tensões provocadas pelos momentos fletores $\mathbf{M}_x$ e $\mathbf{M}_z$ são linearmente distribuídas ao longo da seção, com valores máximos iguais, respectivamente, a

$$\sigma_1 = \frac{M_x z_{máx}}{I_x} = \frac{(192\text{ N}\cdot\text{m})(40\text{ mm})}{5{,}12 \times 10^{-6}\text{ m}^4} = 1{,}5\text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{M_z x_{máx}}{I_z} = \frac{(120\text{ N}\cdot\text{m})(60\text{ mm})}{11{,}52 \times 10^{-6}\text{ m}^4} = 0{,}625\text{ MPa}$$

As tensões nos cantos da seção são

$$\sigma_y = \sigma_0 \pm \sigma_1 \pm \sigma_2$$

em que os sinais devem ser determinados pela Fig. 4.72. Considerando que as tensões provocadas por $\mathbf{M}_x$ são positivas em *C* e *D*, e negativas em *A* e *B*, e que as tensões provocadas por $\mathbf{M}_z$ são positivas em *B* e *C*, e negativas em *A* e *D*, obtemos

$$\sigma_A = -0{,}5 - 1{,}5 - 0{,}625 = -2{,}625\text{ MPa}$$
$$\sigma_B = -0{,}5 - 1{,}5 + 0{,}625 = -1{,}375\text{ MPa}$$
$$\sigma_C = -0{,}5 + 1{,}5 + 0{,}625 = +1{,}625\text{ MPa}$$
$$\sigma_D = -0{,}5 + 1{,}5 - 0{,}625 = +0{,}375\text{ MPa}$$

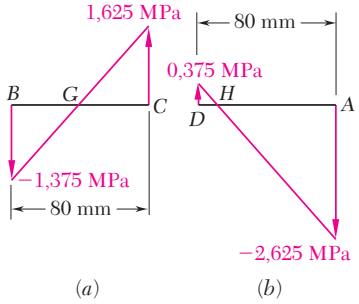


Fig. 4.73

(b) Linha neutra. Notamos que a tensão será zero em um ponto *G* entre *B* e *C*, e em um ponto *H* entre *D* e *A* (Fig. 4.73). Como a distribuição de tensão é linear, escrevemos

$$\frac{BG}{80\text{ mm}} = \frac{1{,}375}{1{,}625 + 1{,}375} \qquad BG = 36{,}7\text{ mm}$$
$$\frac{HA}{80\text{ mm}} = \frac{2{,}625}{2{,}625 + 0{,}375} \qquad HA = 70\text{ mm}$$

A linha neutra pode ser traçada pelos pontos *G* e *H* (Fig. 4.74).

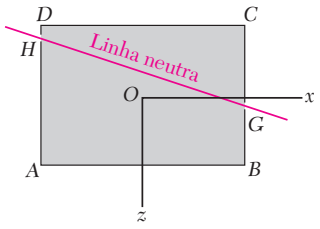


Fig. 4.74

A distribuição de tensões ao longo da seção é mostrada na Fig. 4.75.

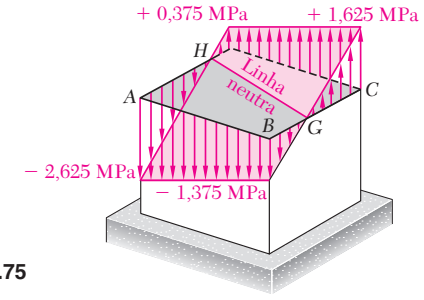
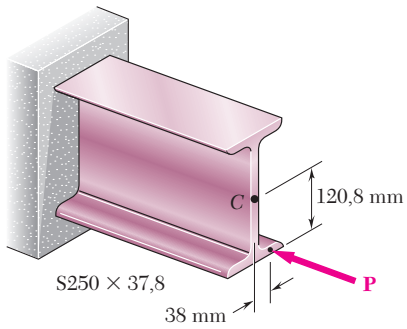


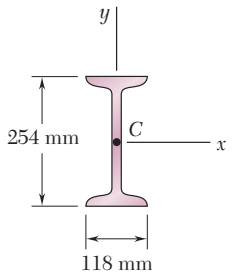
Fig. 4.75



PROBLEMA RESOLVIDO 4.9

Uma força horizontal **P** é aplicada a uma seção curta de uma viga de aço laminado S250 × 37,8, conforme mostra a figura. Sabendo que a tensão de compressão na viga não pode ultrapassar 82 MPa, determine a maior força **P** admissível.

SOLUÇÃO



Propriedades da seção transversal. Os dados a seguir são obtidos do Apêndice C.

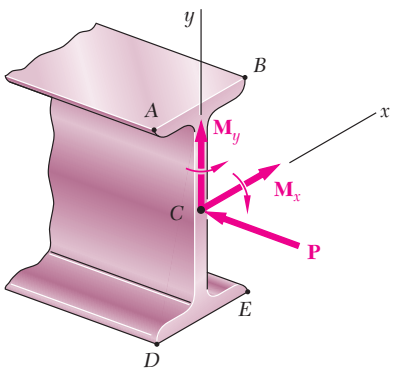
Área: $A = 4820 \text{ mm}^2$

Módulos de resistência da seção: $W_x = 402 \times 10^3 \text{ mm}^3$ $W_y = 47{,}5 \times 10^3 \text{ mm}^3$

Força e momento em *C*. Substituímos **P** por um sistema equivalente de força e momento no centroide *C* da seção transversal.

$$M_x = (120{,}8 \text{ mm})P \qquad M_y = (38 \text{ mm})P$$

Note que os vetores momentos $\mathbf{M}_x$ e $\mathbf{M}_y$ estão direcionados ao longo dos eixos principais de inércia da seção transversal.



Tensões normais. Os valores absolutos das tensões nos pontos *A, B, D* e *E,* em virtude da carga centrada **P** e dos momentos $\mathbf{M}_x$ e $\mathbf{M}_y$, respectivamente, são

$$\sigma_1 = \frac{P}{A} = \frac{P}{4820 \text{ mm}^2} = 2{,}1 \times 10^{-4}P$$

$$\sigma_2 = \frac{M_x}{W_x} = \frac{120{,}8P}{402 \times 10^3 \text{ mm}^3} = 3{,}0 \times 10^{-4}P$$

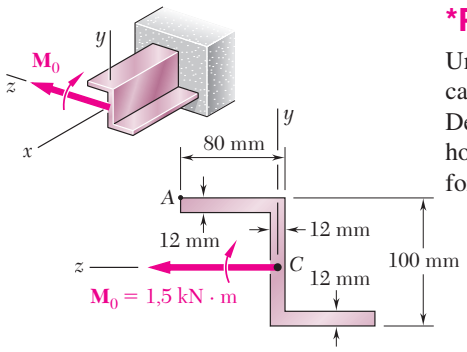
$$\sigma_3 = \frac{M_y}{W_y} = \frac{38P}{47{,}5 \times 10^3 \text{ mm}^3} = 8{,}0 \times 10^{-4}P$$

Superposição. A tensão total em cada ponto é encontrada superpondo-se as tensões provocadas por **P**, $\mathbf{M}_x$ e $\mathbf{M}_y$. Determinamos o sinal de cada tensão examinando cuidadosamente o esquema do sistema de força e momento.

$$\sigma_A = -\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = (-2{,}1P + 3{,}0P + 8{,}0P) \times 10^{-4} = 8{,}9 \times 10^{-4}P$$
$$\sigma_B = -\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3 = (-2{,}1P + 3{,}0P - 8{,}0P) \times 10^{-4} = -7{,}1 \times 10^{-4}P$$
$$\sigma_D = -\sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_3 = (-2{,}1P - 3{,}0P + 8{,}0P) \times 10^{-4} = 2{,}9 \times 10^{-4}P$$
$$\sigma_E = -\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 = (-2{,}1P - 3{,}0P - 8{,}0P) \times 10^{-4} = -13{,}1 \times 10^{-4}P$$

Maior força admissível. A máxima tensão de compressão ocorre no ponto *E*. Lembrando que $\sigma_{adm} = -82 \text{ N/mm}^2$, escrevemos

$$\sigma_{adm} = \sigma_E \qquad -82 \text{ N/mm}^2 = -13{,}1 \times 10^{-4}P \qquad P = 62{,}6 \text{ kN} \blacktriangleleft$$

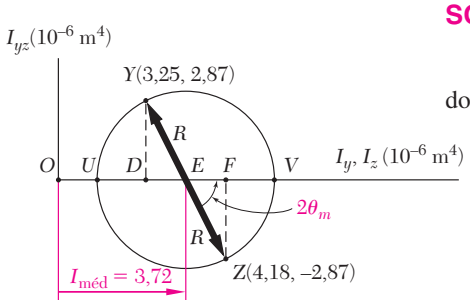


*PROBLEMA RESOLVIDO 4.10

Um momento de intensidade $M_0 = 1{,}5$ kN · m atuando em um plano vertical é aplicado a uma viga que tem uma seção transversal em forma de Z, como mostra a figura. Determine (*a*) a tensão no ponto *A* e (*b*) o ângulo que a linha neutra forma com o plano horizontal. Os momentos e o produto de inércia da seção em relação aos eixos *y* e *z* foram calculados e são os seguintes:

$$I_y = 3{,}25 \times 10^{-6}\ \text{m}^4$$
$$I_z = 4{,}18 \times 10^{-6}\ \text{m}^4$$
$$I_{yz} = 2{,}87 \times 10^{-6}\ \text{m}^4$$

SOLUÇÃO



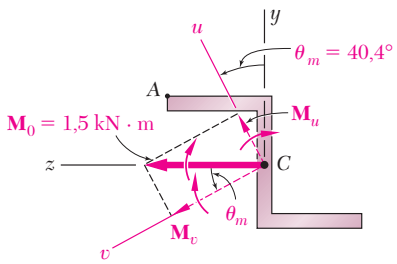
Eixos principais. Desenhamos o círculo de Mohr e determinamos a orientação dos eixos principais de inércia e os momentos principais de inércia correspondentes.

$$\text{tg}\, 2\theta_m = \frac{FZ}{EF} = \frac{2{,}87}{0{,}465} \qquad 2\theta_m = 80{,}8° \qquad \theta_m = 40{,}4°$$

$$R^2 = (EF)^2 + (FZ)^2 = (0{,}465)^2 + (2{,}87)^2 \qquad R = 2{,}91 \times 10^{-6}\ \text{m}^4$$

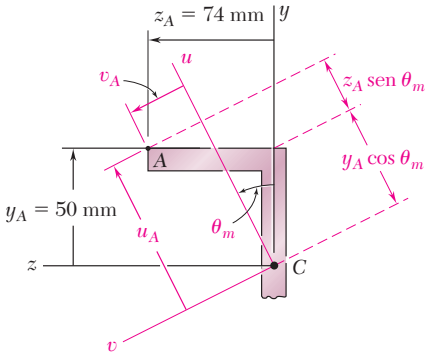
$$I_u = I_{\text{mín}} = OU = I_{\text{médio}} - R = 3{,}72 - 2{,}91 = 0{,}810 \times 10^{-6}\ \text{m}^4$$

$$I_v = I_{\text{máx}} = OV = I_{\text{médio}} + R = 3{,}72 + 2{,}91 = 6{,}63 \times 10^{-6}\ \text{m}^4$$



Carregamento. O momento $\mathbf{M}_0$ aplicado é decomposto em componentes paralelos aos eixos principais.

$$M_u = M_0 \operatorname{sen} \theta_m = 1500 \operatorname{sen} 40{,}4° = 972\ \text{N} \cdot \text{m}$$
$$M_v = M_0 \cos \theta_m = 1500 \cos 40{,}4° = 1142\ \text{N} \cdot \text{m}$$

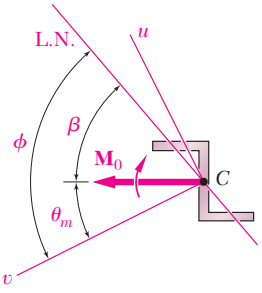


***a.* Tensão em *A*.** As distâncias perpendiculares de cada eixo principal até o ponto *A* são

$$u_A = y_A \cos \theta_m + z_A \operatorname{sen} \theta_m = 50 \cos 40{,}4° + 74 \operatorname{sen} 40{,}4° = 86{,}0\ \text{mm}$$
$$v_A = -y_A \operatorname{sen} \theta_m + z_A \cos \theta_m = -50 \operatorname{sen} 40{,}4° + 74 \cos 40{,}4° = 23{,}9\ \text{mm}$$

Considerando separamente a flexão em torno de cada eixo principal de inércia, notamos que $\mathbf{M}_u$ produz uma tensão de tração no ponto *A* enquanto $\mathbf{M}_v$ produz uma tensão de compressão no mesmo ponto.

$$\sigma_A = +\frac{M_u v_A}{I_u} - \frac{M_v u_A}{I_v} = +\frac{(972\ \text{N} \cdot \text{m})(0{,}0239\ \text{m})}{0{,}810 \times 10^{-6}\ \text{m}^4} - \frac{(1142\ \text{N} \cdot \text{m})(0{,}0860\ \text{m})}{6{,}63 \times 10^{-6}\ \text{m}^4}$$
$$= +(28{,}68\ \text{MPa}) - (14{,}81\ \text{MPa}) \qquad \sigma_A = +13{,}87\ \text{MPa} \blacktriangleleft$$



***b.* Linha neutra.** Usando a Equação (4.57), encontramos o ângulo ϕ que a linha neutra forma com o eixo *v*

$$\text{tg}\, \phi = \frac{I_v}{I_u} \text{tg}\, \theta_m = \frac{6{,}63}{0{,}810} \text{tg}\, 40{,}4° \qquad \phi = 81{,}8°$$

O ângulo β formado pela linha neutra e a horizontal é

$$\beta = \phi - \theta_m = 81{,}8° - 40{,}4° = 41{,}4° \qquad \beta = 41{,}4° \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

4.126 até *4.128* O momento **M** é aplicado a uma viga com a seção transversal mostrada na figura em um plano formando um ângulo β com a vertical. Determine a tensão no (*a*) ponto *A*, (*b*) ponto *B* e (*c*) ponto *D*.

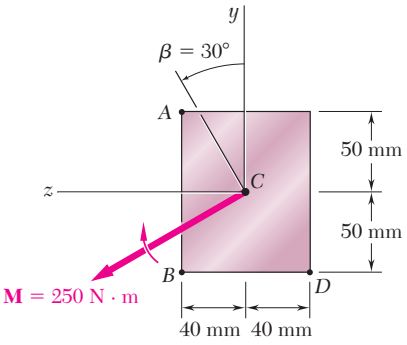


Fig. P4.126

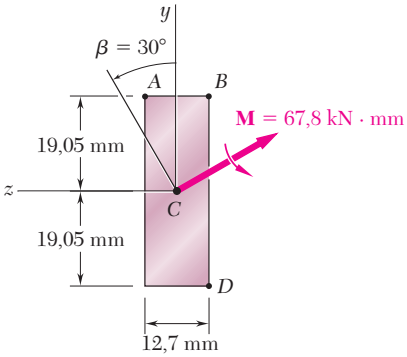


Fig. P4.127

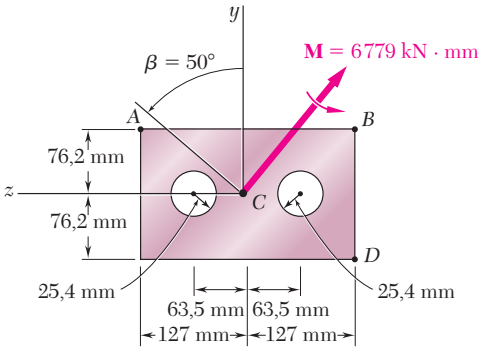


Fig. *P4.128*

4.129 até 4.131 O momento **M** é aplicado a uma viga com a seção transversal mostrada na figura em um plano formando um ângulo β com a vertical. Determine a tensão no (*a*) ponto *A*, (*b*) ponto *B* e (*c*) ponto *D*.

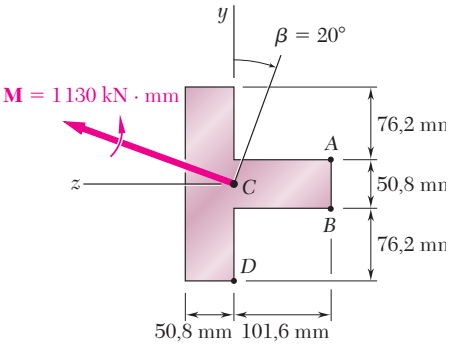


Fig. P4.129

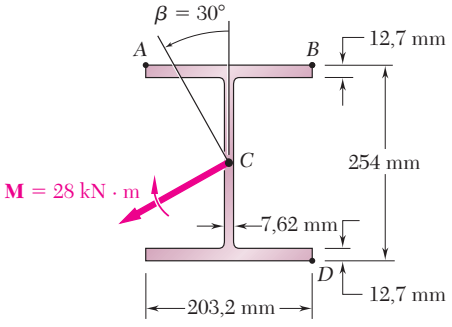


Fig. *P4.130*

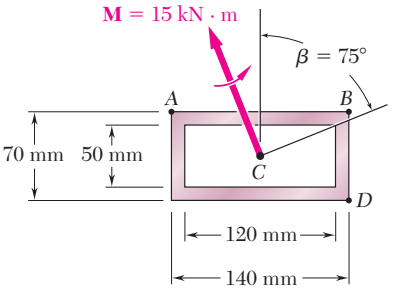


Fig. P4.131

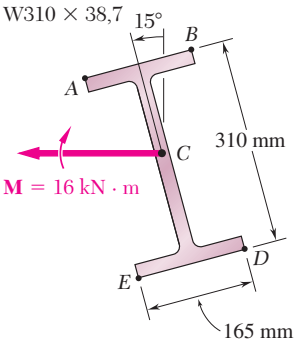


Fig. P4.132

4.132 O momento **M** atua em um plano vertical e é aplicado a uma viga orientada conforme mostra a figura. Determine (*a*) o ângulo que a linha neutra forma com a horizontal e (*b*) a tensão de tração máxima na viga.

4.133 e 4.134 O momento **M** atua em um plano vertical e é aplicado a uma viga orientada, conforme mostra a figura. Determine (*a*) o ângulo que a linha neutra forma com a horizontal e (*b*) a tensão de tração máxima na viga.

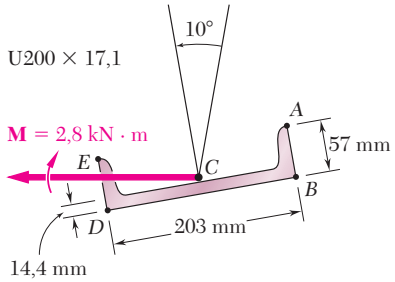


Fig. *P4.133*

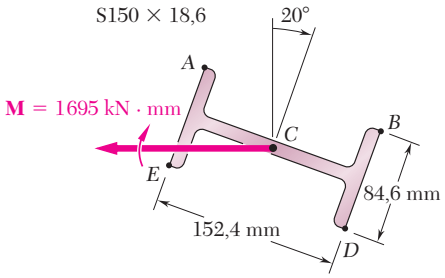
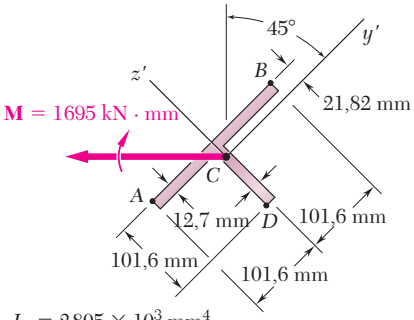


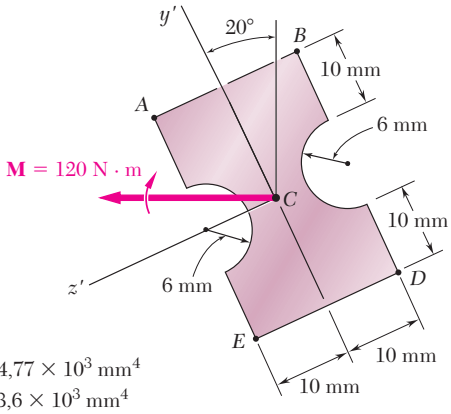
Fig. P4.134

4.135 e 4.136 O momento **M** atua em um plano vertical e é aplicado a uma viga orientada, conforme mostra a figura. Determine (*a*) o ângulo que a linha neutra forma com a horizontal e (*b*) a tensão de tração máxima na viga.



$I_{y'} = 2805 \times 10^3\ \text{mm}^4$
$I_{z'} = 8907 \times 10^3\ \text{mm}^4$

Fig. P4.135



$I_{y'} = 14{,}77 \times 10^3\ \text{mm}^4$
$I_{z'} = 53{,}6 \times 10^3\ \text{mm}^4$

Fig. P4.136

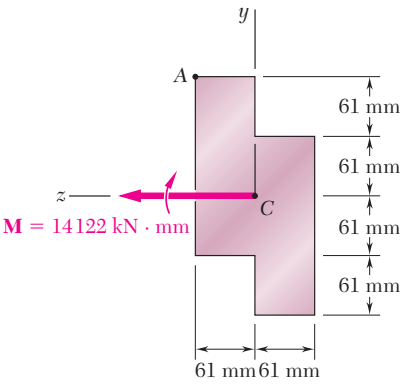
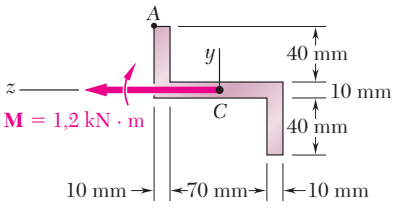


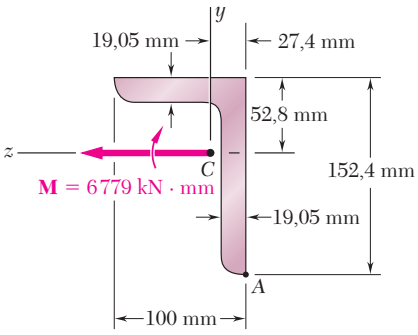
Fig. P4.137

***4.137 até *4.139** O momento **M** atua em um plano vertical e é aplicado a uma viga orientada, conforme mostra a figura. Determine a tensão no ponto *A*.



$I_y = 1{,}894 \times 10^6\ \text{mm}^4$
$I_z = 0{,}614 \times 10^6\ \text{mm}^4$
$I_{yz} = +0{,}800 \times 10^6\ \text{mm}^4$

Fig. P4.138



$I_y = 3621 \times 10^3\ \text{mm}^4$
$I_z = 10198 \times 10^3\ \text{mm}^4$
$I_{yz} = +3455 \times 10^3\ \text{mm}^4$

Fig. *P4.139*

4.140 Para o carregamento mostrado na figura, determine (*a*) a tensão nos pontos *A* e *B* e (*b*) o ponto em que a linha neutra intercepta a linha *ABD*.

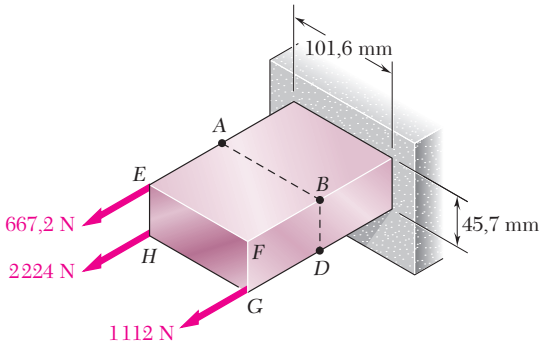


Fig. P4.140

4.141 Resolva o Problema 4.140 considerando que a intensidade da força aplicada em *G* eleva-se de 1 112 N a 1 779 N.

4.142 O tubo mostrado na figura tem parede com espessura constante de 12 mm. Para o carregamento dado, determine (*a*) a tensão nos pontos *A* e *B* e (*b*) o ponto em que o eixo neutro intercepta a linha *ABD*.

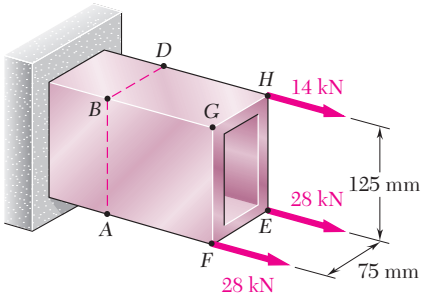


Fig. P4.142

4.143 Resolva o Problema 4.142 considerando que a força de 28 kN aplicada em *E* é removida.

4.144 Uma força axial **P** de intensidade de 50 kN é aplicada, conforme mostra a figura, a uma seção de uma viga curta de aço laminado W150 × 24. Determine a maior distância *a* para a qual a máxima tensão de compressão não ultrapasse 90 MPa.

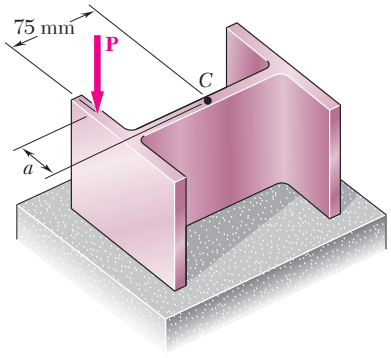


Fig. P4.144

4.145 Uma força horizontal **P** de intensidade 100 kN é aplicada à viga mostrada na figura. Determine a maior distância para a qual a tensão de tração máxima na viga não ultrapasse 75 MPa.

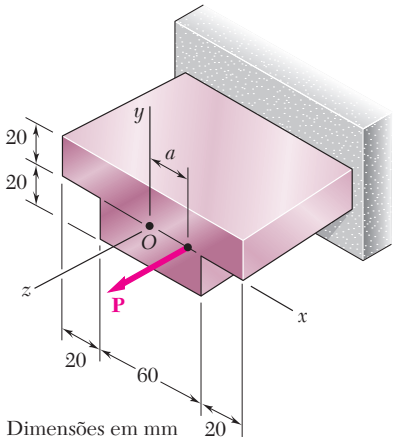


Fig. *P4.145*

4.146 Uma viga com a seção transversal mostrada na figura está submetida a um momento $\mathbf{M}_0$ que atua em um plano vertical. Determine o maior valor admissível do momento $\mathbf{M}_0$ se a tensão máxima na viga não deve ultrapassar 82,7 MPa. *Dados*: $I_y = I_z = 4703 \times 10^3$ mm^4, $A = 3\,065$ mm^2, $k_{\text{mín}} = 25$ mm. (*Sugestão*: Em razão da simetria, os eixos principais formam um ângulo de 45° com os eixos coordenados. Use as relações $I_{\text{mín}} = Ak^2_{\text{mín}}$ e $I_{\text{mín}} + I_{\text{máx}} = I_y + I_z$.)

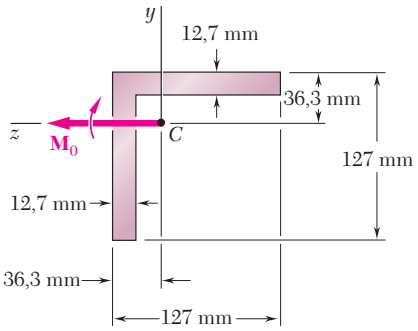


Fig. P4.146

4.147 Resolva o Problema 4.146 considerando que o momento $\mathbf{M}_0$ age em um plano horizontal.

4.148 A seção em forma de Z mostrada na figura está submetida a um momento $\mathbf{M}_0$ atuando em um plano vertical. Determine o maior valor admissível do momento $\mathbf{M}_0$ se a tensão máxima não deve ultrapassar 80 MPa. *Dados*: $I_{\text{máx}} = 2{,}28 \times 10^{-6}$ mm^4, $I_{\text{mín}} = 0{,}23 \times 10^{-6}$ mm^4, eixos principais 25,7° ↘ e 64,3° ↗.

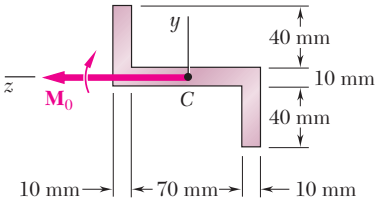


Fig. P4.148

4.149 Resolva o Problema 4.148 considerando que o momento $\mathbf{M}_0$ atua em um plano horizontal.

4.150 Uma viga com a seção transversal mostrada na figura é submetida a um momento $\mathbf{M}_0$ atuando em um plano vertical. Determine o maior valor admissível do momento M_0 para que a tensão máxima não ultrapasse 100 MPa. *Dados*: $I_y = I_z = b^4/36$ e $I_{yz} = b^4/72$.

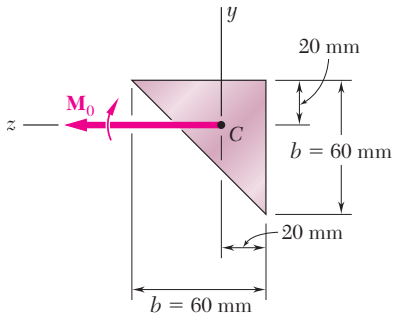


Fig. P4.150

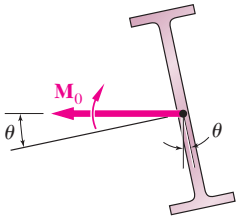


Fig. P4.151

4.151 Um momento $\mathbf{M}_0$ atuando em um plano vertical é aplicado a uma viga de aço laminado W310 × 23,8 cuja alma forma um ângulo θ com a vertical. Chamando de σ_0 a tensão máxima na viga quando $\theta = 0$, determine o ângulo de inclinação θ da viga para o qual a tensão máxima é $2\sigma_0$.

4.152 Uma viga de seção transversal assimétrica é submetida a um momento $\mathbf{M}_0$ atuando no plano vertical xy. Mostre que a tensão no ponto A, de coordenadas y e z, é

$$\sigma_A = -\frac{yI_y - zI_{yz}}{I_yI_z - I_{yz}^2}M_z$$

em que I_y, I_z e I_{yz} são os momentos e produto de inércia da seção transversal em relação aos eixos coordenados, e M_z, o momento fletor.

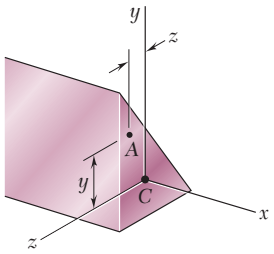


Fig. P4.152 e P4.153

4.153 Uma viga de seção transversal assimétrica está submetida a um momento $\mathbf{M}_0$ atuando no plano horizontal xz. Mostre que a tensão no ponto A, de coordenadas y e z, é

$$\sigma_A = -\frac{zI_z - yI_{yz}}{I_yI_z - I_{yz}^2}M_y$$

em que I_y, I_z e I_{yz} são os momentos e produto de inércia da seção transversal em relação aos eixos coordenados, e M_y o momento fletor.

4.154 (*a*) Mostre que a tensão no vértice *A* do elemento prismático mostrado na Fig. P4.154*a* será zero se a força vertical **P** for aplicada a um ponto localizado na linha.

$$\frac{x}{b/6} + \frac{z}{h/6} = 1$$

(*b*) Mostre ainda que, para não ocorrer tensão de tração no elemento, a força **P** deve ser aplicada a um ponto localizado dentro da área delimitada pela linha encontrada na parte (*a*) e três linhas similares correspondendo à condição de tensão zero em *B*, *C* e *D*, respectivamente. Essa área, mostrada na Fig. P4.154*b*, é conhecida como *núcleo central* da seção transversal.

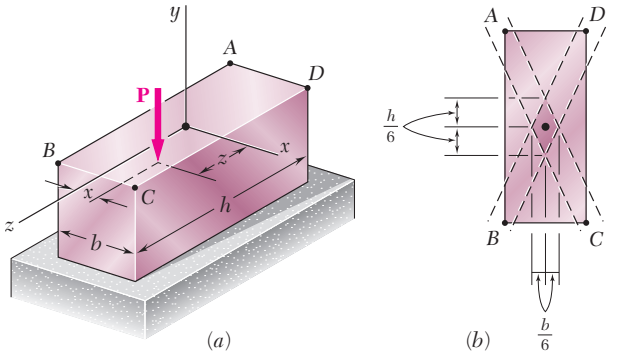


Fig. P4.154

4.155 (*a*) Mostre que, se uma força vertical **P** for aplicada ao ponto *A* da seção mostrada, a equação da linha neutra *BD* será

$$\left(\frac{x_A}{k_z^2}\right)x + \left(\frac{z_A}{k_x^2}\right)z = -1$$

em que k_z e k_x representam os raios de giração da seção transversal em relação ao eixo *z* e ao eixo *x*, respectivamente. (*b*) Mostre ainda que, se uma força vertical **Q** é aplicada a qualquer ponto localizado na linha *BD*, a tensão no ponto *A* será zero.

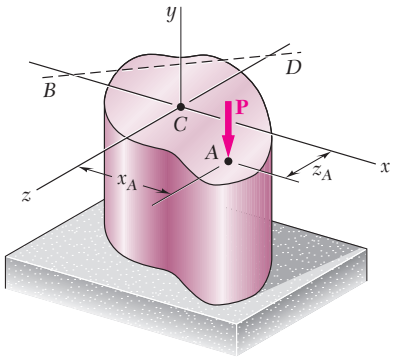


Fig. P4.155

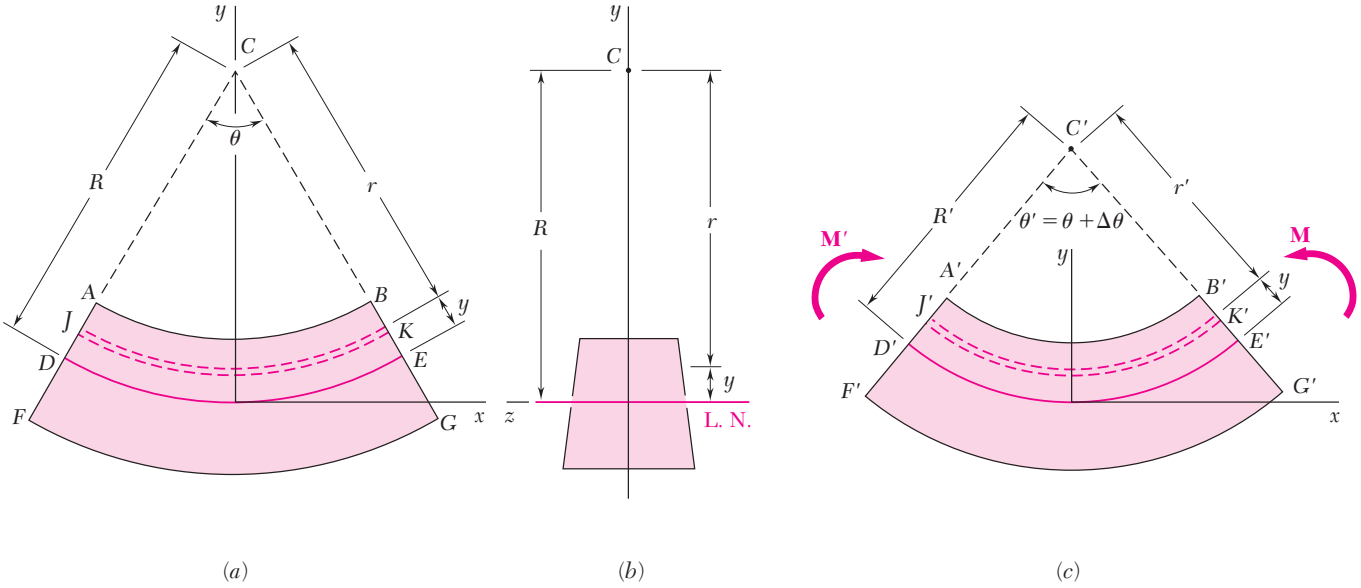
*4.15. Flexão de barras curvas

Nossa análise de tensões provocadas por flexão esteve restrita até agora a barras retas. Nesta seção vamos considerar as tensões provocadas pela aplicação de momentos fletores iguais e opostos a barras que inicialmente foram curvadas. Nossa discussão será limitada a barras curvas de seção transversal uniforme possuindo um plano de simetria no qual serão aplicados os momentos fletores, e consideraremos que todas as tensões permanecem abaixo do limite de proporcionalidade.

Se a curvatura inicial da barra é pequena, isto é, se seu raio de curvatura é grande quando comparado com a altura de sua seção transversal, uma boa aproximação para a distribuição de tensões pode ser obtida considerando a barra reta e usando as fórmulas deduzidas nas Seções 4.3 e 4.4.† No entanto, quando o raio de curvatura e as dimensões da seção transversal da barra são da mesma ordem de grandeza, devemos usar um método de análise diferente, que foi primeiramente introduzido pelo engenheiro alemão E. Winkler (1835-1888).

†Veja o Problema 4.185.

Considere a barra curva de seção transversal uniforme mostrada na Fig. 4.76. Sua seção transversal é simétrica em relação ao eixo y (Fig. 4.76*b*) e, em seu estado sem tensão, suas superfícies superior e inferior interceptam o plano vertical xy ao longo dos arcos de circunferência AB e FG centrados em C (Fig. 4.76*a*). Agora aplicaremos dois momentos fletores iguais e



(*a*) (*b*) (*c*)

Fig. 4.76

opostos **M** e **M′** no plano de simetria da barra (Fig. 4.76*c*). Um raciocínio similar àquele da Seção 4.3 mostraria que qualquer seção transversal plana contendo C permanecerá plana, e que os vários arcos de circunferência, indicados na Fig. 4.76*a*, serão transformados em arcos de circunferências concêntricos com um centro C' diferente de C. Mais especificamente, se os momentos fletores **M** e **M′** forem direcionados conforme mostra a figura, a curvatura dos vários arcos de circunferência aumentará; ou seja, $A'C' < AC$. Notamos também que os momentos fletores **M** e **M′** farão diminuir o comprimento da superfície superior da barra ($A'B' < AB$) e farão aumentar o comprimento da superfície inferior ($F'G' > FG$). Concluímos que deve existir uma *superfície neutra* na barra cujo comprimento permanece constante. A intersecção da superfície neutra com o plano xy foi representada na Fig. 4.76*a* pelo arco DE de raio R, e na Fig. 4.76*c* pelo arco $D'E'$ de raio R'. Chamando de θ e θ' os ângulos centrais correspondendo, respectivamente, aos arcos DE e $D'E'$, expressamos o fato de que o comprimento da superfície neutra permanece constante escrevendo

$$R\theta = R'\theta' \tag{4.59}$$

Considerando agora o arco de circunferência JK localizado a uma distância y acima da superfície neutra, e chamando, respectivamente, de r e r' os raios desse arco antes e depois que os momentos fletores foram aplicados, expressamos a deformação de JK como

$$\delta = r'\theta' - r\theta \tag{4.60}$$

Observando na Fig. 4.76 que

$$r = R - y \qquad r' = R' - y \tag{4.61}$$

e substituindo essas expressões na Equação (4.60), escrevemos

$$\delta = (R' - y)\theta' - (R - y)\theta$$

ou, usando a Equação (4.59) e fazendo $\theta' - \theta = \Delta\theta$,

$$\delta = -y\,\Delta\theta \tag{4.62}$$

A deformação específica normal ϵ_x de JK é obtida dividindo-se a deformação δ pelo comprimento original $r\theta$ do arco JK. Escrevemos

$$\epsilon_x = \frac{\delta}{r\theta} = -\frac{y\,\Delta\theta}{r\theta}$$

ou, usando a primeira das relações (4.61),

$$\epsilon_x = -\frac{\Delta\theta}{\theta}\frac{y}{R - y} \tag{4.63}$$

A relação obtida mostra que, embora cada seção transversal permaneça plana, a deformação específica normal ϵ_x *não varia linearmente* com a distância y da superfície neutra.

A tensão normal σ_x pode agora ser obtida da lei de Hooke, $\sigma_x = E\epsilon_x$, substituindo ϵ_x da Equação (4.63). Temos

$$\sigma_x = -\frac{E\,\Delta\theta}{\theta}\frac{y}{R - y} \tag{4.64}$$

ou, alternativamente, usando a primeira das Equações (4.61),

$$\sigma_x = -\frac{E\,\Delta\theta}{\theta}\frac{R - r}{r} \tag{4.65}$$

A Equação (4.64) mostra que, assim como ϵ_x, a tensão normal σ_x *não varia linearmente* com a distância y da superfície neutra. Construindo o gráfico de σ_x em função de y, obtemos um arco de hipérbole (Fig. 4.77).

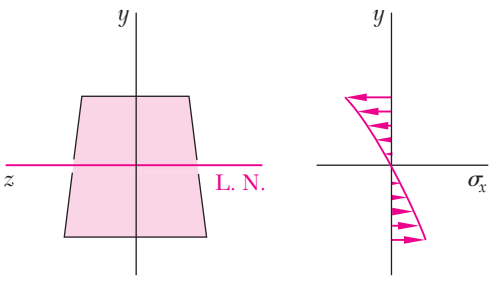


Fig. 4.77

Para determinar a localização da superfície neutra na barra e o valor do coeficiente $E\ \Delta\theta/\theta$ usado nas Equações (4.64) e (4.65), lembramos agora que as forças elementares atuando em qualquer seção transversal devem ser estaticamente equivalentes ao momento fletor **M**. Considerando, conforme fizemos na Seção 4.2 para uma barra reta, ou seja, que a soma das forças elementares atuando em uma seção deva ser zero, e que a soma de seus momentos em relação ao eixo z transversal deva ser igual ao momento fletor M, escrevemos as equações

$$\int \sigma_x \, dA = 0 \tag{4.1}$$

e

$$\int (-y\sigma_x \, dA) = M \tag{4.3}$$

Substituindo o valor de σ_x dado por (4.65) na Equação (4.1), escrevemos

$$-\int \frac{E\ \Delta\theta}{\theta} \frac{R - r}{r} dA = 0$$

$$\int \frac{R - r}{r} dA = 0$$

$$R \int \frac{dA}{r} - \int dA = 0$$

da qual se conclui que a distância R do centro de curvatura C até a superfície neutra é definida pela relação

$$R = \frac{A}{\displaystyle\int \frac{dA}{r}} \tag{4.66}$$

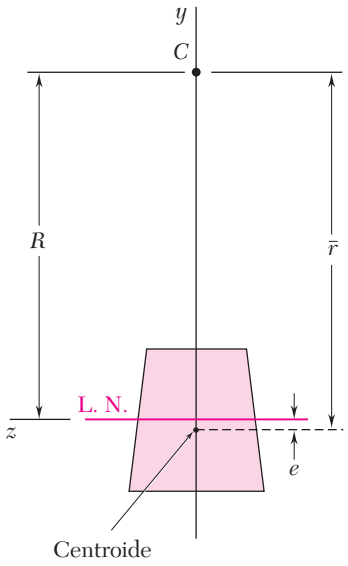


Fig. 4.78

Notamos que o valor obtido para R não é igual à distância $\bar{r}$ de C até o centroide da seção transversal, pois $\bar{r}$ é definido por uma relação diferente, a saber,

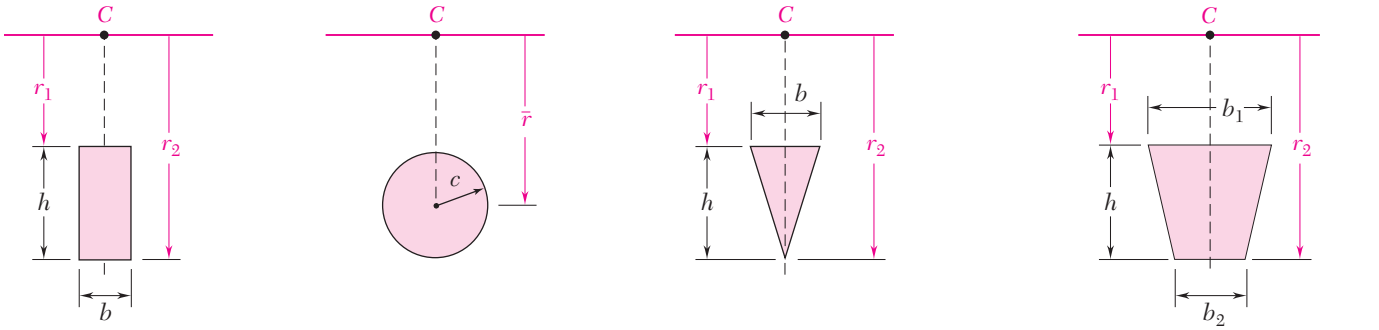
$$\bar{r} = \frac{1}{A} \int r \, dA \tag{4.67}$$

Concluímos então que, em uma barra curva, *a linha neutra de uma seção transversal não passa pelo centroide daquela seção* (Fig. 4.78).† No Exemplo 4.10 e nos Problemas 4.207 a 4.209, deduziremos expressões para o raio R da superfície neutra para algumas formas específicas de seção transversal. Por conveniência, essas expressões são mostradas na Fig. 4.79.

†No entanto, uma propriedade interessante da superfície neutra pode ser notada se escrevermos a Equação (4.66) em uma forma alternativa

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{A} \int \frac{1}{r} dA \tag{4.66′}$$

A Equação (4.66′) mostra que, se a barra é dividida em um grande número de fibras com seção transversal de área dA, a curvatura $1/R$ da superfície neutra será igual ao valor médio da curvatura $1/r$ das várias fibras.



Retângulo

$$R = \frac{h}{\ln \dfrac{r_2}{r_1}}$$

Círculo

$$R = \tfrac{1}{2}\left(\bar{r} + \sqrt{\bar{r}^2 - c^2}\right)$$

Triângulo

$$R = \frac{\frac{1}{2}h}{\dfrac{r_2}{h}\ln\dfrac{r_2}{r_1} - 1}$$

Trapézio

$$R = \frac{\frac{1}{2}h^2(b_1 + b_2)}{(b_1 r_2 - b_2 r_1)\ln\dfrac{r_2}{r_1} - h(b_1 - b_2)}$$

Fig. 4.79 Raio da superfície neutra de várias formas de seção transversal.

Substituindo agora o valor de σ_x dado por (4.65) na Equação (4.3), escrevemos

$$\int \frac{E\,\Delta\theta}{\theta}\frac{R - r}{r} y\,dA = M$$

ou, como $y = R - r$,

$$\frac{E\,\Delta\theta}{\theta}\int \frac{(R - r)^2}{r}dA = M$$

Desenvolvendo o quadrado no integrando, obtemos após as reduções

$$\frac{E\,\Delta\theta}{\theta}\left[R^2\int\frac{dA}{r} - 2RA + \int r\,dA\right] = M$$

Revendo as Equações (4.66) e (4.67), notamos que o primeiro termo entre colchetes é igual a RA, enquanto o último termo é igual a $\bar{r}$A. Temos, portanto,

$$\frac{E\,\Delta\theta}{\theta}(RA - 2RA + \bar{r}A) = M$$

e, resolvendo para $E\,\Delta\theta/\theta$,

$$\frac{E\,\Delta\theta}{\theta} = \frac{M}{A(\bar{r} - R)} \tag{4.68}$$

Examinando a Fig. 4.76, notamos que $\Delta\theta > 0$ para $M > 0$. Segue-se que $\bar{r} - R > 0$, ou $R < \bar{r}$, independentemente da forma da seção. Assim, a linha neutra de uma seção transversal está sempre localizada entre o centroide da seção e o centro de curvatura da barra (Fig. 4.78). Fazendo $\bar{r} - \mathrm{R} = e$, escrevemos a Equação (4.68) na forma

$$\frac{E\,\Delta\theta}{\theta} = \frac{M}{Ae} \tag{4.69}$$

Substituindo agora $E\,\Delta\theta/\theta$ de (4.69) nas Equações (4.64) e (4.65), obtemos as seguintes expressões alternativas para a tensão normal σ_x em uma viga curva:

$$\sigma_x = -\frac{My}{Ae(R-y)} \tag{4.70}$$

e

$$\sigma_x = \frac{M(r-R)}{Aer} \tag{4.71}$$

Devemos notar que o parâmetro e nas equações acima é um valor pequeno obtido ao subtrair dois comprimentos de valores muito próximos, R e $\bar{r}$. Para determinar σ_x com um grau razoável de precisão, é necessário portanto calcular R e $\bar{r}$ com muita precisão, particularmente quando ambos os valores são grandes, isto é, quando a curvatura da barra é pequena. No entanto, conforme indicamos anteriormente, é possível nesse caso obter uma boa aproximação para σ_x usando a fórmula $\sigma_x = -My/I$ desenvolvida para barras retas.

Vamos agora determinar a variação na curvatura da superfície neutra provocada pelo momento fletor M. Resolvendo a Equação (4.59) para a curvatura $1/R'$ da superfície neutra na barra deformada, escrevemos

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R}\frac{\theta'}{\theta}$$

ou, fazendo $\theta' = \theta + \Delta\theta$ e usando a Equação (4.69),

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R}\left(1 + \frac{\Delta\theta}{\theta}\right) = \frac{1}{R}\left(1 + \frac{M}{EAe}\right)$$

com a qual se conclui que a variação na curvatura da superfície neutra é

$$\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} = \frac{M}{EAeR} \tag{4.72}$$

EXEMPLO 4.10

Uma barra retangular curva tem um raio médio $\bar{r} = 150$ mm e uma seção transversal de largura $b = 65$ mm e altura $h = 40$ mm (Fig. 4.80). Determine a distância e entre o centroide e a linha neutra da seção transversal.

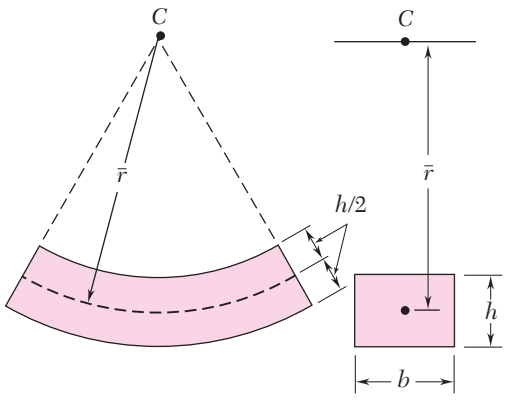


Fig. 4.80

Primeiro determinamos a expressão para o raio R da superfície neutra. Chamando de r_1 e r_2, respectivamente, os raios

interno e externo da barra (Fig. 4.81), usamos a Equação (4.66) e escrevemos

$$R = \frac{A}{\displaystyle\int_{r_1}^{r_2} \frac{dA}{r}} = \frac{bh}{\displaystyle\int_{r_1}^{r_2} \frac{b\,dr}{r}} = \frac{h}{\displaystyle\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r}}$$

$$R = \frac{h}{\ln \dfrac{r_2}{r_1}} \tag{4.73}$$

Para os dados fornecidos, temos

$$r_1 = \bar{r} - \tfrac{1}{2}h = 150 - 20 = 130 \text{ mm}$$
$$r_2 = \bar{r} + \tfrac{1}{2}h = 150 + 20 = 170 \text{ mm}$$

Substituindo os valores de h, r_1 e r_2 na Equação (4.73) temos

$$R = \frac{h}{\ln \dfrac{r_2}{r_1}} = \frac{40 \text{ mm}}{\ln \dfrac{170}{130}} = 149{,}107 \text{ mm}$$

A distância entre o centroide e a linha neutra da seção transversal (Fig. 4.82) é então

$$e = \bar{r} - R = 150 - 149{,}107 = 0{,}893 \text{ mm}$$

Notamos que foi necessário calcular R com seis algarismos significativos para obter e com um grau de precisão razoável.

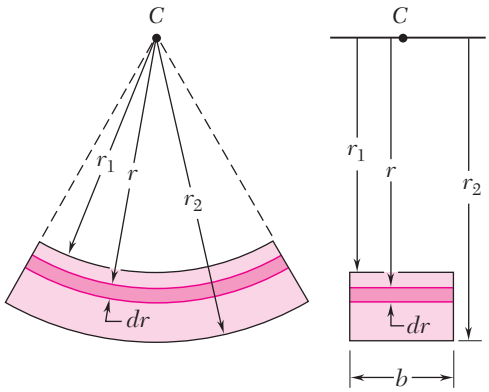


Fig. 4.81

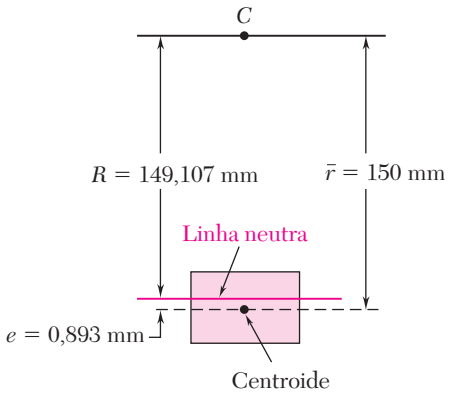


Fig. 4.82

EXEMPLO 4.11

Para a barra do Exemplo 4.10, determine as maiores tensões de tração e compressão, sabendo que o momento fletor na barra é $M = 900 \text{ N} \cdot \text{m}$.

Usamos a Equação (4.71) com os dados fornecidos,

$$M = 900 \text{ N} \cdot \text{m} \quad A = bh = (65 \text{ mm})(40 \text{ mm}) = 2600 \text{ mm}^2$$

e os valores obtidos no Exemplo 4.10 para R e e,

$$R = 149{,}107 \text{ mm} \qquad e = 0{,}893 \text{ mm}$$

Fazendo primeiro $r = r_2 = 170$ mm na Equação (4.71), escrevemos

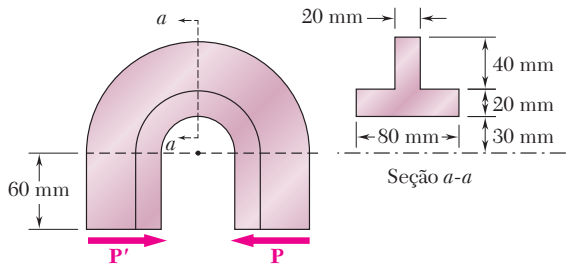
$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M(r_2 - R)}{Aer_2}$$
$$= \frac{(900 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{mm})(170 \text{ mm} - 149{,}107 \text{ mm})}{(2600 \text{ mm}^2)(0{,}893 \text{ mm})(170 \text{ mm})}$$
$$\sigma_{\text{máx}} = 47{,}6 \text{ MPa}$$

Fazendo agora $r = r_1 = 130$ mm na Equação (4.71), temos

$$\sigma_{\text{mín}} = \frac{M(r_1 - R)}{Aer_1}$$
$$= \frac{(900 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{mm})(130 \text{ mm} - 149{,}107 \text{ mm})}{(2600 \text{ mm}^2)(0{,}893 \text{ mm})(130 \text{ mm})}$$
$$\sigma_{\text{mín}} = -57{,}0 \text{ MPa}$$

Observação. Vamos comparar os valores obtidos para $\sigma_{\text{máx}}$ e $\sigma_{\text{mín}}$ com o resultado que obteríamos para uma barra reta. Usando a Equação (4.15) da Seção 4.4, escrevemos

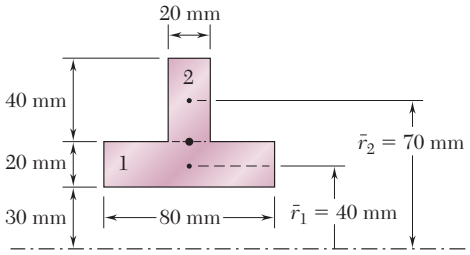
$$\sigma_{\text{máx, mín}} = \pm \frac{Mc}{I}$$
$$= \pm \frac{(900 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{mm})(20 \text{ mm})}{\frac{1}{12}(65 \text{ mm})(40 \text{ mm})^3} = \pm 51{,}9 \text{ MPa}$$



PROBLEMA RESOLVIDO 4.11

Um componente de máquina tem uma seção transversal em forma de T e está submetido a um carregamento conforme mostra a figura. Sabendo que a tensão de compressão admissível é de 50 MPa, determine a maior força **P** que pode ser aplicada ao componente.

SOLUÇÃO



Centroide da seção transversal. Localizamos o centroide D da seção transversal

	A_i, mm²	$\bar{r}_i$, mm	$\bar{r}_i A_i$, mm³
1	(20)(80) = 1600	40	64×10^3
2	(40)(20) = 800	70	56×10^3
	$\Sigma A_i = 2400$		$\Sigma \bar{r}_i A_i = 120 \times 10^3$

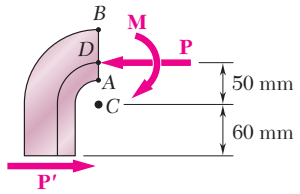
$\bar{r} \Sigma A_i = \Sigma \bar{r}_i A_i$

$\bar{r}(2400) = 120 \times 10^3$

$\bar{r} = 50 \text{ mm} = 0{,}050 \text{ m}$

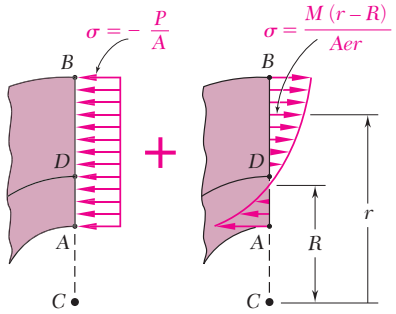
Força e momento fletor em *D*. Os esforços internos na seção *a-a* são equivalentes à força **P** atuando em D e a um momento fletor **M**

$$M = P(50 \text{ mm} + 60 \text{ mm}) = (0{,}110 \text{ m})P$$



Superposição. A força centrada **P** provoca uma força de compressão uniforme na seção *a-a*. O momento fletor **M** provoca uma distribuição de tensão variável [Equação (4.71)]. Notamos que o momento **M** tende a aumentar a curvatura da barra e, portanto, é positivo (cf. Fig. 4.76). A tensão total em um ponto da seção *a-a* localizado a uma distância r do centro de curvatura C é

$$\sigma = -\frac{P}{A} + \frac{M(r - R)}{Aer} \tag{1}$$



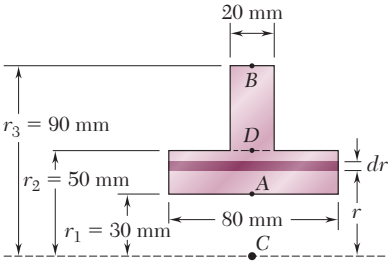
Raio da superfície neutra. Determinamos agora o raio R da superfície neutra usando a Equação (4.66).

$$R = \frac{A}{\int \frac{dA}{r}} = \frac{2400 \text{ mm}^2}{\int_{r_1}^{r_2} \frac{(80 \text{ mm})\,dr}{r} + \int_{r_2}^{r_3} \frac{(20 \text{ mm})\,dr}{r}}$$

$$= \frac{2400}{80 \ln \frac{50}{30} + 20 \ln \frac{90}{50}} = \frac{2400}{40{,}866 + 11{,}756} = 45{,}61 \text{ mm}$$

$$= 0{,}04561 \text{ m}$$

Computamos também: $e = \bar{r} - R = 0{,}05000 \text{ m} - 0{,}04561 \text{ m} = 0{,}00439 \text{ m}$



Força admissível. Observamos que a maior força de compressão ocorrerá no ponto A em que $r = 0{,}030$ m. Lembrando que $\sigma_{adm} = 50$ MPa e usando a Equação (1), escrevemos

$$-50 \times 10^6 \text{ Pa} = -\frac{P}{2{,}4 \times 10^{-3} \text{ m}^2} + \frac{(0{,}110 \text{ P})(0{,}030 \text{ m} - 0{,}04561 \text{ m})}{(2{,}4 \times 10^{-3} \text{ m}^2)(0{,}00439 \text{ m})(0{,}030 \text{ m})}$$

$$-50 \times 10^6 = -417P - 5432P \qquad P = 8{,}55 \text{ kN} \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

4.156 Para a barra curva e o carregamento mostrados na figura, determine a tensão no ponto A quando (*a*) $r_1 = 30{,}5$ mm e (*b*) $r_1 = 50{,}8$ mm.

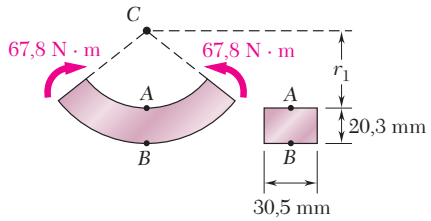


Fig. P4.156 e P4.157

4.157 Para a barra curva e o carregamento mostrados na figura, determine a tensão nos pontos A e B quando $r_1 = 40{,}6$ mm.

4.158 Para a barra curva mostrada na figura, determine a tensão nos pontos A e B quando $h = 55$ mm.

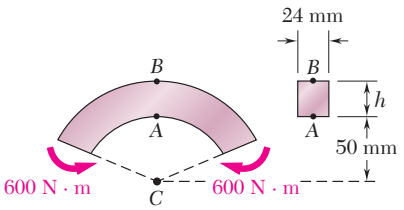


Fig. P4.158 e *P4.159*

4.159 Para a barra curva mostrada na figura, determine a tensão no ponto A quando (*a*) $h = 50$ mm e (*b*) $h = 60$ mm.

4.160 A parte curva da barra mostrada na figura tem um raio interno de 20 mm. Sabendo que a tensão admissível na barra é de 150 MPa, determine a maior distância a possível da linha de ação da força de 3 kN até o plano vertical contendo o centro de curvatura da barra.

4.161 A parte curva da barra mostrada na figura tem um raio interno de 20 mm. Sabendo que a linha de ação da força de 3 kN está localizada a uma distância $a = 60$ mm do plano vertical contendo o centro de curvatura da barra, determine a maior tensão de compressão na barra.

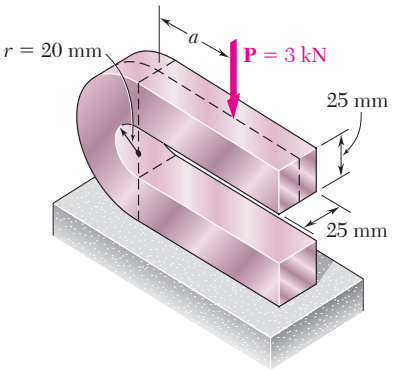


Fig. P4.160 e *P4.161*

4.162 Para o anel aberto mostrado na figura, determine a tensão no (*a*) ponto *A* e (*b*) ponto *B*.

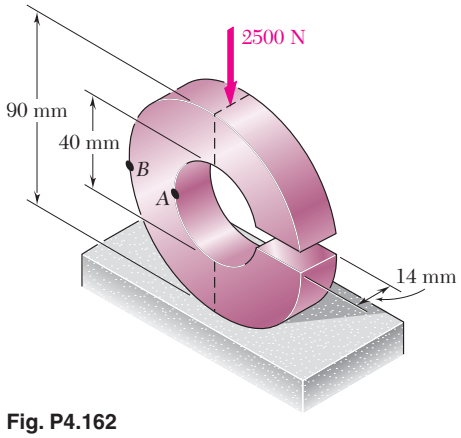


Fig. P4.162

4.163 As chapas de ligação de aço com a seção transversal mostrada na figura estão disponíveis com diferentes ângulos centrais β. Sabendo que a tensão admissível é de 82,7 MPa, determine a maior força **P** que pode ser aplicada a uma chapa de ligação para a qual $\beta = 90°$.

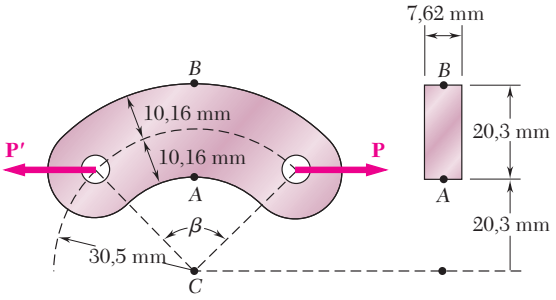


Fig. P4.163

4.164 Resolva o Problema 4.163 considerando que $\beta = 60°$.

4.165 Três chapas são soldadas umas às outras para formar a barra curva mostrada na figura. Para o carregamento dado, determine a distância *e* entre a linha neutra e o centroide da seção transversal.

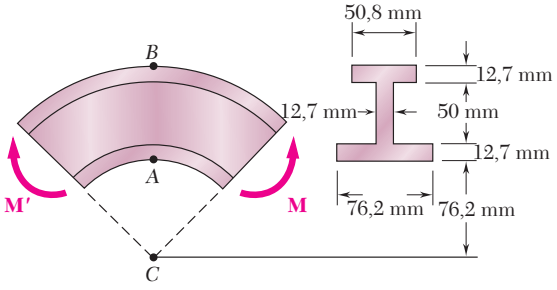


Fig. *P4.165* e P4.166

4.166 Três chapas são soldadas umas às outras para formar a barra curva mostrada na figura. Para $M = 904$ kN · mm, determine a tensão no (*a*) ponto *A*, (*b*) ponto *B* e (c) o centroide da seção transversal.

4.167 e 4.168 Sabendo que $M = 20$ kN · m, determine a tensão no (*a*) ponto *A* e (*b*) ponto *B*.

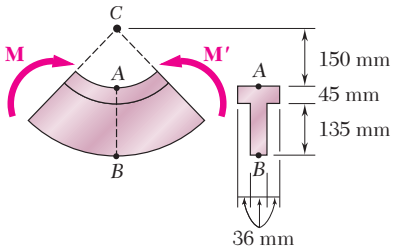


Fig. P4.167

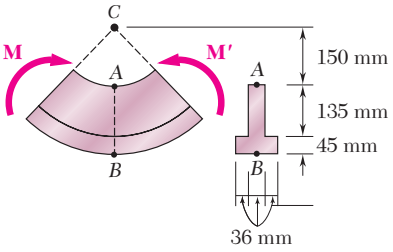


Fig. P4.168

4.169 O anel aberto mostrado na figura tem um raio interno $r_1 = 20$ mm e uma seção transversal circular de diâmetro $d = 32$ mm. Para o carregamento mostrado, determine a tensão no (*a*) ponto *A* e (*b*) ponto *B*.

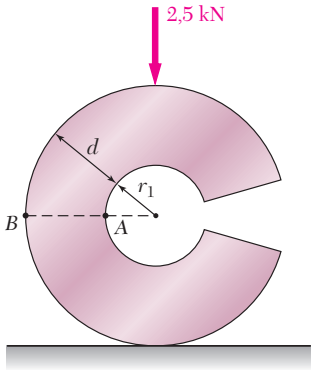


Fig. P4.169 e P4.170

4.170 O anel aberto mostrado na figura tem um raio interno $r_1 = 16$ mm e uma seção transversal *circular* de diâmetro $d = 32$ mm. Para o carregamento mostrado, determine a tensão no (*a*) ponto *A* e (*b*) ponto *B*.

4.171 O anel aberto mostrado na figura tem um raio interno $r_1 = 20{,}3$ mm e uma seção transversal circular de diâmetro $d = 15{,}24$ mm. Sabendo que cada uma das forças de 534 N é aplicada ao centroide da seção transversal, determine a tensão no (*a*) ponto *A* e (*b*) ponto *B*.

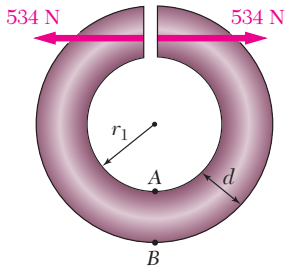


Fig. P4.171

4.172 Resolva o Problema 4.171 considerando que o anel tem um raio interno $r_1 = 15{,}24$ mm e uma seção transversal circular de diâmetro $d = 20{,}3$ mm.

4.173 Para o gancho de guindaste mostrado na figura, determine a maior tensão de tração na seção *a*-*a*.

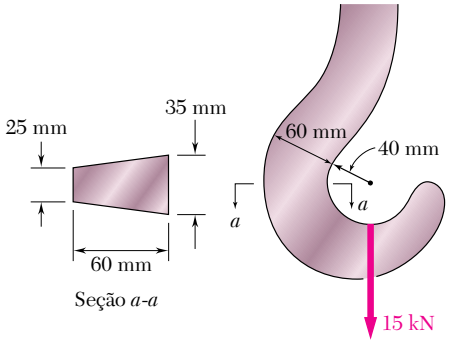


Fig. *P4.173*

4.174 Para a viga curva e o carregamento indicados na figura, determine a tensão no (*a*) ponto *A* e (*b*) ponto *B*.

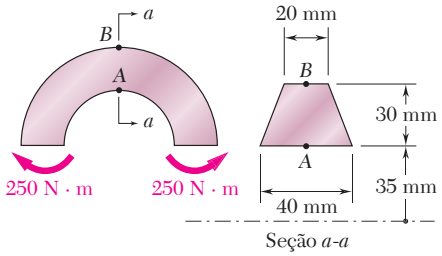


Fig. P4.174

4.175 Sabendo que o componente de máquina mostrado na figura tem uma seção transversal trapezoidal com $a = 88{,}9$ mm e $b = 63{,}5$ mm, determine a tensão no (*a*) ponto *A* e (*b*) ponto *B*.

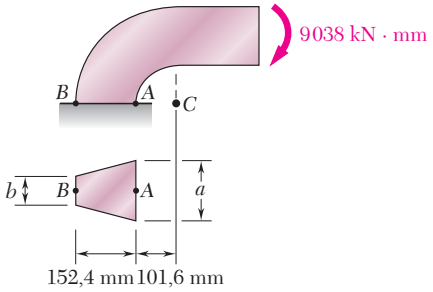


Fig. *P4.175* e P4.176

4.176 Sabendo que o componente de máquina mostrado tem uma seção transversal trapezoidal com $a = 63{,}5$ mm e $b = 88{,}9$ mm, determine a tensão no (*a*) ponto *A* e (*b*) ponto *B*.

4.177 e *4.178* Sabendo que $M = 565\ \text{N} \cdot \text{m}$, determine a tensão no (*a*) ponto *A* e (*b*) ponto *B*.

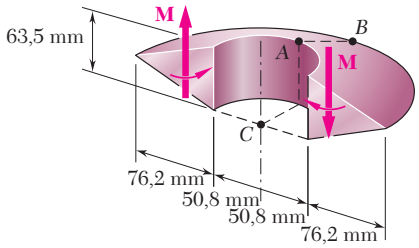


Fig. P4.177

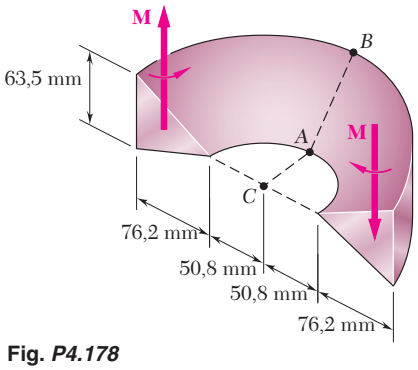


Fig. *P4.178*

4.179 Mostre que, caso a seção transversal de uma viga curva consista em dois ou mais retângulos, o raio *R* da superfície neutra poderá ser expresso como

$$R = \frac{A}{\ln\left[\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{b_1}\left(\frac{r_3}{r_2}\right)^{b_2}\left(\frac{r_4}{r_3}\right)^{b_3}\right]}$$

em que *A* é a área total da seção transversal.

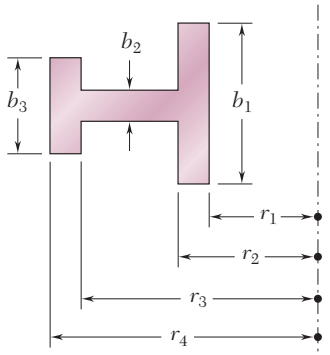


Fig. P4.179

4.180 até 4.182 Usando a Equação (4.66), determine a expressão para *R* dada na Fig. 4.79 para

***4.180** Uma seção transversal circular.

4.181 Uma seção transversal trapezoidal.

4.182 Uma seção transversal triangular.

***4.183** Para a barra curva de seção transversal retangular submetida a um momento fletor **M**, mostre que a tensão radial na superfície neutra é

$$\sigma_r = \frac{M}{Ae}\left(1 - \frac{r_1}{R} - \ln\frac{R}{r_1}\right)$$

e compare o valor de σ_r para a barra curva dos Exemplos 4.10 e 4.11. (*Sugestão*: considere o diagrama de corpo livre da parte da barra localizada acima da superfície neutra.)

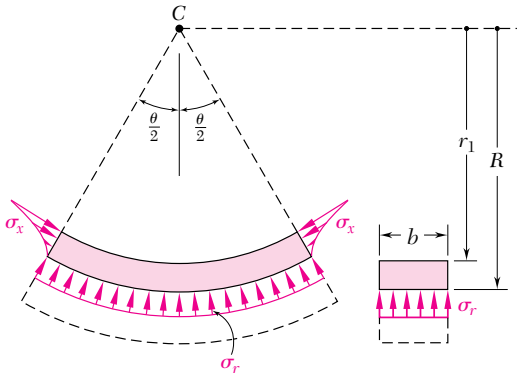


Fig. P4.183

REVISÃO E RESUMO DO CAPÍTULO 4

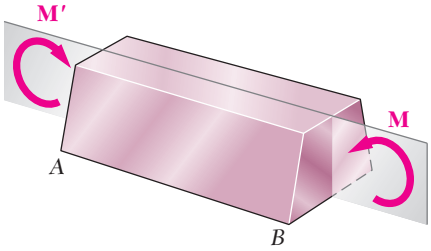


Fig. 4.1

Deformação específica normal em flexão

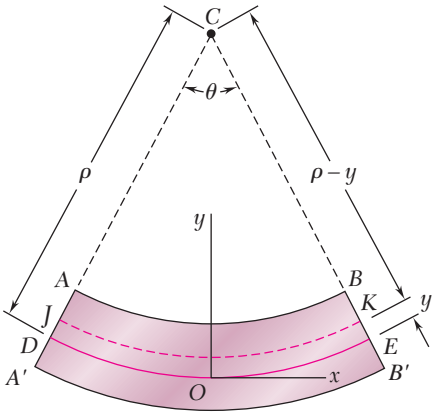


Fig. 4.12*a*

Tensão normal no regime elástico

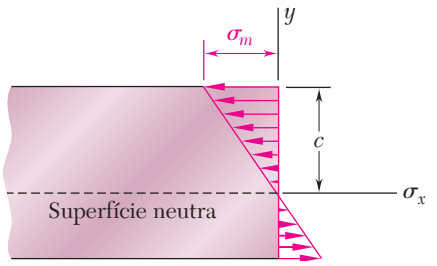


Fig. 4.13

Fórmula da flexão elástica

Este capítulo foi dedicado à análise de barras em *flexão pura*. Ou seja, consideramos as tensões e deformações em componentes submetidos a momentos fletores **M** e **M′** iguais e opostos, atuando no mesmo plano longitudinal (Fig. 4.1).

Primeiro estudamos as barras que possuem um plano de simetria e estão sujeitas a momentos atuando naquele plano. Considerando as possíveis deformações de uma barra, provamos que *seções transversais permanecem planas* à medida que a barra é deformada [Seção 4.3]. Notamos então que a barra em flexão pura tem uma *superfície neutra* ao longo da qual as tensões e deformações normais são zero, e que a *deformação específica normal longitudinal* ϵ_x *varia linearmente* com a distância y da superfície neutra:

$$\epsilon_x = -\frac{y}{\rho} \tag{4.8}$$

em que ρ é o *raio de curvatura* da superfície neutra (Fig. 4.12*a*). A intersecção da superfície neutra com a seção transversal é conhecida como *linha neutra* da seção transversal.

Para barras feitas de um material que segue a lei de Hooke [Seção 4.4], verificamos que a *tensão normal* σ_x *varia linearmente* com a distância da linha neutra (Fig. 4.13). Chamando de σ_m a tensão máxima, escrevemos

$$\sigma_x = -\frac{y}{c}\sigma_m \tag{4.12}$$

em que c é a maior distância da linha neutra até um ponto na seção.

Igualando a zero a soma das forças elementares, $\sigma_x dA$, provamos que a *linha neutra passa pelo centroide* da seção transversal de uma barra em flexão pura. Fazendo a soma dos momentos das forças elementares igual ao momento fletor, determinamos a *fórmula da flexão elástica* para a tensão normal máxima

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} \tag{4.15}$$

em que I é o momento de inércia da seção transversal em relação à linha neutra. Obtivemos também a tensão normal a qualquer distância y da linha neutra:

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \tag{4.16}$$

Observando que I e c dependem somente da geometria da seção transversal, introduzimos o *módulo de resistência à flexão*

$$W = \frac{I}{c} \tag{4.17}$$

Módulo de resistência à flexão

e depois usamos o módulo de resistência da seção para escrever uma expressão alternativa para a tensão normal máxima:

$$\sigma_m = \frac{M}{W} \tag{4.18}$$

Lembrando que a curvatura de uma barra é o inverso de seu raio de curvatura, expressamos a *curvatura* da barra como

Curvatura da barra

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \tag{4.21}$$

Na Seção 4.5, completamos nosso estudo da flexão de componentes homogêneos que possuem um plano de simetria, observando que as deformações ocorrem em um plano da seção transversal e resultam na *curvatura anticlástica* dos componentes.

Curvatura anticlástica

Em seguida, consideramos a flexão de barras feitas de vários materiais com *diferentes módulos de elasticidade* [Seção 4.6]. Embora as seções transversais permaneçam planas, vimos que, em geral, a *linha neutra não passa pelo centroide* da seção transversal composta (Fig. 4.24). Usando a relação entre os módulos de elasticidade dos materiais, obtivemos uma *seção transformada* que corresponde a uma barra equivalente feita inteiramente de um só material. Usamos então os métodos desenvolvidos anteriormente para determinar as tensões nessa barra homogênea equivalente (Fig. 4.26) e depois usamos novamente a relação entre os módulos de elasticidade para determinar as tensões na viga composta [Problemas Resolvidos 4.3 e 4.4].

Barras feitas de vários materiais

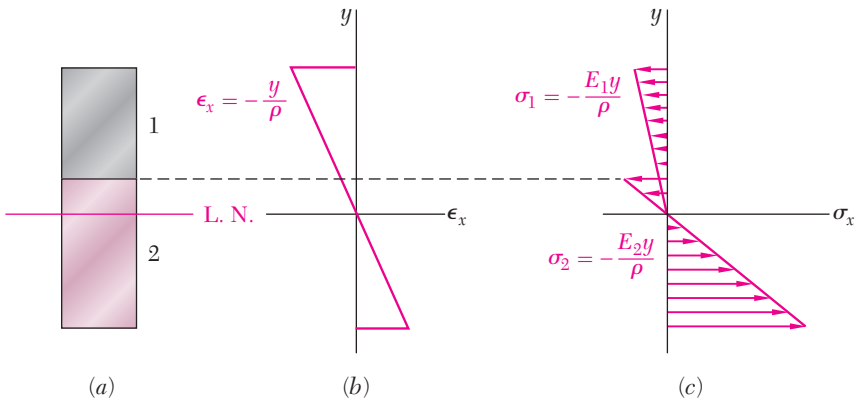


Fig. 4.24

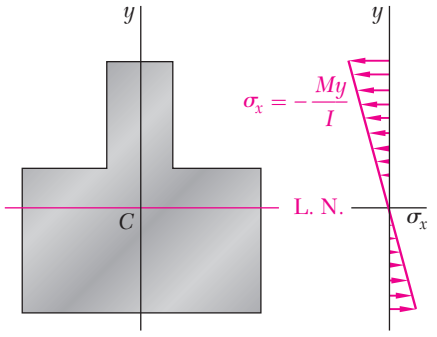


Fig. 4.26

Na Seção 4.7, discutimos as *concentrações de tensões* que ocorrem em componentes em flexão pura e apresentamos gráficos com os coeficientes de concentração de tensão para placas com adoçamentos e ranhuras, nas Figs. 4.31 e 4.32.

Concentrações de tensão

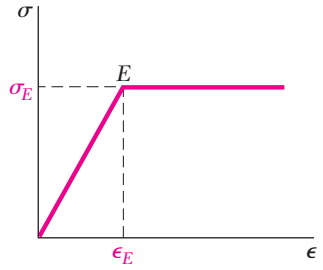


Fig. 4.39

Deformações plásticas

Estudamos em seguida as barras feitas de materiais que não seguem a lei de Hooke [Seção 4.8]. Foi analisada uma viga retangular feita de um *material elastoplástico* (Fig. 4.39) enquanto aumentava-se a intensidade do momento fletor. O *momento elástico máximo* M_E ocorreu quando o escoamento foi iniciado na viga (Fig. 4.40). À medida que o momento fletor aumentava ainda mais, desenvolveram-se zonas plásticas, e o tamanho do núcleo elástico da barra diminuiu [Seção 4.9]. Finalmente a viga tornou-se totalmente plástica e obtivemos o *momento plástico* M_p máximo. Na Seção 4.11, vimos que *deformações permanentes* e *tensões residuais* permanecem em uma barra depois que as forças que produziram o escoamento são removidas.

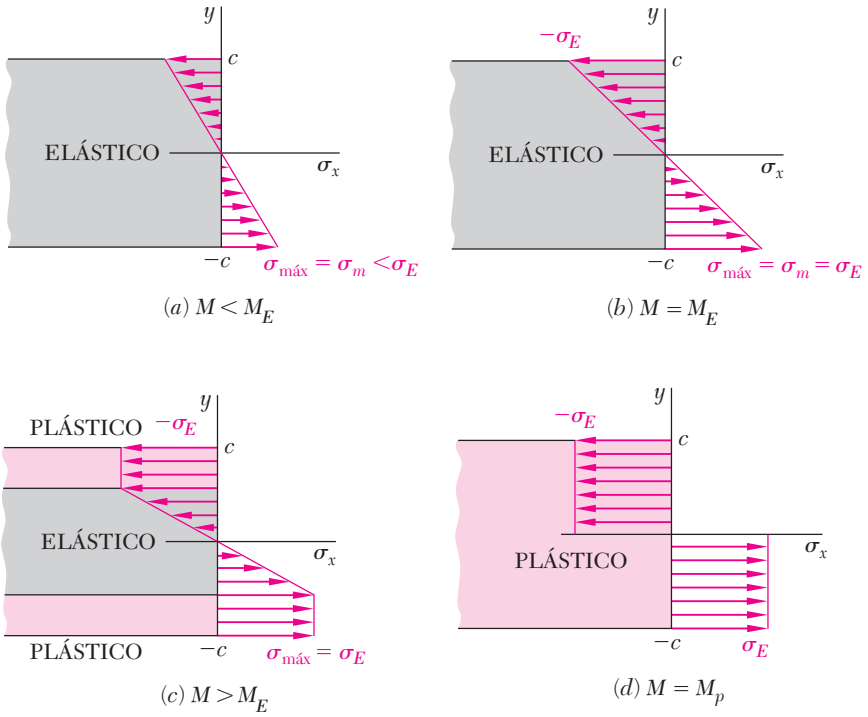


Fig. 4.40

Carregamento axial excêntrico

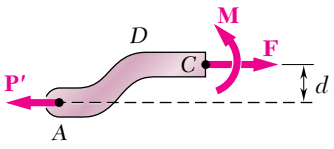


Fig. 4.48*b*

Na Seção 4.12, estudamos as tensões em componentes carregados *excentricamente em relação a um plano de simetria*. Nossa análise fez uso de métodos desenvolvidos anteriormente. Substituímos a *força excêntrica* por um sistema constituído de força e momento localizado no centroide da seção transversal (Fig. 4.48*b*) e depois fizemos a superposição das tensões provocadas pela força centrada e pelo momento fletor (Fig. 4.51):

$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{My}{I} \tag{4.50}$$

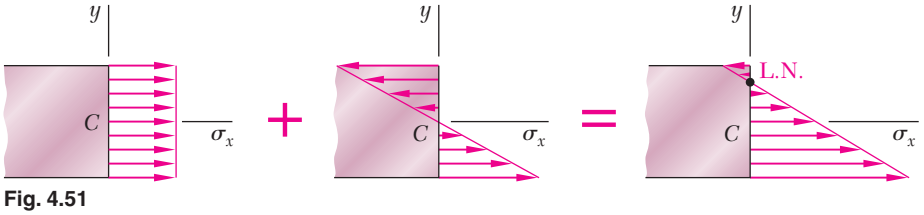


Fig. 4.51

A flexão de barras de *seção transversal assimétrica* foi considerada em seguida [Seção 4.13]. Vimos que a fórmula de flexão pode ser usada, desde que o vetor momento fletor **M** esteja direcionado ao longo de um dos eixos principais de inércia da seção transversal. Quando necessário

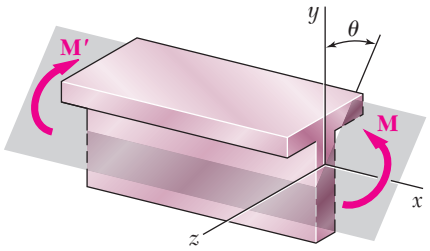


Fig. 4.60

decompomos **M** em componentes ao longo dos eixos principais de inércia e realizamos a superposição das tensões provocadas pelos momentos componentes (Figs. 4.60 e 4.61).

$$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} \tag{4.55}$$

Para o momento **M** mostrado na Fig. 4.65, determinamos a orientação da linha neutra escrevendo

$$\text{tg}\,\phi = \frac{I_z}{I_y}\,\text{tg}\,\theta \tag{4.57}$$

O caso geral de *carregamento axial excêntrico* foi considerado na Seção 4.14, a qual novamente substituímos a força pelo sistema constituído de força e momento localizado no centroide. A superposição das tensões provocadas pela força centrada e pelas duas componentes do momento direcionadas ao longo dos eixos principais produziu a seguinte equação:

$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} \tag{4.58}$$

O capítulo concluiu com a análise das tensões em *barras curvas* (Fig. 4.76*a*). Embora as seções transversais permaneçam planas quando o componente é submetido à flexão, vimos que *as tensões não variam linearmente* e a superfície neutra não passa pelo centroide da seção. A distância R do centro de curvatura do componente até a superfície neutra foi determinada como

$$R = \frac{A}{\displaystyle\int \frac{dA}{r}} \tag{4.66}$$

em que A é a área da seção transversal. A tensão normal a uma distância y da superfície neutra foi expressa como

$$\sigma_x = -\frac{My}{Ae(R - y)} \tag{4.70}$$

em que M é o momento fletor e e a distância do centroide da seção até a superfície neutra.

Flexão assimétrica

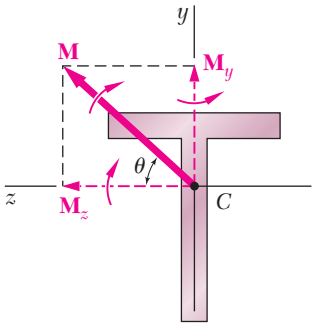


Fig. 4.61

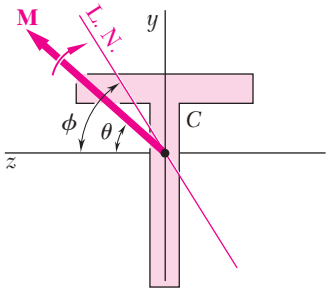


Fig. 4.65

Carregamento axial excêntrico geral

Barras curvas

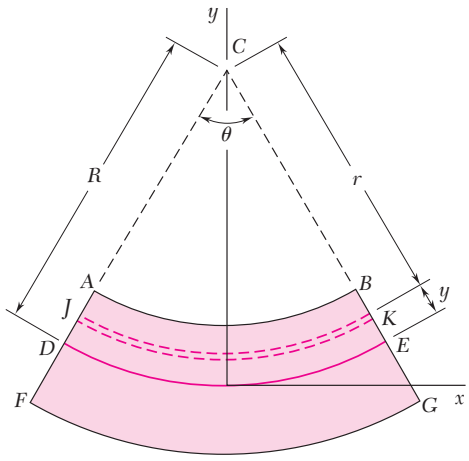


Fig. 4.76*a*

PROBLEMAS DE REVISÃO

4.184 e *4.185* Duas barras de perfil de aço laminado W100 × 19,3 são soldadas conforme mostra a figura. Sabendo que para a liga de aço usada $\sigma_E = 248$ MPa e $\tau_L = 400$ MPa, e usando um coeficiente de segurança de 3,0, determine o maior momento que pode ser aplicado quando o conjunto é flexionado em relação ao eixo z.

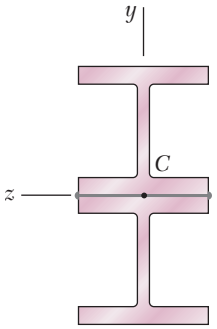


Fig. P4.184

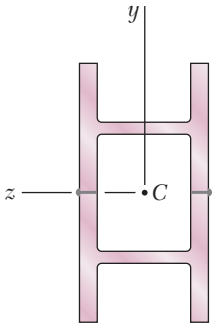


Fig. *P4.185*

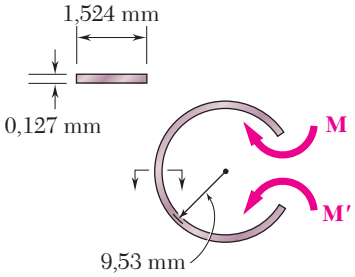


Fig. P4.186

4.186 Observa-se que a tira fina de aço com largura de 1,524 mm pode ser flexionada formando um círculo com 19,05 mm de diâmetro sem que deformações plásticas permanentes sejam produzidas. Sabendo que $E = 200$ GPa, determine (*a*) a máxima tensão na tira flexionada e (*b*) a intensidade dos conjugados necessários para flexioná-la.

4.187 Uma barra com a seção transversal mostrada foi feita aderindo firmemente as partes de latão e alumínio. Usando os dados da tabela, determine o máximo momento de flexão possível quando a barra composta for flexionada em relação ao eixo horizontal.

	Alumínio	**Latão**
Módulo de elasticidade	70 GPa	105 GPa
Tensão admissível	100 MPa	160 MPa

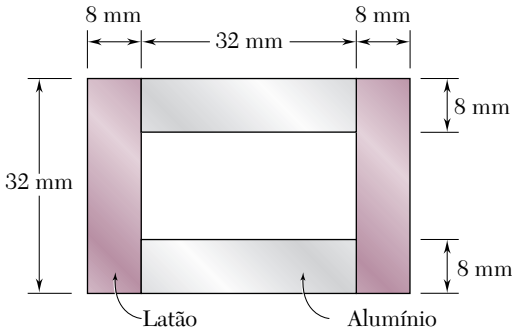


Fig. P4.187

4.188 Para a barra composta do problema 4.187, determine o momento máximo de flexão possível quando a barra é flexionada em relação ao eixo vertical.

4.189 Podem ser aplicadas até três forças axiais, cada uma de intensidade $P = 44{,}5$ kN, à extremidade de um perfil de aço laminado W200 × 31,3. Determine a tensão no ponto A, (*a*) para o carregamento mostrado, (*b*) se as forças forem aplicadas aos pontos 1 e 2 somente.

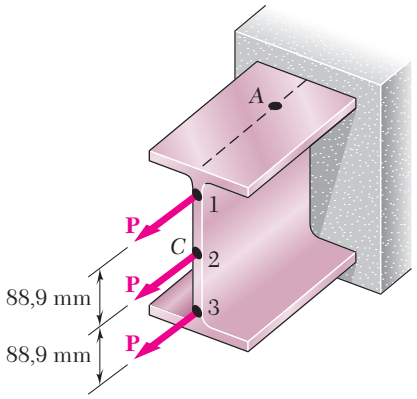


Fig. P4.189

4.190 Três placas de aço de 120 mm × 10 mm foram soldadas para formar uma viga mostrada na figura. Considerando que o aço seja elastoplástico com $E = 200$ GPa e $\sigma_E = 300$ MPa, determine (*a*) o momento fletor para o qual as zonas plásticas na parte de cima e debaixo da viga tenham a espessura de 40 mm e (*b*) o raio de curvatura correspondente da viga.

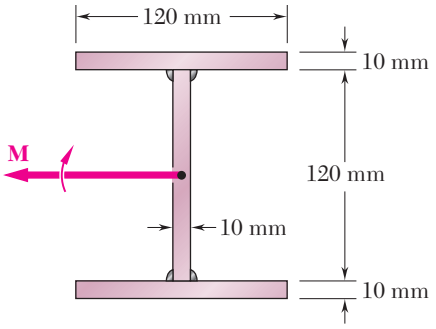


Fig. P4.190

4.191 Uma força vertical **P** de intensidade 89 kN é aplicada a um ponto C localizado no eixo de simetria da seção transversal de uma coluna curta. Sabendo que $y = 127$ mm, determine (*a*) a tensão no ponto A, (*b*) a tensão no ponto B e (*c*) a localização da linha neutra.

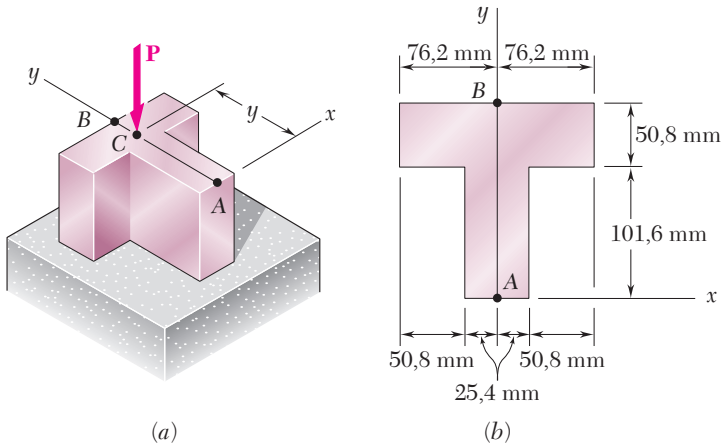


Fig. *P4.191*

4.192 O perfil mostrado é formado pela flexão de uma placa fina de aço. Considerando que a espessura t é pequena quando comparada ao comprimento a dos lados do perfil, determine a tensão (a) no ponto A, (b) no ponto B e (c) no ponto C.

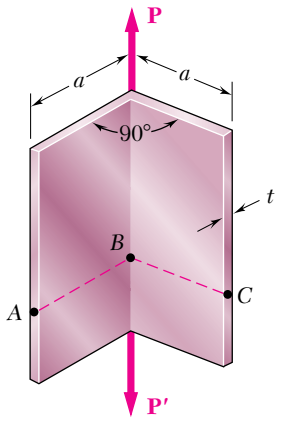


Fig. P4.192

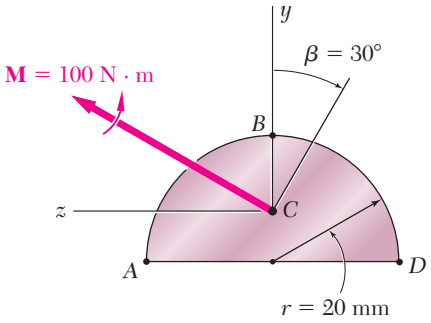


Fig. P4.193

4.193 O conjugado **M** é aplicado a uma viga cuja seção transversal é a mostrada e em um plano que forma um ângulo β com a vertical. Determine a tensão no (a) ponto A, (b) ponto B e (c) ponto C.

4.194 Uma placa rígida circular com raio de 125 mm está presa a um poste retangular cheio de 150 × 200 mm, com o centro da placa alinhado ao centro do poste. Se uma força **P** de 4 kN for aplicada a E com $\theta = 30°$, determine (a) a tensão no ponto A, (b) a tensão no ponto B e (c) o ponto em que a linha neutra intercepta a linha ABD.

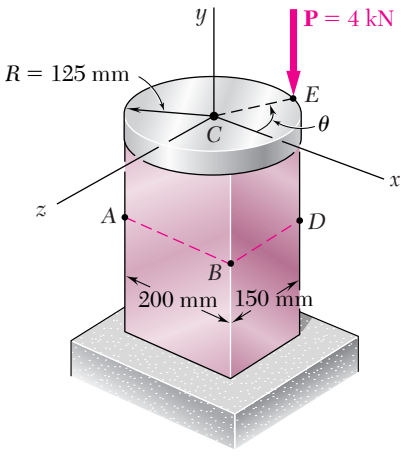


Fig. *P4.194*

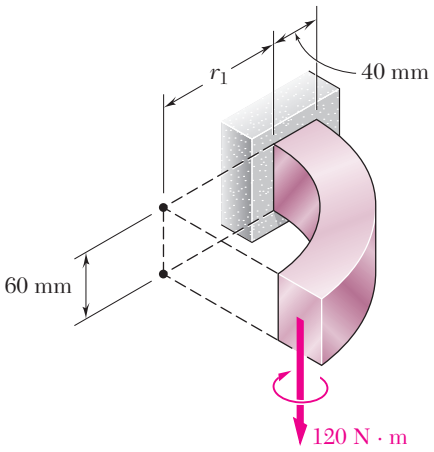


Fig. P4.195

4.195 A barra curva mostrada na figura tem uma seção transversal de 40 mm × 60 mm e um raio interno $r_1 = 15$ mm. Para o carregamento mostrado, determine as maiores tensões de tração e de compressão na barra.

PROBLEMAS PARA COMPUTADOR

Os problemas a seguir foram elaborados para serem resolvidos com o uso de um computador.

4.C1 Duas tiras de alumínio e uma tira de aço devem ser unidas para formar uma barra composta de largura $b = 60$ mm e altura $h = 40$ mm. O módulo de elasticidade é de 200 GPa para o aço e de 75 GPa para o alumínio. Sabendo que $M = 1500$ N · m, elabore um programa de computador para calcular a tensão máxima no alumínio e no aço para valores de a, de 0 a 20 mm, usando incrementos de 2 mm. Usando incrementos apropriados menores, determine (*a*) a maior tensão que pode ocorrer no aço e (*b*) o valor correspondente de a.

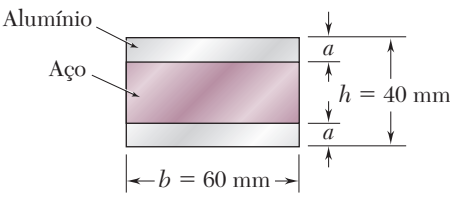


Fig. P4.C1

4.C2 Uma viga com a seção transversal mostrada na figura, feita de aço elastoplástico com uma tensão de escoamento σ_E e um módulo de elasticidade E, é flexionada em torno do eixo x. (*a*) Chamando de y_E a meia espessura do núcleo elástico, elabore um programa de computador para calcular o momento fletor M e o raio de curvatura ρ para valores de y_E, de $\frac{1}{2}d$ a $\frac{1}{6}d$, usando decrementos iguais a $\frac{1}{2}t_f$. Despreze o efeito dos adoçamentos. (*b*) Use esse programa para resolver o Problema 4.190.

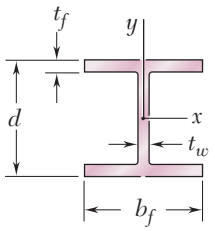
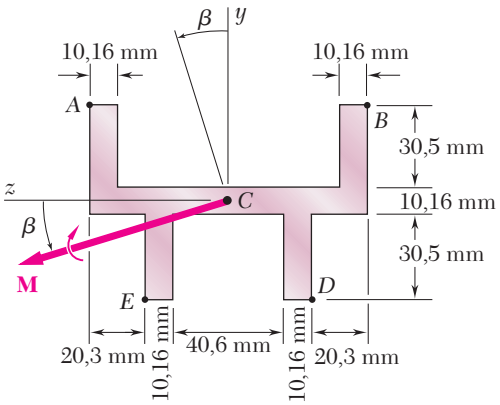


Fig. P4.C2

4.C3 Um momento fletor **M** de 903,8 N · m é aplicado a uma viga de seção transversal mostrada na figura em um plano formando um ângulo β com a vertical. Considerando que o centroide da seção transversal está localizado em C e que y e z são os eixos principais de inércia, elabore um programa de computador para calcular a tensão em A, B, C e D para valores de β de 0 a 180°, usando incrementos de 10°. (*Dados*: $I_y = 2\,593 \times 10^3$ mm^4 e $I_z = 616 \times 10^3$ mm^4.)



Dimensões em milímetros

Fig. P4.C3

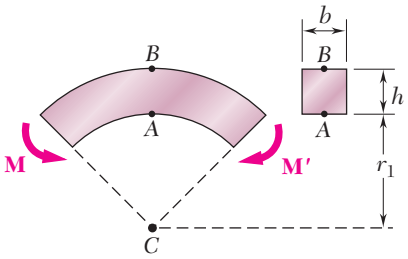


Fig. P4.C4

4.C4 Momentos fletores iguais a $M = 2$ kN · m são aplicados, conforme mostra a figura, a uma barra curva com uma seção transversal retangular de $h = 100$ mm e $b = 25$ mm. Elabore um programa de computador e use-o para calcular as tensões nos pontos A e B para valores da relação r_1/h de 10 até 1 usando decrementos de 1, e de 1 a 0,1 usando decrementos de 0,1. Usando incrementos apropriados menores, determine a relação r_1/h para a qual a tensão máxima na barra curva seja 50% maior que a tensão máxima em uma barra reta com a mesma seção transversal.

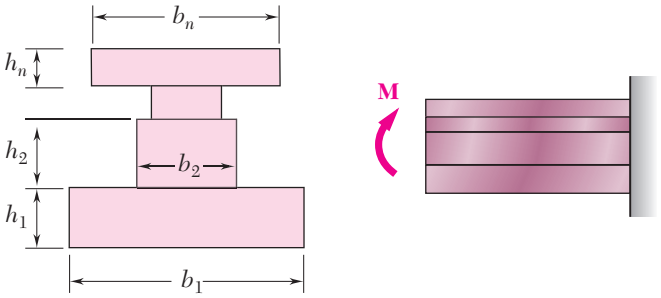


Fig. P4.C5

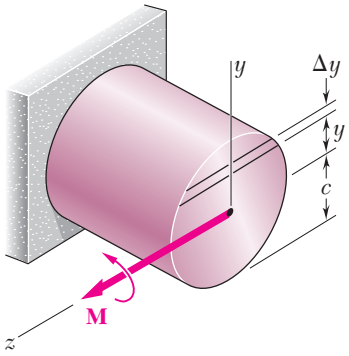


Fig. P4.C6

4.C5 O momento **M** é aplicado a uma viga que tem a seção transversal mostrada na figura. (*a*) Elabore um programa de computador que possa ser usado para calcular as tensões máximas de tração e de compressão na viga. (*b*) Use esse programa para resolver os Problemas 4.7, 4.8 e 4.9.

4.C6 Uma barra cheia de raio $c = 30{,}5$ mm é feita de aço elastoplástico com $E = 200$ GPa e $\sigma_E = 290$ MPa. A barra está submetida a um momento fletor M que aumenta de zero até o momento elástico máximo M_E e depois até o momento plástico M_p. Chamando de y_E a meia espessura do núcleo elástico, elabore um programa de computador e use-o para calcular o momento fletor M e o raio de curvatura ρ para valores de y_E de 30,48 mm até 0 usando decrementos de 5,08 mm. (*Sugestão*: Divida a seção transversal em 80 elementos horizontais de altura 0,762 mm.)

4.C7 O elemento de máquina do Problema 4.178 deve ser reprojetado removendo parte da seção transversal triangular. Acredita-se que a remoção de uma pequena área triangular de espessura a diminuirá a tensão máxima no elemento. Para verificar esse conceito de projeto, elabore um programa de computador para calcular a tensão máxima no elemento, para valores de a de 0 a 25,4 mm, usando incrementos de 2,54 mm. Usando incrementos apropriados menores, determine a distância a para a qual a tensão máxima seja a menor possível.

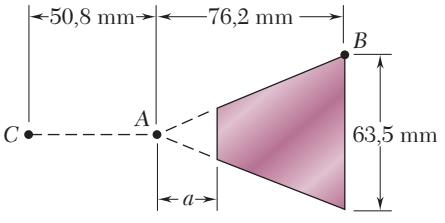


Fig. P4.C7

CAPÍTULO

5

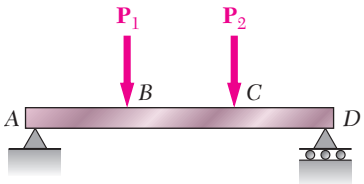
Análise e projetos de vigas em flexão

As vigas que suportam o sistema de guindastes múltiplos mostrado nesta foto estão submetidas a forças transversais que lhes provocam flexão. As tensões normais resultantes desses carregamentos serão determinadas neste capítulo.

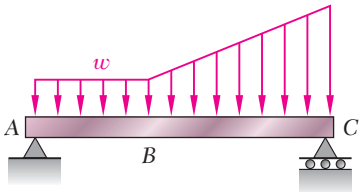
5.1. Introdução

Este capítulo e grande parte do próximo serão dedicados à análise e ao projeto de *vigas*, isto é, elementos estruturais que suportam forças aplicadas em vários pontos ao longo do elemento. Vigas geralmente são elementos prismáticos retos longos, como mostra a foto da página anterior. Vigas de aço e de alumínio desempenham um papel importante na engenharia de estruturas e mecânica. Vigas de madeira são muito utilizadas na construção de casas (Fig. 5.1). Na maioria dos casos, as forças são perpendiculares ao eixo da viga. Esse *carregamento transversal* provoca somente flexão e cisalhamento na viga. Quando as forças não estão em ângulo reto com o eixo da viga, elas podem produzir forças axiais sobre ela.

Fig. 5.1



(*a*) Forças concentradas

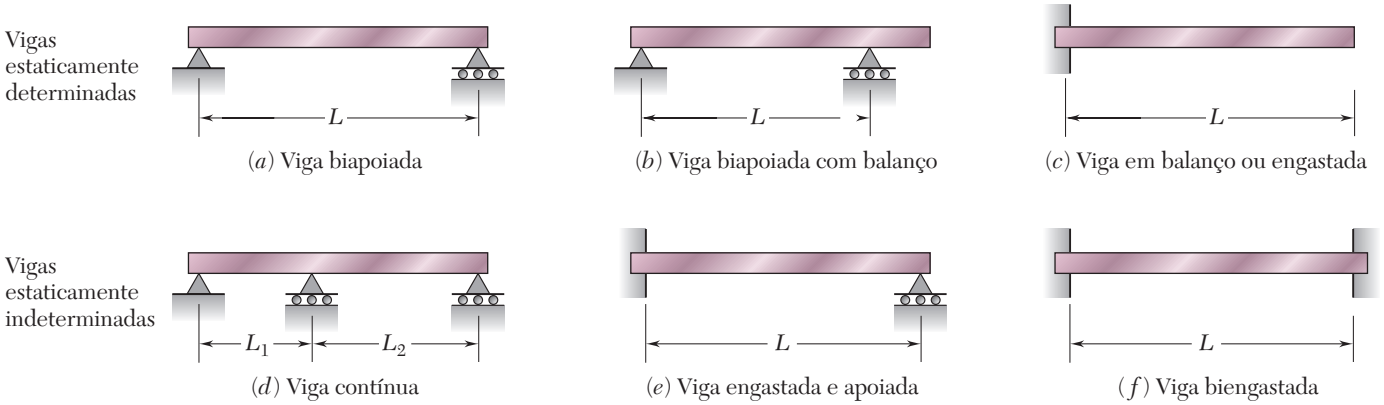


(*b*) Forças distribuídas

Fig. 5.2

O carregamento transversal de uma viga pode consistir de *forças concentradas* $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, . . . expressas em newtons, libras ou seus múltiplos, quilonewtons e kips (Fig. 5.2*a*), de uma *força w distribuída*, expressa em N/m, kN/m, lb/pé, ou kips/pé (Fig. 5.2*b*), ou de uma combinação das duas. Quando a força *w* por unidade de comprimento tem um valor constante sobre parte da viga (como entre *A* e *B* na Fig. 5.2*b*), dizemos que a força é *uniformemente distribuída* sobre aquela parte da viga.

As vigas são classificadas de acordo com a maneira como são vinculadas ou apoiadas. A Fig. 5.3 mostra vários tipos de vigas utilizadas frequentemente. A distância *L* mostrada nas várias partes da Fig. é chamada de *vão*. Note que as reações nos apoios ou nos vínculos das vigas nas partes *a*, *b* e *c* da figura envolvem um total de apenas três incógnitas e, portanto, podem ser



(*a*) Viga biapoiada (*b*) Viga biapoiada com balanço (*c*) Viga em balanço ou engastada

(*d*) Viga contínua (*e*) Viga engastada e apoiada (*f*) Viga biengastada

Fig. 5.3

determinadas pelos métodos da estática. Dizemos que essas vigas são *estaticamente determinadas* e serão discutidas neste capítulo e no próximo. Em contrapartida, as reações nos apoios das vigas nas partes *d*, *e* e *f* da Fig. 5.3 envolvem mais de três incógnitas e não podem ser determinadas apenas pelos métodos da estática. As propriedades das vigas com relação à sua resistência às deformações também devem ser levadas em consideração. Dizemos que essas vigas são *estaticamente indeterminadas* e sua análise será feita no Capítulo 9, em que discutiremos as deformações nas vigas.

Às vezes, duas ou mais vigas são conectadas por articulações para formar uma estrutura única e contínua. Dois exemplos de vigas articuladas em um ponto *H* são mostrados na Fig. 5.4. Deve-se notar que as reações nos apoios envolvem quatro incógnitas e não podem ser determinadas a partir dos diagramas de corpo livre do sistema de duas vigas. No entanto, podem ser determinadas considerando-se o diagrama de corpo livre de cada viga separadamente; são envolvidas seis incógnitas (incluindo duas componentes de força na articulação) e há disponíveis seis equações.

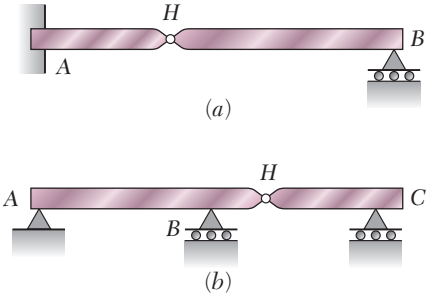


Fig. 5.4

Foi mostrado na Seção 4.1 que, ao cortarmos a viga em balanço submetida a uma força concentrada **P** em sua extremidade (Fig. 4.6) através de uma seção em *C*, veremos que os esforços internos nessa seção consistirão de uma força cortante **P′** igual e oposta à força **P** e um momento fletor **M** de valor igual ao momento de **P** em relação a *C*. Ocorre uma situação similar para outros tipos de apoios e carregamentos. Considere, por exemplo, uma viga *AB* simplesmente apoiada, sujeita a duas forças concentradas e uma força uniformemente distribuída (Fig. 5.5*a*). Para determinarmos os esforços internos em uma seção do ponto *C*, primeiro desenhamos o diagrama de corpo livre da viga inteira para obter as reações nos apoios (Fig. 5.5*b*). Cortando a viga em *C*, desenhamos então o diagrama de corpo livre de *AC* (Fig. 5.5*c*), por meio da qual determinamos a força cortante **V** e o momento fletor **M**.

O momento fletor **M** provoca *tensões normais* na seção transversal, enquanto a força cortante **V** provoca *tensões de cisalhamento* naquela seção. Na maioria dos casos, o critério dominante no projeto de uma viga quanto à resistência é o valor máximo da tensão normal sobre ela. A determinação das tensões normais em uma viga será o assunto deste capítulo, enquanto as tensões de cisalhamento serão discutidas no Capítulo 6.

Como a distribuição de tensões normais em uma seção depende somente do valor do momento fletor *M* naquela seção e da geometria da seção,[†] as fórmulas de flexão elástica deduzidas na Seção 4.4 podem ser utilizadas para determinar a tensão máxima, bem como a tensão em um ponto dado, na seção. Escrevemos[‡]

$$\sigma_m = \frac{|M|c}{I} \qquad \sigma_x = -\frac{My}{I} \tag{5.1, 5.2}$$

em que *I* é o momento de inércia da seção transversal em relação a um eixo que passa pelo centroide da seção transversal perpendicular ao plano do mo-

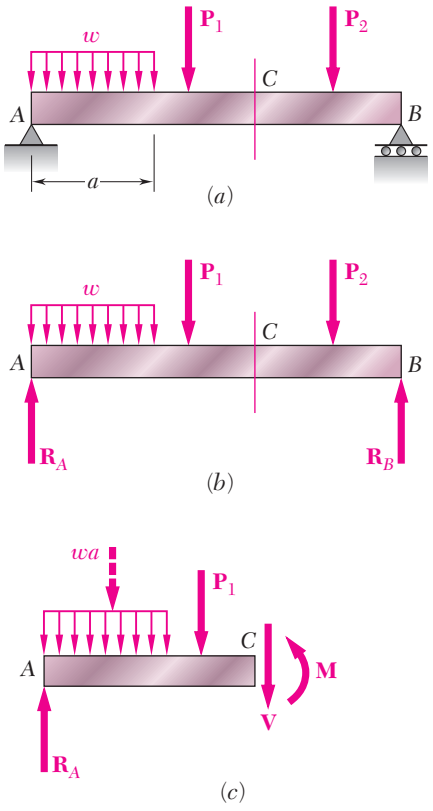


Fig. 5.5

†Assume-se que a distribuição de tensões normais em determinada seção transversal não é afetada pela deformação provocada pelas tensões de cisalhamento. Essa hipótese será verificada na Seção 6.5.

‡Lembramos da Seção 4.2 que M pode ser positivo ou negativo, dependendo se a concavidade da viga no ponto considerado está virada para cima ou para baixo. Assim, no caso considerado aqui de um carregamento transversal, o sinal de *M* pode variar ao longo da viga. Por outro lado, σ_m é um valor positivo, o valor absoluto de *M* é utilizado na Equação (5.1).

mento, y é a distância da superfície neutra e c é o valor máximo daquela distância (Fig. 4.13). Lembramos também da Seção 4.4 que, introduzindo o módulo de resistência à flexão da seção elástica $W = I/c$ da barra, o valor máximo σ_m da tensão normal na seção pode ser expresso como

$$\sigma_m = \frac{|M|}{W} \tag{5.3}$$

O fato de que σ_m é inversamente proporcional a W destaca a importância de selecionar vigas com um módulo de resistência da seção de valor alto. Os módulos de resistência de seção de vários perfis de aço laminado são dados no Apêndice C, enquanto o módulo de resistência de seção retangular pode ser expresso, conforme mostrado na Seção 4.4, como

$$W = \tfrac{1}{6}bh^2 \tag{5.4}$$

em que b e h são, respectivamente, a largura e a altura da seção transversal.

A Equação (5.3) também mostra que, para uma viga de seção transversal uniforme, σ_m é proporcional a $|M|$: assim, o valor máximo da tensão normal na viga ocorre na seção em que $|M|$ é maior. Conclui-se que uma das partes mais importantes do projeto de uma viga para determinada condição de carregamento é a determinação da localização e intensidade do maior momento fletor.

Essa tarefa fica mais fácil se for traçado um *diagrama de momento fletor*, isto é, se o valor do momento fletor M foi determinado em vários pontos da viga e construído um gráfico do momento em função da distância x medida a partir de uma extremidade da viga. Fica ainda mais fácil se for traçado um *diagrama de força cortante,* ao mesmo tempo, construindo um gráfico da força cortante V em função de x.

A convenção de sinais a ser empregada para registrar os valores da força cortante e do momento fletor será discutida na Seção 5.2. Os valores de V e M serão então obtidos em vários pontos da viga, desenhando-se os diagramas de corpo livre de suas partes sucessivas. Na Seção 5.3 serão deduzidas relações entre força cortante e momento fletor, e utilizadas para obter os diagramas de força cortante e momento fletor. Essa abordagem facilita a determinação do maior valor absoluto do momento fletor e, portanto, a determinação da tensão normal máxima na viga.

Na Seção 5.4, você aprenderá a projetar uma viga em flexão, isto é, será imposta a condição de que a tensão normal máxima na viga não ultrapassará seu valor admissível. Conforme já dissemos, esse é o critério dominante no projeto de uma viga.

Outro método para a determinação dos valores máximos da força cortante e do momento fletor, com base na expressão de V e M em termos de *funções de singularidade*, será discutido na Seção 5.5. Essa abordagem conduz muito bem ao uso de computadores e será expandida no Capítulo 9, para facilitar a determinação do ângulo de inclinação e do deslocamento de vigas.

Finalmente, discutiremos na Seção 5.6 o projeto de *vigas não prismáticas*, isto é, vigas com uma seção transversal variável. Selecionando-se a forma e o tamanho da seção transversal variável de modo que seu módulo de resistência $W = I/c$ varie ao longo do comprimento da viga da mesma maneira que $|M|$, é possível projetar vigas para as quais a tensão normal máxima em cada seção seja igual à tensão admissível do material. Vigas desse tipo são chamadas de *resistência constante*.

5.2. Diagramas de força cortante e momento fletor

Conforme indicamos na Seção 5.1, a determinação dos valores máximos absolutos da força cortante e do momento fletor em uma viga torna-se muito mais fácil se os valores de V e M forem construídos graficamente em função da distância x medida a partir de uma extremidade da viga. Além disso, conforme veremos no Capítulo 9, o conhecimento de M em função de x é essencial para a determinação do deslocamento de uma viga.

Nos exemplos e problemas resolvidos desta seção, os diagramas de força cortante e momento fletor serão obtidos determinando-se os valores de V e M em pontos selecionados da viga. Esses valores serão determinados da maneira usual, isto é, cortando-se a viga no ponto em que eles devem ser determinados (Fig. 5.6*a*) e considerando o equilíbrio da parte da viga localizada de cada lado da seção (Fig. 5.6*b*). Como as forças cortantes **V** e **V′** têm sentidos opostos, registrar a força cortante no ponto C com uma seta para cima ou para baixo não teria significado a menos que indicássemos, ao mesmo tempo, qual dos corpos livres AC e CB estamos considerando. Por essa razão, a força cortante V será marcada com um sinal: *um sinal positivo* se estiverem direcionadas, como mostra a Fig. 5.6*b*, e *um sinal negativo*, no caso contrário. Será aplicada uma convenção similar para o momento fletor M. Ele será considerado positivo se os momentos fletores estiverem direcionados, conforme mostrado naquela figura, e negativo caso contrário.† Resumindo a convenção de sinais que acabamos de apresentar, podemos dizer o seguinte:

A força cortante V e o momento fletor M serão positivos quando, em determinada seção da viga, os esforços internos atuantes nas partes da viga estiverem direcionados conforme mostra a Figura 5.7a.

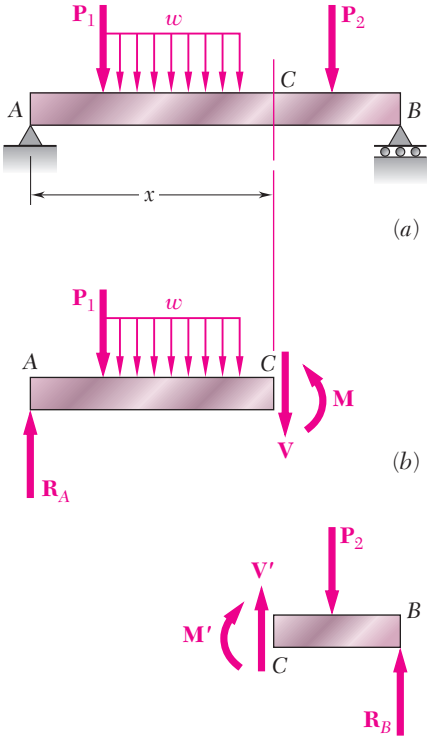
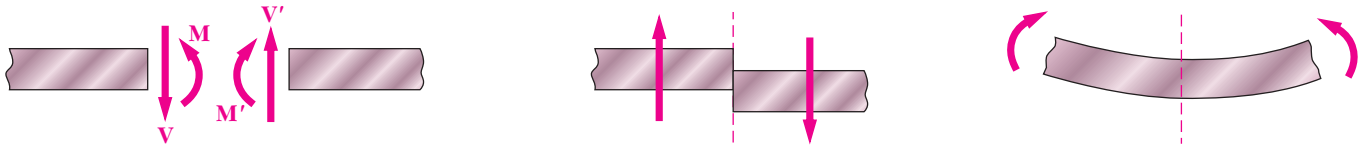


Fig. 5.6

Essas convenções podem ser lembradas mais facilmente se notarmos que:

1. *A força cortante em um ponto de uma viga é positiva quando as forças* **externas** *(cargas e reações) atuando nela tendem a rompê-la (cisalhar) naquele ponto, conforme indicado na Fig. 5.7b.*
2. *O momento fletor em um ponto de uma viga é positivo quando as forças* **externas** *atuando na viga tendem a flexioná-la naquele ponto, conforme indicado na Fig. 5.7c.*

É útil também notar que a situação descrita na Fig. 5.7, na qual os valores da força cortante e do momento fletor são positivos, é precisamente a situação que ocorre na metade esquerda de uma viga simplesmente apoiada, tendo uma única força concentrada em seu ponto médio. Esse caso particular é amplamente discutido no próximo exemplo.



(*a*) Esforços internos (força cortante positiva e momento fletor positivo)

(*b*) Efeito de forças externas (força cortante positiva)

(*c*) Efeito de forças externas (momento fletor positivo)

Fig. 5.7

†Note que essa convenção é a mesma que usamos na Seção 4.2.

Exemplo 5.1

Trace os diagramas de força cortante e momento fletor para uma viga AB simplesmente apoiada de vão L, submetida a uma única força concentrada **P** em seu ponto médio C (Fig. 5.8).

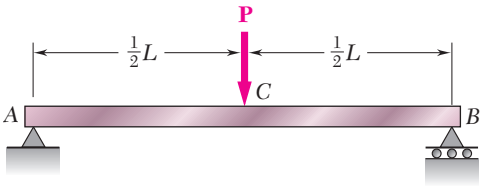


Fig. 5.8

Primeiro determinamos as reações nos apoios por meio do diagrama de corpo livre da viga toda (Fig. 5.9*a*); vemos que a intensidade de cada reação é igual a $P/2$.

Em seguida, cortamos a viga no ponto D entre A e C e desenhamos os diagramas de corpo livre AD e DB (Fig. 5.9*b*). *Considerando que a força cortante e o momento fletor são positivos*, direcionamos os esforços internos **V** e **V′** e **M** e **M′**, conforme é indicado na Fig. 5.7*a*. Considerando o diagrama de corpo livre AD e escrevendo que a soma dos componentes verticais e a soma dos momentos em relação a D das forças que atuam no corpo livre são iguais a zero, encontramos $V = +P/2$ e $M = +Px/2$. Tanto a força cortante quanto o momento fletor são, portanto, positivos; isso pode ser verificado observando-se que a reação em A tende a cortar e flexionar a viga em D, conforme indicam as Figs. 5.7*b* e *c*. Agora construímos os gráficos de V e M entre A e C (Figs. 5.9*d* e *e*); a força cortante tem um valor constante $V = P/2$, enquanto o momento fletor aumenta linearmente desde $M = 0$ em $x = 0$ até $M = PL/4$ em $x = L/2$.

Cortando a viga no ponto E, entre C e B, e considerando o diagrama de corpo livre EB (Fig. 5.9*c*), escrevemos que a soma dos componentes verticais e a soma dos momentos em relação a E das forças que atuam no corpo livre são iguais a zero. Obtemos $V = -P/2$ e $M = P(L - x)/2$; assim, a força cortante é negativa e o momento fletor é positivo; isso pode ser verificado observando-se que a reação em B flexiona a viga em E, conforme indica a Fig. 5.7*c*, mas tende a cortar de uma maneira oposta àquela mostrada na Fig. 5.7*b*. Podemos completar, agora, os diagramas de força cortante e momento fletor das Figs. 5.9*d* e *e*; a força cortante tem um valor constante $V = -P/2$ entre C e B, enquanto o momento fletor diminui linearmente de $M = PL/4$ em $x = L/2$ até $M = 0$ em $x = L$.

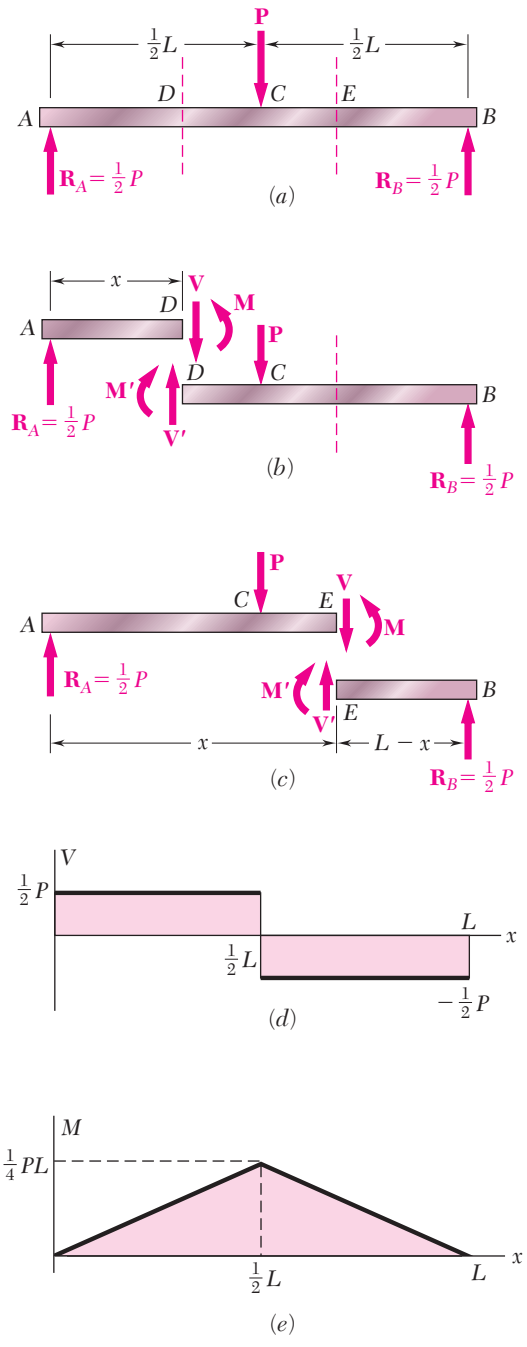


Fig. 5.9

Notamos no exemplo anterior que, quando uma viga é submetida somente a forças concentradas, a força cortante é constante entre as forças, e o momento fletor varia linearmente entre as forças. Nessas situações, portanto, os diagramas de força cortante e momento fletor podem ser traçados facilmente, uma vez obtidos os valores V e M nas seções selecionadas imediatamente à esquerda e imediatamente à direita dos pontos em que as forças e reações são aplicadas (Ver o Problema Resolvido 5.1).

Exemplo 5.2

Trace os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga em balanço AB de vão L suportando uma força w uniformemente distribuída (Fig. 5.10).

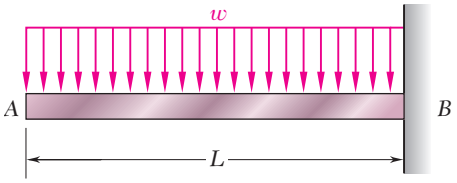
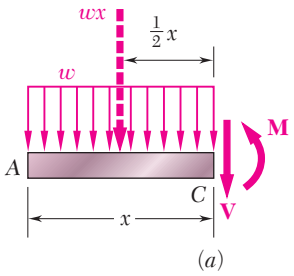


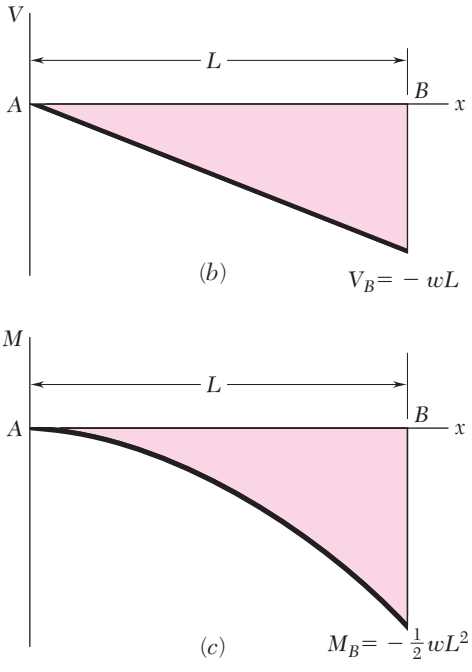
Fig. 5.10

Cortamos a viga no ponto C entre A e B e desenhamos o diagrama de corpo livre de AC (Fig. 5.11a), direcionando **V** e **M** conforme indicado na Fig. 5.7a. Chamando de x a distância de A até C e substituindo a força distribuída sobre AC pela sua resultante wx aplicada no ponto médio de AC, escrevemos



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad -wx - V = 0 \qquad V = -wx$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_C = 0: \qquad wx\left(\frac{x}{2}\right) + M = 0 \qquad M = -\frac{1}{2}wx^2$$

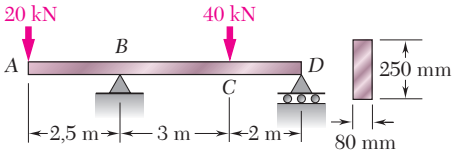


Notamos que o diagrama de força cortante é representado por uma linha reta inclinada (Fig. 5.11b) e o diagrama do momento fletor, por uma parábola (Fig. 5.11c). Os valores máximos de V e M ocorrem ambos em B; assim, temos

$$V_B = -wL \qquad M_B = -\tfrac{1}{2}wL^2$$

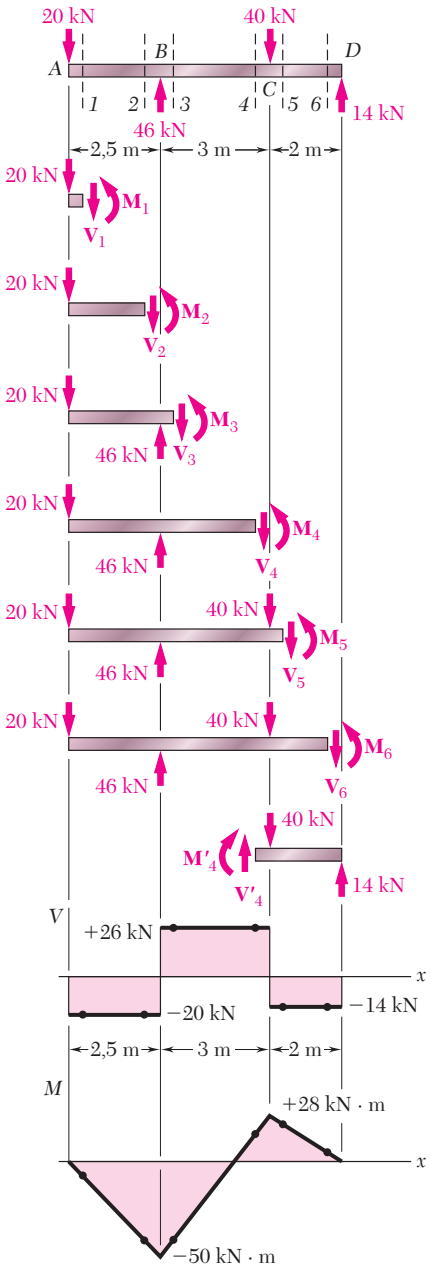
Fig. 5.11

PROBLEMA RESOLVIDO 5.1



Para a viga de madeira e o carregamento mostrado na figura, trace os diagramas de força cortante e momento fletor, e determine a tensão máxima provocada pelo momento fletor.

SOLUÇÃO



Reações. Considerando a viga inteira como um corpo livre, temos

$$\mathbf{R}_B = 46\ \text{kN} \uparrow \qquad \mathbf{R}_D = 14\ \text{kN} \uparrow$$

Diagramas de força cortante e momento fletor. Primeiro determinamos os esforços internos logo à direita da força de 20 kN em A. Considerando a parte da viga à esquerda da seção 1 como um corpo livre e considerando que V e M são positivos (de acordo com a convenção adotada), escrevemos

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad -20\ \text{kN} - V_1 = 0 \qquad V_1 = -20\ \text{kN}$$
$$+\circlearrowleft \Sigma M_1 = 0: \qquad (20\ \text{kN})(0\ \text{m}) + M_1 = 0 \qquad M_1 = 0$$

Em seguida, consideramos como um corpo livre a parte da viga à esquerda da seção 2 e escrevemos

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad -20\ \text{kN} - V_2 = 0 \qquad V_2 = -20\ \text{kN}$$
$$+\circlearrowleft \Sigma M_2 = 0: \qquad (20\ \text{kN})(2{,}5\ \text{m}) + M_2 = 0 \qquad M_2 = -50\ \text{kN} \cdot \text{m}$$

A força cortante e o momento fletor nas seções *3*, *4*, *5* e *6* são determinados de maneira similar por meio dos diagramas de corpo livre mostrados. Obtemos

$$V_3 = +26\ \text{kN} \qquad M_3 = -50\ \text{kN} \cdot \text{m}$$
$$V_4 = +26\ \text{kN} \qquad M_4 = +28\ \text{kN} \cdot \text{m}$$
$$V_5 = -14\ \text{kN} \qquad M_5 = +28\ \text{kN} \cdot \text{m}$$
$$V_6 = -14\ \text{kN} \qquad M_6 = 0$$

Nas várias seções anteriores, os resultados podem ser obtidos mais facilmente considerando-se um corpo livre a parte da viga que se encontra à direita da seção. Por exemplo, para a parte da viga à direita da seção *4*, temos

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad V_4 - 40\ \text{kN} + 14\ \text{kN} = 0 \qquad V_4 = +26\ \text{kN}$$
$$+\circlearrowleft \Sigma M_4 = 0: \qquad -M_4 + (14\ \text{kN})(2\ \text{m}) = 0 \qquad M_4 = +28\ \text{kN} \cdot \text{m}$$

Podemos agora construir os gráficos dos seis pontos mostrados nos diagramas de força cortante e momento fletor. Conforme indicamos anteriormente nesta seção, a força cortante tem um valor constante entre forças concentradas, e o momento fletor varia linearmente; obtemos portanto os diagramas de força cortante e momento fletor mostrados na figura.

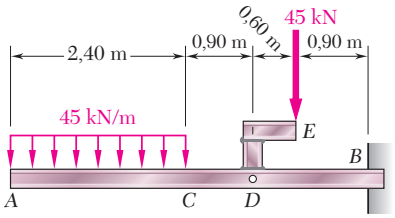
Tensão normal máxima. Ela ocorre em B, em que $|M|$ tem o maior valor. Usamos a Equação (5.4) para determinar o módulo de resistência à flexão da seção da viga:

$$W = \tfrac{1}{6}bh^2 = \tfrac{1}{6}(0{,}080\ \text{m})(0{,}250\ \text{m})^2 = 833{,}33 \times 10^{-6}\ \text{m}^3$$

Substituindo esse valor e $|\text{M}| = |\text{M}_\text{B}| = 50 \times 10^3\ \text{N} \cdot \text{m}$ na Equação (5.3):

$$\sigma_m = \frac{|M_B|}{W} = \frac{(50 \times 10^3\ \text{N} \cdot \text{m})}{833{,}33 \times 10^{-6}} = 60{,}00 \times 10^6\ \text{Pa}$$

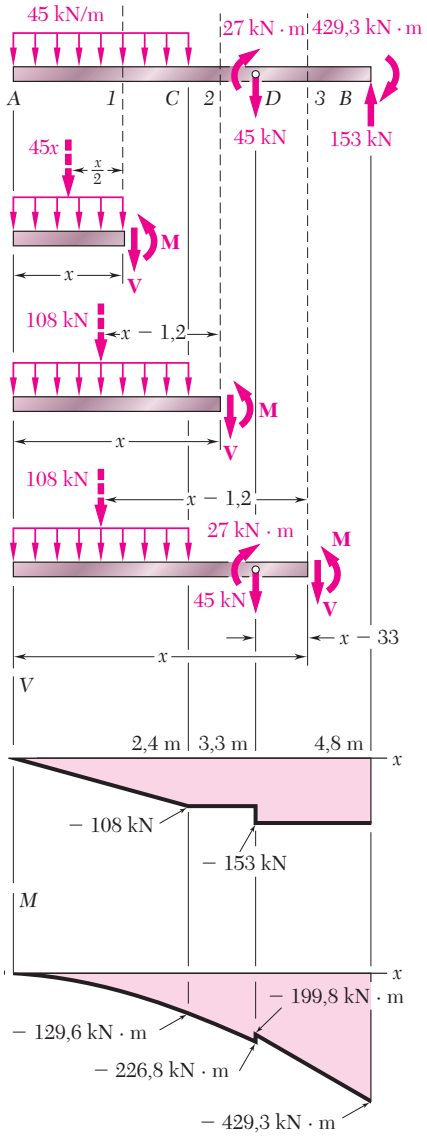
Máxima tensão normal na viga = 60,0 MPa ◀



PROBLEMA RESOLVIDO 5.2

A estrutura mostrada na figura consiste em uma viga *AB*, que é um perfil de aço laminado W250 × 167 e de dois membros curtos soldados entre si e a viga. (*a*) Trace os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga para o carregamento dado. (*b*) Determine a tensão normal máxima em seções imediatamente à esquerda e à direita do ponto *D*.

SOLUÇÃO



Carregamento equivalente da viga. A força de 45 kN é substituída por um sistema equivalente de força e momento em *D*. A reação em *B* é determinada considerando-se a viga como um corpo livre.

a. Diagramas de força cortante e de momento fletor

De A a C. Determinamos os esforços internos a uma distância x do ponto *A* considerando a parte da viga à esquerda da seção *1*. Aquela parte da força distribuída que atua sobre o corpo livre é substituída por sua resultante, e escrevemos

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad -45x - V = 0 \qquad V = -45x \text{ kN}$$
$$+\circlearrowleft \Sigma M_1 = 0: \qquad 45x\left(\tfrac{1}{2}x\right) + M = 0 \qquad M = -22{,}5x^2 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Como o diagrama de corpo livre mostrado pode ser utilizado para todos os valores de x menores que 2,4 m, as expressões obtidas para V e M são válidas na região $0 < x < 2{,}4$ m.

De C a D. Considerando a parte da viga à esquerda da seção 2 e novamente substituindo a força distribuída por sua resultante, obtemos

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad -108 - V = 0 \qquad V = -108 \text{ kN}$$
$$+\circlearrowleft \Sigma M_2 = 0: \qquad 108(x - 1{,}2) + M = 0 \qquad M = 129{,}6 - 108x \quad \text{kN} \cdot \text{m}$$

Essas expressões são válidas na região $2{,}4 \text{ m} < x < 3{,}3$ m.

De D a B. Usando a posição da viga à esquerda da seção *3*, obtemos para a região $3{,}3 \text{ m} < x < 4{,}8$ m

$$V = -153 \text{ kN} \qquad M = 305{,}1 - 153x \quad \text{kN} \cdot \text{m}$$

Podemos agora traçar os diagramas de força cortante e momento fletor para a barra inteira. Notamos que o momento de 27 kN · m aplicado ao ponto *D* introduz uma descontinuidade no diagrama de momento fletor.

b. Tensão normal máxima à esquerda e à direita do ponto *D*.

Do Apêndice *C* encontramos que, para uma viga do tipo W250 × 167, o módulo de resistência em relação ao eixo *X*-*X* é $W = 2080 \times 10^3 \text{ mm}^3$.

À esquerda de D: Temos $|M| = 226{,}8 \text{ kN} \cdot \text{m} = 226{,}8 \times 16^6 \text{ N} \cdot \text{mm}$. Substituindo $|M|$ e W na Equação (5.3), escrevemos

$$\sigma_m = \frac{|M|}{W} = \frac{226{,}8 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}}{2080 \times 10^3 \text{ mm}^3} = 109 \text{ MPa}$$

$\sigma_m = 109$ MPa ◀

À direita de D: Temos $|M| = 199{,}8 \text{ kN} \cdot \text{m} = 199{,}8 \times 16^6 \text{ N} \cdot \text{mm}$. Substituindo $|M|$ e W na Equação (5.3), escrevemos

$$\sigma_m = \frac{|M|}{W} = \frac{199{,}8 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}}{2080 \times 10^3 \text{ mm}^3} = 96 \text{ MPa}$$

$\sigma_m = 96$ MPa ◀

PROBLEMAS

5.1 até 5.6 Para a viga e carregamento mostrados, (*a*) trace os diagramas de força cortante e momento fletor e (*b*) determine as equações das curvas de força cortante e momento fletor.

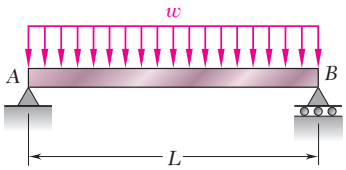


Fig. P5.1

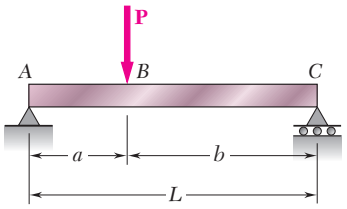


Fig. P5.2

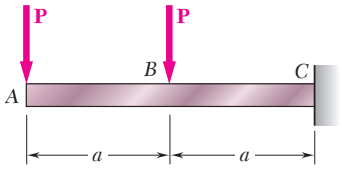


Fig. P5.3

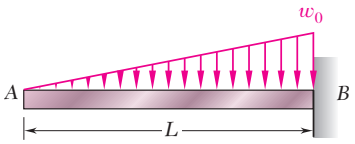


Fig. P5.4

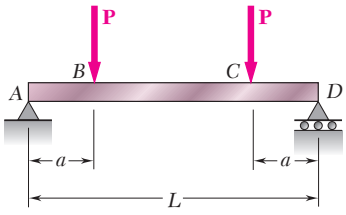


Fig. P5.5

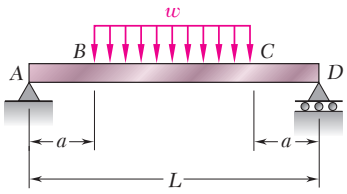


Fig. P5.6

5.7 e 5.8 Trace os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga e carregamento mostrados, e determine o valor máximo absoluto (*a*) da força cortante e (*b*) do momento fletor.

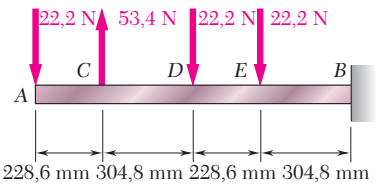


Fig. P5.7

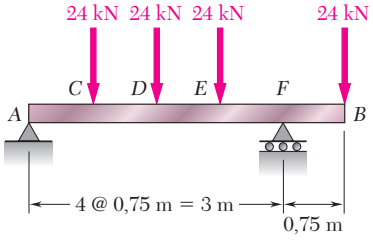


Fig. P5.8

5.9 e 5.10 Trace os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga e carregamento mostrados, e determine o valor máximo absoluto (*a*) da força cortante e (*b*) do momento fletor.

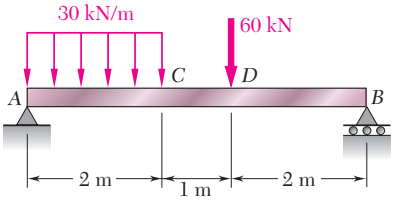


Fig. P5.9

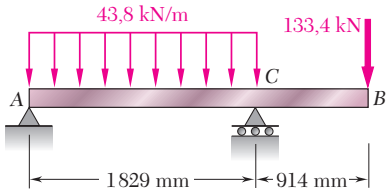


Fig. P5.10

***5.11* e 5.12** Trace os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga e carregamento mostrados, e determine o valor máximo absoluto (*a*) da força cortante e (*b*) do momento fletor.

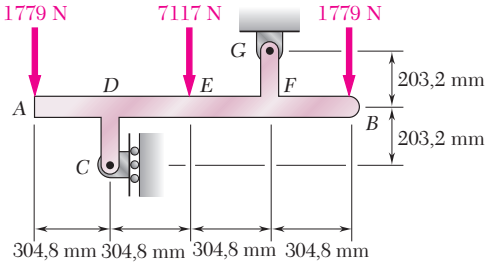


Fig. *P5.11*

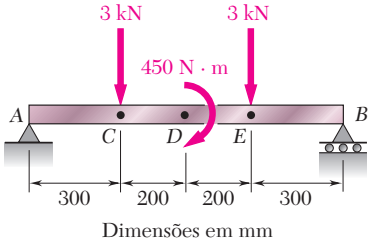


Fig. P5.12

5.13 e *5.14* Considerando que a reação do solo seja uniformemente distribuída, trace os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga *AB* e determine o valor máximo absoluto (*a*) da força cortante e (*b*) do momento fletor.

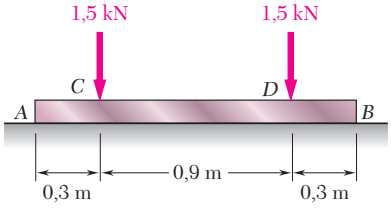


Fig. P5.13

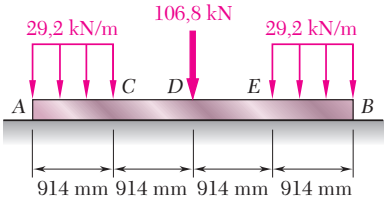


Fig. *P5.14*

5.15 e *5.16* Para a viga e o carregamento mostrados na figura, determine a tensão normal máxima provocada pelo momento fletor na seção transversal *C*.

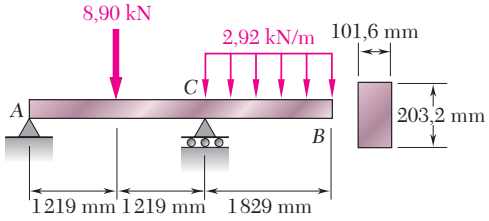


Fig. P5.15

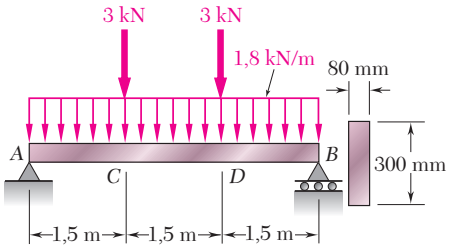


Fig. *P5.16*

5.17 Para a viga e o carregamento mostrados na figura, determine a tensão normal máxima provocada pelo momento fletor na seção transversal *C*.

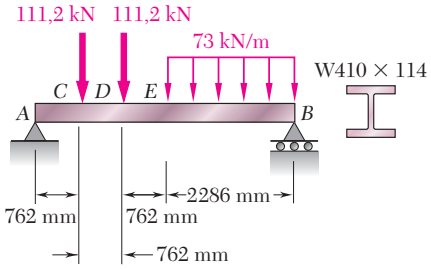


Fig. P5.17

5.18 Para a viga e o carregamento mostrados na figura, determine a tensão normal máxima provocada pelo momento fletor na seção *a*-*a*.

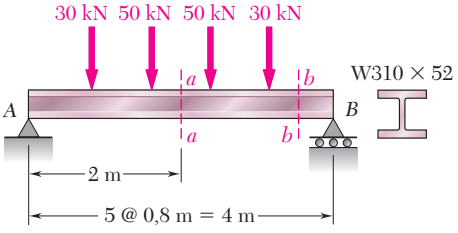


Fig. P5.18

5.19 e 5.20 Para a viga e o carregamento mostrados na figura, determine a tensão normal máxima provocada pelo momento fletor na seção transversal *C*.

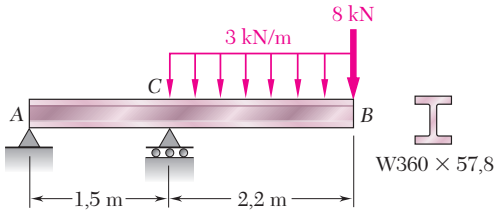


Fig. *P5.19*

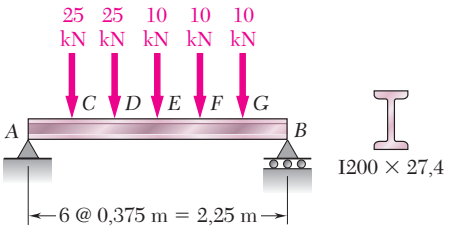


Fig. P5.20

5.21 Trace os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga e carregamento mostrados na figura, e determine a tensão normal máxima provocada pelo momento fletor.

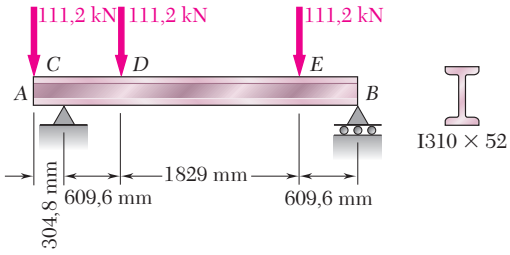


Fig. P5.21

5.22 e *5.23* Trace os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga e carregamento mostrados na figura, e determine a tensão normal máxima provocada pelo momento fletor.

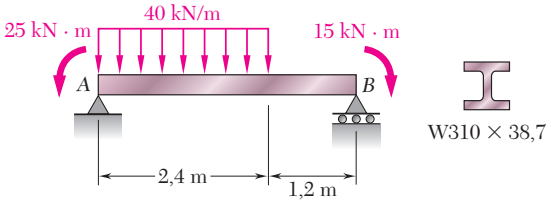


Fig. P5.22

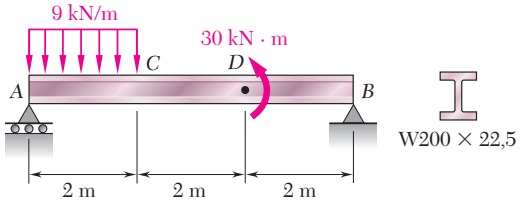


Fig. *P5.23*

5.24 e 5.25 Trace os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga e carregamento mostrados na figura, e determine a tensão normal máxima provocada pelo momento fletor.

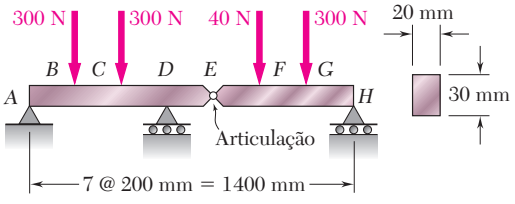


Fig. P5.24

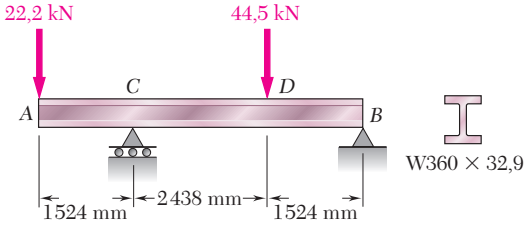


Fig. P5.25

5.26 Sabendo que $P = 12$ kN, trace os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga AB e determine a tensão normal máxima provocada pelo momento fletor.

5.27 Determine (*a*) a intensidade da força peso W, para a qual o valor máximo absoluto do momento fletor na viga é o menor possível e (*b*) a tensão normal máxima correspondente provocada pelo momento fletor. (*Sugestão*: Trace o diagrama de momento fletor e iguale os valores absolutos dos maiores momentos fletores positivo e negativo obtidos.)

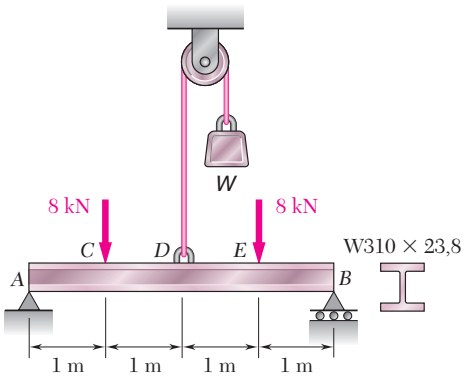


Fig. *P5.26* e P5.27

5.28 Sabendo que $P = Q = 480$ N, determine (*a*) a distância a para a qual o valor absoluto do momento fletor na barra é o menor possível e (*b*) a tensão normal máxima correspondente provocada pelo momento fletor. (Ver sugestão do Problema 5.27.)

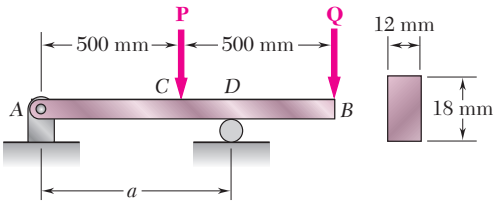


Fig. P5.28

5.29 Resolva o Problema 5.28, considerando $P = 480$ N e $Q = 320$ N.

5.30 Determine (*a*) a distância *a* para a qual o valor absoluto do momento fletor na viga é o menor possível e (*b*) a tensão normal máxima correspondente provocada pelo momento fletor. (Ver a sugestão do Problema 5.27.)

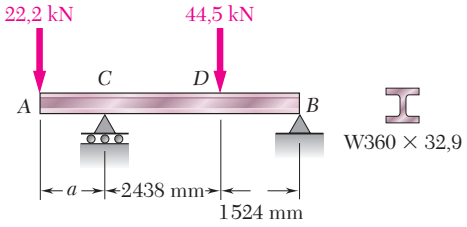


Fig. *P5.30*

5.31 Determine (*a*) a distância *a* para a qual o valor absoluto do momento fletor na viga é o menor possível e (*b*) a tensão normal máxima correspondente provocada pelo momento fletor. (Ver a sugestão do Problema 5.27.)

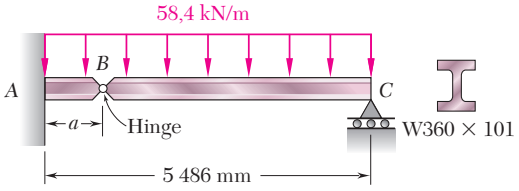


Fig. P5.31

5.32 Uma barra de seção transversal circular cheia, com diâmetro *d* e feita de aço, está vinculada, conforme mostra a figura. Sabendo que para o aço $\rho = 7\,697$ kg/m^3, determine o menor diâmetro *d* que pode ser utilizado para que a tensão normal provocada pelo momento fletor não ultrapasse 27,6 MPa.

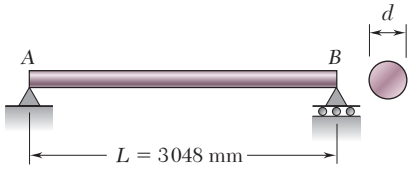


Fig. P5.32

5.33 Uma barra de seção transversal quadrada cheia, de lado *b* e feita de aço, está vinculada, conforme mostra a figura. Sabendo que para o aço $\rho = 7\,860$ kg/m^3, determine a dimensão *b* para a qual a tensão normal máxima provocada pelo momento fletor é (*a*) 10 MPa e (*b*) 50 MPa.

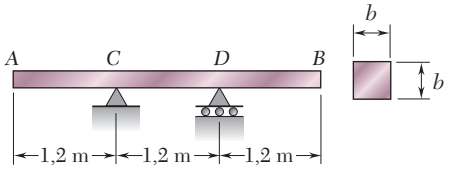


Fig. P5.33

5.3. Relações entre força, força cortante e momento fletor

Quando uma viga suporta mais de duas ou três forças concentradas, ou quando ela suporta forças distribuídas, o método descrito na Seção 5.2 para traçar os diagramas da força cortante do momento fletor pode se mostrar bastante trabalhoso. A construção do diagrama da força cortante e, especialmente, o diagrama de momento fletor ficará muito mais fácil se forem levadas em consideração determinadas relações existentes entre força, força cortante e momento fletor.

Vamos considerar uma viga AB simplesmente apoiada submetida a uma força distribuída w por unidade de comprimento (Fig. 5.12a), e sejam C e C' dois pontos da viga a uma distância Δx um do outro. A força cortante e o momento fletor em C serão representados por V e M, respectivamente, e considerados positivos com os sentidos indicados na figura. A força cortante e o momento fletor em C' serão representados por $V + \Delta V$ e $M + \Delta M$.

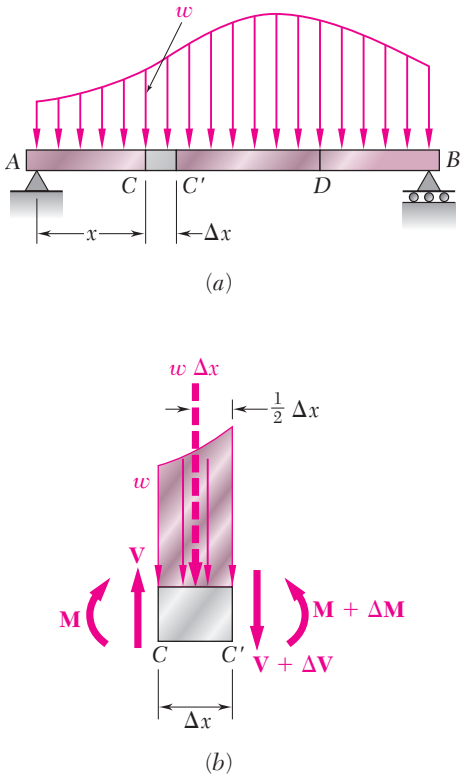


Fig. 5.12

Isolamos agora a parte da viga CC' e desenhamos o seu diagrama de corpo livre (Fig. 5.12b). As forças que atuam no corpo livre incluem uma força de intensidade $w\,\Delta x$ e os esforços internos, força cortante e momento fletor em C e C'. Como a força cortante e o momento fletor foram considerados positivos, as forças e os momentos estarão direcionados conforme mostra a figura.

Relações entre força e força cortante. Considerando-se que a soma das componentes verticais das forças que atuam no corpo livre CC' é zero, temos

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad V - (V + \Delta V) - w\,\Delta x = 0$$

$$\Delta V = -w\,\Delta x$$

Dividindo ambos os membros da equação por Δx e depois fazendo Δx se aproximar de zero, obtemos

$$\frac{dV}{dx} = -w \tag{5.5}$$

A Equação (5.5) indica que, para uma viga carregada conforme mostra a Fig. 5.12a, a inclinação dV/dx da curva de força cortante é negativa; o valor numérico da inclinação em qualquer ponto é igual à força por unidade de comprimento naquele ponto.

Integrando (5.5) entre os pontos C e D, escrevemos

$$V_D - V_C = -\int_{x_C}^{x_D} w\,dx \tag{5.6}$$

$$V_D - V_C = -(\text{área sob a curva da força distribuída entre } C \text{ e } D) \tag{5.6'}$$

Note que esse resultado também poderia ter sido obtido considerando-se o equilíbrio da parte CD da viga, visto que a área sob a curva da força distribuída representa a força total aplicada entre C e D.

Deve-se observar que a Equação (5.5) não é válida em um ponto no qual é aplicada uma força concentrada; a curva de força cortante é descontínua nesse ponto, como vimos na Seção 5.2. Analogamente, as Equações (5.6) e (5.6′) deixam de ser válidas quando são aplicadas forças concentradas entre C e D, pois elas não levam em conta a variação brusca da força cortante provocada por uma força concentrada. As Equações (5.6) e (5.6′), portanto, deverão ser aplicadas somente entre forças concentradas sucessivas.

Relações entre força cortante e momento fletor. Retornando ao diagrama de corpo livre da Fig. 5.12*b*, e considerando agora que a soma dos momentos em relação a C' é zero, temos

$$+\circlearrowleft \Sigma M_{C'} = 0: \qquad (M + \Delta M) - M - V\,\Delta x + w\,\Delta x\frac{\Delta x}{2} = 0$$

$$\Delta M = V\,\Delta x - \frac{1}{2}w\,(\Delta x)^2$$

Dividindo ambos os membros da equação por Δx e fazendo Δx aproximar-se de zero, obtemos

$$\frac{dM}{dx} = V \tag{5.7}$$

A Equação (5.7) indica que a inclinação dM/dx da curva do momento fletor é igual ao valor da força cortante. Isso é verdade em qualquer ponto em que a força cortante tenha um valor bem definido, isto é, em qualquer ponto em que não seja aplicada uma força concentrada. A Equação (5.7) mostra também que $V = 0$ em pontos em que M é máximo. Essa propriedade facilita a determinação dos pontos em que a viga apresenta possibilidade de falhar sob flexão.

Integrando (5.7) entre os pontos C e D, escrevemos

$$M_D - M_C = \int_{x_C}^{x_D} V\,dx \tag{5.8}$$

$$M_D - M_C = \text{área sob a curva da força cortante entre } C \text{ e } D \tag{5.8'}$$

Note que a área sob a curva da força cortante deverá ser considerada positiva onde a força cortante for positiva e negativa onde a força cortante for negativa. As Equações (5.8) e (5.8′) são válidas mesmo quando aplicadas forças concentradas entre C e D, desde que a curva de força cortante tenha sido traçada corretamente. No entanto, as equações deixam de ser válidas se for aplicado um momento em um ponto entre C e D, pois elas não levam em conta a variação brusca no momento fletor provocada por um momento (ver o Problema Resolvido 5.6).

EXEMPLO 5.3

Trace os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga simplesmente apoiada da Fig. 5.13, e determine o valor máximo do momento fletor.

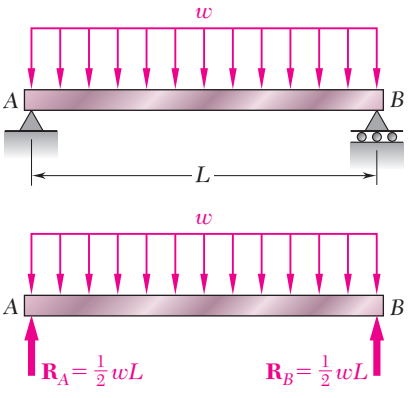


Fig. 5.13

Do diagrama de corpo livre da barra inteira, determinamos a intensidade das reações nos apoios.

$$R_A = R_B = \tfrac{1}{2}wL$$

Em seguida, traçamos o diagrama de força cortante. Próximo à extremidade A da viga, a força cortante é igual a R_A, ou seja, $\frac{1}{2}wL$,

como podemos verificar considerando uma parte muito pequena da viga como um corpo livre. Usando a Equação (5.6), determinamos então a força cortante V a qualquer distância x de A; escrevemos

$$V - V_A = -\int_0^x w\,dx = -wx$$

$$V = V_A - wx = \tfrac{1}{2}wL - wx = w(\tfrac{1}{2}L - x)$$

A curva de força cortante é, portanto, uma linha reta inclinada que cruza o eixo x no ponto $x = L/2$ (Fig. 5.14a). Considerando agora o momento fletor, observamos em primeiro lugar que $M_A = 0$. O valor M do momento fletor a qualquer distância x de A pode então ser obtido da Equação (5.8); temos

$$M - M_A = \int_0^x V\,dx$$

$$M = \int_0^x w(\tfrac{1}{2}L - x)\,dx = \tfrac{1}{2}w(Lx - x^2)$$

A curva do momento fletor é uma parábola. O valor máximo do momento fletor ocorre quando $x = L/2$, pois V (e, portanto, dM/dx) é zero para aquele valor de x. Substituindo $x = L/2$ na equação, obtemos $M_{\text{máx}} = wL^2/8$ (Fig. 5.14b).

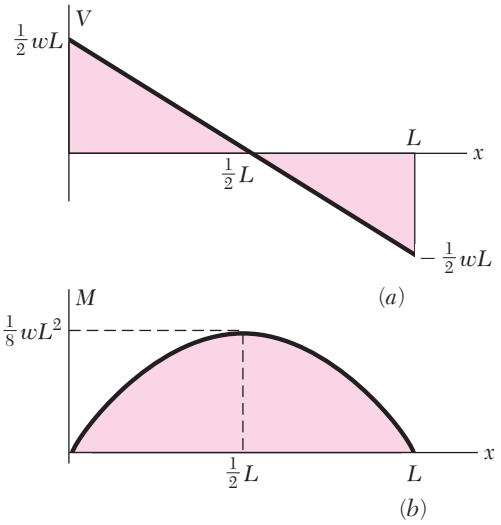
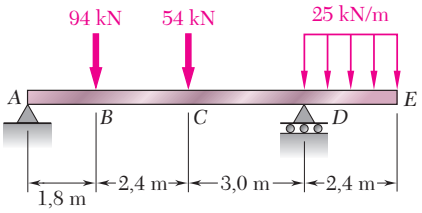


Fig. 5.14

Em muitas aplicações de engenharia, precisamos saber o valor do momento fletor somente em alguns pontos específicos. Uma vez traçado o diagrama da força cortante, e depois de ter determinado M em uma das extremidades da viga, o valor do momento fletor pode então ser obtido em qualquer ponto calculando-se a área sob a curva da força cortante e usando a Equação (5.8′). Por exemplo, como $M_A = 0$ para a viga do Exemplo 5.3, o valor máximo do momento fletor para aquela viga pode ser obtido medindo simplesmente a área do triângulo sombreado no diagrama da força cortante da Fig. 5.14a. Temos

$$M_{\text{máx}} = \frac{1}{2}\frac{L}{2}\frac{wL}{2} = \frac{wL^2}{8}$$

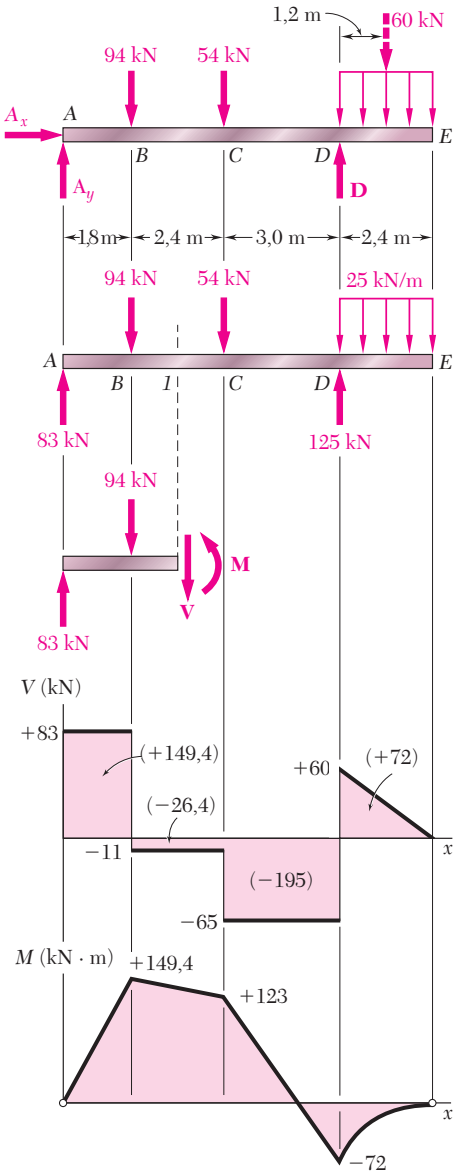
Notamos que, nesse exemplo, a curva da força distribuída é uma linha reta horizontal, a curva da força cortante é uma linha reta inclinada, e a curva do momento fletor, uma parábola. Se a curva da força distribuída fosse uma linha reta inclinada (equação de primeiro grau), a curva da força cortante seria uma parábola (equação do segundo grau) e o momento fletor seria uma curva de terceiro grau (equação de terceiro grau). As curvas da força cortante e do momento fletor sempre serão, respectivamente, um e dois graus mais altos que a curva da força distribuída. Com isso em mente, conseguimos esboçar os diagramas de força cortante e momento fletor sem realmente determinar as funções $V(x)$ e $M(x)$, após calcular alguns poucos valores da força cortante e do momento fletor. Os esboços obtidos serão mais precisos se lembrarmos do fato de que, em qualquer ponto em que as curvas são contínuas, a inclinação da curva da força cortante será igual a $-w$ e a inclinação da curva do momento fletor é igual a V.



PROBLEMA RESOLVIDO 5.3

Trace os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga e o carregamento mostrados.

SOLUÇÃO



Reações. Considerando a viga inteira como um corpo livre, escrevemos

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: \quad D(7{,}2\text{ m}) - (94\text{ kN})(1{,}8\text{ m}) - (54\text{ kN})(4{,}2\text{ m}) - (60\text{ kN})(8{,}4\text{ m}) = 0$$

$$D = +125\text{ kN} \qquad \mathbf{D} = 125\text{ kN}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad A_y - 94\text{ kN} - 54\text{ kN} + 125\text{ kN} - 60\text{ kN} = 0$$

$$A_y = +83\text{ kN} \qquad \mathbf{A}_y = 83\text{ kN}\uparrow$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \quad A_x = 0 \qquad \mathbf{A}_x = 0$$

Notamos também que os momentos fletores em A e E são ambos iguais a zero; assim obtemos dois pontos (indicados por um ponto) no diagrama de momento fletor.

Diagrama de força cortante. Como $dV/dx = -w$, sabemos que, entre as forças e as reações concentradas, a inclinação do diagrama da força cortante é zero (isto é, a força cortante é constante). A força cortante em qualquer ponto é determinada dividindo-se a viga em duas partes e considerando cada parte como um corpo livre. Por exemplo, usando a parte da viga à esquerda da seção *1*, obtemos o valor da força cortante entre B e C:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad +83\text{ kN} - 94\text{ kN} - V = 0 \qquad V = -11\text{ kN}$$

Verificamos também que a força cortante é +60 kN imediatamente à direita de D e zero na extremidade E. Como a inclinação $dV/dx = -w$ é constante entre D e E, o diagrama da força cortante entre esses dois pontos é uma linha reta.

Diagrama do momento fletor. Lembramos que a área sob a curva da força cortante entre dois pontos é igual à variação no momento fletor entre esses dois pontos. Por conveniência, a área de cada parte do diagrama da força cortante é calculada e indicada entre parênteses no diagrama. Como se sabe que o momento fletor M_A na extremidade esquerda é igual a zero, escrevemos

$$M_B - M_A = +149{,}4 \qquad M_B = +149{,}4\text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_C - M_B = -26{,}4 \qquad M_C = +\ 123{,}0\text{ kN} \cdot \text{m}$$

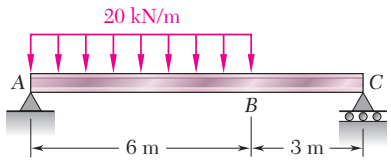
$$M_D - M_C = -195 \qquad M_D = -\ 72{,}0\text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_E - M_D = +72 \qquad M_E = 0$$

Como se sabe que M_E é zero, está feita a verificação dos cálculos.

Entre as forças e reações concentradas, a força cortante é constante; portanto, a inclinação dM/dx é constante e o diagrama de momento fletor é traçado ligando-se os pontos conhecidos com linhas retas. Entre D e E, em que o diagrama de força cortante é uma linha reta inclinada, o diagrama de momento fletor é uma parábola.

Dos diagramas de V e M notamos que $V_{\text{máx}} = 83$ kN e $M_{\text{máx}} = 149{,}4$ kN · m.



PROBLEMA RESOLVIDO 5.4

A viga *AC* formada pelo perfil de aço laminado W360 × 79 é simplesmente apoiada e tem uma força uniformemente distribuída conforme mostra a figura. Trace os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga e determine a localização e a intensidade da tensão normal máxima provocada pelo momento fletor.

SOLUÇÃO

Reações. Considerando a viga inteira como um corpo livre, encontramos

$$\mathbf{R}_A = 80\ \text{kN} \uparrow \qquad \mathbf{R}_C = 40\ \text{kN} \uparrow$$

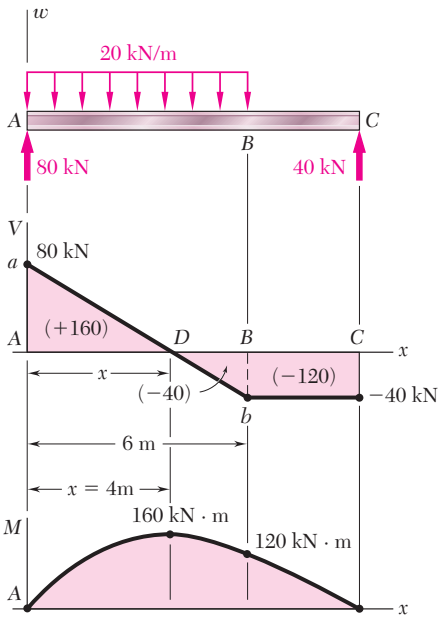


Diagrama de força cortante. A força cortante logo à direita de *A* é $V_A = +80$ kN. Como a variação na força cortante entre dois pontos é de sinal contrário ao valor da área sob a curva da força entre aqueles dois pontos, obtemos V_B escrevendo

$$V_B - V_A = -(20\ \text{kN/m})(6\ \text{m}) = -120\ \text{kN}$$
$$V_B = -120 + V_A = -120 + 80 = -40\ \text{kN}$$

A inclinação $dV/dx = -w$ sendo constante entre *A* e *B*, o diagrama de força cortante entre esses dois pontos é representado por uma linha reta. Entre *B* e *C*, a área sob a curva da força é zero; portanto,

$$V_C - V_B = 0 \qquad V_C = V_B = -40\ \text{kN}$$

e a força cortante é constante entre *B* e *C*.

Diagrama de momento fletor. Notamos que o momento fletor em cada extremidade da barra é zero. Para determinarmos o momento fletor máximo, localizamos a seção *D* da viga em que $V = 0$. Escrevemos

$$V_D - V_A = -wx$$
$$0 - 80\ \text{kN} = -(20\ \text{kN/m})x$$

e, resolvendo para *x*:

$$x = 4\ \text{m} \blacktriangleleft$$

O momento fletor máximo ocorre no ponto *D*, em que temos $dM/dx = V = 0$. As áreas das várias partes do diagrama de força cortante são calculadas e apresentadas (entre parênteses) no diagrama. Como a área do diagrama de força cortante entre dois pontos é igual à variação no momento fletor entre aqueles dois pontos, escrevemos

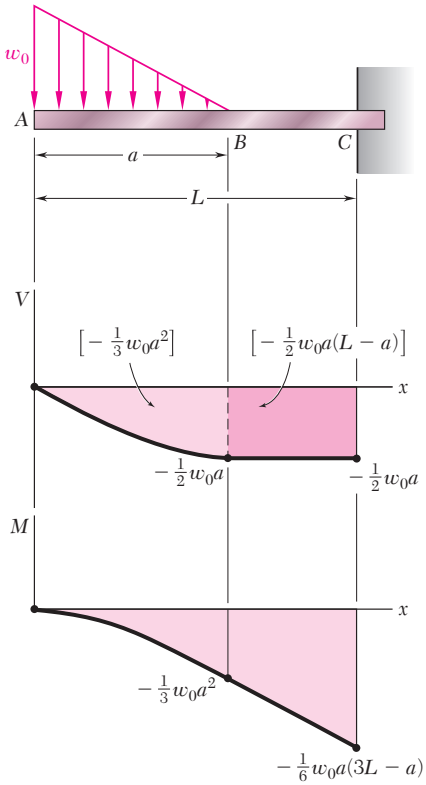
$$M_D - M_A = +160\ \text{kN} \cdot \text{m} \qquad M_D = +160\ \text{kN} \cdot \text{m}$$
$$M_B - M_D = -\ 40\ \text{kN} \cdot \text{m} \qquad M_B = +120\ \text{kN} \cdot \text{m}$$
$$M_C - M_B = -120\ \text{kN} \cdot \text{m} \qquad M_C = 0$$

O diagrama de momento fletor consiste em um arco de parábola seguido por um segmento de linha reta; a inclinação da parábola em *A* é igual ao valor de *V* naquele ponto.

Tensão normal máxima. Ela ocorre em *D*, em que $|M|$ tem o maior valor. Do Apêndice *C* encontramos que para um perfil de aço W360 × 79, $W = 1\,280\ \text{mm}^3$ em relação ao eixo horizontal. Substituindo esse valor e $|M| = |M_D| = 160 \times 10^3\ \text{N} \cdot \text{m}$ na Equação (5.3), escrevemos

$$\sigma_m = \frac{|M_D|}{W} = \frac{160 \times 10^3\ \text{N} \cdot \text{m}}{1\,280 \times 10^{-6}\ \text{m}^3} = 125{,}0 \times 10^6\ \text{Pa}$$

Tensão normal máxima na viga $= 125{,}0$ MPa ◀



PROBLEMA RESOLVIDO 5.5

Esboce os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga em balanço mostrada na figura.

SOLUÇÃO

Diagrama de força cortante. Na extremidade livre da barra, encontramos $V_A = 0$. Entre A e B, a área sob a curva de força é $\frac{1}{2}w_0a$; encontramos V_B escrevendo

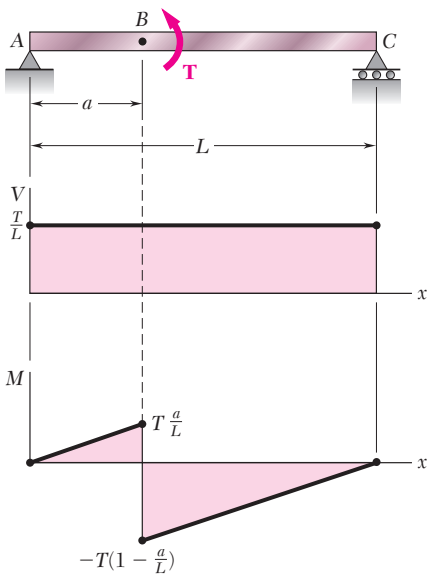
$$V_B - V_A = -\tfrac{1}{2}w_0a \qquad V_B = -\tfrac{1}{2}w_0a$$

Entre B e C, a viga não tem força; portanto $V_C = V_B$. Em A temos $w = w_0$ e, de acordo com a Equação (5.5), a inclinação da curva de força cortante é $dV/dx = -w_0$, enquanto em B a inclinação é $dV/dx = 0$. Entre A e B, o carregamento diminui linearmente, e o diagrama de força cortante é parabólico. Entre B e C, $w = 0$, e o diagrama de força cortante é uma linha horizontal.

Diagrama do momento fletor. O momento fletor M_A na extremidade livre da viga é zero. Calculamos a área sob a curva da força cortante e escrevemos

$$M_B - M_A = -\tfrac{1}{3}w_0a^2 \qquad M_B = -\tfrac{1}{3}w_0a^2$$
$$M_C - M_B = -\tfrac{1}{2}w_0a(L-a)$$
$$M_C = -\tfrac{1}{6}w_0a(3L-a)$$

O esboço do diagrama de momento fletor é completado lembrando-se que $dM/dx = V$. Concluímos que, entre A e B, o diagrama é representado por uma curva de terceiro grau com inclinação zero em A, e entre B e C por uma linha reta.



PROBLEMA RESOLVIDO 5.6

A viga simplesmente apoiada AC é carregada por um momento T aplicado no ponto B. Trace os diagramas de força cortante e momento fletor da viga.

SOLUÇÃO

A viga inteira é considerada um corpo livre, e obtemos

$$\mathbf{R}_A = \frac{T}{L}\uparrow \qquad \mathbf{R}_C = \frac{T}{L}\downarrow$$

A força cortante em qualquer seção é constante e igual a T/L. Como é aplicado um momento em B, o diagrama de momento fletor é descontínuo em B; ele é representado por duas linhas retas inclinadas e diminui repentinamente em B por um valor igual a T.

PROBLEMAS

5.34 Usando o método da Seção 5.3, resolva o Problema 5.1*a*.

5.35 Usando o método da Seção 5.3, resolva o Problema 5.2*a*.

5.36 Usando o método da Seção 5.3, resolva o Problema 5.3*a*.

5.37 Usando o método da Seção 5.3, resolva o Problema 5.4*a*.

5.38 Usando o método da Seção 5.3, resolva o Problema 5.5*a*.

5.39 Usando o método da Seção 5.3, resolva o Problema 5.6*a*.

5.40 Usando o método da Seção 5.3, resolva o Problema 5.7.

5.41 Usando o método da Seção 5.3, resolva o Problema 5.8.

5.42 Usando o método da Seção 5.3, resolva o Problema 5.9.

5.43 Usando o método da Seção 5.3, resolva o Problema 5.10.

5.44 e 5.45 Trace os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga e o carregamento mostrados na figura, e determine o valor máximo absoluto (*a*) da força cortante e (*b*) do momento fletor.

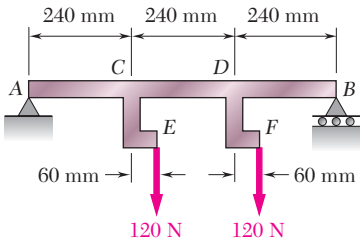


Fig. *P5.44*

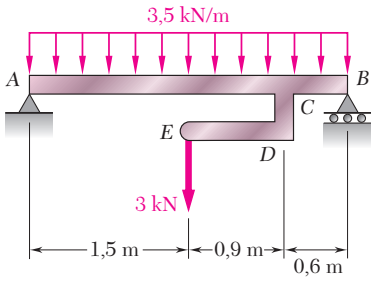


Fig. *P5.45*

5.46 Usando o método da Seção 5.3, resolva o Problema 5.15.

5.47 Usando o método da Seção 5.3, resolva o Problema 5.16.

5.48 Usando o método da Seção 5.3, resolva o Problema 5.17.

5.49 Usando o método da Seção 5.3, resolva o Problema 5.18.

5.50 e *5.51* Determine (*a*) as equações das curvas de força cortante e momento fletor para a viga e o carregamento mostrados na figura e (*b*) o valor máximo absoluto do momento fletor na viga.

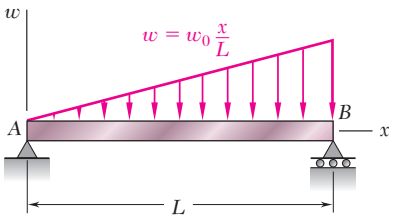


Fig. P5.50

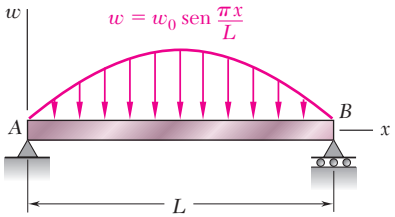


Fig. *P5.51*

5.52 Para a viga e o carregamento mostrados na figura, determine as equações das curvas de força cortante e momento fletor e o valor máximo absoluto do momento fletor na viga, sabendo que (*a*) k = 1 e (*b*) k = 0,5.

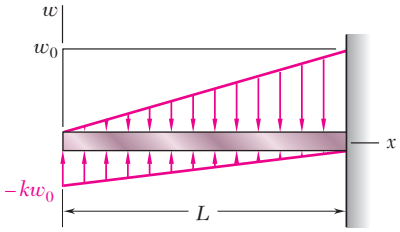


Fig. P5.52

5.53 Determine (*a*) as equações das curvas de força cortante e momento fletor para a viga e o carregamento mostrados na figura e (*b*) o valor máximo absoluto do momento fletor na viga.

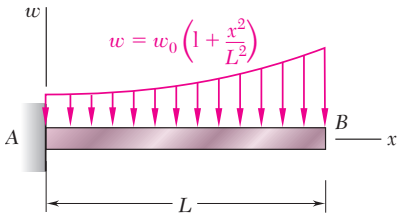


Fig. *P5.53*

5.54 e 5.55 Trace os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga e carregamento mostrados, e determine a tensão normal máxima provocada pelo momento fletor.

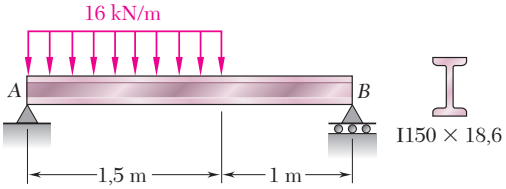


Fig. P5.54

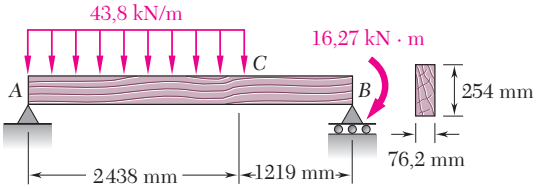


Fig. P5.55

5.56 e *5.57* Trace os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga e o carregamento mostrados, e determine a tensão normal máxima provocada pelo momento fletor.

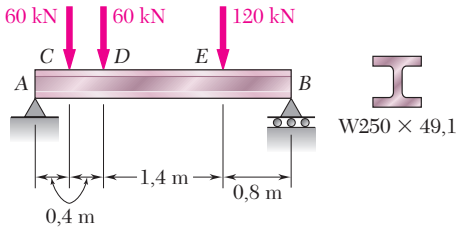


Fig. P5.56

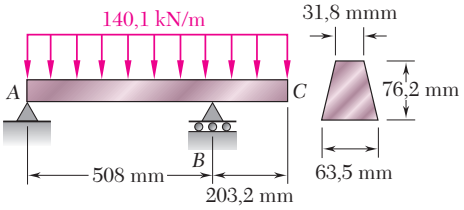


Fig. *P5.57*

5.58 e 5.59 Trace os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga e o carregamento mostrados, e determine a tensão normal máxima provocada pelo momento fletor.

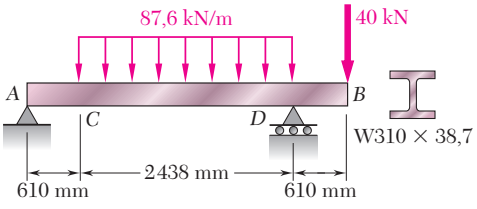


Fig. P5.58

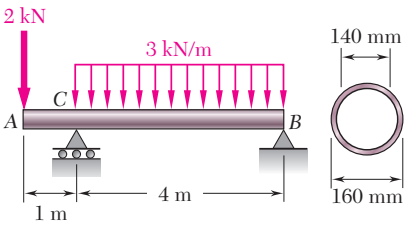


Fig. P5.59

5.60 e *5.61* Sabendo que a viga AB está em equilíbrio sob o carregamento mostrado, trace os diagramas de força cortante e momento fletor para essa viga e determine a tensão normal máxima provocada pelo momento fletor.

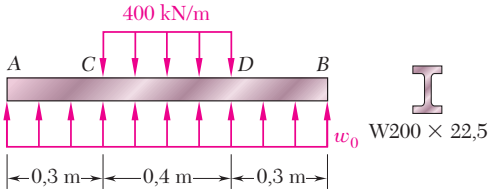


Fig. P5.60

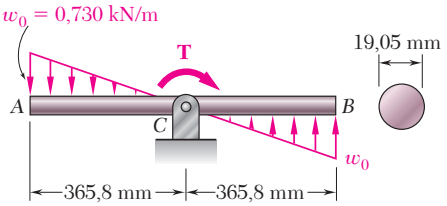


Fig. *P5.61*

5.62 A viga *AB* suporta uma força uniformemente distribuída de 2 kN/m e duas forças concentradas **P** e **Q**. Foi determinado experimentalmente que a tensão normal provocada pelo momento fletor na borda inferior da viga fosse de −56,9 MPa em *A* e de −29,9 MPa em *C*. Trace os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga, e determine a intensidade das forças **P** e **Q**.

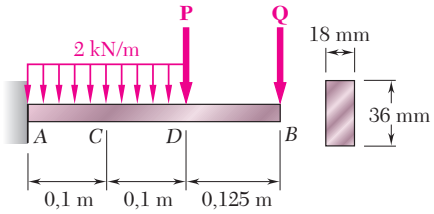


Fig. P5.62

5.63 A viga *AB* suporta duas forças concentradas **P** e **Q**. A tensão normal provocada pelo momento fletor na borda inferior da viga é de +55 MPa em *D* e de +37,5 MPa em *F*. (*a*) Trace os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga. (*b*) Determine a tensão normal máxima provocada pelo momento fletor que ocorre na viga.

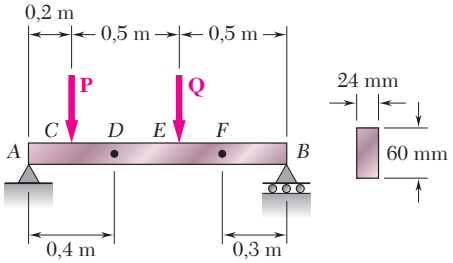


Fig. *P5.63*

***5.64** A viga AB suporta uma força uniformemente distribuída de 7 005 N/m e duas forças concentradas **P** e **Q**. A tensão normal provocada pelo momento fletor na borda inferior da mesa é de +102,4 MPa em D, e de +73,4 MPa em E. (*a*) Trace os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga. (*b*) Determine a tensão normal máxima provocada pelo momento fletor que ocorre na viga.

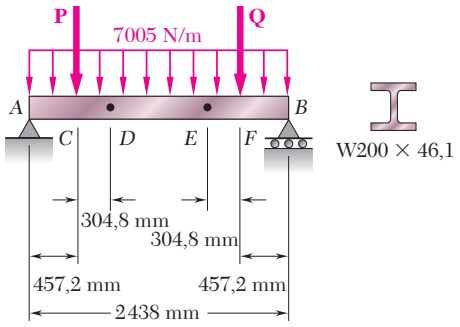


Fig. P5.64

5.4. Projeto de vigas prismáticas em flexão

Conforme indicamos na Seção 5.1, o projeto de uma viga geralmente é controlado pelo valor máximo absoluto $|M|_{\text{máx}}$ do momento fletor que ocorrerá na viga. A maior tensão normal σ_m na viga é encontrada na sua superfície, na seção crítica em que ocorre a $|M|_{\text{máx}}$, e pode ser obtida substituindo-se $|M|_{\text{máx}}$ por $|M|$ na Equação (5.1) ou Equação (5.3).† Escrevemos

$$\sigma_m = \frac{|M|_{\text{máx}}\, c}{I} \qquad \sigma_m = \frac{|M|_{\text{máx}}}{W} \tag{5.1′, 5.3′}$$

Um projeto seguro requer $\sigma_m \leq \sigma_{\text{adm}}$, em que σ_{adm} é a tensão admissível para o material utilizado. Substituindo σ_{adm} por σ_m em (5.3′) e resolvendo para W, obtemos o valor admissível mínimo do módulo de resistência à flexão da seção para a viga a ser projetada:

$$W_{\text{mín}} = \frac{|M|_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{adm}}} \tag{5.9}$$

O projeto dos tipos comuns de vigas, assim como as vigas de madeira de seção transversal retangular e vigas de aço laminado com várias formas de seção transversal, será tratado nesta seção. Um procedimento apropriado deverá tornar o projeto mais econômico. Isso significa que, entre vigas do mesmo tipo e mesmo material, e com outras características iguais, deverá ser selecionada a viga com menor peso por unidade de comprimento e, portanto, com a menor área de seção transversal, uma vez que ela terá o menor preço.

†Para vigas que não são simétricas em relação à superfície neutra, a maior das distâncias da superfície neutra até as superfícies da viga deverá ser utilizada para c na Equação (5.1) e no cálculo do módulo de resistência à flexão da seção $W = I/c$.

O procedimento de projeto incluirá os seguintes passos:†

1. Primeiro determine o valor de σ_{adm} para o material selecionado de uma tabela de propriedades dos materiais ou das especificações de projeto. Podemos também calcular esse valor dividindo o limite de resistência σ_L do material por um coeficiente de segurança apropriado (Seção 1.13). Considerando por enquanto que o valor de σ_{adm} é o mesmo em tração e compressão, proceda da forma a seguir.
2. Trace os diagramas da força cortante e do momento fletor correspondendo às condições de carregamento especificadas, e determine o valor máximo absoluto $|M|_{máx}$ do momento fletor na viga.
3. Determine da Equação (5.9) o valor mínimo admissível do módulo de resistência $W_{mín}$ da seção da viga.
4. Para uma viga de madeira, sua altura h, largura b, ou a relação h/b caracterizando a forma de sua seção transversal provavelmente já estarão especificadas. As dimensões desconhecidas podem então ser selecionadas lembrando a Equação (4.19) da Seção 4.4 que b e h devem satisfazer a relação $\frac{1}{6}bh^2 = \mathrm{W} \geq \mathrm{W}_{min}$.
5. Para uma viga de aço laminado, consulte a tabela apropriada no Apêndice *C*. Entre as seções de vigas disponíveis, considere somente aquelas com um módulo de resistência à flexão da seção $W \geq W_{mín}$ e selecione desse grupo a seção com menor peso por unidade de comprimento. Essa é a mais econômica das seções para as quais $W \geq W_{mín}$. Note que essa não é necessariamente a seção com o menor valor de W (ver o Exemplo 5.4). Em alguns casos, a escolha de uma seção pode ser limitada por outras considerações, como a altura disponível da seção transversal ou o deslocamento admissível da viga (cf. Capítulo 9).

A discussão que acabamos de apresentar se limitou a materiais para os quais σ_{adm} tem o mesmo valor em tração e em compressão. Se σ_{adm} tiver valores diferentes em tração e compressão, você precisará selecionar a seção da viga de maneira que $\sigma_m \leq \sigma_{adm}$ para tensões de tração e compressão. Se a seção transversal não for simétrica em relação à sua linha neutra, as maiores tensões de tração e compressão não ocorrerão necessariamente na seção em que $|M|$ for máximo. Uma pode ocorrer quando M é máximo e a outra quando M é mínimo. Assim, o passo 2 deverá incluir a determinação de $M_{máx}$ e $M_{mín}$, e o passo 3 deverá ser modificado para levar em conta as tensões de tração e compressão.

Finalmente, tenha em mente que o procedimento de projeto descrito nessa seção leva em conta somente as tensões normais que ocorrem na superfície da viga. Vigas curtas, especialmente aquelas de madeira, podem falhar em cisalhamento sob um carregamento transversal. A determinação das tensões de cisalhamento em vigas será discutida no Capítulo 6. E também, no caso das vigas de aço laminado, tensões normais maiores que aquelas consideradas aqui podem ocorrer na junção da alma com as mesas. Isso será discutido no Capítulo 8.

† Consideramos que todas as vigas utilizadas neste capítulo são adequadamente contraventadas para prevenir flambagem lateral, e que há placas de apoio sob cargas concentradas aplicadas a vigas de aço laminado para evitar a flambagem local da alma.

EXEMPLO 5.4

Selecione uma viga de mesa larga para suportar uma força de 66 kN, como mostra a Fig. 5.15. A tensão normal admissível para o aço utilizado é de 165 MPa.

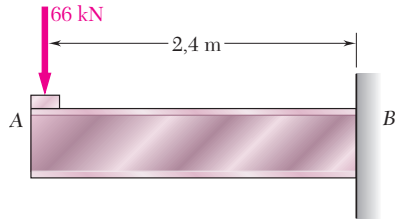


Fig. 5.15

1. A tensão normal admissível é dada: $\sigma_{adm} = 165$ MPa.

2. A força cortante é constante e igual a 66 kN. O momento fletor é máximo em B. Temos

$$|M|_{máx} = (66\text{ kN})(2{,}4\text{ m}) = 158{,}4\text{ kN} \cdot \text{m} = 158{,}4\text{ kN} \cdot \text{m}$$

3. O módulo de resistência da seção mínimo admissível é

$$W_{mín} = \frac{|M|_{máx}}{\sigma_{adm}} = \frac{158{,}4 \times 10^6\text{ N} \cdot \text{mm}}{165\text{ N/mm}^2} = 960 \times 10^3\text{ mm}^3$$

4. Consultando a tabela das *Propriedades de Perfis Laminados* no Apêndice C, notamos que os perfis são dispostos em grupos da mesma altura e que, em cada grupo, eles são listados em ordem decrescente de peso. Escolhemos em cada grupo a viga mais leve que tenha um módulo de resistência da seção $W = I/c$ pelo menos tão grande quanto $W_{mín}$, e anotamos os resultados na tabela abaixo.

Perfil	W, mm^3
W530 × 66	1340 × 10
W460 × 74	1460 × 10
W410 × 60	1060 × 10
W360 × 64	1030 × 10
W310 × 74	1060 × 10
W250 × 80	984 × 10

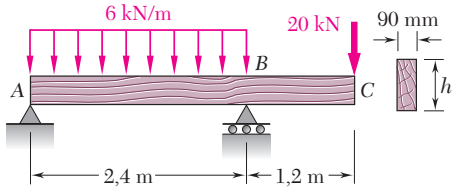
O mais econômico é o perfil de menor peso, ou seja, W410 × 60, com 60 kg/m e, mesmo assim, ele tem um módulo de resistência da seção maior do que dois dos outros perfis. Notamos também que o peso total da viga será (2,4 m) × (60 kg/m × 9,8 m/s^2) = 1 411 N. Esse peso é pequeno comparado com a força de 66 000 N e pode ser desprezado em nossa análise.

***Projeto com base em fatores de carga e resistência.** Esse método alternativo de projeto foi descrito rapidamente na Seção 1.13 e aplicado a elementos submetidos a carregamento axial. Ele pode ser facilmente aplicado ao projeto de vigas em flexão. Substituindo na Equação (1.26) as cargas P_P, P_E e P_L, respectivamente, pelos momentos de flexão M_P, M_E e M_L, escrevemos

$$\gamma_P M_P + \gamma_E M_E \leq \phi M_L \tag{5.10}$$

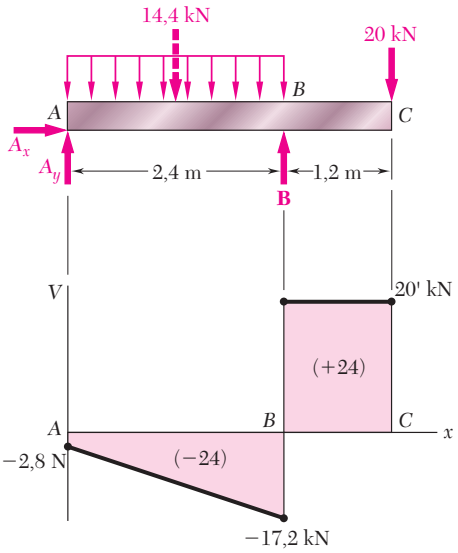
Os coeficientes γ_P e γ_E são chamados de *coeficientes de carga* e o coeficiente ϕ é chamado de *coeficiente de resistência*. Os momentos M_P e M_E são os momentos fletores em virtude, respectivamente, das cargas do peso próprio e da carga externa, enquanto M_L é igual ao produto do limite de resistência σ_L do material pelo módulo de resistência à flexão da seção W da viga: $M_L = W\sigma_L$.

PROBLEMA RESOLVIDO 5.7



Uma viga *AC* biapoiada com balanço, de madeira, com 3,6 m de comprimento, com um vão *AB* de 2,4 m, deve ser projetada para suportar as forças distribuídas e concentradas mostradas na figura. Sabendo que será utilizada madeira com 100 mm de largura nominal (largura real 90 mm) e uma tensão admissível de 12 MPa, determine a altura *h* mínima necessária para a viga.

SOLUÇÃO



Reações. Considerando toda a viga como um corpo livre, escrevemos

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: \; B(2{,}4\text{ m}) - (14{,}4\text{ kN})(1{,}2\text{ m}) - (20\text{ kN})(3{,}6\text{ m}) = 0$$
$$B = 37{,}2\text{ kN} \qquad \mathbf{B} = 37{,}2\text{ kN}\uparrow$$
$$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \qquad A_x = 0$$
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \; A_y + 37{,}2\text{ kN} - 14{,}4\text{ kN} - 20\text{ kN} = 0$$
$$A_y = -2{,}8\text{ kN} \qquad \mathbf{A} = 2{,}8\text{ kN}\downarrow$$

Diagrama de força cortante. A força cortante logo à direita de *A* é $V_A = A_y = -2{,}8$ kN. Como a variação da força cortante entre *A* e *B* é igual a *menos* a área sob a curva de carga entre esses dois pontos, obtemos V_B escrevendo

$$V_B - V_A = -(6\text{ kN/m})(2{,}4\text{ m}) = -14{,}4\text{ kN} = -14{,}4\text{ kN}$$
$$V_B = V_A - 14{,}4\text{ kN} = -2{,}8\text{ kN} - 14{,}4\text{ kN} = -17{,}2\text{ kN}.$$

A reação em *B* produz um aumento brusco de 37,2 kN em *V*, resultando em um valor de força cortante igual a 20 kN à direita de *B*. Como não há nenhuma carga aplicada entre *B* e *C*, a força cortante se mantém constante entre esses dois pontos.

Determinação de $|M|_{máx}$. Primeiro observamos que o momento fletor é igual a zero em ambas as extremidades da viga: $M_A = M_C = 0$. Entre *A* e *B* o momento fletor diminui por uma quantidade igual à área sob a curva de força cortante, e entre *B* e *C* ele aumenta por uma quantidade correspondente. Assim, o valor máximo absoluto do momento fletor é $|M|_{máx} = 24\text{ kN} \cdot \text{m}$.

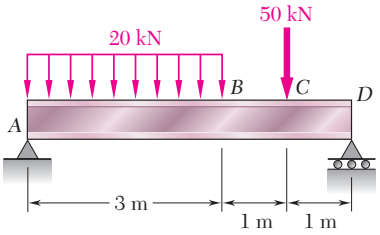
Módulo de resistência à flexão da seção mínima admissível. Substituindo na Equação (5.9) o valor dado de σ_{adm} e o valor de $|M|_{máx}$ que encontramos, escrevemos

$$W_{mín} = \frac{|M|_{máx}}{\sigma_{adm}} = \frac{(24 \times 10^6\text{ N/mm}^2)}{12\text{ N/mm}^2} = 2000 \times 10^3\text{ mm}^3$$

Altura mínima necessária da viga. Recordando a fórmula desenvolvida na parte 4 do procedimento de projeto descrito na Seção 5.4 e substituindo os valores de *b* e $W_{mín}$, temos

$$\tfrac{1}{6}bh^2 \geq W_{mín} \qquad \tfrac{1}{6}(90\text{ mm})h^2 \geq 2000 \times 10^3\text{ mm}^3 \qquad h \geq 365\text{ mm}$$

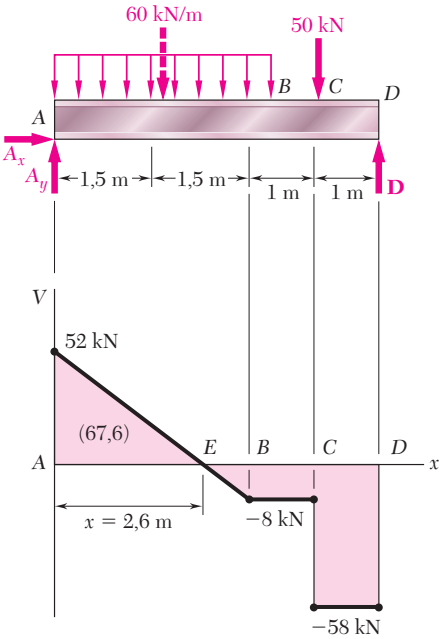
A altura mínima necessária da viga é $h = 365\text{ mm}$ ◀



PROBLEMA RESOLVIDO 5.8

Uma viga de aço *AD* simplesmente apoiada, de 5 m de comprimento, deve suportar as forças distribuídas e concentradas mostradas na figura. Sabendo que a tensão normal admissível para a classe do aço a ser utilizado é de 160 MPa, selecione o perfil de mesa larga que deverá ser utilizado.

SOLUÇÃO



Reações. Considerando a viga inteira um corpo livre, escrevemos

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: \quad D(5\text{ m}) - (60\text{ kN})(1{,}5\text{ m}) - (50\text{ kN})(4\text{ m}) = 0$$
$$D = 58{,}0\text{ kN} \qquad \mathbf{D} = 58{,}0\text{ kN}\uparrow$$
$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \qquad A_x = 0$$
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad A_y + 58{,}0\text{ kN} - 60\text{ kN} - 50\text{ kN} = 0$$
$$A_y = 52{,}0\text{ kN} \qquad \mathbf{A} = 52{,}0\text{ kN}\uparrow$$

Diagrama de força cortante. A força cortante imediatamente à direita de *A* é $V_A = A_y = +52{,}0$ kN. Como a variação na força cortante entre *A* e *B* é igual a *menos* a área sob a curva da força distribuída entre esses dois pontos, temos

$$V_B = 52{,}0\text{ kN} - 60\text{ kN} = -8\text{ kN}$$

A força cortante permanece constante entre *B* e *C*, quando ela cai para −58 kN, e mantém esse valor entre *C* e *D*. Localizamos a seção *E* da viga em que $V = 0$ escrevendo

$$V_D - V_A = -wx$$
$$0 - 80\text{ kN} = -(20\text{ kN/m})\,x$$

Resolvendo para *x* encontramos $x = 2{,}60$ m.

Determinação de $|M|_{máx}$. O momento fletor é máximo em *E*, quando $V = 0$. Como *M* é zero no suporte *A*, seu valor máximo em *E* é igual à área sob a curva da força cortante entre *A* e *E*. Temos, portanto, $|M|_{máx} = M_E = 67{,}6\text{ kN}\cdot\text{m}$.

Módulo de resistência da seção mínimo admissível. Substituindo na Equação (5.9) o valor dado para σ_{adm} e o valor de $|M|_{máx}$ que encontramos, escrevemos

$$W_{mín} = \frac{|M|_{máx}}{\sigma_{adm}} = \frac{67{,}6\text{ kN}\cdot\text{m}}{160\text{ MPa}} = 422{,}5 \times 10^{-6}\text{ m}^3 = 422{,}5 \times 10^{3}\text{ mm}^3$$

Seleção do perfil de mesa larga. Do Apêndice *C* compilamos uma lista de perfis que possuem um módulo de resistência da seção maior que $W_{mín}$ e também a forma mais leve em um grupo de altura dado.

Perfil	*W*, mm³
W410 × 38,8	637
W360 × 32,9	474
W310 × 38,7	549
W250 × 44,8	535
W200 × 46,1	448

Selecionamos a forma mais leve disponível, ou seja, W360 × 32,9 ◀

PROBLEMAS

5.65 e *5.66* Para a viga e o carregamento mostrados na figura, projete a seção transversal da viga sabendo que o tipo da madeira utilizada tem uma tensão normal admissível de 12 MPa.

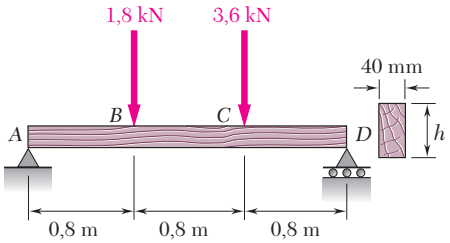


Fig. P5.65

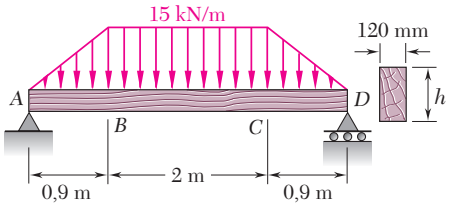


Fig. *P5.66*

***5.67* e 5.68** Para a viga e o carregamento mostrados na figura, projete a seção transversal da viga sabendo que o tipo da madeira utilizada tem uma tensão normal admissível de 12 MPa.

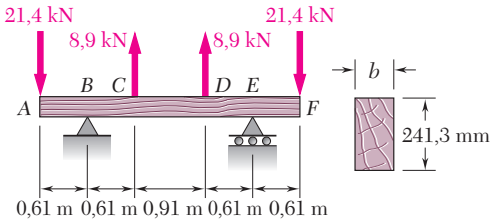


Fig. *P5.67*

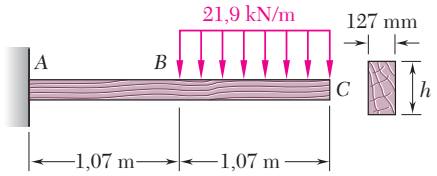


Fig. P5.68

5.69 e 5.70 Para a viga e o carregamento mostrados na figura, projete a seção transversal da viga sabendo que o tipo da madeira utilizada tem uma tensão normal admissível de 12 MPa.

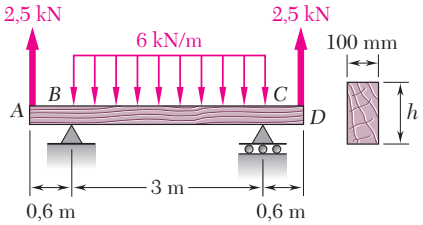


Fig. P5.69

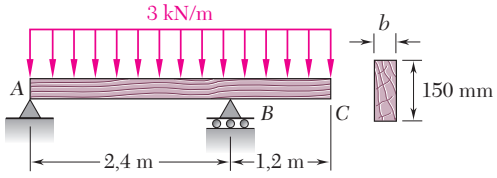


Fig. P5.70

5.71 e 5.72 Sabendo que a tensão admissível para o aço utilizado é de 165 MPa, selecione a viga de mesa larga mais econômica para suportar o carregamento mostrado.

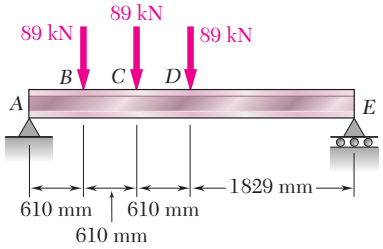


Fig. P5.71

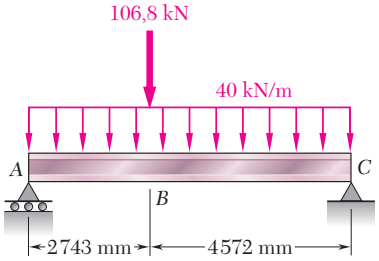


Fig. P5.72

5.73 e 5.74 Sabendo que a tensão admissível para o aço utilizado é de 160 MPa, selecione a viga de mesa larga mais econômica para suportar o carregamento mostrado.

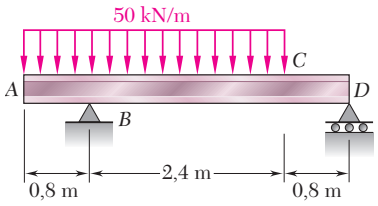


Fig. P5.73

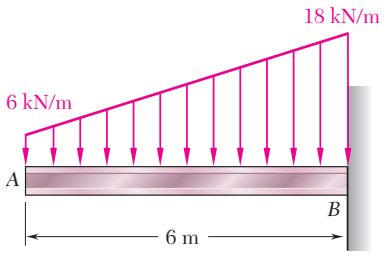


Fig. P5.74

***5.75* e 5.76** Sabendo que a tensão admissível para o aço utilizado é de 165 MPa, selecione a viga I mais econômica para suportar o carregamento mostrado.

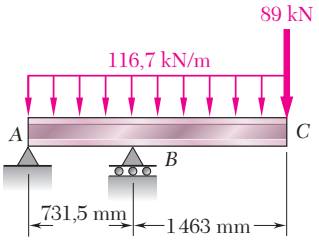


Fig. *P5.75*

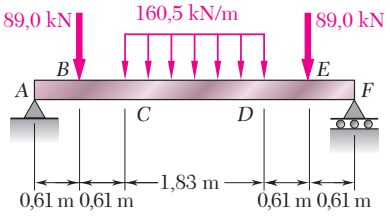


Fig. P5.76

5.77 e *5.78* Sabendo que a tensão admissível para o aço utilizado é de 160 MPa, selecione a viga I mais econômica para suportar o carregamento mostrado.

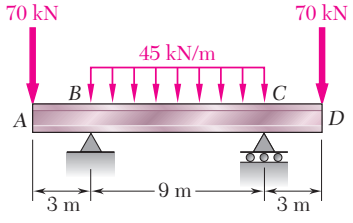


Fig. P5.77

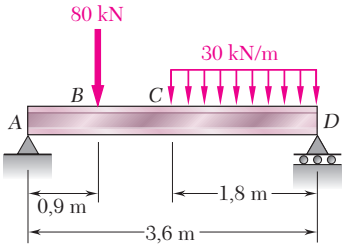


Fig. *P5.78*

5.79 Um tubo de aço com diâmetro de 101,6 mm deve suportar o carregamento mostrado na figura. Sabendo que o estoque de tubos disponíveis tem espessuras que variam de 6,35 mm a 25,4 mm em incrementos de 3,175 mm, e que a tensão normal admissível para o aço utilizado é de 165 MPa, determine a espessura mínima de parede t que pode ser utilizada.

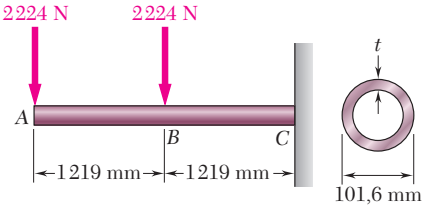


Fig. P5.79

5.80 Três chapas de aço são soldadas formando o perfil mostrado. Sabendo que a tensão normal admissível para o aço utilizado é de 151,7 MPa, determine a mínima largura b que poderá ser empregada para a mesa.

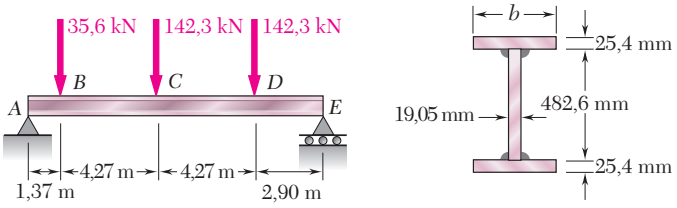


Fig. P5.80

5.81 Dois perfis U de aço laminado, devem ser soldados entre si ao longo das extremidades das mesas para suportar o carregamento mostrado na figura. Sabendo que a tensão normal admissível para o aço utilizado é de 150 MPa, determine os perfis U mais econômicos que podem ser utilizados.

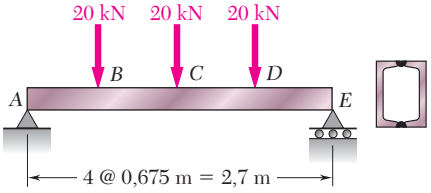


Fig. P5.81

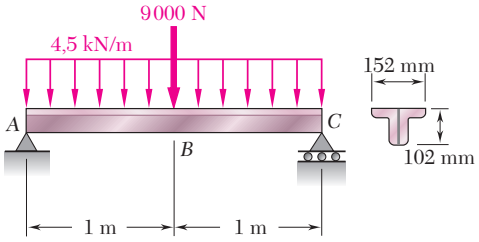


Fig. P5.82

5.82 Duas cantoneiras de aço laminado L102 × 76 são soldadas entre si e utilizadas para suportar o carregamento mostrado na figura. Sabendo que a tensão normal admissível para o aço utilizado é de 140 MPa, determine a espessura mínima da cantoneira a ser empregada.

5.83 Considerando que a reação ascendente do solo seja uniformemente distribuída e sabendo que a tensão normal admissível para o aço utilizado é de 170 MPa, selecione a viga de mesa larga mais econômica para suportar o carregamento mostrado.

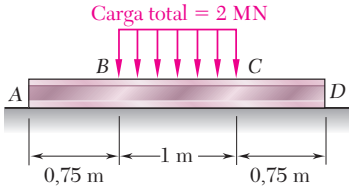


Fig. P5.83

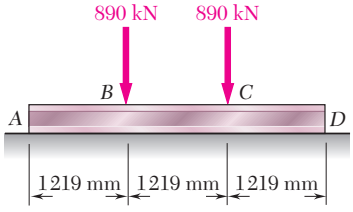


Fig. P5.84

5.84 Considerando que a reação ascendente do solo seja uniformemente distribuída e sabendo que a tensão normal admissível para o aço utilizado é de 165 MPa, selecione a viga de mesa larga mais econômica para suportar o carregamento mostrado.

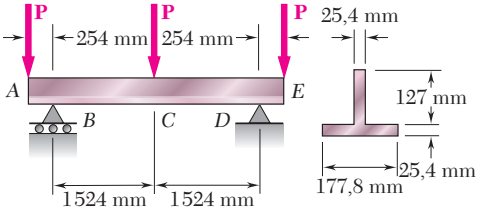


Fig. *P5.87*

5.85 Determine o maior valor admissível da carga distribuída **W** para a viga mostrada, sabendo que a tensão normal admissível é de +80 MPa em tração e de −130 MPa em compressão.

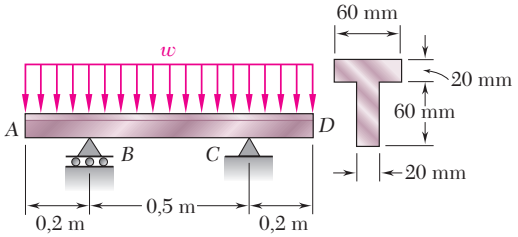


Fig. P5.85

5.86 Resolva o Problema 5.85 considerando que a viga em forma de T esteja invertida.

5.87 Determine o maior valor possível de **P** para a viga e o carregamento mostrados, sabendo que a tensão normal admissível é de +55,2 Mpa em tração e −124,1 MPa em compressão.

5.88 Resolva o Problema 5.87 considerando que a viga em forma de T esteja invertida.

5.89 As vigas *AB*, *BC* e *CD* têm a seção transversal mostrada na figura e são unidas por pino em *B* e *C*. Sabendo que a tensão normal admissível é de +110 MPa em tração e de −150 MPa em compressão, determine (*a*) o maior valor permitido de *w* para que a viga *BC* não seja sobrecarregada e (*b*) a distância *a* máxima correspondente para a qual as vigas em balanço *AB* e *CD* não sejam sobrecarregadas.

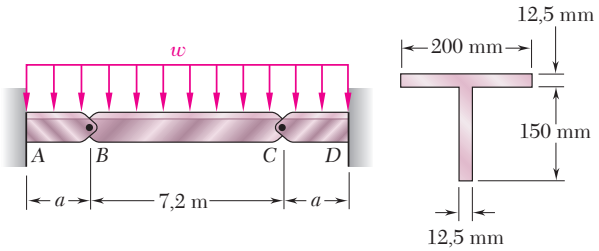


Fig. P5.89

5.90 As vigas *AB*, *BC* e *CD* têm a seção transversal mostrada na figura e são unidas por pino em *B* e *C*. Sabendo que a tensão normal admissível é de +110 MPa em tração e de −150 MPa em compressão, determine (*a*) o maior valor possível de **P** para que a viga *BC* não seja sobrecarregada, (*b*) a distância *a* máxima correspondente para a qual as vigas em balanço *AB* e *CD* não sejam sobrecarregadas.

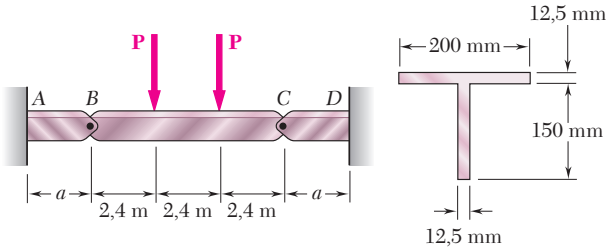


Fig. P5.90

5.91 Uma força de 240 kN deve ser suportada no centro de um vão de 5 m. Sabendo que a tensão normal admissível para o aço utilizado é de 165 MPa, determine (*a*) o menor comprimento admissível *l* da viga *CD* para que o perfil W310 × 74 da viga *AB* não seja sobrecarregado e (*b*) o perfil W mais econômico que pode ser utilizado para a viga *CD*. Despreze o peso de ambas as vigas.

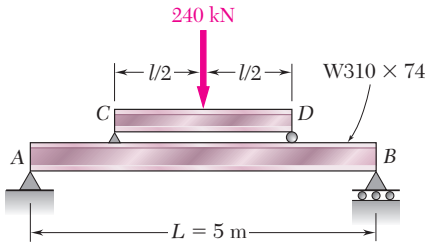


Fig. *P5.91*

5.92 A viga *ABC* é rebitada nas vigas *DBE* e *FCG*. Sabendo que a tensão normal admissível é de 165 MPa, selecione o perfil de mesa larga mais econômico que pode ser utilizado (*a*) para a viga *ABC*, (*b*) para a viga *DBE* e (*c*) para a viga *FCG*.

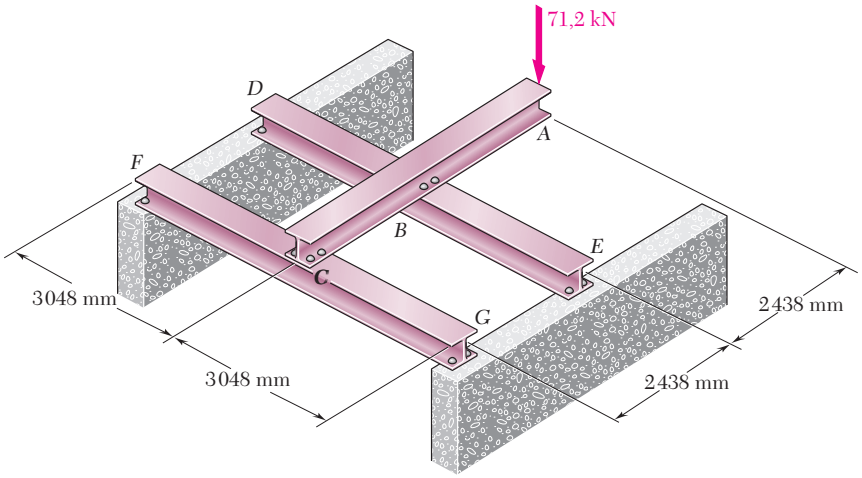


Fig. P5.92

5.93 Uma força uniformemente distribuída de 66 kN/m deve ser suportada sobre o vão de 6 m mostrado na figura. Sabendo que a tensão normal admissível para o aço utilizado é de 140 MPa, determine (*a*) o menor comprimento admissível *l* da viga *CD* para que o perfil W460 × 74 da viga *AB* não seja sobrecarregado e (*b*) o perfil W mais econômico que pode ser utilizado para a viga *CD*. Despreze o peso de ambas as vigas.

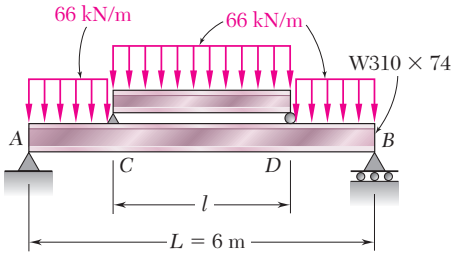


Fig. *P5.93*

***5.94** A estrutura de um telhado consiste em madeira compensada e material de forração suportados por várias vigas de madeira de comprimento $L = 16$ m. A carga permanente suportada por cada viga, incluindo seu peso estimado, pode ser representada por uma força uniformemente distribuída $w_P = 350$ N/m. O peso externo consiste em uma carga de neve, representada por uma força uniformemente distribuída $w_E = 600$ N/m e uma força concentrada **P** de 6 kN aplicada ao ponto médio C de cada viga. Sabendo que o limite de resistência da madeira utilizada é $\sigma_L = 50$ MPa e que a largura da viga é $b = 75$ mm, determine a altura mínima admissível h das vigas, usando LRFD com os coeficientes de carga $\gamma_P = 1{,}2$, $\gamma_E = 1{,}6$ e o coeficiente de resistência $\phi = 0{,}9$.

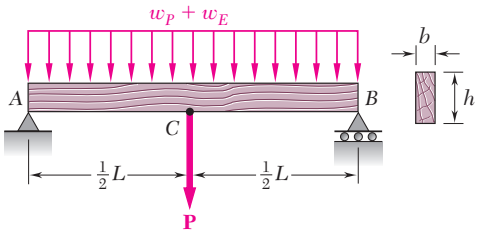


Fig. P5.94

***5.95** Resolva o Problema 5.94 considerando que a força **P** concentrada de 6 kN aplicada a cada viga for substituída por forças concentradas $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$ de 3 kN aplicadas a uma distância de 4 m de cada extremidade das vigas.

***5.96** Uma ponte de comprimento $L = 14{,}6$ m deve ser construída em uma estrada secundária cujo acesso a caminhões está limitado a veículos de dois eixos de peso médio. Ela consistirá em uma laje de concreto e vigas de aço simplesmente apoiadas com um limite de resistência $\sigma_L = 413{,}7$ MPa. O peso combinado da laje e das vigas pode ser aproximado por uma força uniformemente distribuída $w = 11$ kN/m em cada viga. Para as finalidades do projeto, considera-se que um caminhão com distância entre eixos de $a = 4{,}27$ m passará pela ponte e que as forças concentradas resultantes $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$ exercidas em cada viga serão de até 106,8 kN e 26,7 kN, respectivamente. Determine o perfil de mesas largas mais econômico para as vigas, usando o LRFD com os coeficientes de carga $\gamma_P = 1{,}25$, $\gamma_E = 1{,}75$ e coeficiente de resistência $\phi = 0{,}9$. [*Sugestão*: Pode-se mostrar que o valor máximo de $|M_E|$ ocorre sob a força maior quando a força está localizada à esquerda do centro da viga a uma distância igual a $aP_2/2(P_1 + P_2)$.]

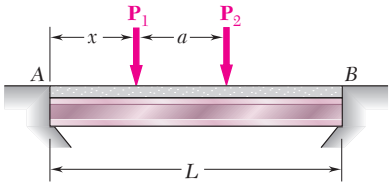


Fig. P5.96

***5.97** Considerando que os eixos dianteiro e traseiro permaneçam na mesma relação do caminhão do Problema 5.94, determine qual caminhão mais pesado poderia passar com segurança sobre a ponte projetada no problema.

*5.5. Usando funções de singularidade para determinar força cortante e momento fletor em uma viga

Revendo o trabalho feito nas seções anteriores, notamos que a força cortante e o momento fletor só em alguns casos raros puderam ser descritos por funções analíticas simples. No caso da viga em balanço do Exemplo 5.2 (Fig. 5.10), que suportava uma força w uniformemente distribuída, a força cortante e o momento fletor *puderam* ser representados por funções analíticas simples, ou seja, $V = -wx$ e $M = -\frac{1}{2}wx^2$; isso se deve ao fato de que *não existia descontinuidade* no carregamento da viga. Em contrapartida, no caso da viga simplesmente apoiada do Exemplo 5.1, que tinha força aplicada somente em seu ponto médio C, a força **P** em C representava uma *singularidade* no carregamento da viga. Essa singularidade resultou em descontinuidades na força cortante e no momento fletor e necessitou do uso de funções analíticas diferentes para representar V e M nas partes da viga localizadas, respectivamente, à esquerda e à direita do ponto C. No Problema Resolvido 5.2, a viga teve de ser dividida em três partes, em cada uma das quais diferentes funções foram utilizadas para representar a força cortante e o momento fletor. Essa situação nos leva a depender da representação gráfica das funções V e M proporcionadas pelos diagramas de força cortante e momento fletor e, mais tarde, na Seção 5.3, em um método gráfico de integração para determinar V e M a partir da força distribuída w.

A finalidade dessa seção é mostrar como o uso das *funções de singularidade* torna possível a representação da força cortante V e do momento fletor M por simples expressões matemáticas.

Considere a viga AB simplesmente apoiada, de comprimento $2a$, que tem uma força uniformemente distribuída w_0 que se estende a partir do seu ponto médio C até o apoio direito B (Fig. 5.16). Primeiro desenhamos o diagrama de corpo livre da barra inteira (Fig. 5.17a); substituindo a força distribuída por uma força concentrada equivalente e somando os momentos em relação a B, escrevemos

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: \qquad (w_0 a)(\tfrac{1}{2}a) - R_A(2a) = 0 \qquad R_A = \tfrac{1}{4}w_0 a$$

Em seguida, cortamos a viga no ponto D entre A e C. Do diagrama de corpo livre de AD (Fig. 5.17b) concluímos que, no intervalo $0 < x < a$, a força cortante e o momento fletor são expressos, respectivamente, pelas funções

$$V_1(x) = \tfrac{1}{4}w_0 a \qquad \text{e} \qquad M_1(x) = \tfrac{1}{4}w_0 a x$$

Cortando agora a viga no ponto E entre C e B, desenhamos o diagrama de corpo livre da parte AE (Fig. 5.17c). Substituindo a força distribuída por uma força concentrada equivalente, escrevemos

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad \tfrac{1}{4}w_0 a - w_0(x-a) - V_2 = 0$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_E = 0: \qquad -\tfrac{1}{4}w_0 a x + w_0(x-a)[\tfrac{1}{2}(x-a)] + M_2 = 0$$

e concluímos que, no intervalo $a < x < 2a$, a força cortante e o momento fletor são expressos, respectivamente, pelas funções

$$V_2(x) = \tfrac{1}{4}w_0 a - w_0(x-a) \qquad \text{e} \qquad M_2(x) = \tfrac{1}{4}w_0 a x - \tfrac{1}{2}w_0(x-a)^2$$

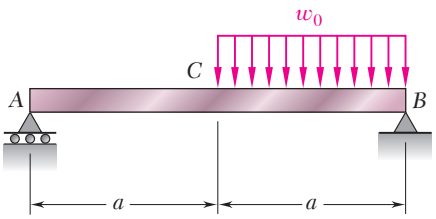
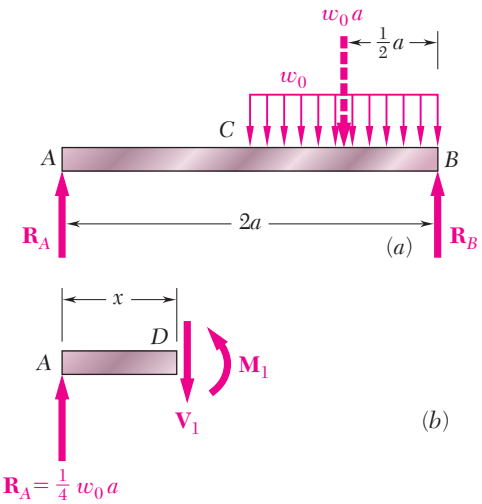


Fig. 5.16



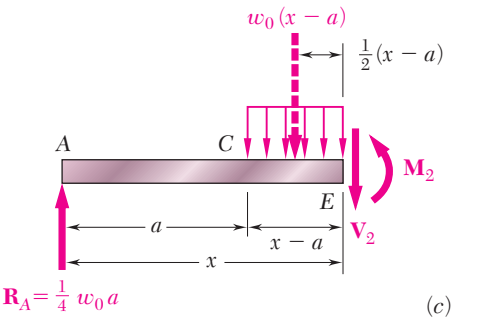


Fig. 5.17

Conforme já destacamos nessa seção, o fato de a força cortante e o momento fletor serem representados por diferentes funções de x, dependendo de x ser maior ou menor que a, é em razão da descontinuidade no carregamento da viga. No entanto, as funções $V_1(x)$ e $V_2(x)$ podem ser representadas pela expressão simples

$$V(x) = \tfrac{1}{4} w_0 a - w_0\langle x - a\rangle \tag{5.11}$$

se especificarmos que o segundo termo deverá ser incluído em nossos cálculos quando $x \geq a$ e ignorado quando $x < a$. Em outras palavras, os *colchetes* $\langle \quad \rangle$ *deverão ser substituídos por parênteses comuns* $(\quad)$ *quando* $x \geq a$ *e por zero quando* $x < a$. Com a mesma convenção, o momento fletor pode ser representado em qualquer ponto da viga pela expressão simples

$$M(x) = \tfrac{1}{4} w_0 a x - \tfrac{1}{2} w_0\langle x - a\rangle^2 \tag{5.12}$$

Da convenção que adotamos, conclui-se que os colchetes $\langle \quad \rangle$ podem ser diferenciados ou integrados como parênteses comuns. Em lugar de calcular o momento fletor a partir dos diagramas de corpo livre, poderíamos ter utilizado o método indicado na Seção 5.3 e integrar a expressão obtida para *V(x)*:

$$M(x) - M(0) = \int_0^x V(x)\,dx = \int_0^x \tfrac{1}{4} w_0 a\,dx - \int_0^x w_0\langle x - a\rangle\,dx$$

Após a integração, e observando que $M(0) = 0$, obtemos, como antes

$$M(x) = \tfrac{1}{4} w_0 a x - \tfrac{1}{2} w_0\langle x - a\rangle^2$$

Além disso, usando a mesma convenção novamente, notamos que a força distribuída em qualquer ponto da viga pode ser expressa como

$$w(x) = w_0\langle x - a\rangle^0 \tag{5.13}$$

Sem dúvida, os colchetes poderiam ser substituídos por zero para $x < a$ e por parênteses para $x \geq a$; verificamos então que $w(x) = 0$ para $x < a$, definindo a potência zero de qualquer número como a unidade, que $\langle x - a\rangle^0 = (x - a)^0 = 1$ e $w(x) = w_0$ para $x \geq a$. Da Seção 5.3 lembramos que a força cortante poderia ter sido obtida integrando a função $-w(x)$. Observando que $V = \tfrac{1}{4} w_0\, a$ para $x = 0$, escrevemos

$$V(x) - V(0) = -\int_0^x w(x)\,dx = -\int_0^x w_0\langle x - a\rangle^0\,dx$$

$$V(x) - \tfrac{1}{4} w_0 a = -w_0\langle x - a\rangle^1$$

Resolvendo para $V(x)$ e cancelando o expoente 1, obtemos novamente

$$V(x) = \tfrac{1}{4} w_0 a - w_0\langle x - a\rangle$$

As expressões $\langle x - a\rangle^0$, $\langle x - a\rangle$, $\langle x - a\rangle^2$ são chamadas de *funções de singularidade*. Por definição, temos, para $n \geq 0$,

$$\langle x - a\rangle^n = \begin{cases} (x - a)^n & \text{quando } x \geq a \\ 0 & \text{quando } x < a \end{cases} \tag{5.14}$$

Notamos também que, sempre que a quantidade entre colchetes for positiva ou zero, os colchetes deverão ser substituídos por parênteses comuns, e sempre que a quantidade for negativa, o próprio colchete será igual a zero.

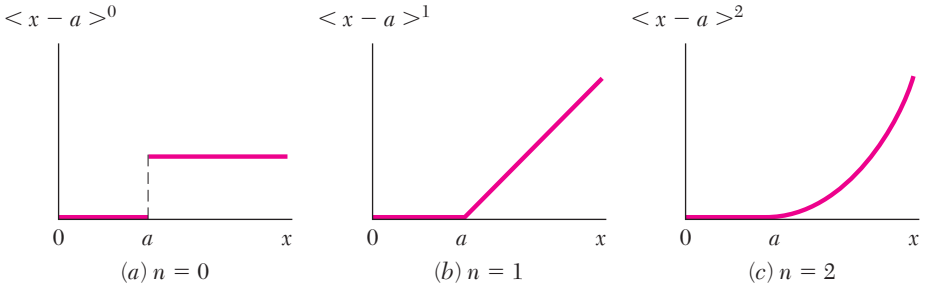


Fig. 5.18

As três funções de singularidade que correspondem, respectivamente, a $n = 0$, $n = 1$ e $n = 2$ foram representadas graficamente na Fig. 5.18. Notamos que a função $\langle x - a\rangle^0$ é descontínua em $x = a$ e tem a forma de um "degrau". Por essa razão, ela é chamada de *função degrau*. De acordo com (5.14), e com a potência zero de qualquer número definido como a unidade, temos[†]

$$\langle x - a\rangle^0 = \begin{cases} 1 & \text{quando } x \geq a \\ 0 & \text{quando } x < a \end{cases} \tag{5.15}$$

Conclui-se da definição de funções de singularidade que

$$\int \langle x - a\rangle^n \, dx = \frac{1}{n + 1}\langle x - a\rangle^{n+1} \qquad \text{para } n \geq 0 \tag{5.16}$$

e

$$\frac{d}{dx}\langle x - a\rangle^n = n\langle x - a\rangle^{n-1} \qquad \text{para } n \geq 1 \tag{5.17}$$

A maioria dos carregamentos de vigas encontradas na prática em engenharia pode ser desmembrada em carregamentos básicos mostrados na Fig. 5.19. Sempre que aplicável, as funções correspondentes $w(x)$, $V(x)$ e $M(x)$ foram expressas em termos de funções de singularidade e representadas graficamente com um fundo colorido. Foi utilizado um fundo colorido mais escuro para indicar para cada carregamento a expressão que é mais facilmente deduzida ou lembrada e por meio da qual as outras funções podem ser obtidas por integração.

†Como $(x - a)^0$ é descontínua em $x - a$, pode-se argumentar que essa função deverá ser indefinida para $x = a$ ou que devem ser atribuídos a ela valores 0 e 1 para $x = a$. No entanto, definir $(x - a)^0$ como igual a 1 quando $x = a$, conforme definido em (5.15), tem a vantagem de não ser ambígua e, portanto, facilmente aplicável à programação de computador (cf. página 348).

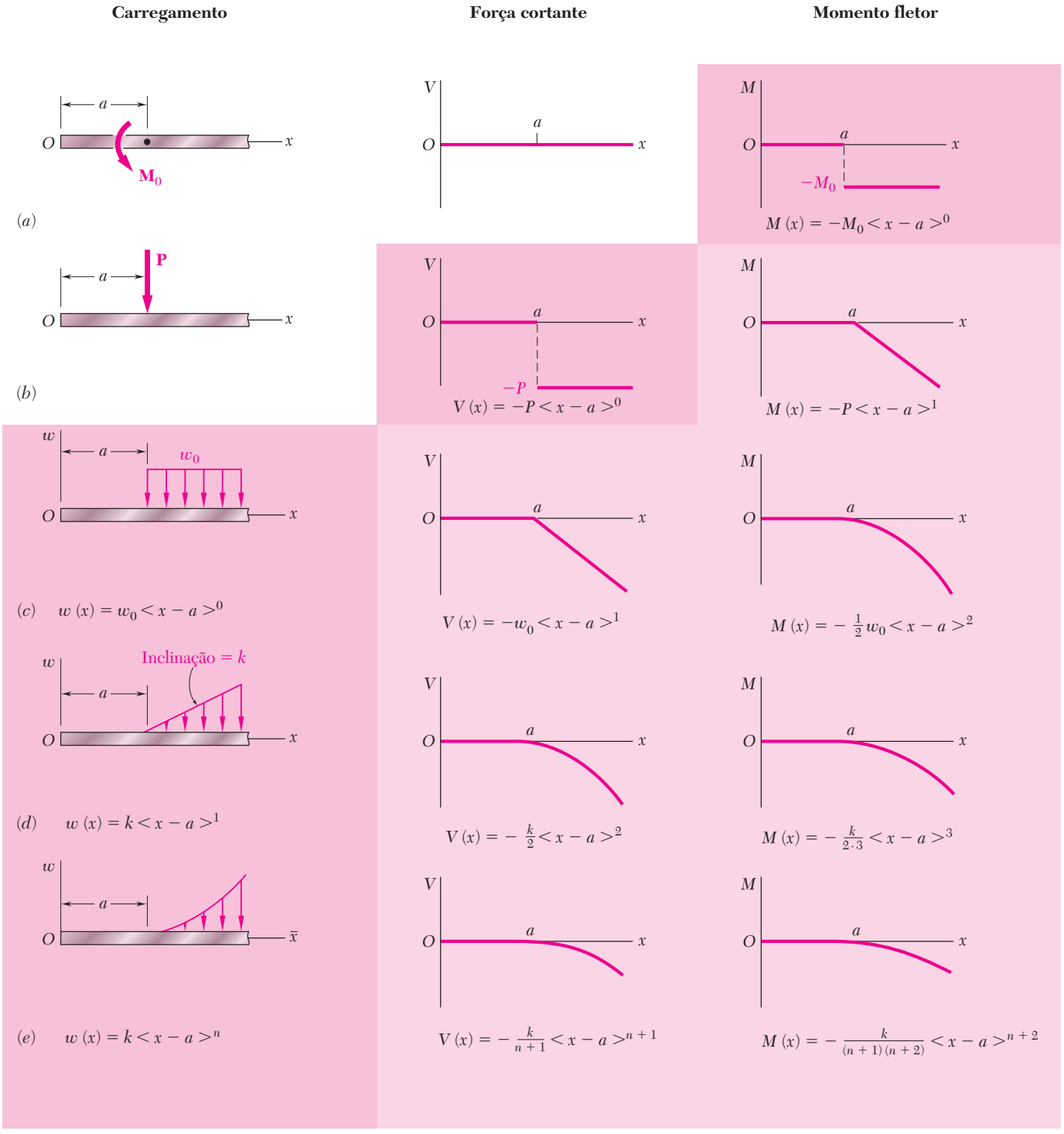


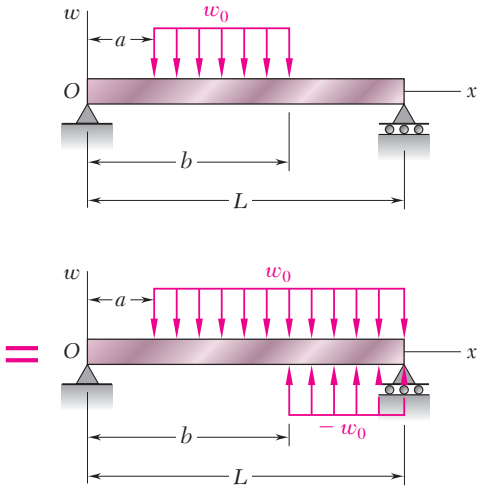
Fig. 5.19 Carregamentos básicos e forças cortantes e momentos fletores correspondentes, expressos em termos de funções de singularidade.

Depois que um carregamento de uma viga foi desmembrado em carregamentos básicos da Fig. 5.19, as funções $V(x)$ e $M(x)$ que representam a força cortante e o momento fletor em qualquer ponto da viga podem ser obtidas adicionando as funções correspondentes associadas com cada um dos carregamentos e reações básicos. Como todos os carregamentos distribuídos mostrados na Fig. 5.19 têm extremidades abertas à direita, um carregamento

distribuído que não se estenda à extremidade direita da viga ou que seja descontínuo deverá ser substituído como mostra a Fig. 5.20 por uma combinação equivalente de carregamentos de extremidade aberta. (Ver também o Exemplo 5.5 e o Problema Resolvido 5.9.)

Conforme veremos na Seção 9.6, o uso de funções de singularidade também simplifica muito a determinação dos deslocamentos da viga. Foi em conexão com esse problema que a abordagem utilizada nessa seção foi sugerida pela primeira vez em 1862 pelo matemático alemão A. Clebsh (1833-1872). No entanto, o matemático e engenheiro britânico W. H. Macaulay (1853-1936) geralmente é que leva o crédito pela introdução das funções de singularidade na forma empregada aqui, e os colchetes $\langle \ \rangle$ geralmente são chamados de *colchetes de Macaulay*.†

†MACAULAY,W. H. "Note on the deflection of beams". *Messenger of Mathematics*, p. 129-130, v. 48, 1919.



$$w(x) = w_0\langle x - a\rangle^0 - w_0\langle x - b\rangle^0$$

Fig. 5.20

EXEMPLO 5.5

Para a viga e o carregamento mostrados (Fig. 5.21*a*) e usando funções de singularidade, expresse a força cortante e o momento fletor como funções da distância x do apoio A.

Primeiro determinamos a reação em A desenhando o diagrama de corpo livre da viga (Fig. 5.21*b*) e escrevendo

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0: \qquad A_x = 0$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: \qquad -A_y(3{,}6\text{ m}) + (1{,}2\text{ kN})(3\text{ m}) + (1{,}8\text{ kN})(2{,}4\text{ m}) + 1{,}44\text{ kN}\cdot\text{m} = 0$$

$$A_y = 2{,}60\text{ kN}$$

Em seguida, substituímos o carregamento distribuído por dois carregamentos equivalentes de extremidade aberta (Fig. 5.21*c*) e expressamos a força distribuída $w(x)$ como a soma das funções degrau correspondentes:

$$w(x) = +w_0\langle x - 0{,}6\rangle^0 - w_0\langle x - 1{,}8\rangle^0$$

A função $V(x)$ é obtida integrando-se $w(x)$, invertendo-se os sinais de + e − e adicionando-se ao resultado as constantes A_y e $-P\langle x - 0{,}6\rangle^0$, que representam as contribuições respectivas na força cortante da reação em A e da força concentrada. (Não é necessária nenhuma outra constante de integração.) Como o momento concentrado não afeta diretamente a força cortante, ele deverá ser ignorado neste cálculo. Escrevemos

$$V(x) = -w_0\langle x - 0{,}6\rangle^1 + w_0\langle x - 1{,}8\rangle^1 + A_y - P\langle x - 0{,}6\rangle^0$$

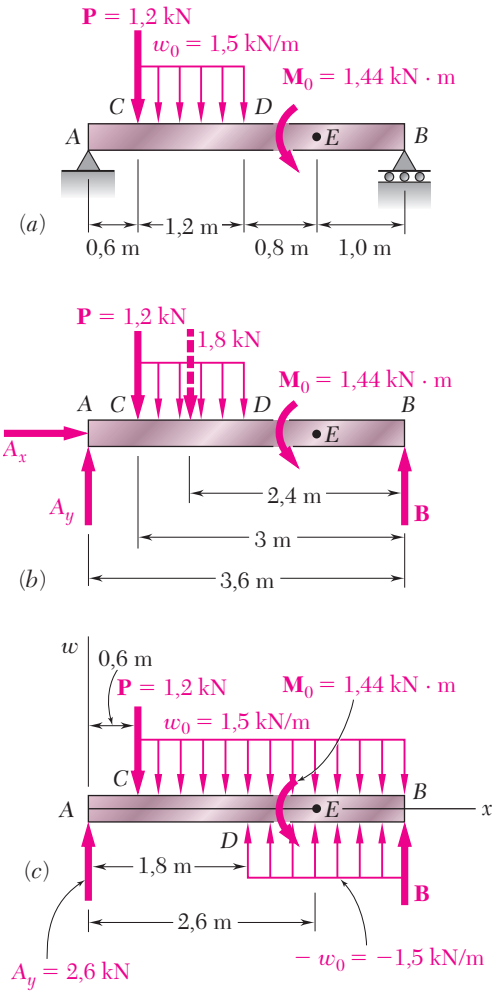


Fig. 5.21

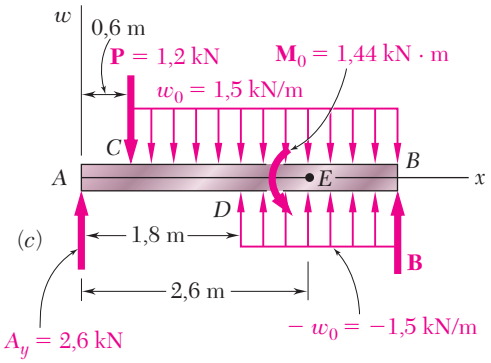


Fig. 5.21*c* (repetida)

De modo semelhante, a função $M(x)$ é obtida integrando-se $V(x)$ e adicionando-se ao resultado a constante $-M_0\langle x - 2{,}6\rangle^0$, representando a contribuição do momento concentrado ao momento fletor. Temos

$$M(x) = -\tfrac{1}{2}w_0\langle x - 0{,}6\rangle^2 + \tfrac{1}{2}w_0\langle x - 1{,}8\rangle^2 + A_y x - P\langle x - 0{,}6\rangle^1 - M_0\langle x - 2{,}6\rangle^0$$

Substituindo os valores numéricos da reação e das forças nas expressões obtidas para $V(x)$ e $M(x)$, e sendo cuidadoso para não computar qualquer produto nem expandir qualquer quadrado envolvendo um colchete, obtêm-se as seguintes expressões para a força cortante e o momento fletor em qualquer ponto da viga:

$$V(x) = -1{,}5\langle x - 0{,}6\rangle^1 + 1{,}5\langle x - 1{,}8\rangle^1 + 2{,}6 - 1{,}2\langle x - 0{,}6\rangle^0$$

$$M(x) = -0{,}75\langle x - 0{,}6\rangle^2 + 0{,}75\langle x - 1{,}8\rangle^2 + 2{,}6x - 1{,}2\langle x - 0{,}6\rangle^1 - 1{,}44\langle x - 2{,}6\rangle^0$$

EXEMPLO 5.6

Para a viga e o carregamento do Exemplo 5.5, determine os valores numéricos da força cortante e do momento fletor no ponto médio D.

Fazendo $x = 1{,}8$ m nas expressões encontradas para $V(x)$ e $M(x)$ no Exemplo 5.5, obtemos

$$V(1{,}8) = -1{,}5\langle 1{,}2\rangle^1 + 1{,}5\langle 0\rangle^1 + 2{,}6 - 1{,}2\langle 1{,}2\rangle^0$$

$$M(1{,}8) = -0{,}75\langle 1{,}2\rangle^2 + 0{,}75\langle 0\rangle^2 + 2{,}6(1{,}8) - 1{,}2\langle 1{,}2\rangle^1 - 1{,}44\langle -0{,}8\rangle^0$$

Lembrando que sempre que uma quantidade entre colchetes for positiva ou zero, eles deverão ser substituídos por parênteses comuns, e sempre que uma quantidade for negativa, o próprio colchete será igual a zero, escrevemos

$$V(1{,}8) = -1{,}5(1{,}2)^1 + 1{,}5(0)^1 + 2{,}6 - 1{,}2(1{,}2)^0$$
$$= -1{,}5(1{,}2) + 1{,}5(0) + 2{,}6 - 1{,}2(1)$$
$$= -1{,}8 + 0 + 2{,}6 - 1{,}2$$

$$V(1{,}8) = -0{,}4 \text{ kN}$$

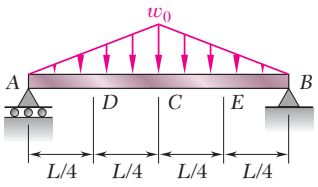
e

$$M(1{,}8) = -0{,}75(1{,}2)^2 + 0{,}75(0)^2 + 2{,}6(1{,}8) - 1{,}2(1{,}2)^1 - 1{,}44(0)$$
$$= -1{,}08 + 0 + 4{,}68 - 1{,}44 - 0$$

$$M(1{,}8) = +2{,}16 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Aplicação para a programação de computadores. As funções de singularidade são particularmente bem adequadas ao uso dos computadores. Primeiro, notamos que a função degrau $\langle x - a\rangle^0$, representada pelo símbolo STP, pode ser definida por um comando IF/THEN/ELSE como igual a 1 para $X \geq A$ e igual a 0 em outros casos. Qualquer outra função de singularidade $\langle x - a\rangle^n$, com $n \geq 1$, pode então ser expressa como produto da função algébrica comum $(x - a)^n$ e a função degrau $\langle x - a\rangle^0$.

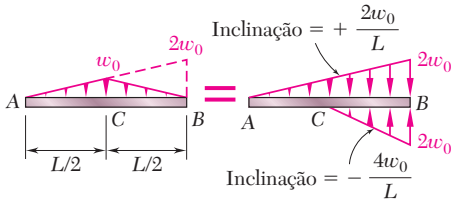
Quando forem envolvidas diferentes funções de singularidade k, por exemplo $\langle x - a_i\rangle^n$, em que $i = 1, 2, \ldots, k$, então as funções degrau correspondentes STP(I), em que I = 1, 2, . . . ,K, podem ser definidas por um "loop" com um único comando IF/THEN/ELSE.



PROBLEMA RESOLVIDO 5.9

Para a viga e o carregamento mostrados, determine (*a*) as equações, definindo a força cortante e o momento fletor em qualquer ponto e (*b*) a força cortante e o momento fletor nos pontos *C*, *D* e *E*.

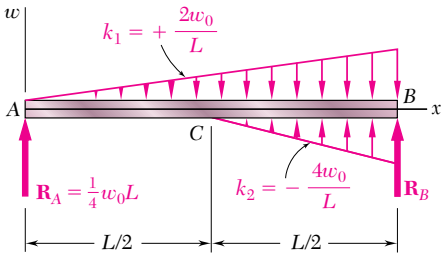
SOLUÇÃO



Reações. A força total é $\frac{1}{2}w_0L$ em razão da simetria, cada reação é igual à metade do valor, ou seja, $\frac{1}{4}w_0L$.

Força distribuída. O carregamento distribuído é substituído por dois carregamentos equivalentes de extremidade aberta, como mostra a figura. Usando uma função de singularidade para expressar o segundo carregamento, escrevemos

$$w(x) = k_1x + k_2\langle x - \tfrac{1}{2}L\rangle = \frac{2w_0}{L}x - \frac{4w_0}{L}\langle x - \tfrac{1}{2}L\rangle \tag{1}$$

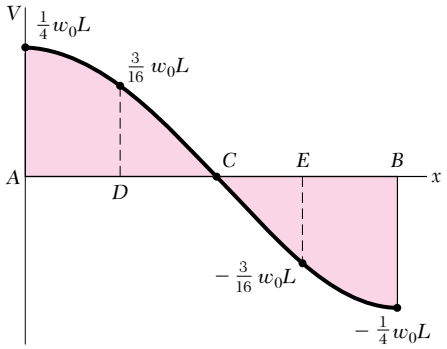


***a*. Equações para força cortante e momento fletor.** Obtemos $V(x)$ integrando (1), mudando os sinais e adicionando uma constante igual a R_A:

$$V(x) = -\frac{w_0}{L}x^2 + \frac{2w_0}{L}\langle x - \tfrac{1}{2}L\rangle^2 + \tfrac{1}{4}w_0L \tag{2}$$ ◀

Obtemos $M(x)$ integrando (2); como não há momento concentrado, não é necessária nenhuma constante de integração:

$$M(x) = -\frac{w_0}{3L}x^3 + \frac{2w_0}{3L}\langle x - \tfrac{1}{2}L\rangle^3 + \tfrac{1}{4}w_0Lx \tag{3}$$ ◀

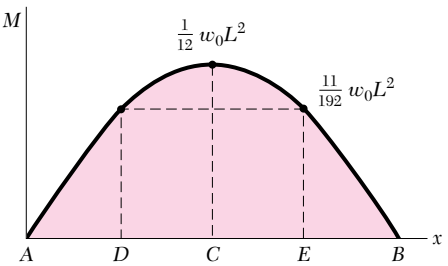


b*. Força cortante e momento fletor em *C*, *D* e *E

***No Ponto* C:** Fazendo $x = \frac{1}{2}L$ nas Equações (2) e (3) e lembrando que sempre que uma quantidade entre colchetes for positiva ou zero, os colchetes poderão ser substituídos por parênteses, temos

$$V_C = -\frac{w_0}{L}(\tfrac{1}{2}L)^2 + \frac{2w_0}{L}\langle 0\rangle^2 + \tfrac{1}{4}w_0L \qquad V_C = 0$$ ◀

$$M_C = -\frac{w_0}{3L}(\tfrac{1}{2}L)^3 + \frac{2w_0}{3L}\langle 0\rangle^3 + \tfrac{1}{4}w_0L(\tfrac{1}{2}L) \qquad M_C = \frac{1}{12}w_0L^2$$ ◀



***No ponto* D:** Fazendo $x = \frac{1}{4}L$ nas Equações (2) e (3) e lembrando que um colchete com uma quantidade negativa é igual a zero, escrevemos

$$V_D = -\frac{w_0}{L}(\tfrac{1}{4}L)^2 + \frac{2w_0}{L}\langle -\tfrac{1}{4}L\rangle^2 + \tfrac{1}{4}w_0L \qquad V_D = \frac{3}{16}w_0L$$ ◀

$$M_D = -\frac{w_0}{3L}(\tfrac{1}{4}L)^3 + \frac{2w_0}{3L}\langle -\tfrac{1}{4}L\rangle^3 + \tfrac{1}{4}w_0L(\tfrac{1}{4}L) \qquad M_D = \frac{11}{192}w_0L^2$$ ◀

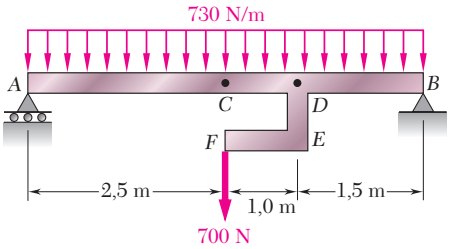
***No ponto* E:** Fazendo $x = \frac{3}{4}L$ nas Equações (2) e (3), temos

$$V_E = -\frac{w_0}{L}(\tfrac{3}{4}L)^2 + \frac{2w_0}{L}\langle \tfrac{1}{4}L\rangle^2 + \tfrac{1}{4}w_0L \qquad V_E = -\frac{3}{16}w_0L$$ ◀

$$M_E = -\frac{w_0}{3L}(\tfrac{3}{4}L)^3 + \frac{2w_0}{3L}\langle \tfrac{1}{4}L\rangle^3 + \tfrac{1}{4}w_0L(\tfrac{3}{4}L) \qquad M_E = \frac{11}{192}w_0L^2$$ ◀

PROBLEMA RESOLVIDO 5.10

A barra rígida *DEF* é soldada no ponto *D* à viga de aço *AB*. Para o carregamento mostrado na figura, determine (*a*) as equações que definem a força cortante e o momento fletor em qualquer ponto da viga e (*b*) a localização e a intensidade do maior momento fletor.



SOLUÇÃO

Reações. Consideramos a viga e a barra como um corpo livre e observamos que a força total é de 4 350 N. Em virtude da simetria, cada reação é igual a 2 175 N.

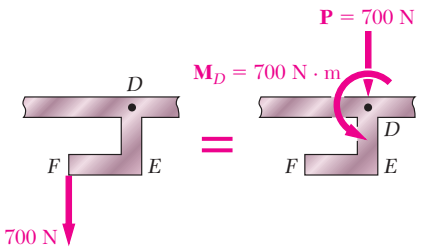
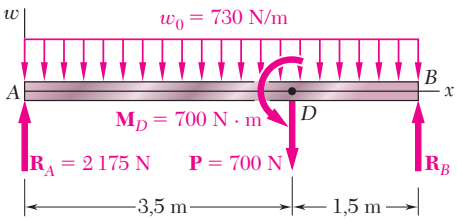


Diagrama de carregamento modificado. Substituímos a força de 700 N aplicada em *F* por um sistema equivalente de força e momento em *D*. Obtemos então um diagrama de carregamento que consiste em um momento concentrado, três forças concentradas (incluindo as duas reações) e uma força uniformemente distribuída

$$w(x) = 730 \text{ N/m} \tag{1}$$

***a*. Equações para força cortante e momento fletor.** Obtemos $V(x)$ integrando (1), mudando o sinal, e adicionando constantes que representam as contribuições respectivas de $\mathbf{R}_A$ e **P** para a força cortante. Como **P** afeta $V(x)$ somente para valores de x maiores do que 3,5 m, usamos uma função degrau para expressar sua contribuição.



$$V(x) = -730x + 2\,175 - 700\langle x - 3{,}5\rangle^0 \tag{2}$$ ◀

Obtemos $M(x)$ integrando (2) e usando uma função degrau para representar a contribuição do momento concentrado $\mathbf{M}_D$:

$$M(x) = -365x^2 + 2\,175x - 700\langle x - 3{,}5\rangle^1 - 700\langle x - 3{,}5\rangle^0 \tag{3}$$ ◀

***b*. Maior momento fletor.** Como M é máximo ou mínimo quando $V = 0$, consideramos $V = 0$ em (2) e resolvemos a equação para x para encontrar a localização do maior momento fletor. Considerando primeiro os valores de x menores que 3,5 m e notando que para esses valores o colchete é igual a zero, escrevemos

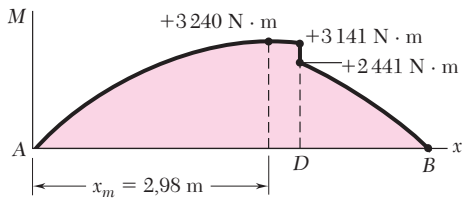
$$-730x + 2\,175 = 0 \qquad x = 2{,}98 \text{ m}$$

Considerando agora valores de x maiores que 3,5 m, caso em que o colchete é igual a 1, temos

$$-730x + 2\,175 - 700 = 0 \qquad x = 2{,}02 \text{ m}$$

Como esse valor *não* é maior que 3,5 m, ele deve ser rejeitado. Assim, o valor de x correspondente ao maior momento fletor é

$$x_m = 2{,}98 \text{ m}$$ ◀



Substituindo esse valor para x na Equação (3), obtemos

$$M_{\text{máx}} = -365(2{,}98)^2 + 2\,175(2{,}98) - 700\,\langle -0{,}52\rangle^1 - 700\langle -0{,}52\rangle^0$$

e, lembrando que colchetes que contêm uma quantidade negativa são iguais a zero,

$$M_{\text{máx}} = -365(2{,}98)^2 + 2\,175(2{,}98) \qquad M_{\text{máx}} = 3\,240 \text{ N} \cdot \text{m}$$ ◀

O diagrama do momento fletor foi traçado. Note a descontinuidade no ponto *D* em razão do momento concentrado aplicado naquele ponto. Os valores de M imediatamente à esquerda e imediatamente à direita de *D* foram obtidos fazendo-se $x = 3{,}5$ m na Equação (3) e substituindo a função degrau $\langle x - 3{,}5\rangle^0$ por 0 e 1, respectivamente.

PROBLEMAS

5.98 até 5.100 (*a*) Usando funções de singularidade, escreva as equações definindo a força cortante e o momento fletor para a viga e o carregamento mostrados. (*b*) Use a equação obtida para *M* para determinar o momento fletor no ponto *C* e verifique a sua resposta desenhando o diagrama de corpo livre da viga inteira.

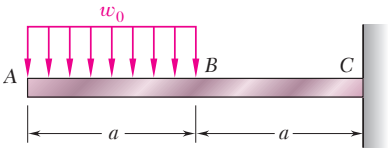


Fig. P5.98

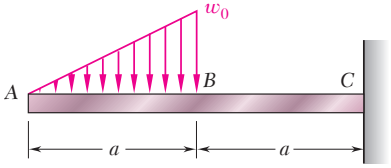


Fig. *P5.99*

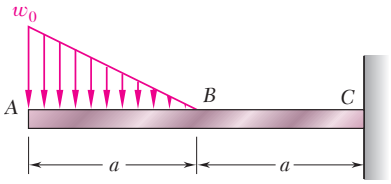


Fig. P5.100

5.101 até *5.103* (*a*) Usando funções de singularidade, escreva as equações definindo a força cortante e o momento fletor para a viga e o carregamento mostrados. (*b*) Use a equação obtida para *M* para determinar o momento fletor no ponto *E* e verifique a sua resposta desenhando o diagrama de corpo livre da parte da viga à direita de *E*.

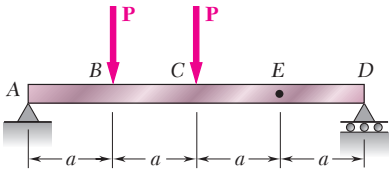


Fig. P5.101

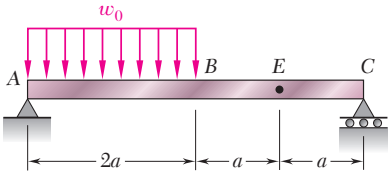


Fig. P5.102

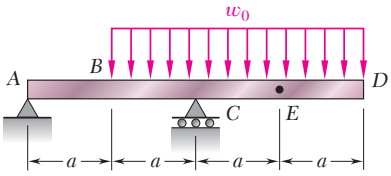


Fig. *P5.103*

5.104 (*a*) Usando funções de singularidade, escreva as equações para a força cortante e o momento fletor para a viga *ABC* sob o carregamento mostrado. (*b*) Use a equação obtida para *M* para determinar o momento fletor imediatamente à direita do ponto *D*.

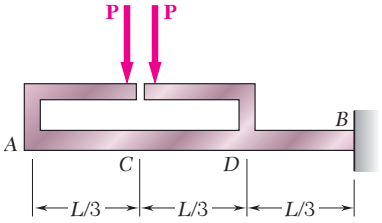


Fig. P5.104

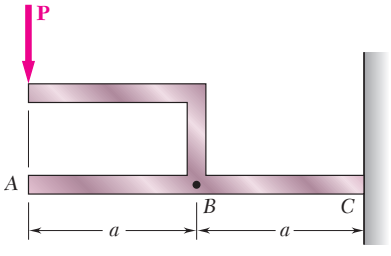


Fig. P5.105

5.105 (*a*) Usando funções de singularidade, escreva as equações para a força cortante e o momento fletor para a viga *ABC* sob o carregamento mostrado. (*b*) Use a equação obtida para *M* para determinar o momento fletor imediatamente à direita do ponto *B*.

5.106 até 5.109 (*a*) Usando funções de singularidade, escreva as equações para a força cortante e o momento fletor para a viga e o carregamento mostrados. (*b*) Determine o valor máximo do momento fletor na viga.

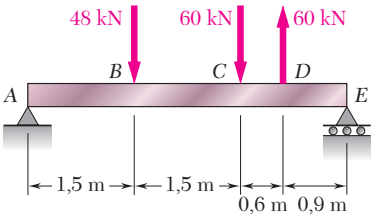


Fig. P5.106

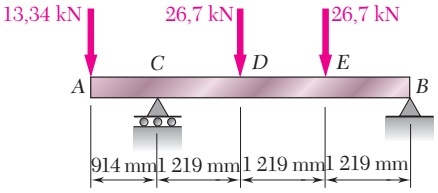


Fig. P5.107

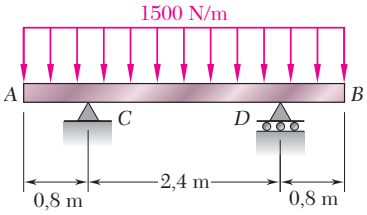


Fig. P5.108

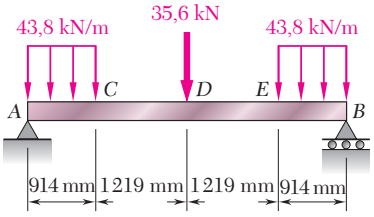


Fig. P5.109

5.110 e *5.111* (*a*) Usando funções de singularidade, escreva as equações para a força cortante e o momento fletor para a viga e o carregamento mostrados. (*b*) Determine a tensão normal máxima provocada pelo momento fletor.

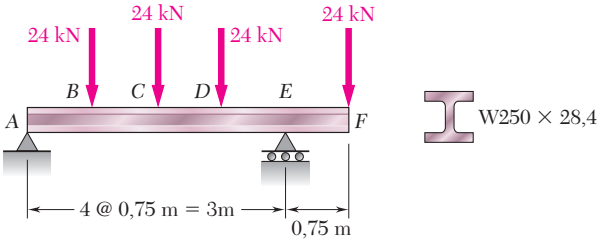


Fig. P5.110

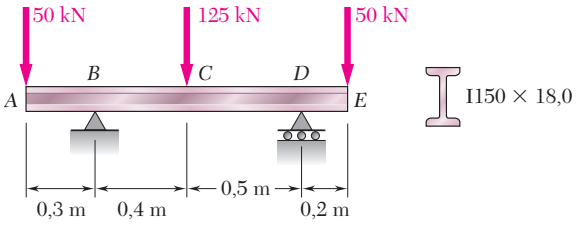


Fig. *P5.111*

5.112 e *5.113* (*a*) Usando funções de singularidade, determine a intensidade e a localização do momento fletor máximo para a viga e o carregamento mostrados. (*b*) Determine a tensão normal máxima provocada pelo momento fletor.

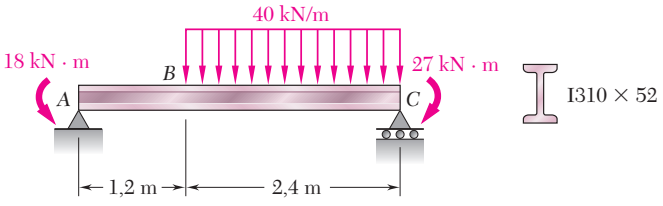


Fig. *P5.112*

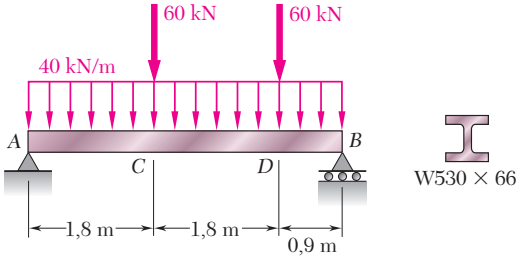


Fig. *P5.113*

5.114 e 5.115 Uma viga está sendo projetada para ser vinculada e carregada conforme mostra a figura. (*a*) Usando funções de singularidade, encontre a intensidade e a localização do momento fletor máximo na viga. (*b*) Sabendo que a tensão normal admissível para o aço a ser utilizado é de 165 MPa, encontre o perfil de mesa larga mais econômico que pode ser utilizado.

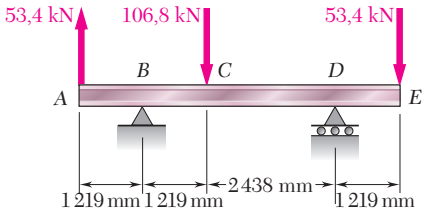


Fig. P5.114

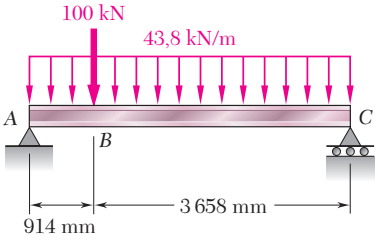


Fig. P5.115

5.116 e *5.117* Uma viga de madeira está sendo projetada para ser vinculada e carregada conforme mostra a figura. (*a*) Usando funções de singularidade, encontre a intensidade e a localização do momento fletor máximo na viga. (*b*) Sabendo que o estoque disponível consiste em vigas com uma tensão admissível de 12 MPa e seção transversal retangular de 30 mm de largura e altura h variando de 80 mm até 160 mm com incrementos de 10 mm, determine a seção transversal mais econômica que pode ser utilizada.

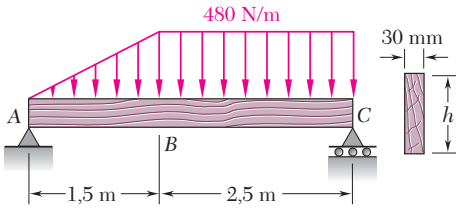


Fig. P5.116

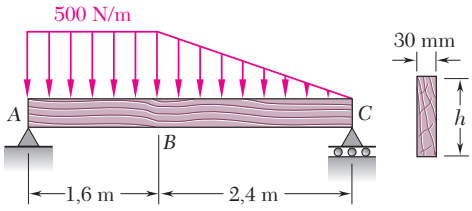


Fig. *P5.117*

5.118 até 5.121 Usando um computador e funções degrau, calcule a força cortante e o momento fletor para a viga e o carregamento mostrados. Use o incremento ΔL especificado, começando no ponto A e terminando no apoio direito.

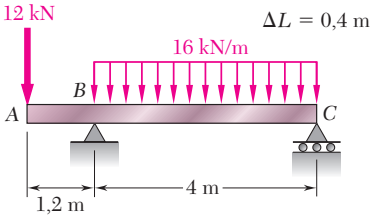


Fig. P5.118

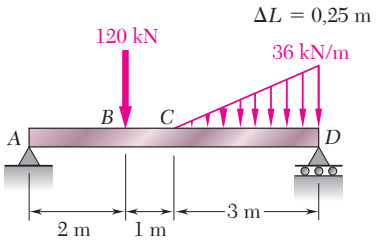


Fig. P5.119

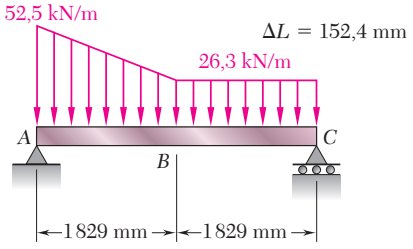


Fig. *P5.120*

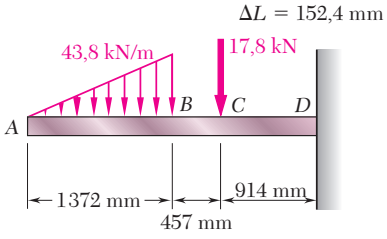


Fig. P5.121

5.122 e 5.123 Para a viga e o carregamento mostrados, e usando um computador e funções degrau, (*a*) organize uma tabela de força cortante, momento fletor e tensão normal máxima em seções da viga de $x = 0$ a $x = L$, usando os incrementos ΔL indicados e (*b*) usando incrementos menores, se necessário, determine com 2% de precisão a tensão normal máxima na viga. Coloque a origem do eixo x na extremidade A da viga.

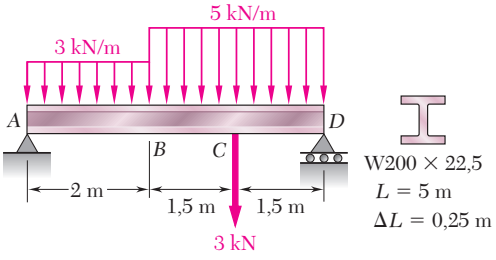


Fig. P5.122

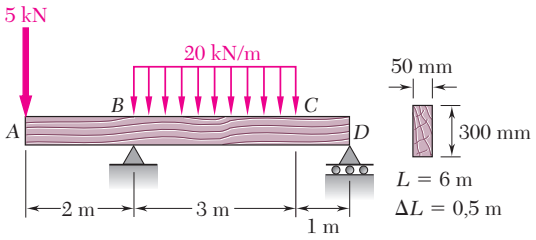


Fig. P5.123

5.124 e *5.125* Para a viga e o carregamento mostrados, e usando um computador e funções degrau, (*a*) organize uma tabela de força cortante, momento fletor e tensão normal máxima em seções da viga de $x = 0$ a $x = L$, usando os incrementos ΔL indicados e (*b*) usando incrementos menores, se necessário, determine com 2% de precisão a tensão normal máxima na viga. Coloque a origem do eixo x na extremidade A da viga.

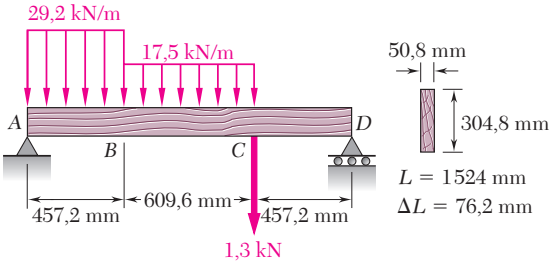


Fig. P5.124

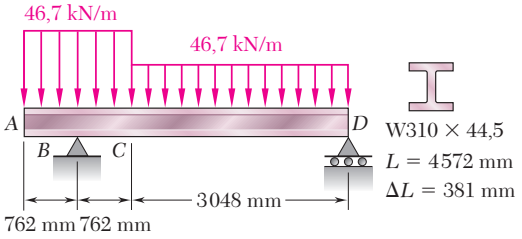


Fig. *P5.125*

*5.6. Vigas não prismáticas

Nossa análise esteve limitada até agora a vigas prismáticas, isto é, a vigas de seção transversal uniforme. Conforme vimos na Seção 5.4, as vigas prismáticas são projetadas de maneira que as tensões normais em suas seções críticas sejam, no máximo, iguais ao valor admissível da tensão normal para o material que está sendo utilizado. Conclui-se que, em todas as outras seções, as tensões normais serão menores, possivelmente muito menores, que o seu valor admissível. Uma viga prismática, portanto, é quase sempre superdimensionada, e poderiam ser obtidas economias consideráveis nos materiais usando-se vigas não prismáticas, isto é, vigas com seção transversal variável. As vigas em balanço mostradas na ponte em construção da Fig. 5.22 são exemplos de vigas não prismáticas.

Como as tensões máximas σ_m geralmente controlam o projeto de uma viga, o projeto de uma viga não prismática será otimizado se o módulo de resistência à flexão da seção $W = I/c$ de cada seção transversal satisfizer a Equação (5.3) da Seção 5.1. Resolvendo a equação para W, escrevemos

$$W = \frac{|M|}{\sigma_{\text{adm}}} \tag{5.18}$$

Uma viga projetada dessa maneira é conhecida como *viga de resistência constante*.

Fig. 5.22

Para um componente estrutural ou de máquina, forjado ou fundido, é possível variar a seção transversal do componente ao longo de seu comprimento e eliminar grande parte do material desnecessário (ver o Exemplo 5.7). No entanto, para uma viga de madeira ou um perfil de aço laminado, não é possível variar a seção transversal da viga. Contudo, pode-se conseguir consideráveis economias de material, colando pranchas de madeira de comprimentos apropriados a uma viga de madeira (ver o Problema Resolvido 5.11) e usando-se chapas de reforço em partes de uma viga de aço laminado em que o momento fletor é grande (ver o Problema Resolvido 5.12).

EXEMPLO 5.7

Uma placa de alumínio fundido de espessura b deve suportar uma força w uniformemente distribuída, como mostra a Fig. 5.23. (*a*) Determine a forma da placa que resultará no projeto mais econômico. (*b*) Sabendo que a tensão normal admissível para o alumínio utilizado é de 72 MPa e que $b = 40$ mm, $L = 800$ mm e $w = 135$ kN/m, determine a altura h_0 máxima da placa.

Momento fletor. Medindo a distância x a partir de A e observando que $V_A = M_A = 0$, usamos as Equações (5.6) e (5.8) da Seção 5.3 e escrevemos

$$V(x) = -\int_0^x w\,dx = -wx$$

$$M(x) = \int_0^x V(x)\,dx = -\int_0^x wx\,dx = -\tfrac{1}{2}\,wx^2$$

(a) Forma da placa. Recordamos da Seção 5.4 que o módulo de resistência W de uma seção transversal retangular de largura b e altura h é $W = \frac{1}{6}\,bh^2$. Usando esse valor na Equação (5.18) e resolvendo para h^2, temos

$$h^2 = \frac{6|M|}{b\sigma_{\text{adm}}} \tag{5.19}$$

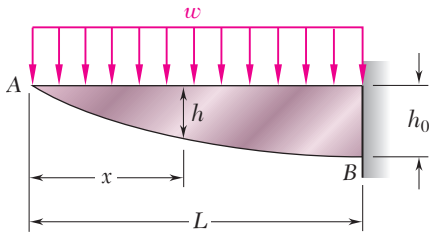


Fig. 5.23

e, após substituirmos $|M| = \frac{1}{2}\,wx^2$,

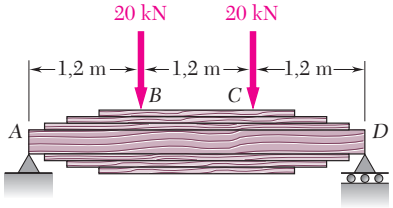
$$h^2 = \frac{3wx^2}{b\sigma_{\text{adm}}} \qquad \text{ou} \qquad h = \left(\frac{3w}{b\sigma_{\text{adm}}}\right)^{1/2} x \tag{5.20}$$

Como a relação entre h e x é linear, a borda superior da placa é uma linha reta. Assim, a placa que proporciona um projeto mais econômico tem a *forma triangular*.

(b) Altura h_0 máxima. Fazendo $x = L$ na Equação (5.20) e substituindo os dados fornecidos, obtemos

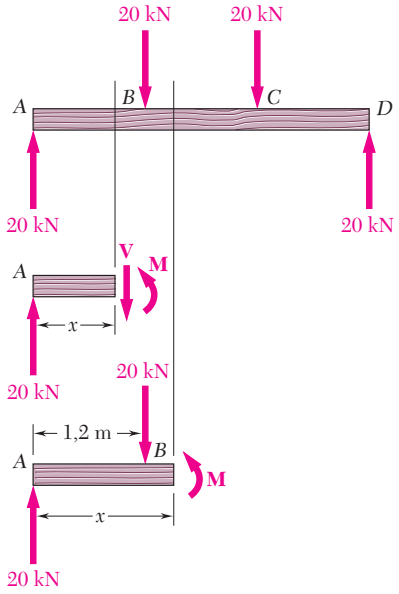
$$h_0 = \left[\frac{3(135\text{ kN/m})}{(0{,}040\text{ m})(72\text{ MPa})}\right]^{1/2}(800\text{ mm}) = 300\text{ mm}$$

PROBLEMA RESOLVIDO 5.11



Uma viga de 3,6 m de comprimento feita de madeira com uma tensão normal admissível de 16 MPa e tensão de cisalhamento admissível de 3 MPa deve suportar duas forças de 20 kN localizadas a 1/3 e 2/3 do comprimento. Uma viga desse mesmo material, de seção transversal retangular uniforme com 100 mm de largura e 108 mm de altura, satisfaz à condição da tensão de cisalhamento admissível. Como essa viga não satisfaz à condição da tensão normal admissível, ela será reforçada colando-se pranchas do mesmo tipo de madeira, com 100 mm de largura e 32 mm de espessura, nas partes superior e inferior de uma forma simétrica. Determine (*a*) o número necessário de pares de pranchas e (*b*) o comprimento das pranchas em cada par que resultará no projeto mais econômico.

SOLUÇÃO



Momento fletor. Desenhamos o diagrama de corpo livre da viga e encontramos a seguinte expressão para o momento fletor:

De A até B $(0 \le x \le 1{,}2\text{ m})$: $M = (20\text{ kN})\,x$

De B até C $(1{,}2\text{ m} \le x \le 2{,}4\text{ m})$:

$$M = (20\text{ kN})x - (20\text{ kN})(x - 1{,}2\text{ m}) = 24\text{ kN}\cdot\text{m}$$

***a.* Número de pares de pranchas.** Primeiro determinamos a altura total necessária para o reforço da viga entre B e C. Lembramos com a Seção 5.4 que $W = \frac{1}{6}bh^2$ para uma viga com seção transversal retangular de largura b e altura h. Substituindo esse valor na Equação (5.17) e resolvendo para h^2, temos

$$h^2 = \frac{6|M|}{b\sigma_{\text{adm}}} \tag{1}$$

Substituindo o valor obtido para M de B até C e os valores dados de b e σ_{adm}, escrevemos

$$h^2 = \frac{6(24 \times 10^6\text{ N}\cdot\text{mm})}{(100\text{ mm})(16\text{ N/mm}^2)} = 90000\text{ mm}^2 \qquad h = 300\text{ mm}$$

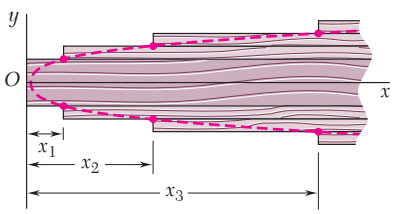
Como a viga original tem uma altura de 108 mm, as pranchas devem proporcionar uma altura adicional de 192 mm. Lembrando que cada par de pranchas tem 64 mm de espessura:

Números de pranchas necessárias = 3 ◀

***b.* Comprimento das pranchas.** O momento fletor encontrado foi $M = (20\text{ kN})\,x$ na parte AB da viga. Substituindo essa expressão e os valores dados de b e σ_{adm} na Equação (1) e resolvendo para x, temos

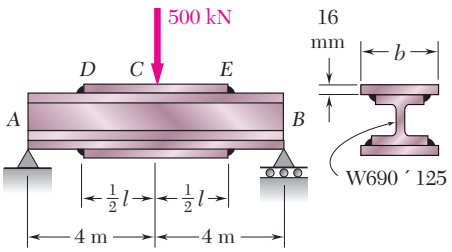
$$x = \frac{(100\text{ mm})(16\text{ N/mm}^2)}{6\,(20 \times 10^3\text{ N})}h^2 \qquad x = \frac{h^2}{75\text{ mm}} \tag{2}$$

A Equação (2) define a distância x máxima da extremidade A na qual determinada altura h da seção transversal é aceitável. Fazendo $h = 108$ mm, encontramos a distância x_1 de A na qual a viga prismática original é segura: $x_1 = 155{,}5$ mm. Daquele ponto em diante, a viga original deverá ser reforçada pelo primeiro par de pranchas. Fazendo $h = 108\text{ mm} + 64\text{ mm} = 172$ mm, obtemos a distância $x_2 = 394{,}5$ mm a partir da qual deverá ser utilizado o segundo par de pranchas, e fazendo $h = 236$ mm, obtemos a distância $x_3 = 742{,}6$ mm a partir da qual deverá ser utilizado o terceiro par de pranchas. O comprimento l_i das pranchas do par i, em que $i = 1, 2, 3$ é obtido subtraindo-se $2x_i$ do comprimento de 3,6 m(3600 mm) da viga. Encontramos



$l_1 = 3289$ mm, $l_2 = 2811$ mm, $l_3 = 2115$ mm ◀

As bordas das várias pranchas ficam na curva da parábola definida pela Equação (2).



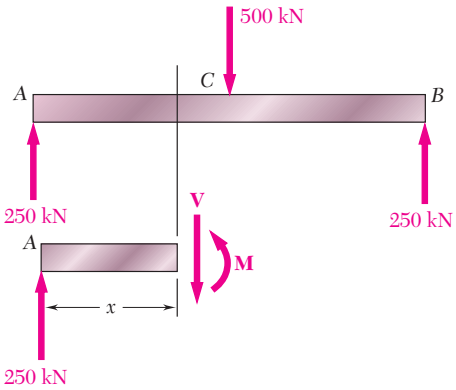
PROBLEMA RESOLVIDO 5.12

Duas placas de aço, cada uma com 16 mm de espessura, são soldadas, como mostra a figura, a um perfil W690 × 125 para reforçá-lo. Sabendo que $\sigma_{adm} = 160$ MPa para a viga e para as placas, determine o valor necessário para (*a*) o comprimento das placas e (*b*) a largura das placas.

SOLUÇÃO

Momento fletor. Primeiro determinamos as reações. Do diagrama de corpo livre de uma parte da viga de comprimento $x \leq 4$m, obtemos M entre A e C:

$$M = (250 \text{ kN})x \tag{1}$$



***a.* Comprimento necessário para as placas.** Primeiro determinamos o comprimento máximo x_m admissível para a parte AD da viga sem reforço. Do Apêndice C verificamos que o módulo de resistência à flexão da seção de uma viga W690 × 125 é $W = 3\,510 \times 10^6$ mm^3, ou $W = 3{,}51 \times 10^{-3}$ m^3. Substituindo W e σ_{adm} na Equação (5.17) e resolvendo para M, escrevemos

$$M = W\sigma_{adm} = (3{,}51 \times 10^{-3} \text{ m}^3)(160 \times 10^3 \text{ kN/m}^2) = 561{,}6 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Substituindo M na Equação (1), temos

$$561{,}6 \text{ kN} \cdot \text{m} = (250 \text{ kN})x_m \qquad x_m = 2{,}246 \text{ m}$$

O comprimento l necessário para as placas é obtido subtraindo-se 2 x_m do comprimento da viga:

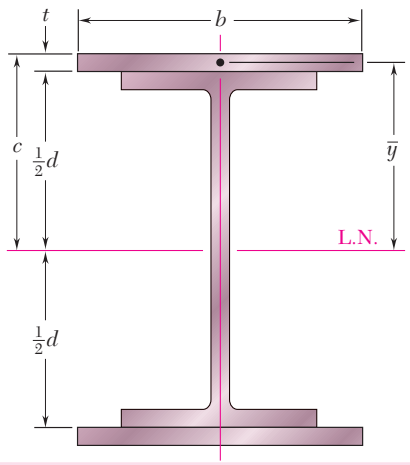
$$l = 8 \text{ m} - 2(2{,}246 \text{ m}) = 3{,}508 \text{ m} \qquad l = 3{,}51 \text{ m} \blacktriangleleft$$

***b.* Largura necessária das placas.** O momento fletor máximo ocorre em uma seção média C da viga. Usando $x = 4$ m na Equação (1), obtemos o momento fletor naquela seção:

$$M = (250 \text{ kN})(4 \text{ m}) = 1000 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Para usar a Equação (5.1) da Seção 5.1, determinamos agora o momento de inércia da seção transversal da viga reforçada em relação a um eixo que passa pelo centroide da seção e a distância c daquele eixo até às superfícies externas das placas. Do Apêndice C verificamos que o momento de inércia de uma viga W690 × 125 é $I_v = 1190 \times 10^6$ mm^4 e sua altura é $d = 678$ mm. De outra forma, chamando de t a espessura de uma placa, por b sua largura, e por $\bar{y}$ a distância de seu centroide até a linha neutra, expressamos o momento de inércia I_p das duas placas em relação a esta linha:

$$I_p = 2(\tfrac{1}{12} bt^3 + A\,\bar{y}^2) = (\tfrac{1}{6} t^3)b + 2\,bt(\tfrac{1}{2} d + \tfrac{1}{2} t)^2$$



Substituindo $t = 16$ mm e $d = 678$ mm, obtemos $I_p = (3{,}854 \times 10^6 \text{ mm}^3)b$. O momento de inércia I da viga e das placas é

$$I = I_v + I_p = 1190 \times 10^6 \text{ mm}^4 + (3{,}854 \times 10^6 \text{ mm}^3)b \tag{2}$$

e a distância da linha neutra até à superfície é $c = \frac{1}{2} d + t = 355$ mm. Resolvendo a Equação (5.1) em função de I e substituindo os valores de M, σ_{adm} e c, escrevemos

$$I = \frac{|M|c}{\sigma_{adm}} = \frac{(1000 \text{ kN} \cdot \text{m})(355 \text{ mm})}{160 \text{ MPa}} = 2{,}219 \times 10^{-3} \text{ m}^4 = 2219 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Substituindo I por seu valor na Equação (2) e resolvendo para b, temos

$$2219 \times 10^6 \text{ mm}^4 = 1190 \times 10^6 \text{ mm}^4 + (3{,}854 \times 10^6 \text{ mm}^3)b$$

$$b = 267 \text{ mm} \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

5.126 e 5.127 A viga *AB*, consistindo em uma placa de ferro fundido de espessura uniforme b e comprimento L, deve suportar a força mostrada. (*a*) Sabendo que a viga deve ser de resistência constante, expresse h em termos de x, L, e h_0. (*b*) Determine a força máxima admissível se $L = 914$ mm, $h_0 = 305$ mm, $b = 31{,}8$ mm e $\sigma_{adm} = 165$ MPa.

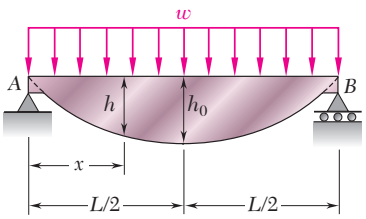


Fig. P5.126

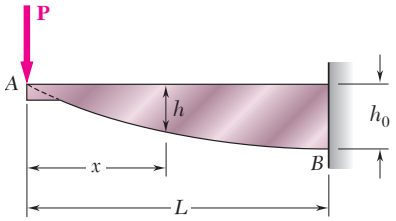


Fig. P5.127

5.128 e *5.129* A viga *AB*, consistindo em uma placa de alumínio de espessura uniforme b e comprimento L, deve suportar a força mostrada. (*a*) Sabendo que a viga deve ser de resistência constante, expresse h em termos de x, L, e h_0 para a parte *AC* da viga. (*b*) Determine a força máxima admissível se $L = 800$ mm, $h_0 = 200$ mm, $b = 25$ mm e $\sigma_{adm} = 72$ MPa.

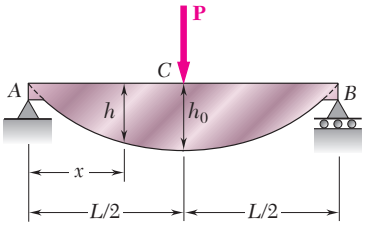


Fig. P5.128

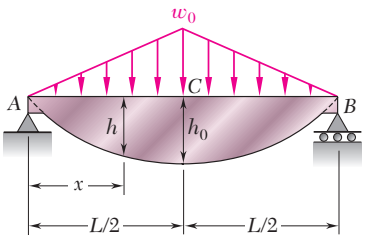


Fig. *P5.129*

***5.130* e 5.131** A viga *AB* consiste em uma placa de ferro fundido de espessura uniforme b e comprimento L e deve suportar a força $w(x)$ mostrada. (*a*) Sabendo que a viga deve ser de resistência constante, expresse h em termos de x, L, e h_0. (*b*) Determine o menor valor de h_0 se $L = 750$ mm, $b = 30$ mm, $w_0 = 300$ kN/m e $\sigma_{adm} = 200$ MPa.

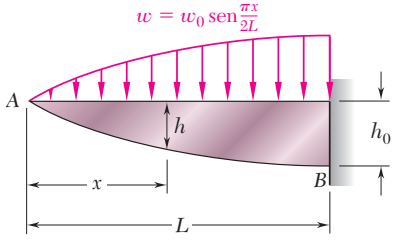


Fig. *P5.130*

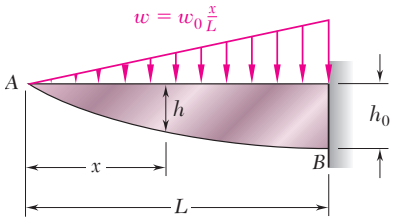


Fig. P5.131

5.132 e *5.133* Um projeto preliminar para o uso de uma viga de madeira prismática em balanço indicou que seria necessária uma viga com seção transversal retangular com 50,8 mm de largura e 254 mm de altura, para suportar com segurança a força mostrada na parte *a* da figura. Foi decidido então substituir essa viga por uma viga composta obtida colando-se, conforme mostra a parte *b* da figura, cinco peças da mesma madeira da viga original e de seção de 50,8 × 50,8 mm. Determine os comprimentos respectivos l_1 e l_2 das duas peças internas e externas de madeira que resultarão em um coeficiente de segurança igual ao do projeto original.

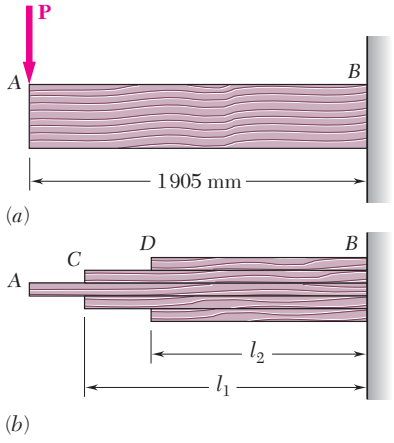


Fig. P5.132

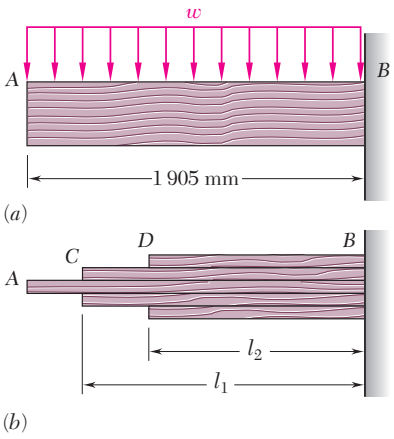


Fig. *P5.133*

5.134 e 5.135 Um projeto preliminar para o uso de uma viga de madeira prismática simplesmente apoiada indicou que seria necessária uma viga com uma seção transversal retangular com 50 mm de largura e 200 mm de altura para suportar com segurança a força mostrada na parte *a* da figura. Foi decidido então substituir essa viga por uma viga composta obtida colando-se, como mostra a parte *b* da figura, quatro peças da mesma madeira da viga original e de seção transversal medindo 50 mm × 50 mm. Determine o comprimento *l* das duas peças externas de madeira que resultem no mesmo coeficiente de segurança do projeto original.

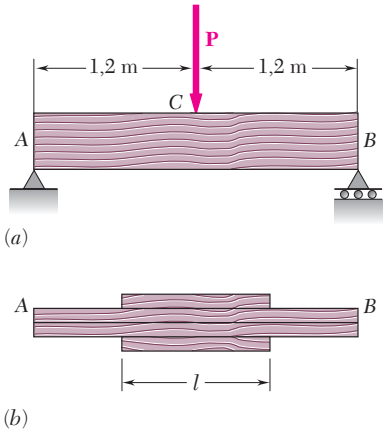


Fig. P5.134

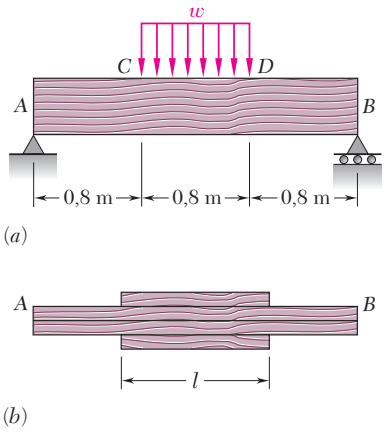


Fig. P5.135

***5.136* e 5.137** Um elemento de máquina de alumínio fundido com o formato de um sólido de revolução de diâmetro variável d está sendo projetado para suportar a força mostrada. Sabendo que o elemento de máquina deve ser de resistência constante, expresse d em termos de x, L e d_0.

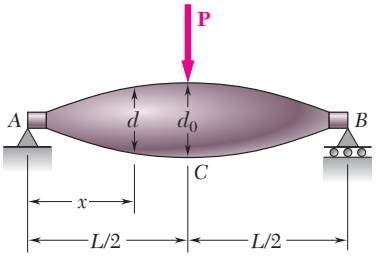


Fig. *P5.136*

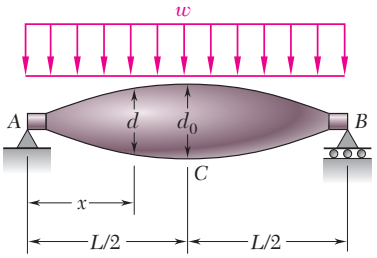


Fig. P5.137

5.138 Uma viga em balanço AB consistindo de uma placa de aço de altura h uniforme e largura b variável deve suportar a força concentrada **P** no ponto A. (*a*) Sabendo que a viga deve ser de resistência constante, expresse b em termos de x, L e b_0. (*b*) Determine o menor valor de h se $L = 300$ mm, $b_0 = 375$ mm, P = 14,4 kN e $\sigma_{adm} = 160$ MPa.

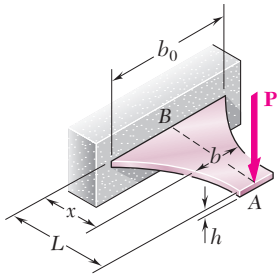


Fig. P5.138

5.139 Uma força transversal **P** é aplicada à extremidade A da peça cônica AB, conforme mostrado na figura. Chamando de d_0 o diâmetro do cone em A, mostre que a tensão normal máxima ocorre no ponto H, que está contido em uma seção transversal de diâmetro $d = 1{,}5\ d_0$.

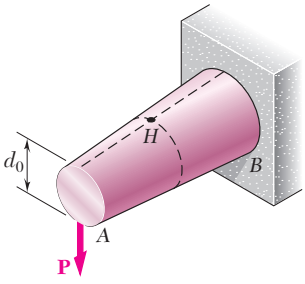


Fig. P5.139

5.140 Considerando que o comprimento e a largura das placas de reforço utilizadas com a viga do Problema Resolvido 5.12 são, respectivamente, $l = 4$ m e $b = 285$ mm, e lembrando que a espessura de cada placa é de 16 mm, determine a tensão normal máxima em uma seção transversal (*a*) no centro da viga e (*b*) imediatamente à esquerda de D.

5.141 Duas placas de reforço, cada uma com 12,7 mm de espessura, são soldadas a uma viga W690 × 125, conforme mostra a figura. Sabendo que $l = 3\,048$ mm e $b = 267$ mm, determine a tensão normal máxima em uma seção transversal (*a*) no do centro da viga e (*b*) imediatamente à esquerda de *D*.

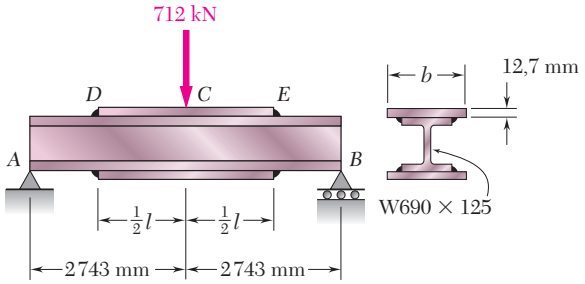


Fig. *P5.141* e P5.142

5.142 Duas placas de reforço, cada uma com 12,7 mm de espessura, são soldadas a uma viga W690 × 125, conforme mostra a figura. Sabendo que $\sigma_{adm} = 165$ MPa para a viga e para as placas, determine o valor necessário para (*a*) o comprimento das placas e (*b*) a largura das placas.

5.143 Sabendo que $\sigma_{adm} = 150$ MPa, determine a maior força **P** concentrada que pode ser aplicada na extremidade *E* da viga mostrada.

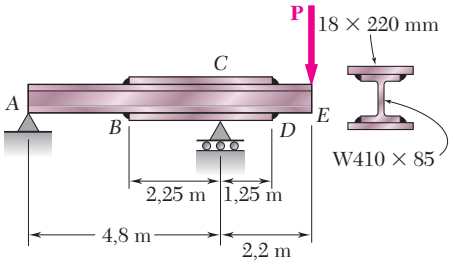


Fig. P5.143

5.144 Duas placas de reforço, cada uma com 7,5 mm de espessura, são soldadas a uma viga W460 × 74, conforme mostra a figura. Sabendo que $l = 5$ m e $b = 200$ mm, determine a tensão normal máxima em uma seção na transversal (*a*) no centro da viga e (*b*) imediatamente à esquerda de *D*.

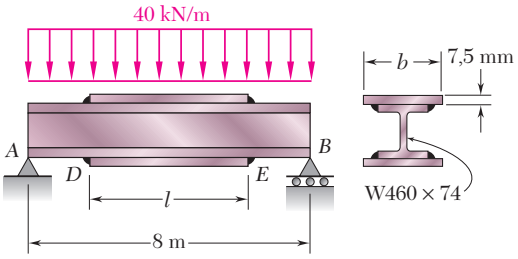


Fig. P5.144 e P5.145

5.145 Duas placas de reforço, cada uma com 7,5 mm de espessura, são soldadas a uma viga W460 × 74, conforme mostra a figura. Sabendo que $\sigma_{adm} = 150$ MPa para a viga e as placas, determine o valor necessário para (*a*) o comprimento das placas e (*b*) a largura das placas.

5.146 Duas placas de reforço, cada uma com 15,88 mm de espessura, são soldadas a uma viga W760 × 147, conforme mostra a figura. Sabendo que $l = 2\,743$ mm e $b = 304{,}8$ mm, determine a tensão normal máxima em uma seção transversal (*a*) no centro da viga e (*b*) imediatamente à esquerda de *D*.

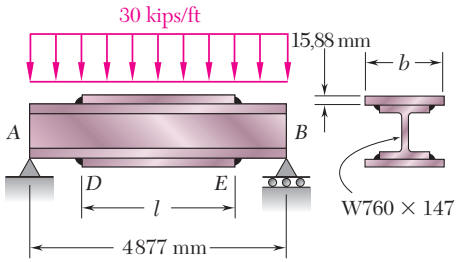


Fig. P5.146 e *P5.147*

5.147 Duas placas de reforço, cada uma com 15,88 mm de espessura, são soldadas a uma viga W760 × 147, conforme mostra a figura. Sabendo que $\sigma_{adm} = 151{,}7$ MPa para a viga e as placas, determine o valor necessário para (*a*) o comprimento das placas e (*b*) a largura das placas.

5.148 Para a viga de altura variável mostrada na figura, determine (*a*) a seção transversal na qual ocorre a tensão normal máxima e (*b*) a maior força distribuída *w* que pode ser aplicada, sabendo que $\sigma_{adm} = 165$ MPa.

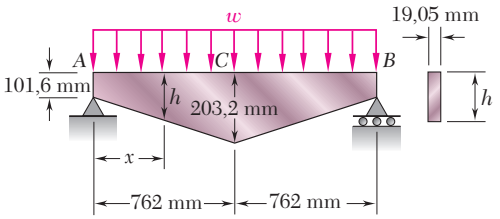


Fig. P5.148

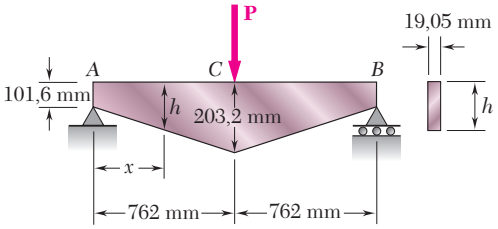


Fig. P5.149

5.149 Para a viga de altura variável mostrada na figura, determine (*a*) a seção transversal na qual ocorre a tensão normal máxima e (*b*) a maior força concentrada **P** que pode ser aplicada, sabendo que $\sigma_{adm} = 165$ MPa.

5.150 Para a viga de altura variável mostrada na figura, determine (*a*) a seção transversal na qual ocorre a tensão normal máxima e (*b*) a maior força distribuída *w* que pode ser aplicada, sabendo que $\sigma_{adm} = 140$ MPa.

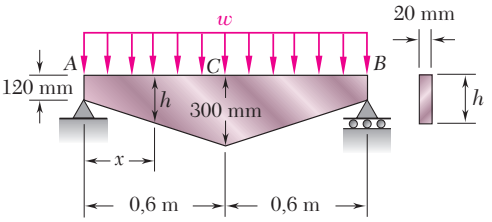


Fig. *P5.150* e P5.151

5.151 Para a viga de altura variável mostrada na figura, sabendo que $w = 160$ kN/m, determine (*a*) a seção transversal na qual ocorre a tensão normal máxima e (*b*) o valor correspondente da tensão normal.

REVISÃO E RESUMO DO CAPÍTULO 5

Esse capítulo foi dedicado a análise e projeto de vigas sob carregamentos transversais. Carregamentos podem ser formados por forças concentradas ou forças distribuídas e as próprias vigas são classificadas de acordo com a maneira pela qual são vinculadas (Fig. 5.3). Nesse capítulo somente foram consideradas as vigas *estaticamente determinadas*; a análise de vigas estaticamente indeterminadas foi deixada para o Capítulo 9.

Considerações para o projeto de vigas prismáticas

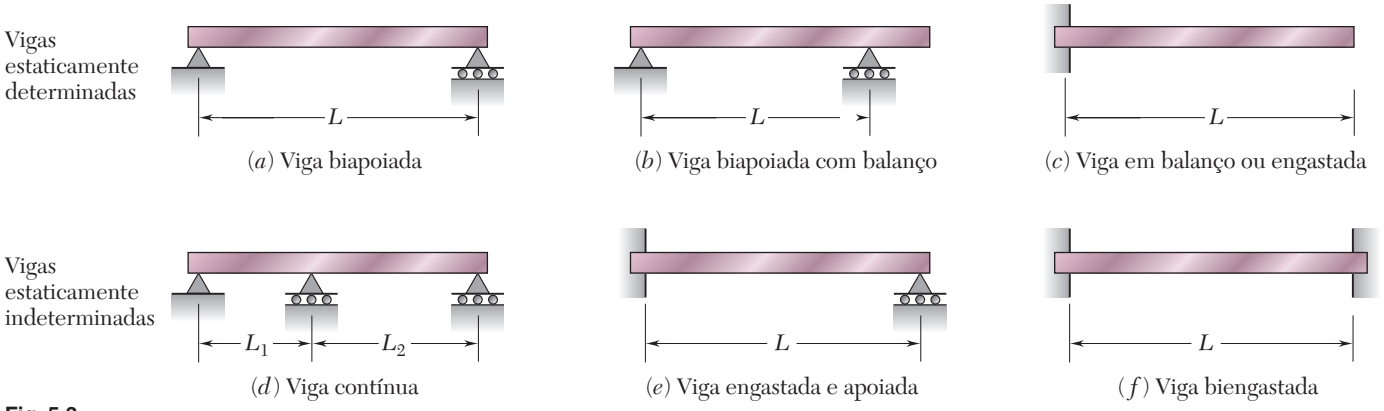


Fig. 5.3

Embora os carregamentos transversais provoquem momento fletor e força cortante em uma viga, as tensões normais provocadas pelo momento fletor são o critério dominante no projeto de uma viga quanto à resistência [Seção 5.1]. Portanto, esse capítulo tratou somente da determinação das tensões normais em uma viga. O efeito das tensões de cisalhamento será examinado no próximo capítulo.

Tensões normais provocadas pelo momento fletor

Recordamos da Seção 4.4 a Fórmula da flexão para a determinação do valor máximo da tensão normal σ_m em uma seção da viga,

$$\sigma_m = \frac{|M|c}{I} \tag{5.1}$$

em que I é o momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo que passa pelo centroide perpendicular ao plano do momento fletor **M**, e c é a distância máxima da superfície neutra (Fig. 4.13). Recordamos também

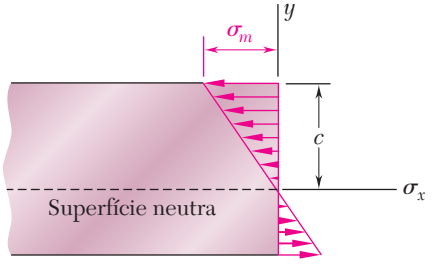


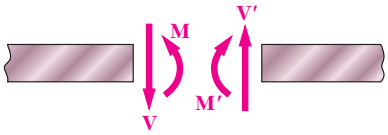
Fig. 4.13

da Seção 4.4 que, introduzindo o módulo de resistência à flexão da seção $W = I/c$ da viga, o valor máximo σ_m da tensão normal na seção pode ser expresso como

$$\sigma_m = \frac{|M|}{W} \tag{5.3}$$

Diagramas de força cortante e de momento fletor

Conclui-se da Equação (5.1) que a tensão normal máxima ocorre na seção em que $|M|$ é maior, no ponto mais afastado da linha neutra. A determinação do valor máximo de $|M|$ e da seção crítica da viga na qual ele ocorre fica bastante simplificada se traçarmos um *diagrama de força cortante* e um *diagrama de momento fletor*. Esses diagramas representam, respectivamente, a variação da força cortante e do momento fletor ao longo da viga, e são obtidos determinando-se os valores de V e M em pontos selecionados da viga [Seção 5.2]. Esses valores foram encontrados cortando-se a viga em uma seção em que eles deveriam ser determinados e desenhando o diagrama de corpo livre de qualquer uma das partes da viga obtidas dessa maneira. Para evitar qualquer confusão referente ao sentido da força cortante **V** e do momento fletor **M** (que atuam em sentidos opostos nas duas partes da viga), seguimos a convenção de sinais adotada anteriormente no texto e ilustrada na Fig. 5.7*a* [Exemplos 5.1 e 5.2, Problemas Resolvidos 5.5 e 5.2].



(*a*) Esforços internos
(força cortante positiva e momento fletor positivo)

Fig. 5.7*a*

Relações entre força, força cortante e momento fletor

A construção dos diagramas de força cortante e de momento fletor é facilitada se forem levadas em conta as relações a seguir [Seção 5.3]. Chamando de w a força distribuída por unidade de comprimento (supondo que positivo seja dirigido para baixo), escrevemos

$$\frac{dV}{dx} = -w \qquad \frac{dM}{dx} = V \tag{5.5, 5.7}$$

ou, na forma integrada,

$$V_D - V_C = -(\text{área sob a curva da força entre } C \text{ e } D) \tag{5.6′}$$
$$M_D - M_C = \text{área sob a curva da força cortante entre } C \text{ e } D \tag{5.8′}$$

A Equação (5.6′) torna possível traçar o diagrama de força cortante de uma viga a partir da curva que representa a força distribuída naquela viga e o valor de V em uma de suas extremidades. Analogamente, a Equação (5.8′) permite traçar o diagrama de momento fletor por meio do diagrama de força cortante e o valor de M em uma extremidade da viga. No entanto, forças concentradas introduzem descontinuidades no diagrama de força cortante e momentos concentrados no diagrama de momento fletor; nenhum deles foi levado em conta nessas equações [Problemas Resolvidos 5.3 e 5.6]. Finalmente, observamos da Equação (5.7) que os pontos da viga em que o momento fletor é máximo ou mínimo também são pontos em que a força cortante é zero [Problema Resolvido 5.4].

Um procedimento apropriado para o projeto de viga prismática foi descrito na Seção 5.4 e é resumido aqui:

Projeto de vigas prismáticas

Tendo determinado σ_{adm} para o material utilizado e considerando que o projeto da viga é controlado por sua tensão normal máxima, conclui-se que o valor mínimo admissível para o módulo de resistência à flexão da seção é:

$$W_{mín} = \frac{|M|_{máx}}{\sigma_{adm}} \tag{5.9}$$

Para uma viga de madeira de seção transversal retangular, $W = \frac{1}{6}bh^2$ em que b é a largura da viga e h sua altura. As dimensões da seção, portanto, devem ser selecionadas de maneira que $\frac{1}{6}bh^2 \geq W_{min}$.

Para uma viga de aço laminado, consulte a tabela apropriada no Apêndice C. Entre as seções de vigas disponíveis, considere somente aquelas com um módulo de resistência à flexão da seção $W \geq W_{mín}$ e selecione desse grupo a seção com o menor peso por unidade de comprimento. Essa é a mais econômica das seções para as quais $W \geq W_{mín}$.

Funções de singularidade

Na Seção 5.5 discutimos um método alternativo para a determinação dos valores máximos da força cortante e do momento fletor com base no uso das *funções de singularidade* $\langle x - a\rangle^n$. Por definição, e para $n \geq 0$, tínhamos

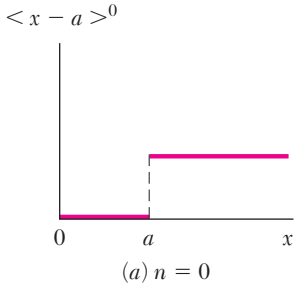
$$\langle x - a\rangle^n = \begin{cases} (x-a)^n & \text{quando } x \geq a \\ 0 & \text{quando } x < a \end{cases} \tag{5.14}$$

Observamos que sempre que a quantidade entre os colchetes for positiva ou zero, ela deverá ser substituída por parênteses comuns, e sempre que aquela quantidade for negativa, o próprio colchete será igual a zero. Notamos também que as funções de singularidade podem ser integradas e diferenciadas como binômios comuns. Finalmente, observamos que a função de singularidade correspondente a $n = 0$ é descontínua em $x = a$ (Fig. 5.18*a*).

Função degrau

Essa função é chamada de *função degrau*. Escrevemos

$$\langle x - a\rangle^0 = \begin{cases} 1 & \text{quando } x \geq a \\ 0 & \text{quando } x < a \end{cases} \tag{5.15}$$



(*a*) $n = 0$

Fig. 5.18*a*

Usando funções de singularidade para expressar força cortante e momento fletor

O uso das funções de singularidade permite representar a força cortante e o momento fletor em uma viga por meio de uma expressão simples, válida em qualquer ponto da viga. Por exemplo, a contribuição para a força cortante da força concentrada **P** aplicada ao ponto médio C de uma viga simplesmente apoiada (Fig. 5.8) pode ser representada por $-P\langle x - \frac{1}{2}L\rangle^0$, pois esta expressão é igual a zero à esquerda de C, e igual a $-P$ à direita de C. Acrescentando a contribuição da reação $R_A = \frac{1}{2}P$ em A, expressamos a força cortante em qualquer ponto da viga como

$$V(x) = \tfrac{1}{2}P - P\langle x - \tfrac{1}{2}L\rangle^0$$

O momento fletor é obtido integrando essa expressão:

$$M(x) = \tfrac{1}{2}Px - P\langle x - \tfrac{1}{2}L\rangle^1$$

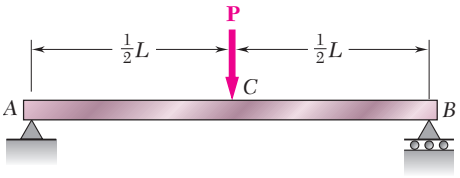


Fig. 5.8

Carregamentos de extremidade aberta equivalentes

As funções de singularidade que representam, respectivamente, o carregamento, a força cortante e o momento fletor correspondente a vários carregamentos básicos foram dadas na Fig. 5.19. Notamos que um carregamento distribuído que não se estenda até à extremidade direita da viga, ou que seja descontínuo, deverá ser substituído por uma combinação equivalente de carregamentos de extremidade aberta. Por exemplo, uma força uniformemente distribuída que se estenda de $x = a$ até $x = b$ (Fig. 5.20) deverá ser expressa como

$$w(x) = w_0\langle x - a\rangle^0 - w_0\langle x - b\rangle^0$$

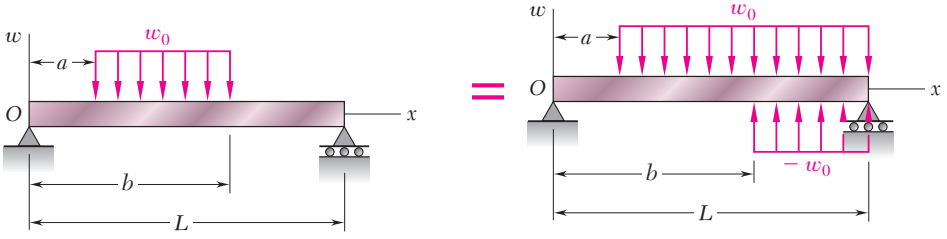


Fig. 5.20

A contribuição desse carregamento para a força cortante e o momento fletor pode ser obtida por meio de duas integrações sucessivas. No entanto, deve-se tomar cuidado para incluir também na expressão da força cortante $V(x)$ a contribuição das forças concentradas e reações, e para incluir na expressão do momento fletor $M(x)$ a contribuição dos momentos concentrados [Exemplos 5.5 e 5.6, Problemas Resolvidos 5.9 e 5.10]. Observamos também que as funções de singularidade são particularmente bem adequadas ao uso dos computadores.

Vigas não prismáticas

Até aqui estávamos interessados apenas em vigas prismáticas, isto é, vigas de seção transversal uniforme. Considerando na Seção 5.6 o projeto de vigas não prismáticas, isto é, vigas de seção transversal variável, vimos que selecionando a forma e o tamanho da seção transversal de maneira que seu módulo de resistência à flexão da seção $W = I/c$ varie ao longo da viga da mesma maneira que o momento fletor M, poderíamos projetar vigas para as quais σ_m em cada seção fosse igual a σ_{adm}. Essas vigas, chamadas de *vigas de resistência constante*, proporcionam claramente um uso mais eficaz do material que as vigas prismáticas. O módulo de resistência à flexão da seção em qualquer seção ao longo da viga foi definido pela relação

Vigas de resistência constante

$$W = \frac{M}{\sigma_{\text{adm}}} \tag{5.18}$$

PROBLEMAS DE REVISÃO

5.152 Trace os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga e o carregamento mostrados, e determine o valor máximo absoluto (*a*) da força cortante e (*b*) do momento fletor.

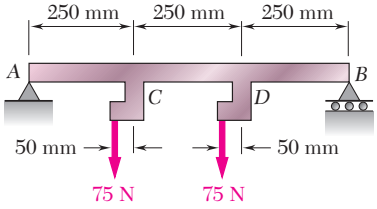


Fig. P5.152

5.153 Determine (*a*) a intensidade da força P para cima para a qual o valor máximo do momento fletor na viga é o menor possível (*b*) a tensão máxima correspondente provocada pelo momento fletor. (Ver a sugestão do Problema 5.27.)

5.154 Trace os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga e o carregamento mostrados, e determine o valor máximo absoluto (*a*) da força cortante e (*b*) do momento fletor.

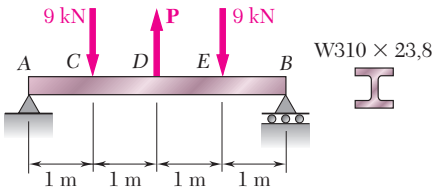


Fig. *P5.153*

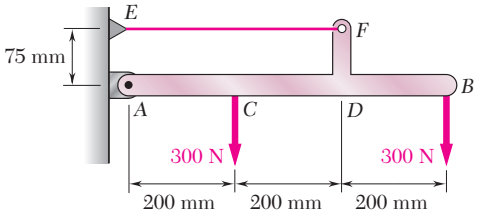


Fig. P5.154

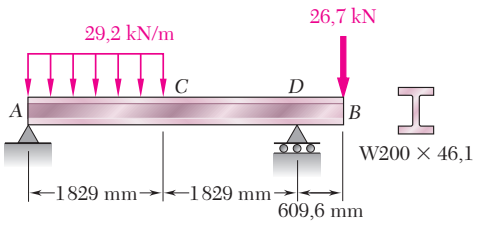


Fig. P5.155

5.155 Trace os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga e o carregamento mostrados, e determine a máxima tensão normal em razão do momento.

5.156 A viga *AB*, de comprimento *L* e seção transversal quadrada de lado *a*, é apoiada por um pivô em *C* e carregada, conforme mostra a figura. (*a*) Verifique se a viga está em equilíbrio. (*b*) Mostre que a tensão máxima provocada pelo momento fletor ocorre em *C* e é igual a $w_0L^2/(1{,}5a)^3$.

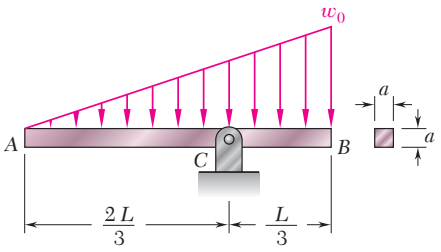


Fig. P5.156

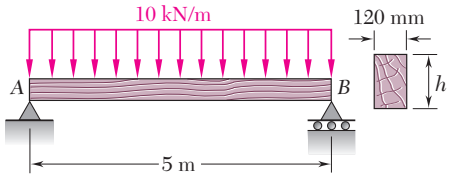


Fig. *P5.157*

***5.157* e 5.158** Para a viga e o carregamento mostrados, projete a seção transversal da viga, sabendo que o tipo de madeira utilizada tem uma tensão normal admissível de 12 MPa.

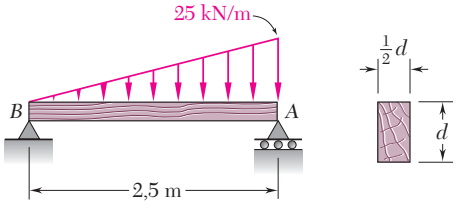


Fig. P5.158

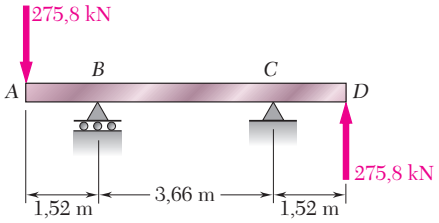


Fig. *P5.159*

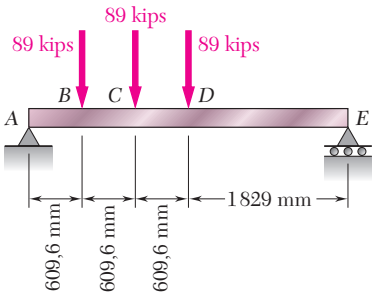


Fig. P5.161

5.159 Sabendo que a tensão normal admissível para o aço utilizado é de 165,5 MPa, selecione a viga de mesa larga mais econômica para suportar o carregamento mostrado.

5.160 Determine a maior força P admissível para a viga mostrada, sabendo que a tensão normal admissível é de +80 MPa em tração e de −140 MPa em compressão.

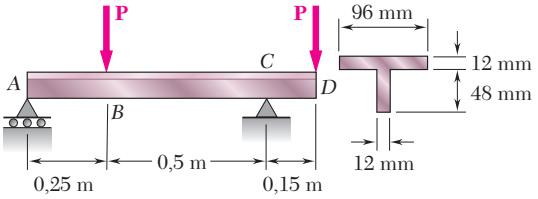


Fig. P5.160

5.161 (*a*) Usando funções de singularidade, escreva as equações para a força cortante e para o momento fletor para a viga e o carregamento mostrados. (*b*) Determine o maior valor de momento fletor nessa viga.

5.162 A viga *AB*, consistindo de uma placa de alumínio de espessura uniforme *b* e comprimento *L*, deve suportar a força mostrada. (*a*) Sabendo que ela deve ser de resistência constante, expresse *h* em termos de *x*, *L*, e h_0 para a parte *AC* da viga. (*b*) Determine a força máxima admissível se $L = 812{,}8$ mm, $h_0 = 203{,}2$ mm, $b = 25{,}4$ mm e $\sigma_{adm} = 69$ MPa.

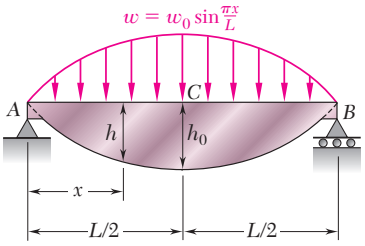


Fig. *P5.162*

5.163 Uma viga em balanço *AB* que consiste em uma placa de aço de altura *h* uniforme e largura *b* variável deve suportar a força distribuída *w* ao longo de sua linha de centro *AB*. (*a*) Sabendo que a viga deve ser de resistência constante, expresse *b* em termos de *x*, *L* e b_0. (*b*) Determine o valor máximo admissível de *w* se $L = 381$ mm, $b_0 = 203$ mm, $h = 19{,}05$ mm e $\sigma_{adm} = 165$ MPa.

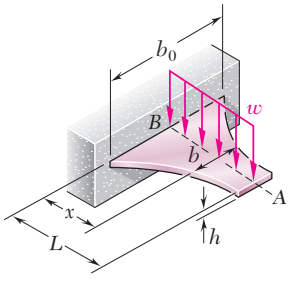


Fig. P5.163

PROBLEMAS PARA COMPUTADOR

Os problemas a seguir foram elaborados para serem resolvidos com um computador.

5.C1 Várias forças concentradas podem ser aplicadas a uma viga, conforme mostra a figura. Elabore um programa de computador que possa ser utilizado para calcular a força cortante, o momento fletor e a tensão normal em qualquer ponto da viga para determinado carregamento da viga e determinado valor de seu módulo de resistência à flexão da seção. Use esse programa para resolver os Problemas 5.18, 5.21 e 5.25. (Sugestão: Os valores máximos ocorrerão em um apoio ou sob uma força.)

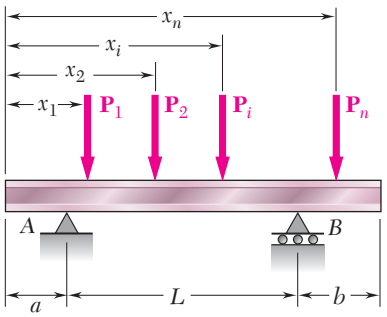


Fig. P5.C1

5.C2 Uma viga de madeira deve ser projetada para suportar uma força distribuída e até duas forças concentradas, conforme mostra a figura. Uma das dimensões de sua seção transversal retangular uniforme foi especificada e a outra deve ser determinada de maneira que a tensão normal máxima na viga não exceda certo valor admissível σ_{adm}. Elabore um programa que possa ser utilizado para calcular em dados intervalos ΔL a força cortante, o momento fletor e o menor valor aceitável da dimensão desconhecida. Aplique esse programa para resolver os problemas seguintes usando os intervalos ΔL indicados: (*a*) Problema 5.65 ($\Delta L = 0{,}1$m), (*b*) Problema 5.69 ($\Delta L = 0{,}3$ m), (*c*) Problema 5.70 ($\Delta L = 0{,}2$ m).

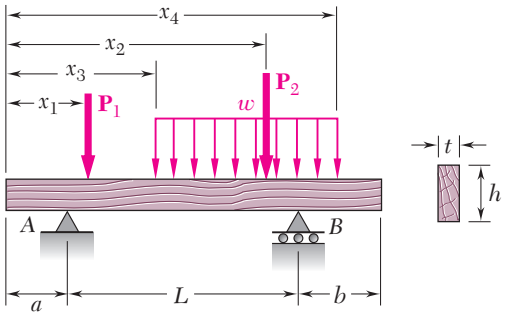


Fig. P5.C2

5.C3 Duas placas de reforço, cada uma com espessura t, devem ser soldadas a uma viga de mesa larga de comprimento L, que deve suportar uma força w uniformemente distribuída. Chamando de σ_{adm} a tensão normal admissível na viga e nas placas, de d a altura da viga, e de I_v e W_v, respectivamente, o momento de inércia e o módulo de resistência da seção transversal da viga sem reforço em relação a um eixo horizontal que passa pelo centroide da seção, elabore um programa de computador que possa ser utilizado para calcular o valor necessário (*a*) do comprimento a das placas e (*b*) da largura b das placas. Use esse programa para resolver o Problema 5.145.

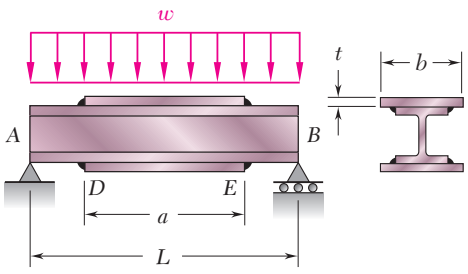


Fig. P5.C3

5.C4 Duas forças de 111,2 kN são mantidas separadas em 1 829 mm enquanto são movidas lentamente por uma viga AB de 5 486 mm. Elabore um programa de computador que possa ser utilizado para calcular o momento fletor sob cada força, e no ponto médio C da viga para valores de x de 0 até 7315,2 mm em intervalos $\Delta x = 457{,}2$ mm.

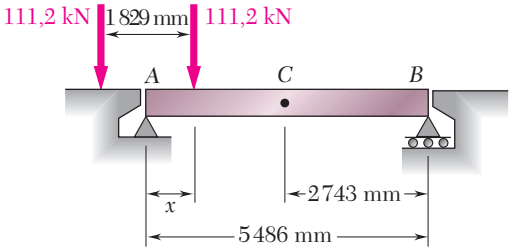


Fig. P5.C4

5.C5 Elabore um programa de computador que possa ser utilizado para traçar os diagramas de força cortante e de momento fletor para a viga e o carregamento mostrados. Aplique esse programa com um intervalo de construção do diagrama de $\Delta L = 61$ mm para a viga e o carregamento do (*a*) Problema 5.72 e (*b*) Problema 5.115.

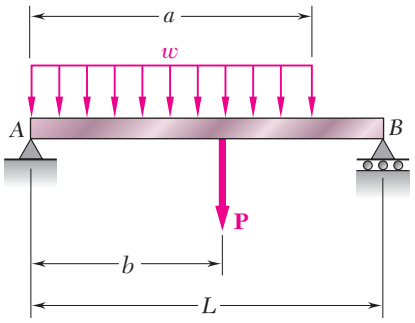


Fig. P5.C5

5.C6 Elabore um programa de computador que possa ser utilizado para traçar os diagramas de força cortante e de momento fletor para a viga e o carregamento mostrados. Aplique esse programa com um intervalo de construção do diagrama de $\Delta L = 0{,}025$ m para a viga e o carregamento do Problema 5.112.

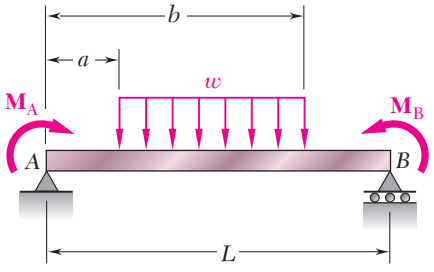


Fig. P5.C6

C A P Í T U L O

Tensões de cisalhamento em vigas e barras de paredes finas

6

Um tabuleiro de concreto armado será fixado em cada uma das seções de aço mostradas para formar uma ponte de viga caixão de material composto. Neste capítulo, as tensões de cisalhamento serão determinadas em vários tipos de vigas e vigas mestras.

6.1. Introdução

Vimos na Seção 5.1 que um carregamento transversal aplicado a uma viga resultará em tensões normais e de cisalhamento em qualquer seção transversal dessa viga. As tensões normais são provocadas pelo momento fletor **M** naquela seção e as tensões de cisalhamento, pela força cortante **V**. Como o critério dominante no projeto de uma viga quanto à resistência é o valor máximo da tensão normal na viga, nossa análise no Capítulo 5 esteve limitada à determinação das tensões normais. No entanto, as tensões de cisalhamento podem ser importantes, particularmente no projeto de barras de paredes finas e vigas curtas e grossas, e sua análise será o assunto da primeira parte deste capítulo.

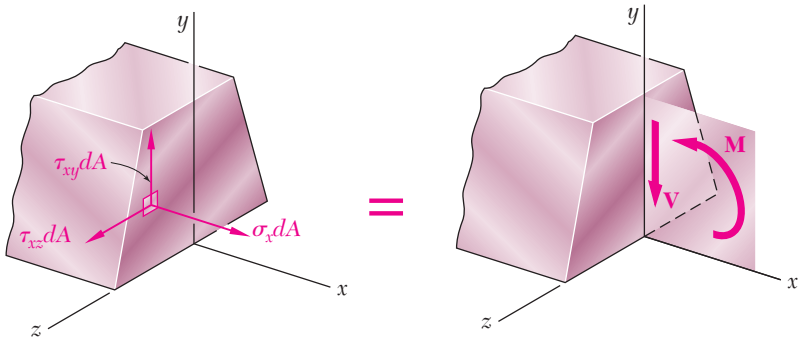


Fig. 6.1

A Fig. 6.1 expressa graficamente que as forças elementares normais e de cisalhamento aplicadas em determinada seção transversal de uma viga prismática com um plano vertical de simetria são equivalentes ao momento fletor **M** e à força cortante **V**. Seis equações podem ser escritas para expressar esse fato. Três delas envolvem somente as forças normais $\sigma_x\, dA$ e já foram discutidas na Seção 4.2; elas são as Equações (4.1), (4.2) e (4.3). Para a determinação dessas equações foi imposto que a soma das forças normais fosse zero e que as somas de seus momentos em relação aos eixos y e z fossem iguais a zero e M, respectivamente. Outras três equações envolvendo forças de cisalhamento $\tau_{xy}\, dA$ e $\tau_{xz}\, dA$ podem agora ser escritas. Uma delas expressa que a soma dos momentos das forças de cisalhamento em relação ao eixo x é zero e pode ser desconsiderada em vista da simetria da viga com relação ao plano xy. As outras duas envolvem as componentes y e z das forças elementares e são

$$\text{componentes } y: \qquad \int \tau_{xy}\, dA = -V \tag{6.1}$$

$$\text{componentes } z: \qquad \int \tau_{xz}\, dA = 0 \tag{6.2}$$

A primeira dessas equações mostra que devem existir tensões de cisalhamento verticais em uma seção transversal de uma viga sob carregamento transversal. A segunda equação indica que a tensão de cisalhamento horizontal média em qualquer seção é zero. No entanto, isso não significa que a tensão de cisalhamento τ_{xz} seja zero em todos os pontos.

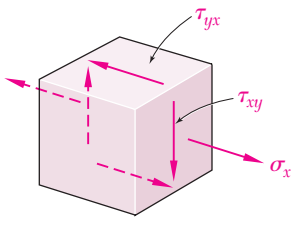


Fig. 6.2

Vamos agora considerar um pequeno elemento de volume localizado no plano vertical de simetria da viga (do qual sabemos que τ_{xz} deve ser zero) e examinaremos as tensões aplicadas em suas faces (Fig. 6.2). Conforme acabamos de ver, uma tensão normal σ_x e uma tensão de cisalhamento τ_{xy} são aplicadas em cada uma das duas faces perpendiculares ao eixo x. Mas de acordo com o Capítulo 1, sabemos que quando tensões de cisalhamento τ_{xy}

são aplicadas às faces verticais de um elemento, tensões iguais devem ser aplicadas nas faces horizontais do mesmo elemento. Concluímos então que devem existir tensões de cisalhamento longitudinais em qualquer elemento submetido a carregamento transversal. Isso pode ser verificado considerando-se uma viga em balanço feita de pranchas separadas, mas unidas em uma das extremidades (Fig. 6.3*a*). Quando uma força transversal **P** é aplicada à extremidade livre dessa viga composta, observa-se que as pranchas deslizam uma em relação à outra (Fig. 6.3*b*). No entanto, se um momento **M** é aplicado à extremidade livre da mesma viga composta (Fig. 6.3*c*), as várias pranchas se flexionarão em arcos de círculo concêntricos e não deslizarão umas em relação às outras, verificando-se assim o fato de que não ocorre cisalhamento em uma viga submetida à flexão pura (cf. Seção 4.3).

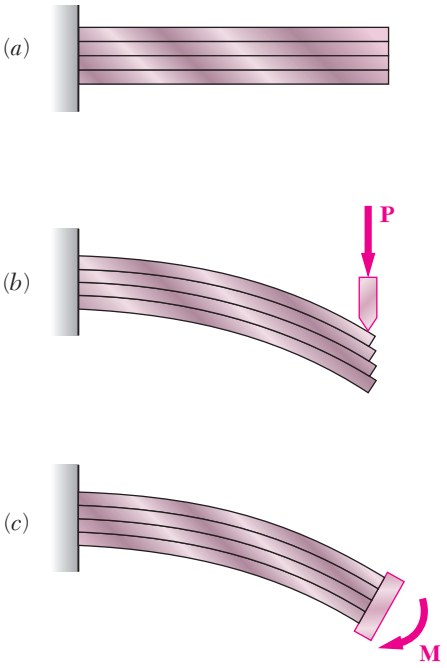


Fig. 6.3

Embora o deslizamento realmente não ocorra quando uma força transversal **P** é aplicada a uma viga feita de um material homogêneo e coesivo como o aço, a tendência ao deslizamento existe, mostrando que ocorrem tensões em planos horizontais longitudinais, bem como em planos verticais transversais. No caso das vigas de madeira, cuja resistência ao cisalhamento é menor entre as fibras, a falha ocorrerá ao longo do plano longitudinal, e não ao longo do plano transversal (Fig. 6.4).

Na Seção 6.2, será considerado um elemento de viga de comprimento Δx limitado por dois planos transversais e um plano horizontal, e será determinada a força cortante $\Delta \mathbf{H}$ exercida em sua face horizontal, bem como a força cortante por unidade de comprimento, q, também conhecida como *fluxo de cisalhamento*. Na Seção 6.3 será deduzida uma fórmula para a tensão de cisalhamento em uma viga com um plano vertical de simetria, e essa fórmula será usada na Seção 6.4 para determinar as tensões de cisalhamento em tipos comuns de vigas. A distribuição de tensões em uma viga retangular estreita será melhor discutida na Seção 6.5.

A dedução dada na Seção 6.2 será retomada na Seção 6.6, para abranger o caso de um elemento de viga limitado por dois planos transversais e uma superfície curva. Isso nos permitirá na Seção 6.7 determinar as tensões de cisalhamento em qualquer ponto de uma barra simétrica de paredes finas, como as mesas das vigas de mesas largas e vigas caixão. O efeito das deformações plásticas sobre a intensidade e a distribuição das tensões de cisalhamento será discutido na Seção 6.8.

Na última seção do capítulo (Seção 6.9), consideraremos o carregamento assimétrico em barras de paredes finas e introduziremos o conceito de *centro de cisalhamento*. Você aprenderá então a determinar a distribuição de tensões de cisalhamento nesses elementos.

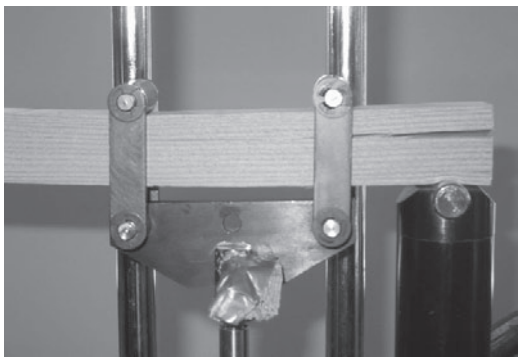


Fig. 6.4

6.2. Força cortante na face horizontal de um elemento de viga

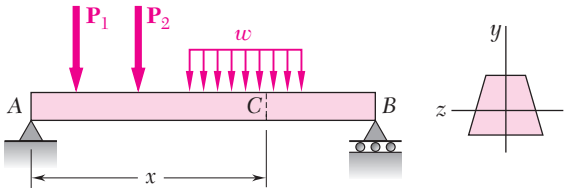


Fig. 6.5

Considere uma viga prismática *AB* com um plano vertical de simetria que suporta várias forças concentradas e distribuídas (Fig. 6.5). A uma distância x da extremidade A separamos da viga um elemento $CDD'C'$ de comprimento Δx que se estende por sua largura desde a sua superfície superior até um plano horizontal localizado a uma distância y_1 da linha neutra (Fig. 6.6). As forças

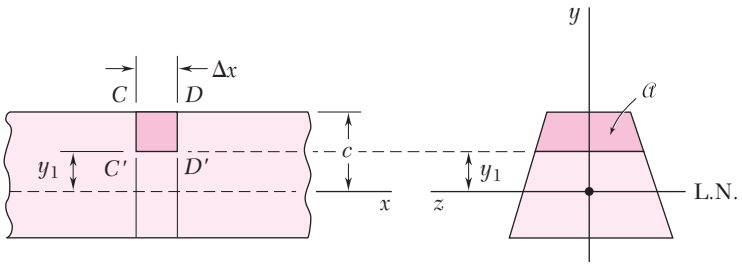


Fig. 6.6

exercidas nesse elemento consistem em forças cortante vertical $\mathbf{V}'_C$ e $\mathbf{V}'_D$, uma força cortante horizontal $\mathbf{\Delta H}$ aplicada na face inferior do elemento, forças elementares horizontais normais $\sigma_C\, dA$ e $\sigma_D\, dA$ e, possivelmente, uma força $w\,\Delta x$ (Fig. 6.7). Escrevemos a equação de equilíbrio

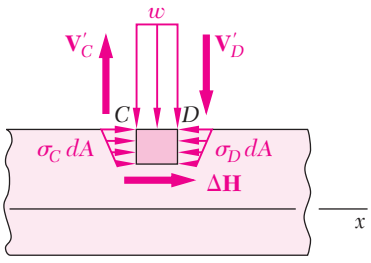


Fig. 6.7

$$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \qquad \Delta H + \int_{\mathcal{A}} (\sigma_D - \sigma_C)\, dA = 0$$

em que a integral se estende sobre a área sombreada da seção localizada acima da linha $y = y_1$. Resolvendo essa equação para ΔH e usando a Equação (5.2) da Seção 5.1, $\sigma = My/I$, para expressar as tensões normais em termos dos momentos fletores em C e D, temos

$$\Delta H = \frac{M_D - M_C}{I} \int_{\mathcal{A}} y\, dA \tag{6.3}$$

A integral em (6.3) representa o *momento estático* em relação à linha neutra da parte $\mathcal{A}$ da seção transversal da viga que está localizada acima da linha $y = y_1$ e será representada por Q. Entretanto, usando a Equação (5.7) da Seção 5.5, podemos expressar o incremento $M_D - M_C$ do momento fletor como

$$M_D - M_C = \Delta M = (dM/dx)\,\Delta x = V\,\Delta x$$

Substituindo em (6.3), obtemos a seguinte expressão para a força cortante horizontal aplicada ao elemento de viga

$$\Delta H = \frac{VQ}{I}\Delta x \tag{6.4}$$

O mesmo resultado teria sido obtido se tivéssemos utilizado como corpo livre o elemento inferior $C'D'D''C''$, em lugar do elemento superior $CDD'C'$

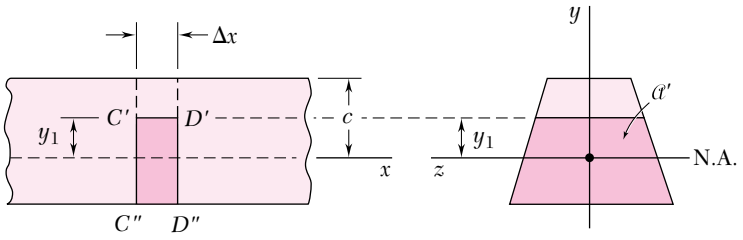


Fig. 6.8

(Fig. 6.8), visto que as forças cortantes $\Delta\mathbf{H}$ e $\Delta\mathbf{H}'$ que atuam nos dois elementos são iguais e opostas, pois uma é reação da outra. Isso nos leva a observar que o momento estático Q da parte $\mathcal{A}'$ da seção transversal localizada abaixo da linha $y = y_1$ (Fig. 6.8) é igual em intensidade e oposta em sinal ao momento estático da parte $\mathcal{A}$ localizada acima da linha (Fig. 6.6). Sem dúvida, a soma desses dois momentos é igual ao momento estático da seção transversal inteira em relação ao seu eixo que passa pelo centroide e, portanto, deve ser zero. Essa propriedade às vezes pode ser usada para simplificar o cálculo de Q. Notamos também que Q é máximo para $y_1 = 0$, pois os elementos da seção transversal localizados acima da linha neutra contribuem positivamente para a integral (5.5) que define Q, enquanto os elementos localizados abaixo da linha contribuem negativamente.

A *força cortante horizontal por unidade de comprimento*, que será representada pela letra q, é obtida dividindo-se ambos os membros da Equação (6.4) por Δx:

$$q = \frac{\Delta H}{\Delta x} = \frac{VQ}{I} \tag{6.5}$$

Lembramos que Q é o momento estático em relação à linha neutra da parte da seção transversal localizada acima ou abaixo do ponto no qual q está sendo calculado, e I é o momento de inércia da seção transversal *inteira* em relação ao eixo que passa pelo centroide. Por uma razão que se tornará aparente mais adiante (Seção 6.7), a força cortante horizontal por unidade de comprimento q é também chamada de *fluxo de cisalhamento*.

EXEMPLO 6.1

Uma viga é feita de três pranchas, com seção transversal de 20 × 100 mm, pregadas umas às outras (Fig. 6.9). Sabendo que o espaçamento entre os pregos é de 25 mm e que a força cortante vertical na viga é $V = 500$ N, determine a força cortante em cada prego.

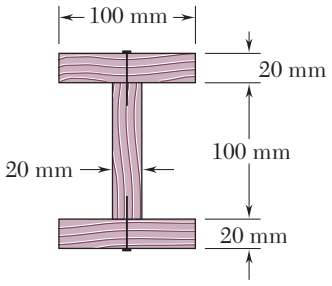


Fig. 6.9

Primeiro determinamos a força horizontal por unidade de comprimento, q, exercida sobre a face inferior da prancha superior. Usamos a Equação (6.5), em que Q representa o momento estático em relação à linha neutra da área sombreada A mostrada na Fig. 6.10*a*, e na qual I é o momento de inércia em relação a mesma linha da seção transversal inteira (Fig. 6.10*b*). Lembrando que o momento estático de uma área em relação a um dado eixo é igual ao produto dessa área pela distância entre seu centroide e esse eixo,† temos

$$\begin{aligned} Q &= A\bar{y} = (0{,}020\text{ m} \times 0{,}100\text{ m})(0{,}060\text{ m}) \\ &= 120 \times 10^{-6}\text{ m}^3 \\ I &= \tfrac{1}{12}(0{,}020\text{ m})(0{,}100\text{ m})^3 \\ &\quad + 2[\tfrac{1}{12}(0{,}100\text{ m})(0{,}020\text{ m})^3 \\ &\quad + (0{,}020\text{ m} \times 0{,}100\text{ m})(0{,}060\text{ m})^2] \\ &= 1{,}667 \times 10^{-6} + 2(0{,}0667 + 7{,}2)10^{-6} \\ &= 16{,}20 \times 10^{-6}\text{ m}^4 \end{aligned}$$

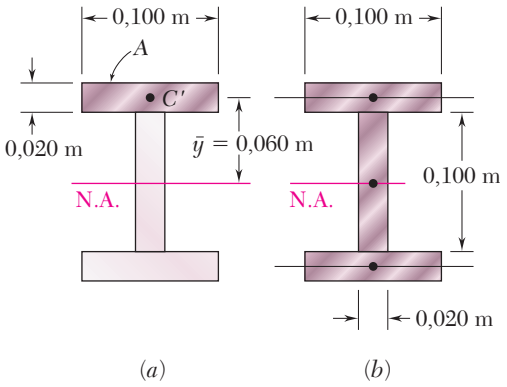


Fig. 6.10

Substituindo na Equação (6.5), escrevemos

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{(500\text{ N})(120 \times 10^{-6}\text{ m}^3)}{16{,}20 \times 10^{-6}\text{ m}^4} = 3\,704\text{ N/m}$$

Como o espaçamento entre os pregos é de 25 mm, a força cortante em cada prego é

$$F = (0{,}025\text{ m})q = (0{,}025\text{ m})(3\,704\text{ N/m}) = 92{,}6\text{ N}$$

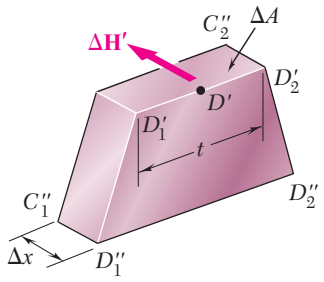


Fig. 6.11

6.3. Determinação das tensões de cisalhamento em uma viga

Considere novamente uma viga com um plano vertical de simetria, submetida a várias forças concentradas ou distribuídas aplicadas naquele plano. Vimos na seção anterior que, se por meio de dois cortes verticais e um corte horizontal separarmos da viga um elemento de comprimento Δx (Fig. 6.11), a intensidade ΔH da força cortante exercida na face horizontal do elemento pode ser obtida da Equação (6.4). A *tensão de cisalhamento média* $\tau_{\text{méd}}$ naquela face do elemento é obtida dividindo-se ΔH pela área ΔA da face. Observando que $\Delta A = t\,\Delta x$, em que t é a largura do elemento no corte, escrevemos

$$\tau_{\text{méd}} = \frac{\Delta H}{\Delta A} = \frac{VQ}{I}\frac{\Delta x}{t\,\Delta x}$$

ou

$$\tau_{\text{méd}} = \frac{VQ}{It} \tag{6.6}$$

†Ver o Apêndice A.

Notamos que, como as tensões de cisalhamento τ_{xy} e τ_{yx} exercidas, respectivamente, em um plano transversal e um plano horizontal por meio de D' são iguais, a expressão obtida também representará o valor médio de τ_{xy} ao longo da linha $D'_1D'_2$ (Fig. 6.12).

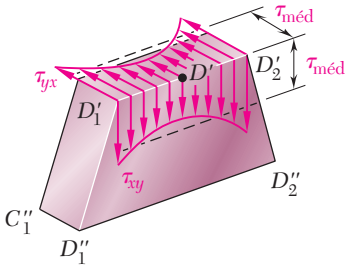


Fig. 6.12

Observamos que $\tau_{yx} = 0$ nas faces superior e inferior da viga, pois não há forças exercidas nessas faces. Conclui-se que $\tau_{xy} = 0$ ao longo das bordas superior e inferior da seção transversal (Fig. 6.13). Notamos também que, enquanto Q é máximo para $y = 0$ (ver Seção 6.2), não podemos concluir que $\tau_{méd}$ será máximo ao longo da linha neutra, pois $\tau_{méd}$ depende da largura t da seção, bem como de Q.

Enquanto a largura da seção transversal da viga permanece pequena comparada com sua altura, a tensão de cisalhamento varia ligeiramente ao longo da linha $D'_1 D'_2$ (Fig. 6.12), e a Equação (6.6) pode ser usada para calcular τ_{xy} em qualquer ponto ao longo de $D'_1 D'_2$. Na realidade, τ_{xy} é maior nos pontos D'_1 e D'_2 do que em D', mas a teoria da elasticidade mostra que,† para uma viga de seção retangular de largura b e altura h, e desde que $b \leq h/4$, o valor da tensão de cisalhamento nos pontos C_1 e C_2 (Fig. 6.14) não excede em mais de 0,8% o valor médio da tensão calculada ao longo da linha neutra.‡

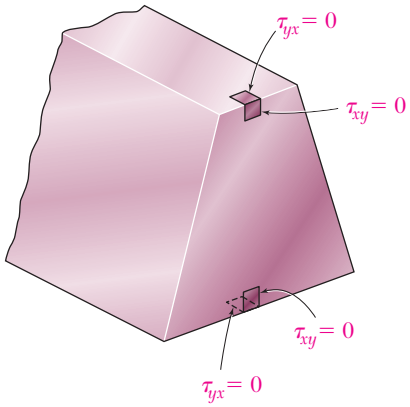


Fig. 6.13

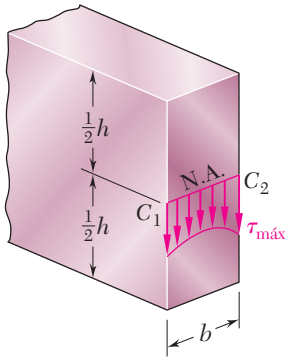


Fig. 6.14

6.4. Tensões de cisalhamento τ_{xy} em tipos comuns de vigas

Vimos na seção anterior que, para uma *viga retangular estreita*, isto é, para uma viga de seção retangular com largura b e altura h em que $b \leq \frac{1}{4}h$, a variação da tensão de cisalhamento τ_{xy} através da largura da viga é menos do que 0,8% de $\tau_{méd}$. Podemos, portanto, usar a Equação (6.6) em aplicações práticas para determinar a tensão de cisalhamento em qualquer ponto da seção transversal de uma viga retangular estreita e escrever

$$\tau_{xy} = \frac{VQ}{It} \tag{6.7}$$

†Ver TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N. *Theory of Elasticity*, 3. ed. Nova York: McGraw-Hill, 1970, Seção 124.

‡Em contrapartida, para valores grandes de b/h, o valor $\tau_{máx}$ da tensão em C_1 e C_2 pode ser muitas vezes maior do que o valor médio $\tau_{méd}$ calculado ao longo da linha neutra, como podemos observar na tabela a seguir:

b/h	0,25	0,5	1	2	4	6	10	20	50
$\tau_{máx}/\tau_{méd}$	1,008	1,033	1,126	1,396	1,988	2,582	3,770	6,740	15,65
$\tau_{mín}/\tau_{méd}$	0,996	0,983	0,940	0,856	0,805	0,800	0,800	0,800	0,800

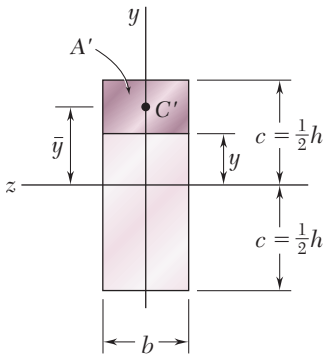


Fig. 6.15

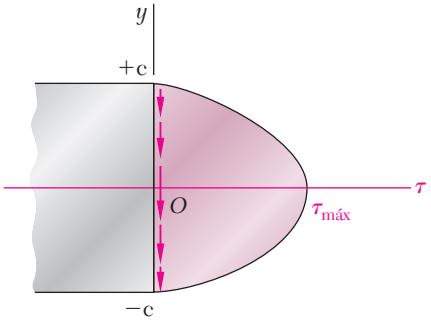


Fig. 6.16

em que t é igual à largura b da viga, e quando Q é o momento estático em relação à linha neutra da área sombreada A (Fig. 6.15).

Observando que a distância da linha neutra até o centroide C' de A é $\bar{y} = \frac{1}{2}(c + y)$ e lembrando que $Q = A\bar{y}$, escrevemos

$$Q = A\bar{y} = b(c - y)\tfrac{1}{2}(c + y) = \tfrac{1}{2}b(c^2 - y^2) \tag{6.8}$$

Recordando, entretanto, que $I = bh^3/12 = \frac{2}{3}bc^3$, temos

$$\tau_{xy} = \frac{VQ}{Ib} = \frac{3}{4}\frac{c^2 - y^2}{bc^3}V$$

ou, notando que a área da seção transversal da barra é $A = 2bc$,

$$\tau_{xy} = \frac{3}{2}\frac{V}{A}\left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right) \tag{6.9}$$

A Equação (6.9) mostra que a distribuição de tensões de cisalhamento em uma seção transversal de uma barra retangular é *parabólica* (Fig. 6.16). Conforme já havíamos observado na seção anterior, as tensões de cisalhamento são iguais a zero na parte superior e inferior da seção transversal ($y = \pm c$). Fazendo $y = 0$ na Equação (6.9), obtemos o valor da tensão de cisalhamento máxima em determinada seção de uma *barra retangular estreita*:

$$\tau_{máx} = \frac{3}{2}\frac{V}{A} \tag{6.10}$$

A relação obtida mostra que o valor máximo da tensão de cisalhamento em uma viga de seção transversal retangular é 50% maior que o valor V/A que seria obtido considerando erradamente uma distribuição de tensão uniforme por toda a seção transversal.

No caso de vigas com seção em perfil do tipo I (*padrão americano*) ou do tipo W (*viga de mesas largas*), a Equação (6.6) pode ser usada para deteminar o valor médio da tensão de cisalhamento τ_{xy} sobre uma seção aa' ou bb' da seção transversal dessa viga (Figs. 6.17*a* e *b*). Escrevemos

$$\tau_{méd} = \frac{VQ}{It} \tag{6.6}$$

em que V é a força cortante vertical, t a largura da seção na elevação considerada, Q o momento estático da área sombreada em relação à linha neutra cc', e I o momento de inércia da seção transversal inteira em relação a cc'. Construindo o gráfico de $\tau_{méd}$ em função da distância vertical y, obtemos a curva mostrada na Fig. 6.17*c*. As descontinuidades existentes nessa curva se devem

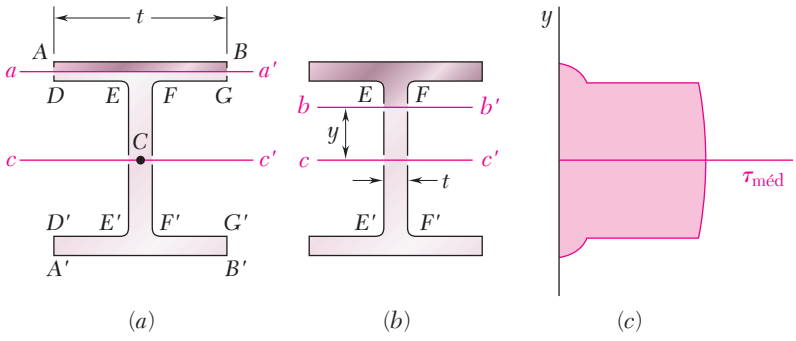


Fig. 6.17

à diferença entre os valores de t correspondendo, respectivamente, às mesas $ABGD$ e $A'B'G'D'$ e à alma $EFF'E'$.

No caso da alma, a tensão de cisalhamento τ_{xy} varia bem pouco ao longo da seção bb', e pode-se supor que ela seja igual ao seu valor médio $\tau_{\text{méd}}$. No entanto, isso não é verdade para as mesas. Por exemplo, considerando a linha horizontal $DEFG$, notamos que τ_{xy} é zero entre D e E e entre F e G, já que esses dois segmentos fazem parte da superfície livre da viga. No entanto, o valor τ_{xy} entre E e F pode ser obtido ao considerar $t = EF$ na Equação (6.6). Na prática, geralmente assume-se que toda a força cortante é suportada pela alma, e que uma boa aproximação do valor máximo da tensão de cisalhamento na seção transversal pode ser obtido dividindo-se V pela área de seção transversal da alma.

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{V}{A_{\text{alma}}} \tag{6.11}$$

Devemos notar, no entanto, que, embora a componente vertical τ_{xy} da tensão de cisalhamento nas mesas possa ser desprezada, sua componente horizontal τ_{xz} tem um valor significativo que será determinado na Seção 6.7.

EXEMPLO 6.2

Sabendo que a tensão de cisalhamento admissível para a viga de madeira do Problema Resolvido 5.7 é $\tau_{\text{adm}} = 1{,}7$ MPa, verifique se o projeto obtido no problema é aceitável do ponto de vista das tensões de cisalhamento.

Recordamos do diagrama da força cortante do Problema Resolvido 5.7 que $V_{\text{máx}} = 20$ kN. A largura real da viga foi dada como $b = 90$ mm, e o valor obtido para a profundidade foi $h = 365$ mm. Usando a Equação (6.10) para a tensão de cisalhamento máxima em uma viga retangular estreita, escrevemos

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{3}{2}\frac{V}{A} = \frac{3}{2}\frac{V}{bh} = \frac{3(20 \times 10^3\ \text{N})}{2(90\ \text{mm})(365\ \text{mm})} = 0{,}91\ \text{MPa}$$

Como $\tau_{\text{máx}} < \tau_{\text{adm}}$, o projeto do Problema Resolvido 5.7 é aceitável.

EXEMPLO 6.3

Sabendo que a tensão de cisalhamento admissível para a viga de aço do Problema Resolvido 5.8 é $\tau_{\text{adm}} = 90$ MPa, verifique se o perfil W360 × 32,9 obtido no problema é aceitável do ponto de vista de tensões de cisalhamento.

Recordamos do diagrama da força cortante do Problema Resolvido 5.8 que o valor máximo absoluto da força cortante na viga é $|V|_{\text{máx}} = 58$ kN. Conforme vimos na Seção 6.4, pode-se assumir na prática que toda a força cortante é suportada pela alma e que o valor máximo da tensão de cisalhamento na viga pode ser obtido da Equação (6.11). Do Apêndice C verificamos que, para um perfil W360 × 32,9, a altura da viga e a espessura de sua alma são, respectivamente, $d = 349$ mm e $t_w = 5{,}8$ mm. Temos então

$$A_{\text{alma}} = d\,t_w = (349\ \text{mm})(5{,}8\ \text{mm}) = 2\,024\ \text{mm}^2$$

Substituindo os valores de $|V|_{\text{máx}}$ e A_{alma} na Equação (6.11), obtemos

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{|V|_{\text{máx}}}{A_{\text{alma}}} = \frac{58\ \text{kN}}{2\,024\ \text{mm}^2} = 28{,}7\ \text{MPa}$$

Como $\tau_{\text{máx}} < \tau_{\text{adm}}$, o projeto do Problema Resolvido 5.8 é aceitável.

*6.5. Discussões adicionais sobre distribuição de tensões em uma viga retangular estreita

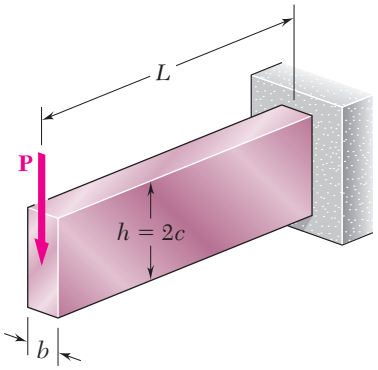


Fig. 6.18

Considere que uma viga estreita em balanço de seção transversal retangular de largura b e altura h é submetida a uma força **P** em sua extremidade livre (Fig. 6.18). Como a força cortante V na viga é constante e igual à intensidade da força **P**, a Equação (6.9) resulta em

$$\tau_{xy} = \frac{3}{2}\frac{P}{A}\left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right) \tag{6.12}$$

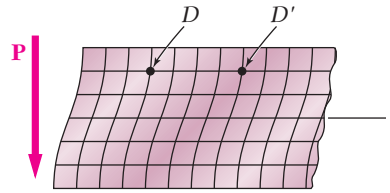


Fig. 6.19

Notamos na Equação (6.12) que as tensões de cisalhamento dependem somente da distância y da superfície neutra. Elas são independentes, portanto, da distância do ponto de aplicação da força; conclui-se que todos os elementos localizados à mesma distância da superfície neutra sofrem a mesma deformação em cisalhamento (Fig. 6.19). Embora seções planas não parmaneçam planas, a distância entre dois pontos correspondentes D e D' localizados em diferentes seções permanece a mesma. Isso indica que as deformações específicas normais ϵ_x, e portanto as tensões normais σ_x, não são afetadas pelas tensões de cisalhamento, e que a suposição feita na Seção 5.1 é justificada para a condição de carregamento da Fig. 6.18.

Concluímos que nossa análise das tensões em uma viga em balanço de seção transversal retangular, submetida a uma força concentrada **P** em sua extremidade livre, é válida. Os valores corretos das tensões de cisalhamento na viga são dados pela Equação (6.12), e as tensões normais a uma distância x da extremidade livre são obtidas ao considerar $M = -Px$ na Equação (5.2) da Seção 5.1. Temos

$$\sigma_x = +\frac{Pxy}{I} \tag{6.13}$$

A validade da afirmação anterior, no entanto, depende das condições de extremidade. Se a Equação (6.12) serve para se aplicar em qualquer lugar, então a força P deve ser distribuída parabolicamente sobre a seção da extremidade livre. Além disso, a vinculação da extremidade fixa deve ser de tal natureza que permita o tipo de deformação em cisalhamento indicado na Fig. 6.19. O modelo resultante (Fig. 6.20) raramente será encontrado na prática. No entanto, conclui-se com o princípio de Saint-Venant que, para outros modos de aplicação da força e para outros tipos de vinculação de extremidade fixa, as Equações (6.12) e (6.13) ainda nos proporcionam a correta distribuição de tensões, exceto próximo a qualquer uma das extremidades da viga.

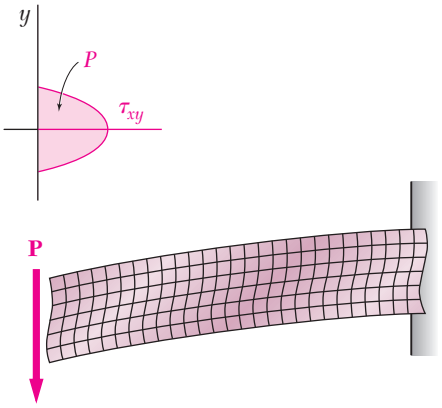


Fig. 6.20

Quando uma viga de seção transversal retangular é submetida a várias forças concentradas (Fig. 6.21), o princípio da superposição pode ser utilizado para determinar as tensões normais e de cisalhamento em seções localizadas entre os pontos de aplicação das forças. No entanto, como as forças $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$ etc. são aplicadas na superfície da viga e não se pode considerar que sejam distribuídas parabolicamente ao longo da seção transversal, os resultados obtidos deixam de ser válidos nas vizinhanças imediatas dos pontos de aplicação das forças.

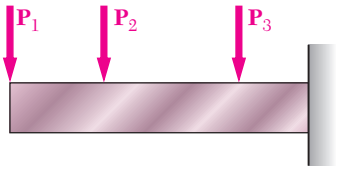


Fig. 6.21

Quando a viga é submetida a uma força distribuída (Fig. 6.22), a força cortante varia com a distância da extremidade da viga, e assim também a tensão de cisalhamento em determinada elevação y. As deformações de cisalhamento resultantes são tais que a distância entre dois pontos correspondentes de diferentes seções transversais, como D_1 e D'_1, ou D_2 e D'_2, dependerá da elevação dos pontos. Isso indica que a suposição de que seções planas permanecem planas, sob a qual foram deduzidas as Equações (6.12) e (6.13), deve ser rejeitada para a condição de carregamento da Fig. 6.22. O erro envolvido, no entanto, é pequeno para os valores da relação entre o vão e a altura encontrados na prática.

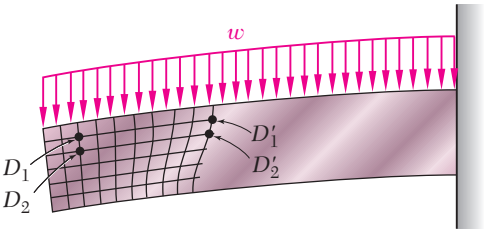
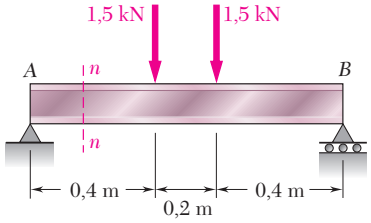


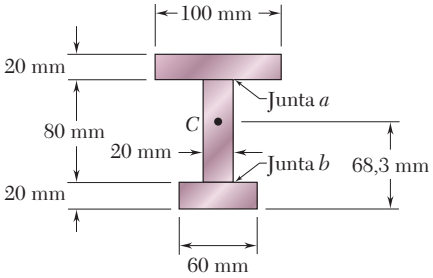
Fig. 6.22

Devemos também notar que, em partes da viga localizadas sob uma força concentrada ou distribuída, ocorrerão tensões normais σ_y nas faces horizontais de um elemento de volume do material, além das tensões τ_{xy}, mostradas na Fig. 6.2.

PROBLEMA RESOLVIDO 6.1

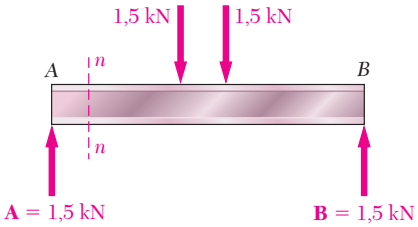
A viga *AB* é feita de três pranchas coladas entre si e está submetida, em seu plano de simetria, ao carregamento mostrado. Sabendo que a largura de cada junta colada é de 20 mm, determine a tensão de cisalhamento média em cada junta na seção *n-n* da viga. A localização do centroide da seção é dada na figura e o momento de inércia é $I = 8{,}63 \times 10^{-6}\ \text{m}^4$.

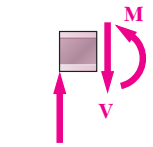




SOLUÇÃO

Força cortante na seção *n-n*. Como a viga e o carregamento são ambos simétricos em relação ao centro da viga, temos $\mathbf{A} = \mathbf{B} = 1{,}5\ \text{kN} \uparrow$.

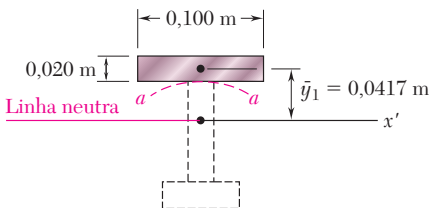




Considerando a parte da viga à esquerda da seção *n-n* como um corpo livre, escrevemos

$$+\uparrow \sum F_y = 0: \qquad 1{,}5\ \text{kN} - V = 0 \qquad V = 1{,}5\ \text{kN}$$

Tensão de cisalhamento na junta *a*. Cortamos a seção *a-a* na junta colada e separamos a área da seção transversal em duas partes. Decidimos determinar *Q* calculando o momento estático em relação à linha neutra da área acima da seção *a-a*.

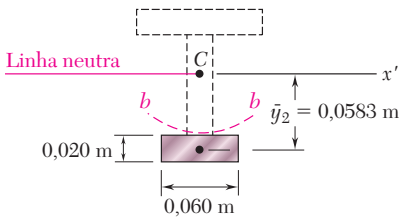


$$Q = A\bar{y}_1 = [(0{,}100\ \text{m})(0{,}020\ \text{m})](0{,}0417\ \text{m}) = 83{,}4 \times 10^{-6}\ \text{m}^3$$

Lembrando que a largura da junta colada é $t = 0{,}020$ m, usamos a Equação (6.7) para determinar a tensão de cisalhamento média na junta.

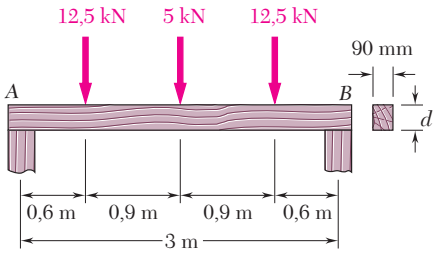
$$\tau_{\text{méd}} = \frac{VQ}{It} = \frac{(1500\ \text{N})(83{,}4 \times 10^{-6}\ \text{m}^3)}{(8{,}63 \times 10^{-6}\ \text{m}^4)(0{,}020\ \text{m})} \qquad \tau_{\text{méd}} = 725\ \text{kPa} \blacktriangleleft$$

Tensão de cisalhamento na junta *b*. Cortamos agora a seção *b-b* e calculamos *Q* usando a área abaixo da seção.



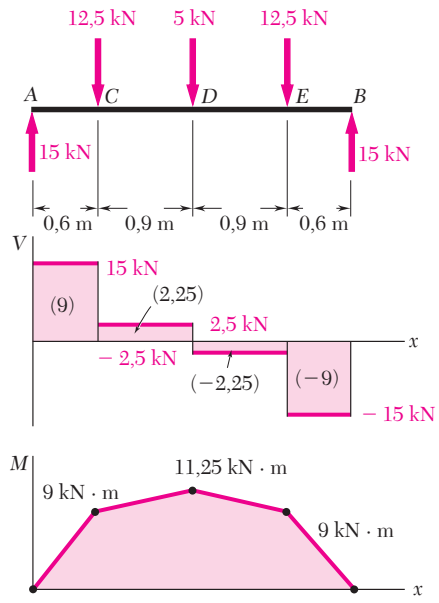
$$Q = A\bar{y}_2 = [(0{,}060\ \text{m})(0{,}020\ \text{m})](0{,}0583\ \text{m}) = 70{,}0 \times 10^{-6}\ \text{m}^3$$

$$\tau_{\text{méd}} = \frac{VQ}{It} = \frac{(1500\ \text{N})(70.0 \times 10^{-6}\ \text{m}^3)}{(8{,}63 \times 10^{-6}\ \text{m}^4)(0{,}020\ \text{m})} \qquad \tau_{\text{méd}} = 608\ \text{kPa} \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESOLVIDO 6.2

Uma viga de madeira *AB* com um vão de 3 m e largura nominal de 100 mm (largura real = 90 mm) deve suportar as três forças concentradas mostradas na figura. Sabendo que, para o tipo de madeira usada $\sigma_{adm} = 12$ MPa e $\tau_{adm} = 0{,}82$ MPa, determine a altura d mínima necessária para a viga.



SOLUÇÃO

Força cortante e momento fletor máximos. Após traçarmos os diagramas de força cortante e momento fletor, notamos que

$$M_{máx} = 11{,}25 \text{ kN} \cdot \text{m}$$
$$V_{máx} = 15 \text{ kN}$$

Projeto com base na tensão normal admissível. Primeiro expressamos o módulo de resistência da seção W em termos da altura d. Temos

$$I = \frac{1}{12}bd^3 \qquad W = \frac{1}{c} = \frac{1}{6}bd^2 = \frac{1}{6}(0{,}090 \text{ m})d^2 = 0{,}015d^2$$

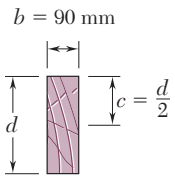
Para $M_{máx} = 11{,}25$ kN · m e $\sigma_{adm} = 12$ MPa, escrevemos

$$W = \frac{M_{máx}}{\sigma_{adm}} \qquad 0{,}015d^2 = \frac{11{,}25 \text{ kN} \cdot \text{m}}{12 \times 10^3 \text{ kN}}$$
$$d^2 = 0{,}0625 \qquad d = 0{,}25 \text{ m}$$

Satisfizemos as condições de que $\sigma_m \leq 12$ MPa.

Verificação da tensão de cisalhamento. Para $V_{máx} = 15$ kN e $d = 0{,}25$ m, encontramos

$$\tau_m = \frac{3}{2}\frac{V_{máx}}{A} = \frac{3}{2}\frac{15 \text{ kN}}{(0{,}090 \text{ m})(0{,}25 \text{ m})} \qquad \tau_m = 1{,}0 \text{ MPa}$$

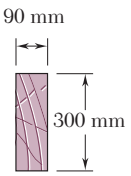


Como $\tau_{adm} = 0{,}82$ MPa, a altura $d = 0{,}25$ m *não é* aceitável e devemos redesenhar a viga com base nos requisitos de que $\tau_m \leq 0{,}82$ MPa.

Projeto com base na tensão de cisalhamento admissível. Como agora sabemos que a tensão de cisalhamento admissível controla o projeto, escrevemos

$$\tau_m = \tau_{adm} = \frac{3}{2}\frac{V_{máx}}{A} \qquad 0{,}82 \times 10^3 \text{ kN/m}^2 = \frac{3}{2}\frac{15 \text{ kN}}{(0{,}090 \text{ m})d}$$

$$d = 0{,}30 \text{ m} \blacktriangleleft$$



A tensão normal é, naturalmente, menor que $\sigma_{adm} = 12$ MPa, e a altura de 300 mm é perfeitamente aceitável.

PROBLEMAS

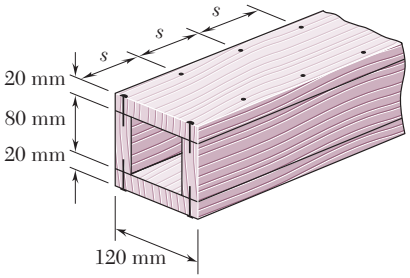


Fig. P6.1 e P6.2

6.1 Uma viga caixão quadrada é feita de duas pranchas de 20 × 80 mm e duas pranchas de 20 × 120 mm pregadas entre si, como mostra a figura. Sabendo que o espaçamento entre os pregos é $s = 50$ mm e que a força cortante admissível em cada prego é de 300 N, determine (*a*) a maior força cortante vertical admissível na viga e (*b*) a tensão de cisalhamento máxima correspondente.

6.2 Uma viga caixão quadrada é feita de duas pranchas de 20 × 80 mm e duas pranchas de 20 × 120 mm pregadas entre si, como mostra a figura. Sabendo que o espaçamento entre os pregos é $s = 30$ mm e que a força cortante vertical na viga é $V = 1\,200$N, determine (*a*) a força cortante em cada prego e (*b*) a tensão de cisalhamento máxima na viga.

6.3 Três tábuas, cada uma com 50,8 mm de espessura, são pregadas entre si para formar uma viga que está submetida a uma força cortante vertical. Sabendo que a força cortante admissível em cada prego é de 667 N, determine a força cortante admissível se o espaçamento s entre os pregos for de 76,2 mm.

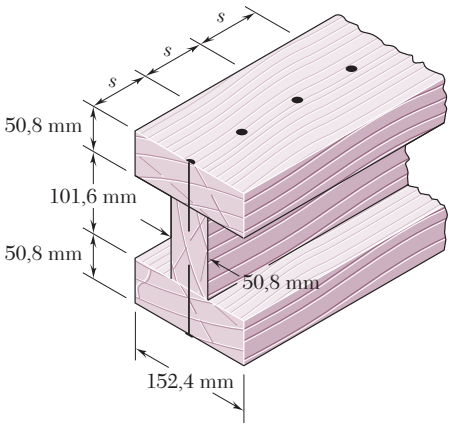


Fig. P6.3 e *P6.4*

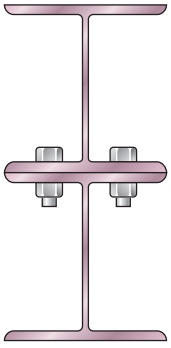


Fig. P6.5

6.4 Três tábuas, cada uma com espessura de 50,8 mm, são pregadas para formar uma viga que está submetida a uma força cortante vertical de 1 334 N. Sabendo que a força cortante admissível em cada prego é de 445 N, determine o maior espaçamento longitudinal S entre os pregos que poderá ser utilizado.

6.5 A viga de seção composta mostrada foi fabricada conectando dois perfis laminados W150 × 29,8 por meio de parafusos com 15,88 mm de diâmetro colocados longitudinalmente e espaçados em 152,4 mm. Sabendo que a tensão de cisalhamento média admissível para os parafusos é igual a 72,4 MPa, determine a máxima força cortante vertical admissível para essa viga.

6.6 Uma coluna é fabricada conectando-se os perfis de aço laminado mostrados na figura por parafusos de 19,05 mm de diâmetro espaçados longitudinalmente a cada 190,5 mm. Determine a tensão de cisalhamento média nos parafusos provocada pela força cortante de 111,2 kN paralela ao eixo *y*.

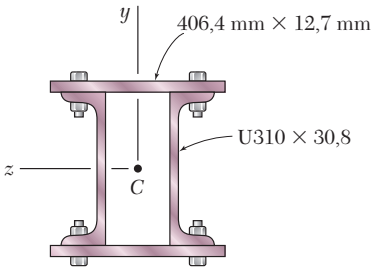


Fig. *P6.6*

6.7 A viga de aço laminado mostrada na figura foi reforçada acrescentando-lhe duas placas de 16 × 200 mm, usando parafusos de 18 mm de diâmetro espaçados longitudinalmente a cada 120 mm. Sabendo que a tensão de cisalhamento média admissível nos parafusos é de 90 MPa, determine a maior força cortante vertical admissível.

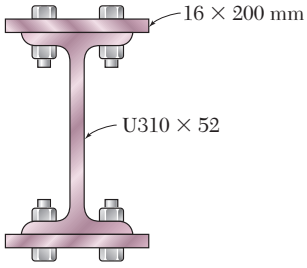
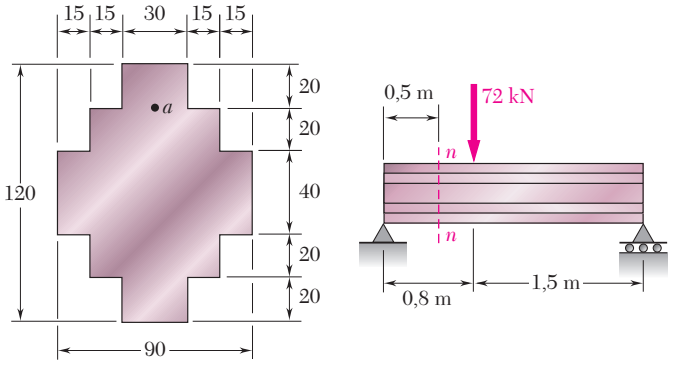


Fig. P6.7

6.8 Resolva o Problema 6.5, considerando que as placas de reforço tenham somente 12 mm de espessura.

6.9 até 6.12 Para a viga e o carregamento mostrados, considere a seção *n-n* e determine (*a*) a maior tensão de cisalhamento naquela seção e (*b*) a tensão de cisalhamento no ponto *a*.



Dimensões em mm

Fig. P6.9

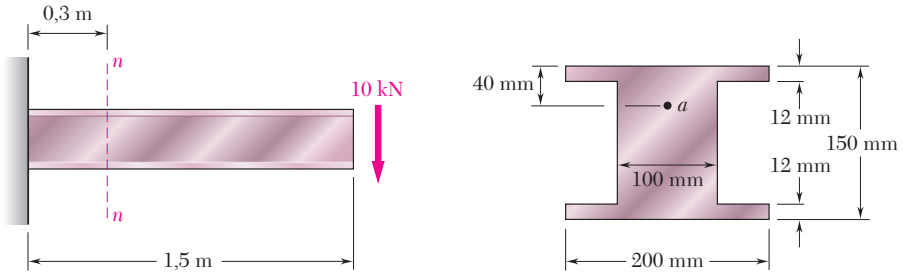


Fig. *P6.10*

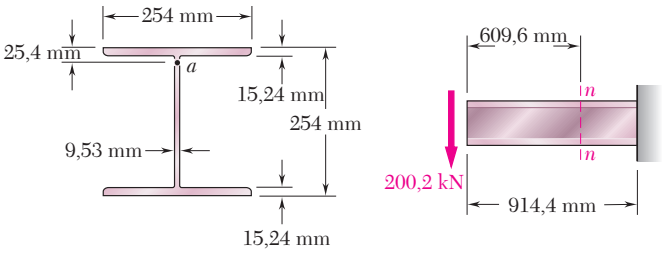


Fig. P6.11

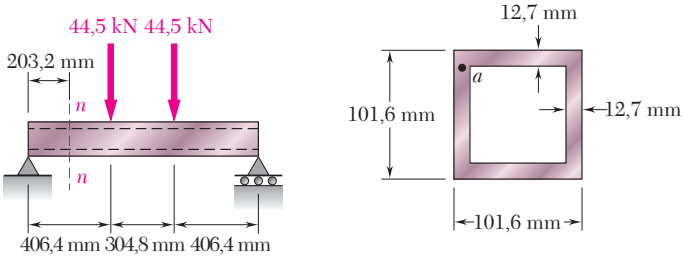


Fig. P6.12

6.13 Duas placas de aço de 12 × 220 mm de seção transversal retangular são soldadas a um perfil W250 × 58 como mostra a figura. Determine a maior força cortante vertical admissível, para que a tensão de cisalhamento na viga não exceda 90 MPa.

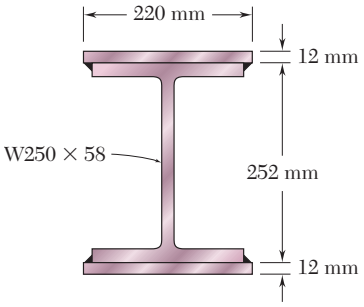


Fig. P6.13

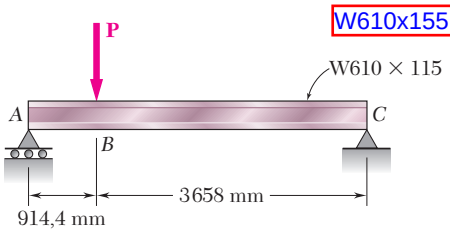


Fig. P6.15

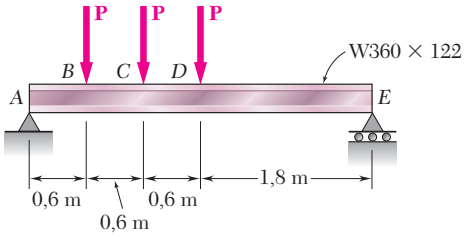


Fig. P6.16

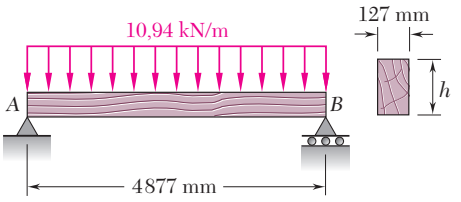


Fig. P6.18

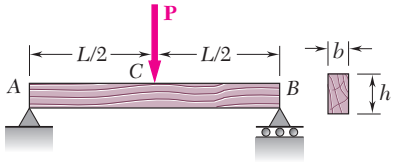


Fig. P6.19

6.14 Resolva o Problema 6.13, considerando que as duas placas de aço sejam (*a*) substituídas por placas de 8 × 220 mm e (*b*) removidas.

6.15 Para a viga de mesas largas com o carregamento mostrado, determine a maior força **P** que pode ser aplicada, sabendo que a tensão normal máxima é 165 MPa e que a maior tensão de cisalhamento usando a aproximação $\tau_m = V/A_{\text{alma}}$ é 100 MPa.

6.16 Para a viga de mesas largas com o carregamento mostrado, determine a maior força **P** que pode ser aplicada, sabendo que a tensão normal máxima é 160 MPa e que a maior tensão de cisalhamento usando a aproximação $\tau_m = V/A_{\text{alma}}$ é 100 MPa.

6.17 Para a viga e carregamento mostrados, determine a largura *b* mínima necessária, sabendo que, para o tipo de madeira usada, $\sigma_{\text{adm}} = 12$ MPa e $\tau_{\text{adm}} = 825$ kPa.

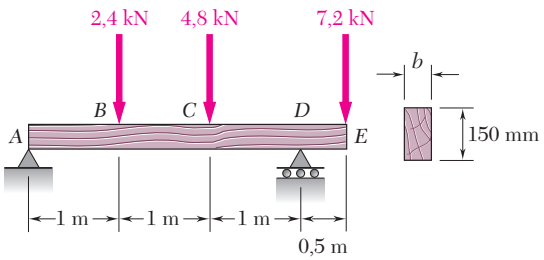


Fig. *P6.17*

6.18 Para a viga e o carregamento mostrados, determine a altura *h* mínima necessária, sabendo que, para o tipo de madeira usada, $\sigma_{\text{adm}} = 12{,}07$ MPa e $\tau_{\text{adm}} = 0{,}896$ MPa.

6.19 Uma viga de madeira *AB* de comprimento *L* e seção transversal retangular suporta uma única força concentrada **P** em seu ponto médio C. (*a*) Mostre que a relação τ_m/σ_m dos valores máximos das tensões de cisalhamento e normal na viga é igual a $2h/L$, em que *h* e *L* são, respectivamente, a altura e o comprimento da viga. (*b*) Determine a altura *h* e a largura *b* da viga, sabendo que $L = 2$m, $P = 40$ kN, $\tau_m = 960$ kPa e $\sigma_m = 12$ MPa.

6.20 Uma viga da madeira AB de comprimento L e seção transversal retangular suporta uma força uniformemente distribuída w e é vinculada conforme mostra a figura. (*a*) Mostre que a relação τ_m/σ_m dos valores máximos das tensões de cisalhamento e normal na viga é igual a $2h/L$, em que h e L são, respectivamente, a altura e o comprimento da viga. (*b*) Determine a altura h e a largura b da viga, sabendo que $L = 5$ m, $w = 8$ kN/m, $\tau_m = 1{,}08$ MPa e $\sigma_m = 12$ MPa.

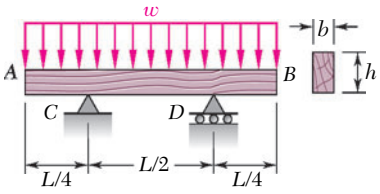


Fig. *P6.20*

6.21 e 6.22 Para a viga e o carregamento mostrados, considere a seção n-n e determine a tensão de cisalhamento no (*a*) ponto a e (*b*) ponto b.

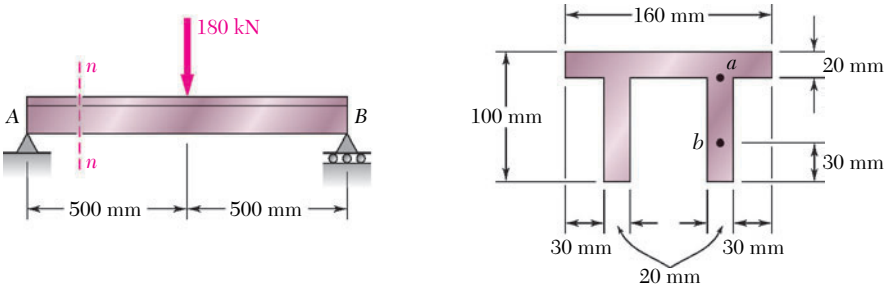


Fig. P6.21 e P6.23

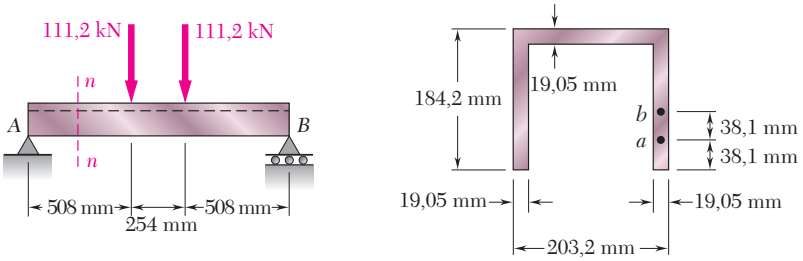


Fig. P6.22 e P6.24

6.23 e 6.24 Para a viga e o carregamento mostrados, determine a maior tensão de cisalhamento na seção n-n.

6.25 até *6.28* Uma viga com a seção transversal mostrada é submetida a uma força cortante vertical V. Determine (*a*) a linha horizontal ao longo da qual a tensão de cisalhamento é máxima e (*b*) a constante k na expressão a seguir para a tensão de cisalhamento máxima

$$\tau_{\text{máx}} = k\frac{V}{A}$$

em que A é a área da seção transversal da viga.

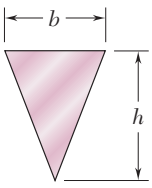


Fig. P6.25

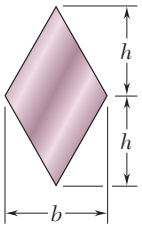


Fig. *P6.26*

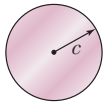


Fig. P6.27

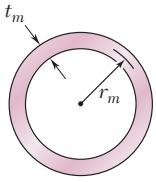
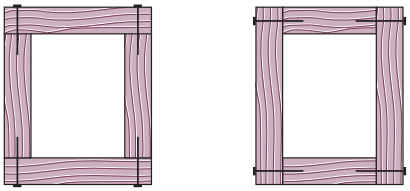


Fig. *P6.28*



(*a*) (*b*)

Fig. 6.23

6.6. Cisalhamento longitudinal em um elemento de viga de modo arbitrário

Considere uma viga caixão construída pregando-se quatro tábuas, como mostra a Fig. 6.23*a*. Você aprendeu na Seção 6.2 como determinar a força cortante por unidade de comprimento, q, nas superfícies horizontais ao longo das quais as tábuas são unidas. Mas você seria capaz de determinar q se as tábuas tivessem sido unidas ao longo de superfícies *verticais*, como mostra a Fig. 6.23*b*? Examinamos na Seção 6.4 a distribuição das componentes verticais τ_{xy} das tensões em uma seção transversal de uma viga W ou uma viga I, e vimos que essas tensões tinham um valor razoavelmente constante na alma da viga e eram desprezíveis em suas mesas. Mas, e as componentes *horizontais* τ_{xz} das tensões nas mesas?

Para respondermos a essas questões, devemos retomar o procedimento desenvolvido na Seção 6.2 para a determinação da força cortante por unidade de comprimento, q, de modo que ele se aplique aos casos que acabamos de descrever.

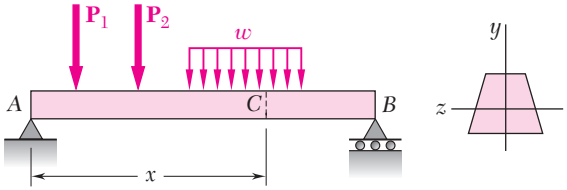


Fig. 6.5 (repetida)

Considere a viga prismática AB da Fig. 6.5, que tem um plano vertical de simetria e suporta as forças mostradas na figura. A uma distância x da extremidade A separamos novamente um elemento $CDD'C'$ de comprimento Δx. Esse elemento, no entanto, se estenderá agora aos dois lados da viga até uma superfície curva arbitrária (Fig. 6.24). As forças exercidas no elemento

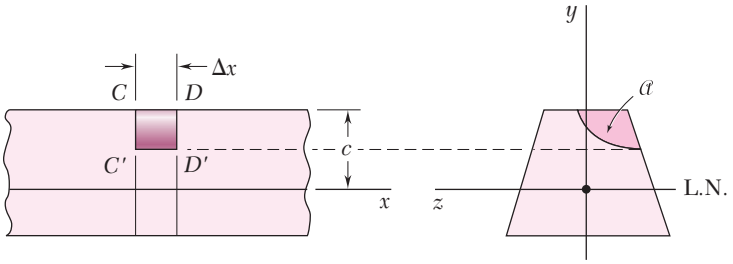


Fig. 6.24

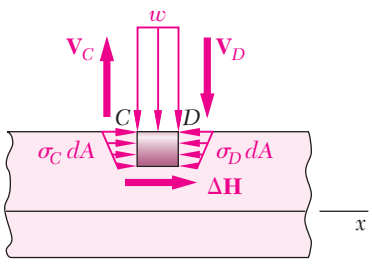


Fig. 6.25

incluem as forças cortantes na direção vertical $\mathbf{V}'_C$ e $\mathbf{V}'_D$, forças normais horizontais elementares $\sigma_C\,dA$ e $\sigma_D\,dA$, possivelmente uma carga $w\,\Delta x$, e uma força cortante longitudinal $\Delta\mathbf{H}$ representando a resultante das forças cortantes longitudinais elementares que atuam na superfície curva (Fig. 6.25). Escrevemos a equação de equilíbrio

$$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \qquad \Delta H + \int_{\mathcal{A}} (\sigma_D - \sigma_C)\,dA = 0$$

uma vez que a integral deve ser calculada sobre a área sombreada $\mathcal{A}$ da seção. Observamos que a equação obtida é a mesma que obtivemos na Seção 6.2,

mas a área sombreada 𝒜 sobre a qual a integral deveria ser calculada agora se estende até a superfície curva.

O restante da dedução é igual a da Seção 6.2. Concluímos que a força cortante longitudinal que atua no elemento de viga é

$$\Delta H = \frac{VQ}{I}\,\Delta x \tag{6.4}$$

em que I é o momento de inércia da seção inteira em relação à linha neutra, Q é o momento estático da área sombreada 𝒜 em relação à linha neutra e V a força cortante vertical na seção. Dividindo ambos os membros da Equação (6.4) por Δx, obtemos a força cortante horizontal por unidade de comprimento, ou fluxo de cisalhamento:

$$q = \frac{\Delta H}{\Delta x} = \frac{VQ}{I} \tag{6.5}$$

EXEMPLO 6.4

Uma viga caixão quadrada é feita com duas tábuas de 19 mm × 76 mm e duas tábuas de 19 mm × 114 mm, pregadas como mostra a (Fig. 6.26). Sabendo que o espaçamento entre os pregos é de 45 mm e que a viga está submetida a uma força cortante vertical de intensidade $V = 2{,}7$ kN, determine a força cortante em cada prego.

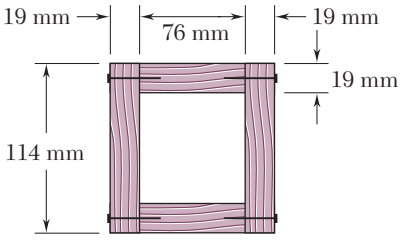


Fig. 6.26

Isolamos a tábua superior e consideramos a força total por unidade de comprimento, q, exercida em suas duas bordas. Usamos a Equação (6.5), na qual Q representa o momento estático com relação à linha neutra da área sombreada A' mostrada na Fig. 6.27*a*, e I é o momento de inércia em relação ao mesmo eixo da seção transversal inteira da viga caixão (Fig. 6.27*b*). Temos

$$Q = A'\bar{y} = (19\text{ mm})(76\text{ mm})(47{,}5\text{ mm}) = 68\,590\text{ mm}^3$$

Lembrando que o momento de inércia de um quadrado de lado a em relação a um eixo que passa pelo centroide é $I = \frac{1}{12}a^4$ escrevemos

$$I = \tfrac{1}{12}(114\text{ mm})^4 - \tfrac{1}{12}(76\text{ mm})^4 = 11{,}29 \times 10^6\text{ mm}^4$$

Substituindo na Equação (6.5), obtemos

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{(2700\text{ N})(68\,590\text{ mm}^3)}{11{,}29 \times 10^6\text{ mm}^4} = 16{,}4\text{ N/mm}.$$

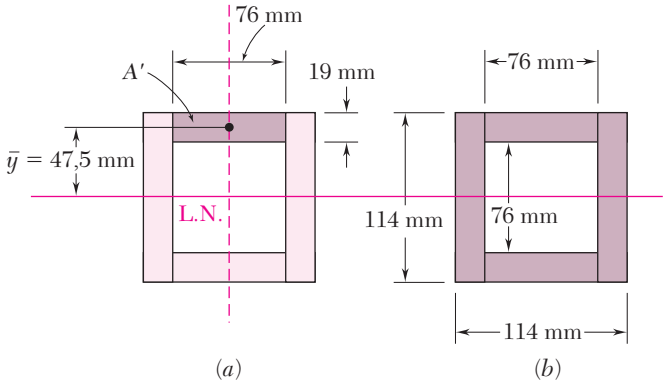


Fig. 6.27

Como a viga e a tábua superior são ambas simétricas em relação a um plano vertical de carregamento, são aplicadas forças iguais em ambas as bordas da tábua. A força por unidade de comprimento em cada uma dessas bordas é então $\frac{1}{2}q = \frac{1}{2}(16{,}4) = 8{,}2$ N/mm. Como o espaçamento entre os pregos é 45 mm, a força cortante em cada prego é

$$F = (45\text{ mm})(8{,}2\text{ N/mm}) = 369\text{ N}$$

6.7. Tensões de cisalhamento em barras de paredes finas

Vimos na seção anterior que a Equação (6.4) pode ser usada para determinar a força cortante longitudinal $\Delta\mathbf{H}$ que atua nas paredes de um elemento de viga de forma arbitrária e a Equação (6.5) pode ser usada para determinar o fluxo de cisalhamento q correspondente. Essas equações serão usadas nesta seção para calcular o fluxo de cisalhamento e a tensão de cisalhamento média em barras de paredes finas como as mesas das vigas de mesas largas (Fig. 6.28) e as vigas caixão, ou tubos estruturais (Fig. 6.29).

Fig. 6.28

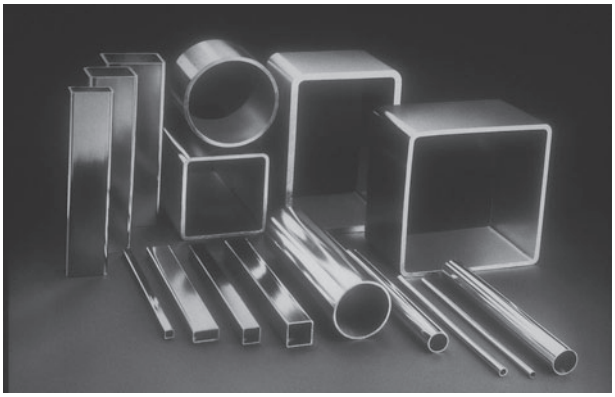


Fig. 6.29

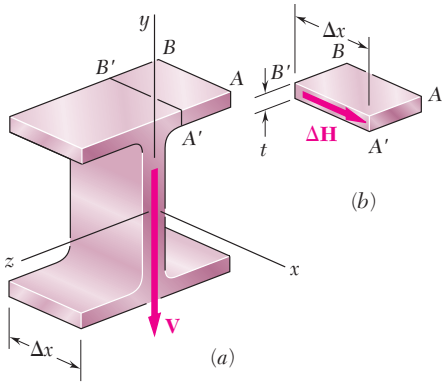


Fig. 6.30

Considere, por exemplo, um segmento de comprimento Δx de uma viga de mesas largas (Fig. 6.30*a*) e seja $\mathbf{V}$ a força cortante vertical na seção transversal mostrada. Vamos destacar um elemento $ABB'A'$ da mesa superior (Fig. 6.30*b*). A força cortante longitudinal $\Delta\mathbf{H}$ que atua naquele elemento pode ser obtida da Equação (6.4):

$$\Delta H = \frac{VQ}{I}\,\Delta x \tag{6.4}$$

Dividindo ΔH pela área $\Delta A = t\,\Delta x$ do corte, obtemos para a tensão de cisalhamento média que atua no elemento a mesma expressão que havíamos obtido na Seção 6.3, no caso de um corte horizontal:

$$\tau_{\text{méd}} = \frac{VQ}{It} \tag{6.6}$$

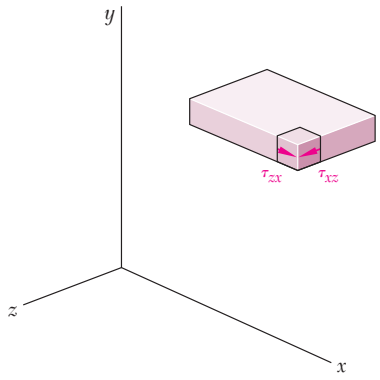


Fig. 6.31

Note que $\tau_{\text{méd}}$ agora representa o valor médio da tensão de cisalhamento τ_{zx} sobre um corte vertical, mas como a espessura t da mesa é pequena, há pouca variação de τ_{zx} no corte. Lembrando que $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ (Fig. 6.31), concluímos que a componente horizontal τ_{xz} da tensão de cisalhamento em qualquer ponto de uma seção transversal da mesa pode ser obtida da Equação (6.6), em que Q é o momento estático da área sombreada em relação à linha neutra (Fig. 6.32*a*). Lembramos que um resultado similar a esse foi obtido na Seção 6.4 para a componente vertical τ_{xy} da tensão de cisalhamento na alma (Fig. 6.32*b*). A Equação (6.6) pode ser usada para determinar tensões de cisalhamento em

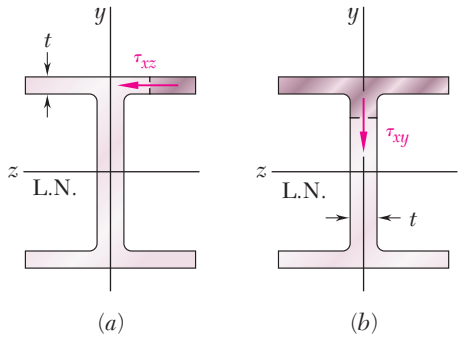


Fig. 6.32

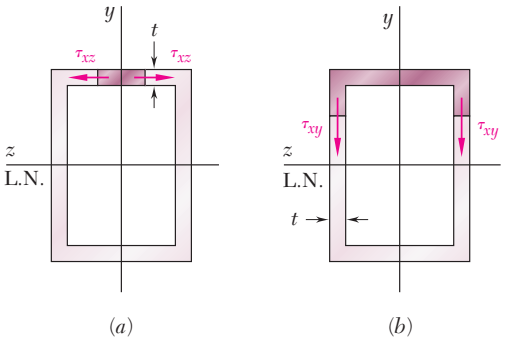


Fig. 6.33

vigas caixão (Fig. 6.33), meios tubos (Fig. 6.34) e outros componentes de paredes finas, desde que as forças sejam aplicadas em um plano de simetria do componente. Em cada caso, o corte deve ser perpendicular à superfície do componente, e a Equação (6.6) fornecerá a componente da tensão de cisalhamento na direção da tangente àquela superfície. (A outra componente pode ser considerada igual a zero, em vista da proximidade das duas superfícies livres.)

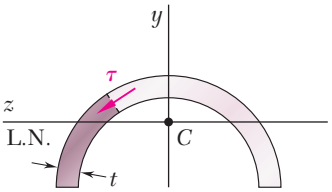


Fig. 6.34

Comparando as Equações (6.5) e (6.6), notamos que o produto da tensão de cisalhamento τ em um determinado ponto da seção pela espessura t é igual a q. Como V e I são constantes em determinada seção, q depende somente do momento estático Q e, portanto, pode facilmente ser esboçado na seção. No caso de uma viga caixão, por exemplo (Fig. 6.35), notamos que q cresce continuamente desde zero em A até um valor máximo em C e C' na linha neutra, e depois decresce de volta a zero à medida que se atinge E. Notamos também que não há uma variação abrupta na intensidade de q quando passamos por um vértice em B, D, B' ou D', e que o sentido de q nas partes horizontais da seção pode ser facilmente obtido pelo seu sentido nas partes verticais (que é o mesmo sentido da força cortante V). No caso de uma seção de mesas largas (Fig. 6.36), os valores de q nas partes AB e $A'B$ da mesa superior são distribuídos simetricamente. Quando viramos em B em direção à alma, os valores de q correspondentes às duas metades da mesa devem ser combinados para obter o valor de q no topo da alma. Após atingir um valor máximo em C na linha neutra, q diminui, e em D se divide em duas partes iguais correspondendo às duas metades da mesa inferior. O nome *fluxo de cisalhamento* comumente utilizado para nos referirmos à força cortante por unidade de comprimento, q, reflete as semelhanças entre as propriedades de q que acabamos de descrever e algumas das características de um fluxo de fluido por meio de um canal aberto ou um tubo.†

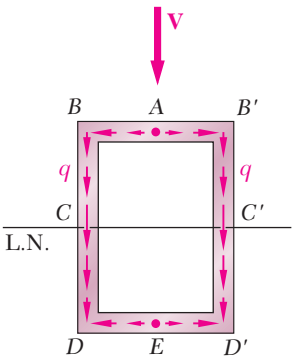


Fig. 6.35 Variação de q em uma seção de viga caixão.

Até aqui temos considerado que todas as forças foram aplicadas em um plano de simetria do componente. No caso de componentes que possuem dois planos de simetria, como a viga de mesas largas da Fig. 6.32 ou a viga caixão

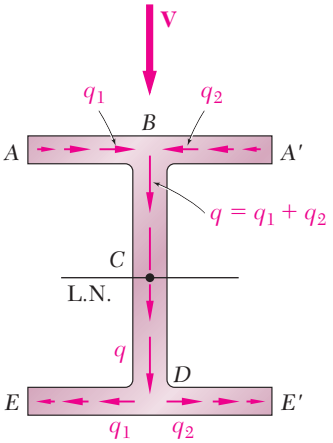


Fig. 6.36 Variação de q em uma seção de viga de mesas largas.

†Lembramos que o conceito de fluxo de cisalhamento foi utilizado para analisar a distribuição de tensões de cisalhamento em eixos vazados de paredes finas (Seção 3.13). No entanto, enquanto o fluxo de cisalhamento em um eixo vazado é constante, em uma componente sob carregamento transversal já não o é.

da Fig. 6.33, qualquer força aplicada pelo centroide de determinada seção transversal pode ser decomposta em componentes ao longo dos dois eixos de simetria da seção. Cada componente fará a barra flexionar em um plano de simetria, e as tensões de cisalhamento correspondentes podem ser obtidas da Equação (6.6). O princípio da superposição pode então ser utilizado para determinar as tensões resultantes.

No entanto, se a barra considerada não possui plano de simetria, ou se ela possui um único plano de simetria e está sujeita a uma força que não está contida naquele plano, observa-se que a barra sofre *flexão e torção* ao mesmo tempo, exceto quando a força é aplicada em um ponto específico, chamado de *centro de cisalhamento*. Note que o centro de cisalhamento geralmente *não* coincide com o centroide da seção transversal. A determinação do centro de cisalhamento de várias formas de paredes finas será discutida na Seção 6.9.

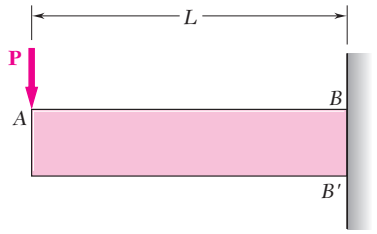


Fig. 6.37 ($PL \leq M_E$)

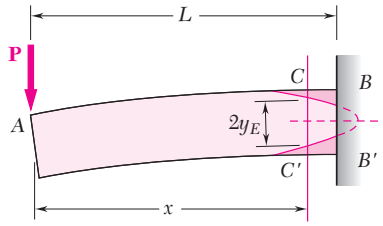


Fig. 6.38 ($PL > M_E$)

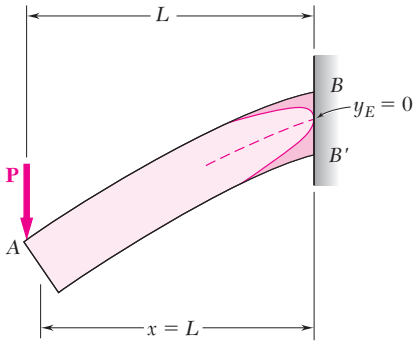


Fig. 6.39 ($PL = M_P = \frac{3}{2}M_E$)

*6.8. Deformações plásticas

Considere uma viga em balanço AB de comprimento L e seção transversal retangular, submetida em sua extremidade livre A a uma força concentrada **P** (Fig. 6.37). O maior valor do momento fletor ocorre na extremidade fixa B e é igual a $M = PL$. Desde que esse valor não exceda o momento elástico máximo M_E, ou seja, desde que $PL \leq M_E$, a tensão normal σ_x não excederá a tensão de escoamento σ_E em qualquer ponto da viga. No entanto, à medida que P aumenta além do valor M_E/L, o escoamento inicia-se nos pontos B e B' e se propaga em direção à extremidade livre da viga. Considerando que o material seja elastoplástico, e considerando uma seção transversal CC' localizada a uma distância x da extremidade livre A da viga (Fig. 6.38), obtemos a metade da espessura y_E do núcleo elástico naquela seção fazendo $M = Px$ na Equação (4.38) da Seção 4.9. Temos

$$Px = \frac{3}{2}M_E\left(1 - \frac{1}{3}\frac{y_E^2}{c^2}\right) \tag{6.14}$$

em que c é a metade da altura da viga. Construindo o gráfico y_E em função de x, obtemos o limite entre as zonas elástica e plástica.

Enquanto $PL < \frac{3}{2}M_E$, a parábola definida pela Equação (6.14) intercepta a linha BB', como mostra a Fig. 6.38. No entanto, quando PL atinge o valor $\frac{3}{2}M_E$, ou seja, quando $PL = M_p$, em que M_p é o momento plástico definido na Seção 4.9, a Equação (6.14) resulta $y_E = 0$ para $x = L$, mostrando que o vértice da parábola está agora localizado na seção BB', e que essa seção tornou-se totalmente plástica (Fig. 6.39). Lembrando da Equação (4.40) da Seção 4.9, notamos também que o raio de curvatura ρ da superfície neutra naquele ponto é igual a zero, indicando a presença de uma dobra aguda na viga em sua extremidade fixa. Dizemos que se desenvolveu uma *rótula plástica* naquele ponto. A força $P = M_p/L$ é a maior força que pode ser suportada pela viga.

Essa discussão baseou-se somente na análise das tensões normais na viga. Vamos agora examinar a distribuição das tensões de cisalhamento em uma seção que se tornou parcialmente plástica. Considere a parte da viga $CC''D''D$ localizada entre as seções transversais CC' e DD', e acima do plano horizontal $D''C''$ (Fig. 6.40*a*). Se essa parte estiver localizada inteiramente na zona plástica, as tensões normais que atuam nas faces CC'' e DD'' serão uniformemente distribuídas e iguais à tensão de escoamento σ_E (Fig. 6.40*b*). O equilíbrio

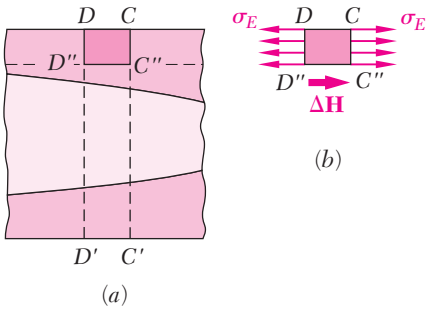


Fig. 6.40

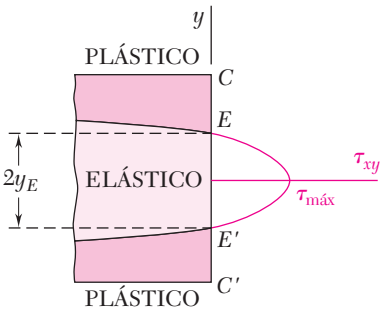


Fig. 6.41

do corpo livre $CC''D''D$ requer, portanto, que a força cortante horizontal $\Delta\mathbf{H}$ aplicada em sua face inferior seja igual a zero. Conclui-se que o valor médio da tensão de cisalhamento horizontal τ_{yx} por meio da barra em C'' é zero, bem como o valor médio da tensão de cisalhamento vertical τ_{xy}. Concluímos, então, que a força cortante vertical $V = P$ na seção CC' deve ser distribuída inteiramente sobre a parte EE' daquela seção que está localizada dentro da zona elástica (Fig. 6.41). Pode ser mostrado† que a distribuição das tensões de cisalhamento sobre EE' é a mesma da barra retangular elástica com a mesma largura b da viga AB, e de altura igual à espessura $2y_E$ da zona elástica. Chamando de A' a área $2by_E$ da parte elástica da seção transversal, temos

$$\tau_{xy} = \frac{3}{2}\frac{P}{A'}\left(1 - \frac{y^2}{y_E^2}\right) \tag{6.15}$$

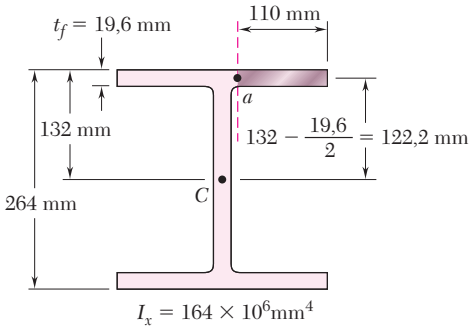
O valor máximo da tensão de cisalhamento ocorre para $y = 0$ e é

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{3}{2}\frac{P}{A'} \tag{6.16}$$

À medida que a área A' da parte elástica da seção diminui, $\tau_{\text{máx}}$ aumenta e eventualmente atinge a tensão de escoamento em cisalhamento τ_E. Assim, a força cortante contribui para a falha final da viga. Uma análise mais exata desse modo de falha deverá levar em conta o efeito combinado das tensões normal e de cisalhamento.

†Ver o Problema 6.60.

PROBLEMA RESOLVIDO 6.3



Sabendo que a força cortante vertical é 220 kN em uma viga W250 × 101, determine a tensão de cisalhamento horizontal na mesa superior em um ponto *a* localizado a 110 mm da borda da viga. As dimensões e outros dados geométricos da seção laminada são dados no Apêndice C.

SOLUÇÃO

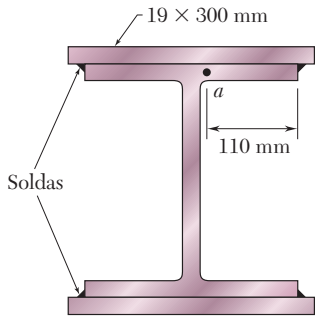
Isolamos a parte sombreada da mesa cortando ao longo da linha tracejada que passa pelo ponto *a*.

$$Q = (110 \text{ mm})(19,6 \text{ mm})(122,2 \text{ mm}) = 26,35 \times 10^4 \text{ mm}^3$$

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{(220 \times 10^3 \text{ N})(26,35 \times 10^4 \text{ mm}^3)}{(164 \times 10^6 \text{ mm}^4)(19,6 \text{ mm})}$$

$$\tau = 18,03 \text{ MPa} \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESOLVIDO 6.4



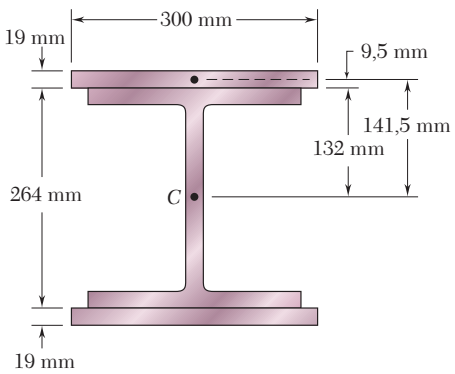
Resolva o Problema 6.3, considerando que placas de 19 × 300 mm foram soldadas às mesas da viga W250 × 101 com cordões contínuos de solda, como mostra a figura.

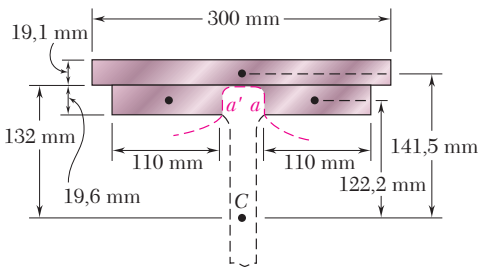
SOLUÇÃO

Para a barra composta, o momento de inércia em relação ao eixo que passa pelo centroide é

$$I = 164 \times 10^6 \text{ mm}^4 + 2[\tfrac{1}{12}(300 \text{ mm})(19 \text{ mm})^3 + (300 \text{ mm})(19 \text{ mm})(141,5 \text{ mm})^2]$$
$$I = 392,6 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Como a placa superior e a mesa estão conectadas somente nas soldas, encontramos a tensão de cisalhamento em *a* traçando uma seção pela mesa em *a*, *entre* a placa e a mesa, e novamente por meio da mesa no ponto simétrico *a'*.



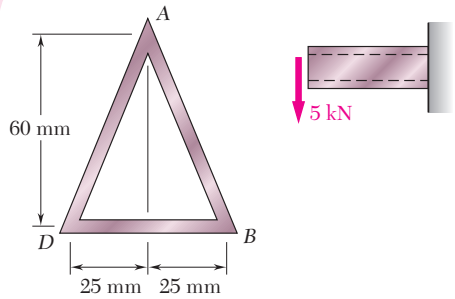


Para a área sombreada que isolamos, temos

$$t = 2t_f = 2(19,6 \text{ mm}) = 39,2 \text{ mm}$$
$$Q = 2[(110 \text{ mm})(19,6 \text{ mm})(122,2 \text{ mm})] + (300 \text{ mm})(19 \text{ mm})(141,5 \text{ mm})$$
$$Q = 133,35 \times 10^4 \text{ mm}^3$$

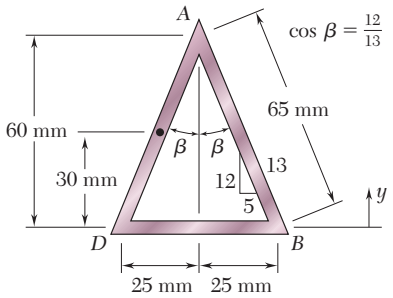
$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{(220 \times 10^3 \text{ N})(133,5 \times 10^4 \text{ mm}^3)}{(392,6 \times 10^6 \text{ mm}^4)(39,2 \text{ mm})}$$

$$\tau = 19,08 \text{ MPa} \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESOLVIDO 6.5

Uma viga extrudada de paredes finas é feita de alumínio e tem uma espessura de parede uniforme de 3 mm. Sabendo que a força cortante na viga é de 5 kN, determine (*a*) a tensão de cisalhamento no ponto *A* e (*b*) a máxima tensão de cisalhamento. *Nota*: As dimensões dadas referem-se a linhas médias entre as superfícies externa e interna da viga.



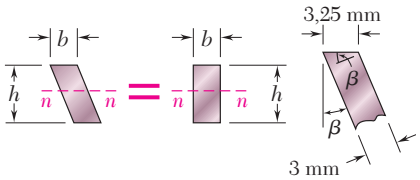
SOLUÇÃO

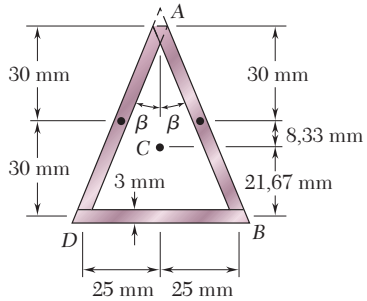
Centroide. Notamos que $AB = AD = 65$ mm.

$$\bar{Y} = \frac{\Sigma\, \bar{y}A}{\Sigma\, A} = \frac{2[(65\text{ mm})(3\text{ mm})(30\text{ mm})]}{2[(65\text{ mm})(3\text{ mm})] + (50\text{ mm})(3\text{ mm})}$$

$$\bar{Y} = 21{,}67\text{ mm}$$

Momento de inércia. Cada lado da viga de paredes finas pode ser considerado um paralelogramo, e lembramos que para o caso mostrado $I_{nn} = bh^3/12$, em que b é medido na paralela ao eixo nn.





$$b = (3\text{ mm})/\cos\beta = (3\text{ mm})/(12/13) = 3{,}25\text{ mm}$$

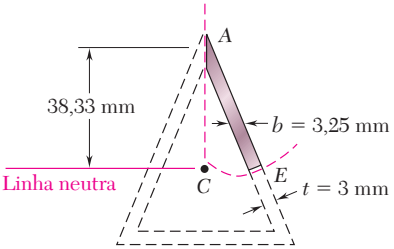
$$I = \Sigma(\bar{I} + Ad^2) = 2[\tfrac{1}{12}(3{,}25\text{ mm})(60\text{ mm})^3 + (3{,}25\text{ mm})(60\text{ mm})(8{,}33\text{ mm})^2] + [\tfrac{1}{12}(50\text{ mm})(3\text{ mm})^3 + (50\text{ mm})(3\text{ mm})(21{,}67\text{ mm})^2]$$

$$I = 214{,}6 \times 10^3\text{ mm}^4 \qquad I = 0{,}2146 \times 10^{-6}\text{ m}^4$$

***a.* Tensão de cisalhamento em *A*.** Se ocorre uma tensão de cisalhamento τ_A em *A*, o fluxo de cisalhamento será $q_A = \tau_A t$ e deverá ser direcionado por uma das duas maneiras mostradas. Mas a seção transversal e o carregamento são simétricos em relação a uma linha vertical passando por *A* e, portanto, o fluxo de cisalhamento também deverá ser simétrico. Como nenhum dos possíveis fluxos de cisalhamento é simétrico, concluímos que

$$\tau_A = 0 \blacktriangleleft$$

***b.* Tensão de cisalhamento máxima.** Como a espessura da parede é constante, a tensão de cisalhamento máxima ocorre na linha neutra, na qual Q é máximo. Sabemos que a tensão de cisalhamento em *A* é zero, então cortamos a seção ao longo da linha tracejada mostrada na figura e isolamos a parte sombreada da viga. Para obtermos a maior tensão de cisalhamento, o corte na linha neutra é feito perpendicular aos lados, e tem comprimento $t = 3$ mm.



$$Q = 3{,}25\text{ mm})(38{,}33\text{ mm})]\left(\frac{38{,}33\text{ mm}}{2}\right) = 2387\text{ mm}^3$$

$$Q = 2{,}387 \times 10^{-6}\text{ m}^3$$

$$\tau_E = \frac{VQ}{It} = \frac{(5\text{ kN})(2{,}387 \times 10^{-6}\text{ m}^3)}{(0{,}2146 \times 10^{-6}\text{ m}^4)(0{,}003\text{ m})} \qquad \tau_{máx} = \tau_E = 18{,}54\text{ MPa} \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

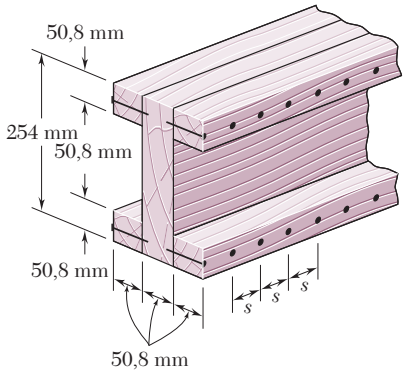


Fig. P6.29

6.29 A viga de madeira mostrada na figura está submetida a uma força cortante vertical de 5,34 kN. Sabendo que a força cortante admissível nos pregos é 333,6 N, determine o maior espaçamento possível s dos pregos.

6.30 Duas placas de madeira compensada de 20 × 100 mm em duas tábuas de 20 × 180 mm são coladas para formar uma viga de seção caixão com 120 × 200 mm. Sabendo que a viga está submetida a uma carga de 3,5 kN, determine a tensão de cisalhamento média admissível nas juntas coladas (a) em A e (b) em B.

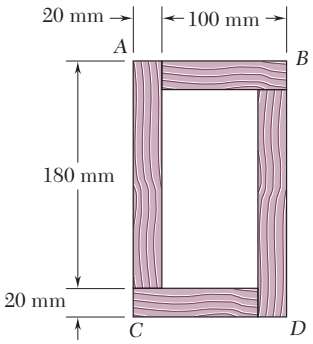


Fig. *P6.30*

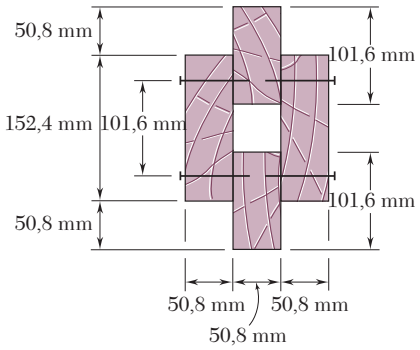


Fig. P6.31

6.31 A viga de madeira mostrada na figura está submetida a uma força cortante vertical de 6,67 kN. Sabendo que o espaçamento longitudinal dos pregos é $s = 63{,}5$ mm e que cada prego tem 88,9 mm de comprimento, determine a força cortante em cada um deles.

6.32 A viga mostrada na figura foi feita pregando-se várias tábuas e está sujeita a uma força cortante de 8 kN. Sabendo que os pregos estão espaçados longitudinalmente a cada 60 mm em A e a cada 25 mm em B, determine a tensão de cisalhamento nos pregos (a) em A e (b) em B. (Dado: $I_x = 1{,}504 \times 10^9$ mm^4.)

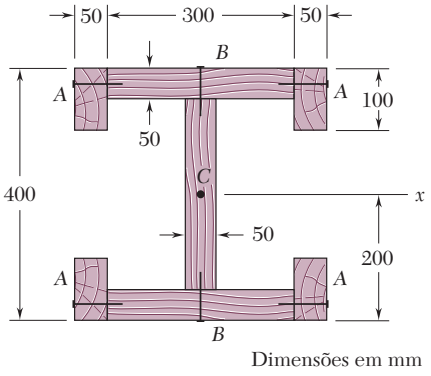


Fig. P6.32

6.33 A viga mostrada na figura foi feita colando-se várias tábuas. Sabendo que a viga está sujeita a uma força cortante de 5 kN, determine a tensão de cisalhamento média nas juntas coladas (*a*) em *A* e (*b*) em *B*.

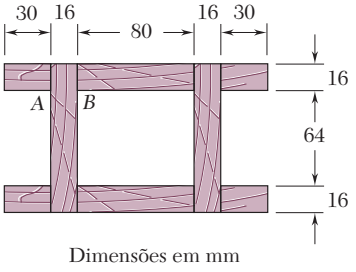


Fig. *P6.33*

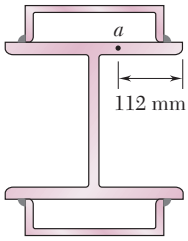


Fig. P6.34

6.34 A viga composta mostrada é feita soldando perfis U200 × 17,1 laminados nas mesas do perfil W250 × 80 de mesa larga. Sabendo que a viga está submetida a uma força cortante vertical igual a 200 kN, determine (*a*) a força de cisalhamento horizontal por metro em cada solda e (*b*) a tensão de cisalhamento no ponto *a* da mesa do perfil de mesa larga.

6.35 Sabendo que determinada força cortante vertical **V** provoca uma tensão de cisalhamento máxima de 69 MPa na viga extrudada como mostra a figura, determine a tensão de cisalhamento correspondente no (*a*) ponto *a* e (*b*) ponto *b*.

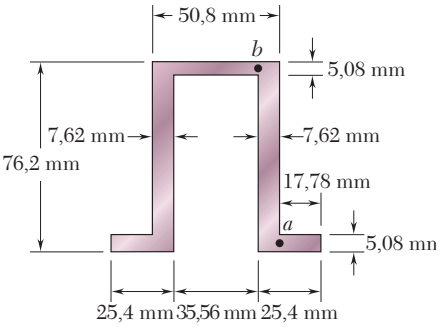


Fig. P6.35

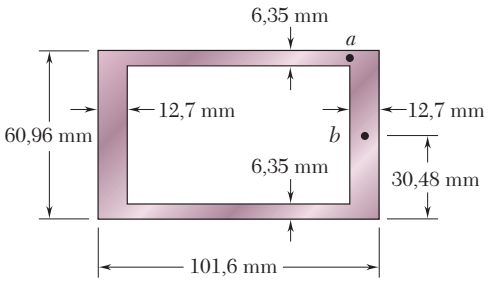


Fig. *P6.36*

6.36 Uma viga de alumínio extrudada tem a seção transversal mostrada na figura. Sabendo que a força cortante vertical na viga é 44,5 kN, determine a tensão de cisalhamento no (*a*) ponto *a* e (*b*) ponto *b*.

6.37 Uma viga extrudada tem a seção transversal mostrada na figura e uma parede de espessura uniforme de 5,08 mm. Sabendo que determinada força cortante vertical **V** provoca uma tensão de cisalhamento máxima $\tau = 62{,}1$ MPa, determine a tensão de cisalhamento nos quatro pontos indicados.

6.38 Resolva o Problema 6.37 considerando que a viga esteja submetida a uma força cortante horizontal **V**.

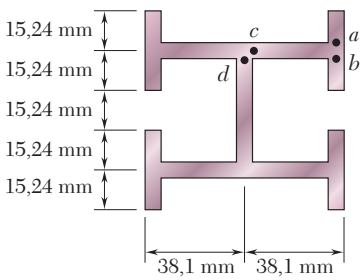


Fig. P6.37

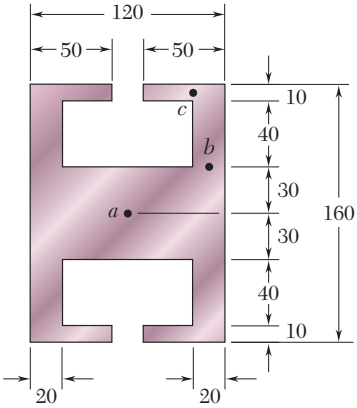


Fig. P6.39

6.39 Sabendo que determinada força cortante vertical **V** provoca a máxima tensão de cisalhamento de 75 MPa na viga extrudada mostrada, determine a tensão de cisalhamento nos três pontos indicados.

6.40 Resolva o Problema 6.39 considerando que a viga está submetida a uma força cortante horizontal **V**.

6.41 A força cortante vertical é 25 kN em uma viga com a seção transversal mostrada na figura. Sabendo que $d = 50$ mm, determine a tensão de cisalhamento no (*a*) ponto *a* e (*b*) ponto *b*.

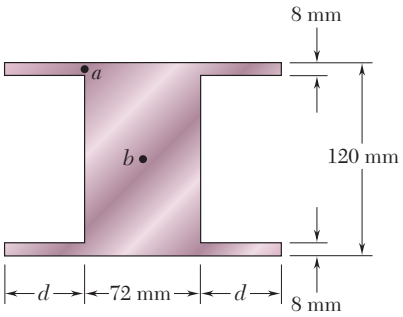


Fig. P6.41 e P6.42

6.42 A força cortante vertical é 25 kN em uma viga com a seção transversal mostrada na figura. Determine (*a*) a distância *d* para a qual $\tau_a = \tau_b$ e (*b*) a tensão de cisalhamento correspondente nos pontos *a* e *b*.

6.43 Três tábuas são conectadas por parafusos com 14 mm de diâmetro com espaçamento longitudinal de 150 mm ao longo do eixo longitudinal da viga. Para uma força cortante vertical na viga igual a 10 kN, determine a tensão de cisalhamento média nos parafusos.

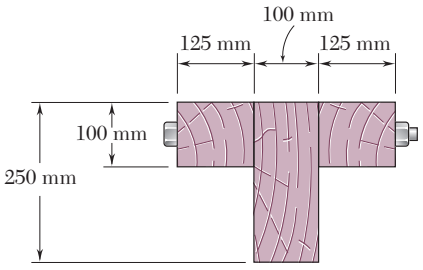


Fig. P6.43

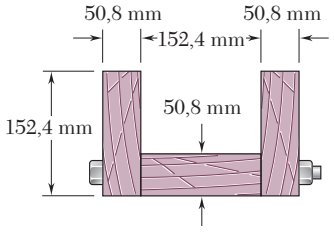


Fig. P6.44

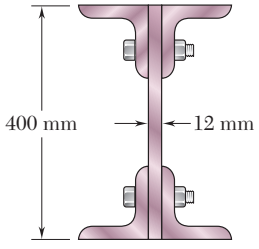


Fig. P6.45

6.44 Uma viga consiste de três tábuas conectadas, conforme mostra a figura, por parafusos de 9,53 mm de diâmetro espaçados a cada 305 mm ao longo de seu eixo longitudinal da viga. Sabendo que a viga está submetida a uma força cortante vertical de 11,12 kN, determine a tensão de cisalhamento média nos parafusos.

6.45 Quatro cantoneiras de aço do tipo 102 × 102 × 9,5 mm e uma placa de aço de 12 × 400 mm são aparafusadas entre si para formar uma viga com a seção transversal mostrada na figura. Os parafusos são de 22 mm de diâmetro e estão espaçados longitudinalmente a cada 120 mm. Sabendo que a viga está submetida a uma força cortante vertical de 240 kN, determine a tensão de cisalhamento média em cada parafuso.

6.46 Três placas de aço de 25,4 × 457,2 mm são aparafusadas a quatro cantoneiras do tipo L152 × 152 × 25,4 para formar uma viga com a seção transversal mostrada na figura. Os parafusos têm um diâmetro de 22,2 mm e são espaçados longitudinalmente a cada 127 mm. Sabendo que a tensão de cisalhamento média admissível nos parafusos é de 82,7 MPa, determine a maior força cortante vertical admissível na viga. (*Dados*: $I_x = 2548{,}5 \times 10^6$ mm^4.)

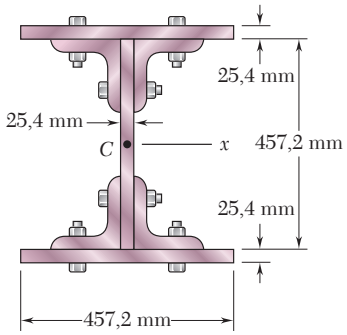


Fig. P6.46

6.47 Uma placa de 6,35 mm de espessura é enrugada, conforme mostra a figura, e depois usada como uma viga. Para uma força cortante vertical de 5,34 kN, determine (*a*) a tensão de cisalhamento máxima na seção e (*b*) a tensão de cisalhamento no ponto *B*. Esboce também o fluxo de cisalhamento na seção transversal.

6.48 Uma viga extrudada tem a seção transversal mostrada na figura e uma parede de espessura uniforme de 3 mm. Para uma força cortante vertical de 10 kN, determine (*a*) a tensão de cisalhamento no ponto *A* e (*b*) a tensão de cisalhamento máxima na viga. Esboce também o fluxo de cisalhamento na seção transversal.

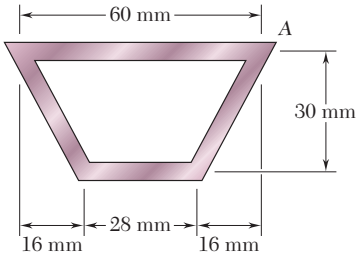


Fig. P6.48

6.49 Três placas de 12 mm de espessura cada são soldadas uma a outra para formar a seção, mostrada na figura. Para uma força cortante vertical de 100 kN, determine o fluxo de cisalhamento na superfície soldada e esboce o fluxo de cisalhamento na seção transversal.

6.50 Uma placa de espessura *t* é dobrada, conforme mostra a figura, e então usada como uma viga. Para uma força cortante vertical de 2 669 kN, determine (*a*) a espessura *t* para a qual a tensão de cisalhamento máxima é de 2,07 MPa e (*b*) a tensão de cisalhamento correspondente no ponto *E*. Esboce também o fluxo de cisalhamento na seção transversal.

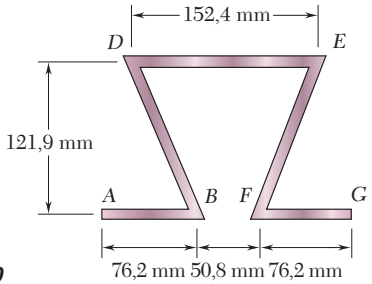


Fig. *P6.50*

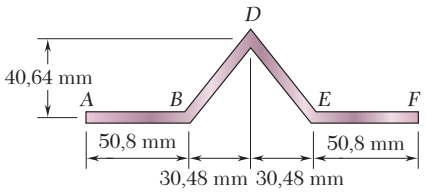


Fig. *P6.47*

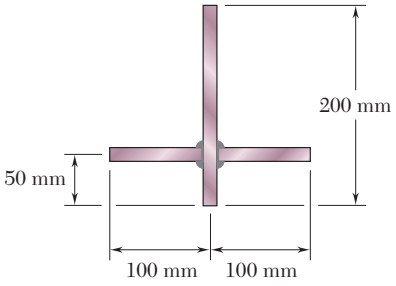


Fig. P6.49

6.51 e 6.52 Uma viga extrudada tem uma parede de espessura uniforme t. Chamando de **V** a força cortante vertical e de A a área da seção transversal da viga, expresse a tensão de cisalhamento máxima como $\tau_{máx} = k(V/A)$ e determine a constante k para cada uma das duas orientações mostradas.

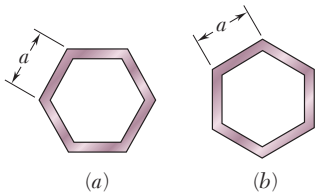


Fig. P6.51

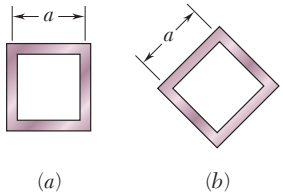


Fig. P6.52

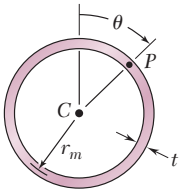


Fig. P6.53

6.53 (*a*) Determine a tensão de cisalhamento no ponto P de um tubo de paredes finas com a seção transversal mostrada na figura, provocada por uma força cortante vertical **V**. (*b*) Mostre que a tensão de cisalhamento máxima ocorre para $\theta = 90°$ e é igual a $2V/A$, em que A é a área da seção transversal do tubo.

6.54 O projeto de uma viga requer a soldagem de quatro placas horizontais a uma placa vertical de 12,7 × 127 mm como mostra a figura. Para uma força cortante vertical **V**, determine a dimensão h para a qual o fluxo de cisalhamento por meio da junta soldada é máximo.

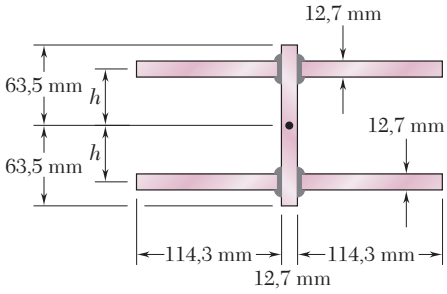


Fig. P6.54

6.55 Para uma viga feita de dois ou mais materiais com diferentes módulos de elasticidade, mostre que a Equação (6.6)

$$\tau_{méd} = \frac{VQ}{It}$$

permanece válida desde que Q e I sejam ambos calculados usando a seção transformada da viga (ver a Seção 4.6), e que t seja a largura real da viga em que $\tau_{méd}$ é calculado.

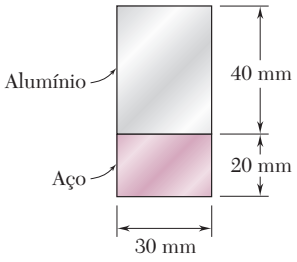


Fig. *P6.56*

6.56 Uma barra de aço e uma barra de alumínio são unidas para formar uma viga composta, como mostra a figura. Sabendo que a força cortante vertical na viga é 20 kN e que o módulo de elasticidade é 210 GPa para o aço e 70 GPa para o alumínio, determine (*a*) a tensão média na superfície de união e (*b*) a tensão de cisalhamento máxima na viga. (*Sugestão*: Use o método indicado no Problema 6.55.)

6.57 Uma barra de aço e uma barra de alumínio são unidas para formar uma viga composta como mostra a figura. Sabendo que a força cortante vertical na viga é 17,8 kN e que o módulo de elasticidade é 200 GPa para o aço e 73,1 GPa para o alumínio, determine (*a*) a tensão média na superfície de união e (*b*) a tensão de cisalhamento máxima na viga. (*Sugestão*: Use o método indicado no Problema 6.55.)

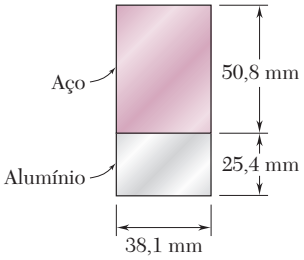


Fig. P6.57

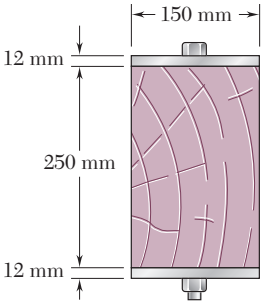


Fig. *P6.58*

6.58 Uma viga composta é feita unindo-se as partes de madeira e aço com parafusos de 12 mm de diâmetro espaçados longitudinalmente a cada 200 mm. O módulo de elasticidade é de 10 GPa para a madeira e 200 GPa para o aço. Para uma força cortante vertical de 4 kN, determine (*a*) a tensão de cisalhamento média nos parafusos e (*b*) a tensão de cisalhamento no centro da seção transversal. (*Sugestão*: Use o método indicado no Problema 6.55.)

6.59 Uma viga composta é feita unindo-se partes de madeira e aço, conforme mostra a figura, por parafusos de 15,88 mm de diâmetro espaçados longitudinalmente a cada 203,2 mm. O módulo de elasticidade é de 13,1 GPa para a madeira e 200 GPa para o aço. Para uma força cortante vertical de 17,79 kN, determine (*a*) a tensão de cisalhamento média nos parafusos e (*b*) a tensão de cisalhamento no centro de seção transversal. (*Sugestão*: Use o método indicado no Problema 6.55.)

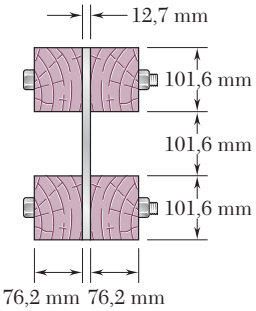


Fig. P6.59

6.60 Considere a viga em balanço *AB* discutida na Seção 6.8, e a parte *ACKJ* da viga que está localizada à esquerda da seção transversal *CC′* e acima do plano horizontal *JK*, em que *K* é um ponto a uma distância $y < y_E$ acima da linha neutra (Fig. 6.60). (*a*) Lembrando que $\sigma_x = \sigma_E$ entre *C* e *E*, e $\sigma_x = (\sigma_E/y_E)y$ entre *E* e *K*, mostre que a intensidade da força cortante horizontal **H** que atua na face inferior da parte da viga *ACKJ* é

$$H = \frac{1}{2} b\sigma_E \left(2c - y_E - \frac{y^2}{y_E}\right)$$

(*b*) Observando que a tensão de cisalhamento em *K* é

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta H}{\Delta A} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{b} \frac{\Delta H}{\Delta x} = \frac{1}{b} \frac{\partial H}{\partial x}$$

e lembrando que y_E é uma função de *x* definida pela Equação (6.14), deduza a Equação (6.15).

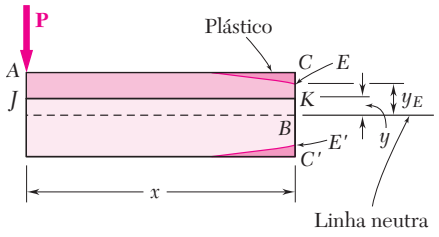


Fig. P6.60

*6.9. Carregamento assimétrico em barras de paredes finas; centro de cisalhamento

Nossa análise dos efeitos de carregamentos transversais no Capítulo 5 e nas seções anteriores deste capítulo estava limitada a barras que possuem um plano vertical de simetria e às forças aplicadas naquele plano. Observou-se que as barras sofrem flexão no plano de carregamento (Fig. 6.42) e, em determinada seção transversal, o momento fletor **M** e a força cortante **V** (Fig. 6.43) provocavam tensões normais e de cisalhamento definidas, respectivamente, pelas fórmulas

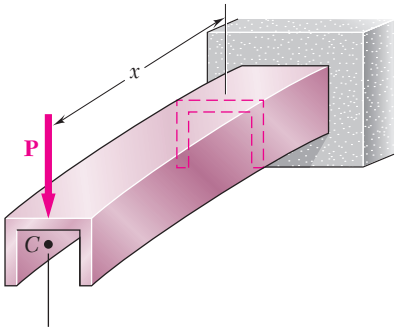


Fig. 6.42

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \tag{4.16}$$

e

$$\tau_{\text{méd}} = \frac{VQ}{It} \tag{6.6}$$

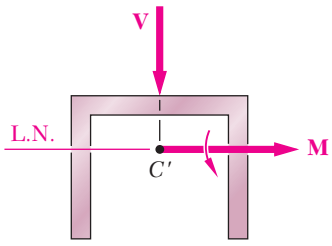


Fig. 6.43

Nesta seção, examinaremos os efeitos de carregamentos transversais em *barras de paredes finas que não possuem um plano vertical de simetria*. Vamos supor, por exemplo, que a barra em forma de U da Fig. 6.42 tenha sido girada em 90° e que a linha de ação de **P** ainda passa pelo centroide da seção da extremidade da barra. O momento vetor **M** representando o momento fletor em determinada seção transversal ainda é direcionado ao longo de um eixo principal da seção (Fig. 6.44) e a linha neutra coincidirá com o eixo (cf. Seção 4.13). A Equação (4.16), portanto, é aplicável e pode ser usada para calcular as tensões normais na seção. No entanto, a Equação (6.6) não pode ser usada para determinar as tensões de cisalhamento na seção, pois essa equação foi deduzida para uma barra que possui um plano vertical de simetria (cf. Seção 6.7). Na realidade, observaremos que a barra sofrerá *flexão e torção* sob a ação da força aplicada (Fig. 6.45), e a distribuição de tensões de cisalhamento resultante será muito diferente daquela definida pela Equação (6.6).

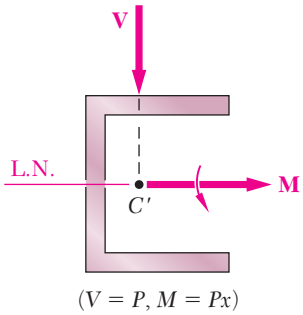


Fig. 6.44

Surge agora a seguinte questão: é possível aplicar a força vertical **P** de tal maneira que a barra em forma de U da Fig. 6.45 sofra *flexão sem torção* e, se assim for, onde a força **P** deverá ser aplicada? Se a barra sofre flexão sem sofrer torção, a tensão de cisalhamento em qualquer ponto de determinada seção transversal pode ser obtida da Equação (6.6), em que Q é o momento estático da área sombreada em relação à linha neutra (Fig. 6.46*a*), e a distribuição de tensões será aquela mostrada na Fig. 6.46*b*, com $\tau = 0$ em A e E.

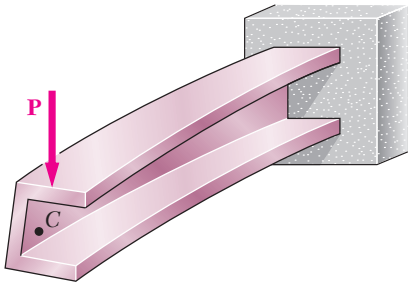


Fig. 6.45

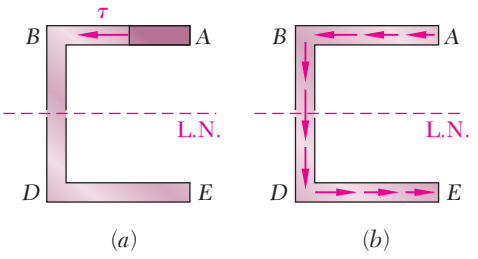


Fig. 6.46

Observamos que a força de cisalhamento que atua em um pequeno elemento de seção transversal de área $dA = t\,ds$ é $dF = \tau dA = \tau t ds$, ou $dF = q ds$ (Fig. 6.47*a*), na qual q é o fluxo de cisalhamento $q = \tau t = VQ/I$ no ponto considerado. Conclui-se que a resultante das forças de cisalhamento que atuam nos elementos da mesa superior *AB* do perfil U é uma força horizontal **F** (Fig. 6.47*b*) de intensidade

$$F = \int_A^B q\,ds \tag{6.17}$$

Em razão da simetria da seção em forma de U em relação à sua linha neutra, a resultante das forças de cisalhamento que atuam na mesa inferior *DE* é uma força $\mathbf{F}'$ da mesma intensidade de **F**, mas com sentido oposto. Concluímos que a resultante das forças de cisalhamento que atuam na alma *BD* deve ser igual à força cortante vertical **V** na seção:

$$V = \int_B^D q\,ds \tag{6.18}$$

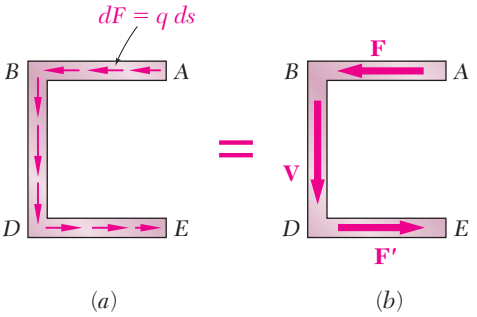


Fig. 6.47

Observamos agora que as forças **F** e $\mathbf{F}'$ formam um conjugado de momento *Fh*, em que *h* é a distância entre as linhas de centro das mesas *AB* e *DE* (Fig. 6.48*a*). Esse momento pode ser eliminado se a força cortante vertical **V** for movida para a esquerda por uma distância *e*, tal que o momento de **V** em relação a *B* seja igual a *Fh* (Fig. 6.48*b*). Escrevemos $Ve = Fh$ ou

$$e = \frac{Fh}{V} \tag{6.19}$$

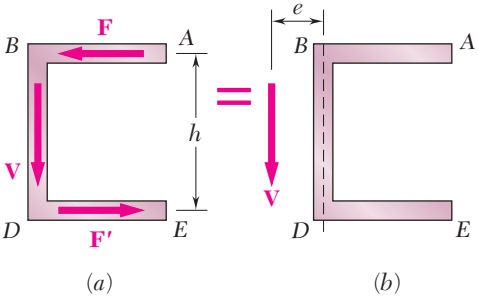


Fig. 6.48

e concluímos que, quando a força **P** é aplicada a uma distância *e* à esquerda da linha de centro da alma *BD*, a barra apenas sofrerá flexão em um plano vertical sem sofrer torção (Fig. 6.49).

O ponto *O* em que a linha de ação de **P** intercepta o eixo de simetria da seção da extremidade da barra é chamado de *centro de cisalhamento* daquela seção. Notamos que, no caso de uma força oblíqua **P** (Fig. 6.50*a*), a barra também estará livre de qualquer torção se a força **P** for aplicada no centro de cisalhamento da seção. Sem dúvida, a força **P** pode então ser decomposta em duas componentes $\mathbf{P}_z$ e $\mathbf{P}_y$ (Fig. 6.50*b*) correspondendo, respectivamente, às condições de carregamento das Figs. 6.42 e 6.49, em que nenhuma delas provoca torção na barra.

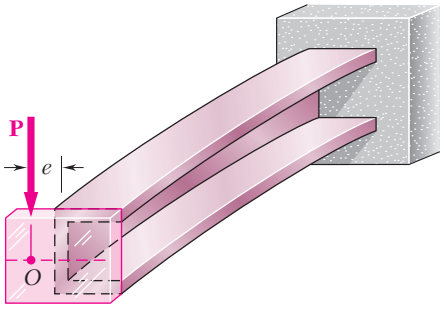


Fig. 6.49

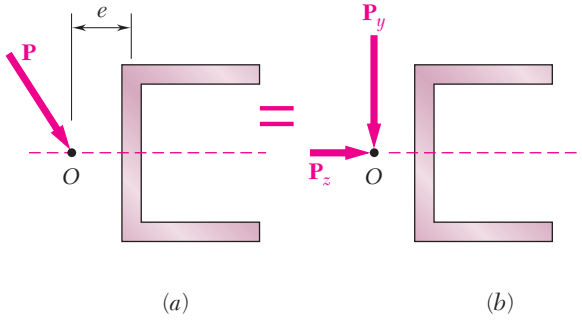


Fig. 6.50

EXEMPLO 6.5

Determine o centro de cisalhamento O de uma seção em forma de U de espessura uniforme (Fig. 6.51), sabendo que $b = 100$ mm, $h = 150$ mm e $t = 3{,}8$ mm.

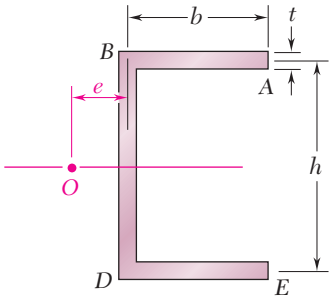


Fig. 6.51

Considerado que a barra não sofra torção, primeiro determinamos o fluxo de cisalhamento q na mesa AB a uma distância s de A (Fig. 6.52). Lembrando da Equação (6.5) e observando que o momento estático Q da área sombreada em relação à linha neutra é $Q = (st)(h/2)$, escrevemos

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{Vsth}{2I} \tag{6.20}$$

em que V é a força cortante vertical e I o momento de inércia da seção em relação à linha neutra.

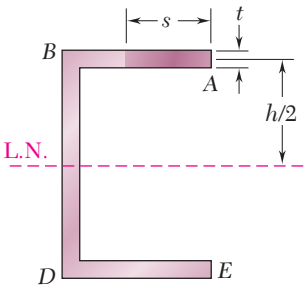


Fig. 6.52

Usando a Equação (6.17), determinamos a intensidade da força de cisalhamento **F** que atua na mesa AB integrando o fluxo de cisalhamento q de A até B:

$$F = \int_0^b q\,ds = \int_0^b \frac{Vsth}{2I}\,ds = \frac{Vth}{2I}\int_0^b s\,ds$$

$$F = \frac{Vthb^2}{4I} \tag{6.21}$$

A distância e da linha de centro da alma BD até o centro de cisalhamento O pode agora ser obtida pela Equação (6.19):

$$e = \frac{Fh}{V} = \frac{Vthb^2}{4I}\frac{h}{V} = \frac{th^2b^2}{4I} \tag{6.22}$$

O momento de inércia I da seção U pode ser expresso da seguinte forma:

$$I = I_{\text{alma}} + 2I_{\text{mesa}}$$
$$= \frac{1}{12}th^3 + 2\left[\frac{1}{12}bt^3 + bt\left(\frac{h}{2}\right)^2\right]$$

Desprezando o termo contendo t^3, que é muito pequeno, temos

$$I = \tfrac{1}{12}th^3 + \tfrac{1}{2}tbh^2 = \tfrac{1}{12}th^2(6b + h) \tag{6.23}$$

Substituindo essa expressão em (6.22), temos

$$e = \frac{3b^2}{6b + h} = \frac{b}{2 + \dfrac{h}{3b}} \tag{6.24}$$

Notamos que a distância e não depende de t e pode variar de 0 a $b/2$, dependendo do valor da relação $h/3b$. Para a seção U dada, temos

$$\frac{h}{3b} = \frac{150\text{ mm}}{3(100\text{ mm})} = 0{,}5$$

e

$$e = \frac{100\text{ mm}}{2 + 0{,}5} = 40\text{ mm}$$

EXEMPLO 6.6

Para a seção em forma de U do Exemplo 6.5, determine a distribuição das tensões de cisalhamento provocada por uma força cortante vertical **V** de 12 kN aplicada no centro de cisalhamento *O* (Fig. 6.53).

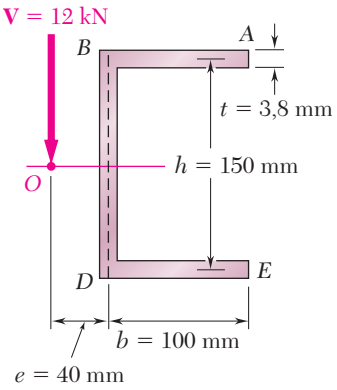


Fig. 6.53

Tensões de cisalhamento nas mesas. Como **V** é aplicado no centro de cisalhamento, não há torção, e as tensões na mesa *AB* são obtidas da Equação (6.20) do Exemplo 6.5. Temos

$$\tau = \frac{q}{t} = \frac{VQ}{It} = \frac{Vh}{2I}s \tag{6.25}$$

que mostra que a distribuição de tensões na mesa *AB* é linear. Fazendo $s = b$ e substituindo I da Equação (6.23), obtemos o valor da tensão de cisalhamento em *B*:

$$\tau_B = \frac{Vhb}{2(\frac{1}{12}th^2)(6b + h)} = \frac{6Vb}{th(6b + h)} \tag{6.26}$$

Fazendo $V = 12$ kN e usando as dimensões dadas, temos

$$\tau_B = \frac{6(12000\text{ N})(100\text{ mm})}{(3{,}8\text{ mm})(150\text{ mm})(6 \times 100\text{ mm} + 150\text{ mm})}$$
$$= 16{,}8\text{ MPa}.$$

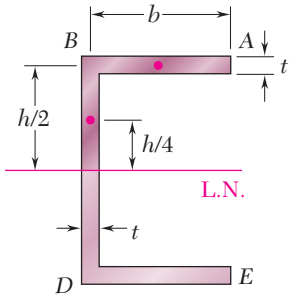


Fig. 6.54

Tensões de cisalhamento na alma. A distribuição das tensões de cisalhamento na alma *BD* é parabólica, como no caso de uma viga de mesas largas, e a tensão máxima ocorre na linha neutra. Calculando o momento estático da metade superior da seção transversal em relação à linha neutra (Fig. 6.54), escrevemos

$$Q = bt(\tfrac{1}{2}h) + \tfrac{1}{2}ht(\tfrac{1}{4}h) = \tfrac{1}{8}ht(4b + h) \tag{6.27}$$

Substituindo I e Q de (6.23) e (6.27), respectivamente, na expressão para a tensão de cisalhamento, temos

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{VQ}{It} = \frac{V(\frac{1}{8}ht)(4b + h)}{\frac{1}{12}th^2(6b + h)t} = \frac{3V(4b + h)}{2th(6b + h)}$$

ou, com os dados fornecidos,

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{3(12\,000\text{ N})(4 \times 100\text{ mm} + 150\text{ mm})}{2(3{,}8\text{ mm})(150\text{ mm})(6 \times 100\text{ mm} + 150\text{ mm})}$$
$$= 23{,}2\text{ MPa}$$

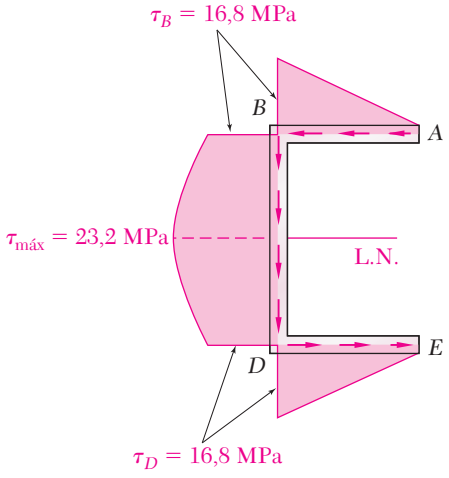


Fig. 6.55

Distribuição de tensões ao longo da seção. A distribuição de tensões de cisalhamento ao longo da seção em forma de U foi representada graficamente na Fig. 6.55.

EXEMPLO 6.7

Para a seção em forma de U do Exemplo 6.5, e desprezando as concentrações de tensão, determine a tensão de cisalhamento máxima provocada por uma força cortante vertical **V** de 12 kN aplicada no centroide *C* da seção, que está localizado 28,57 mm à direita da linha de centro da alma *BD* (Fig. 6.56).

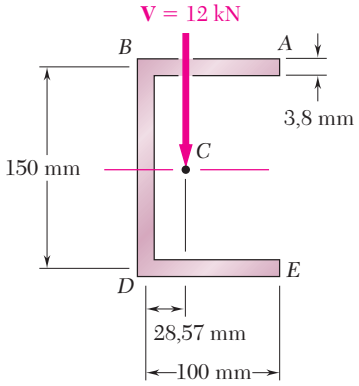


Fig. 6.56

Sistema força-momento equivalente no centro de cisalhamento. O centro de cisalhamento *O* da seção transversal foi determinado no Exemplo 6.5 e sabe-se que está a uma distância $e = 40$ mm à esquerda da linha de centro da alma *BD*. Substituímos a força cortante **V** (Fig. 6.57*a*) por um sistema equivalente constituído de força e momento no centro de cisalhamento *O* (Fig. 6.57*b*). Esse sistema consiste em uma força **V** de 12 kN e um torque **T** de intensidade

$$T = V(OC) = (12\text{ kN})(40\text{ mm} + 28{,}57\text{ mm})$$
$$= 822{,}8\text{ kN} \cdot \text{mm}$$

Tensões devido à flexão. A força cortante **V** de 12 kN faz a barra curvar-se e a distribuição correspondente de tensões de cisalhamento na seção (Fig. 6.57*c*) foi determinada no Exemplo 6.6. Lembramos que o valor máximo da tensão em razão dessa força era

$$(\tau_{\text{máx}})_{\text{flexão}} = 23{,}2\text{ MPa}$$

Tensões devido à torção. O torque **T** faz a barra torcer, e a distribuição de tensões correspondente é mostrada na Fig. 6.57*d*. Lembramos da Seção 3.12 que a analogia da membrana mostra que, em uma barra de paredes finas de espessura uniforme, a tensão provocada pelo torque **T** é máxima ao longo da borda da seção. Usando as Equações (3.45) e (3.43) com

$$a = 100\text{ mm} + 150\text{ mm} + 100\text{ mm} = 350\text{ mm}$$
$$b = t = 3{,}8\text{ mm} \qquad b/a = 0{,}0109$$

temos

$$c_1 = \tfrac{1}{3}(1 - 0{,}630b/a) = \tfrac{1}{3}(1 - 0{,}630 \times 0{,}0109) = 0{,}331$$
$$(\tau_{\text{máx}})_{\text{torção}} = \frac{T}{c_1 ab^2} = \frac{822{,}8 \times 10^3\text{ N} \cdot \text{mm}}{(0{,}331)(350\text{ mm})(3{,}8\text{ mm})^2}$$
$$= 491{,}8\text{ MPa}$$

Tensões combinadas. A tensão máxima em razão da flexão e da torção combinadas ocorre na linha neutra, na superfície interna da alma, e é

$$\tau_{\text{máx}} = 23{,}2\text{ MPa} + 491{,}8\text{ MPa} = 515\text{ MPa}.$$

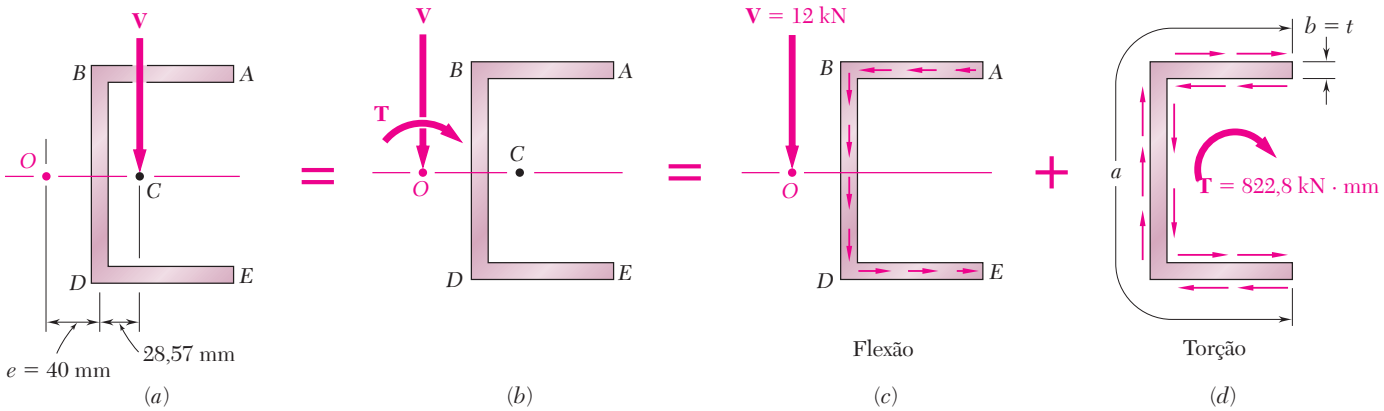


Fig. 6.57

Voltando nossa atenção para as barras de paredes finas que não possuem plano de simetria, consideraremos agora o caso de uma cantoneira submetida a uma força vertical **P**. Se a barra estiver orientada de tal maneira que a força **P** seja perpendicular a um dos eixos principais *Cz* da seção transversal, o vetor momento **M** representando o momento fletor em determinada seção estará direcionado ao longo de *Cz* (Fig. 6.58), e a linha neutra coincidirá com aquele eixo (cf. Seção 4.13). A equação (4.16), portanto, é aplicável e pode ser usada para calcular as tensões normais na seção. Propomos agora determinar onde a força **P** deverá ser aplicada para que se possa usar a Equação (6.6) no cálculo das tensões de cisalhamento na seção, isto é, se a barra deve *sofrer flexão sem sofrer torção*.

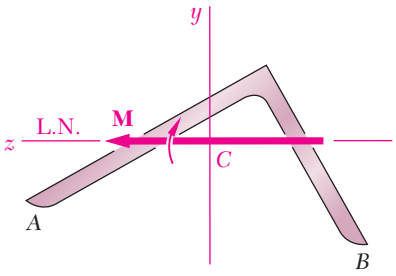


Fig. 6.58

Vamos *supor* que as tensões de cisalhamento na seção sejam calculadas pela Equação (6.6). Como no caso da barra em forma de U considerada anteriormente, as forças de cisalhamento elementares aplicadas na seção podem ser expressas como $dF = qds$, com $q = VQ/I$, em que Q representa o momento estático em relação à linha neutra (Fig. 6.59*a*). Notamos que a resultante das forças de cisalhamento que atuam na parte *OA* da seção transversal é uma força $\mathbf{F}_1$ direcionada ao longo de *OA*, e que a resultante das forças de cisalhamento que atuam na parte *OB* é a força $\mathbf{F}_2$ ao longo de *OB* (Fig. 6.59*b*). Como $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ passam ambas pelo ponto *O* no vértice do ângulo, conclui-se que sua resultante, que é a força cortante **V** na seção, também deverá passar pelo ponto *O* (Fig. 6.59*c*). Concluímos que a barra não sofrerá torção se a linha de ação da força **P** passar pelo vértice *O* da seção na qual ela é aplicada.

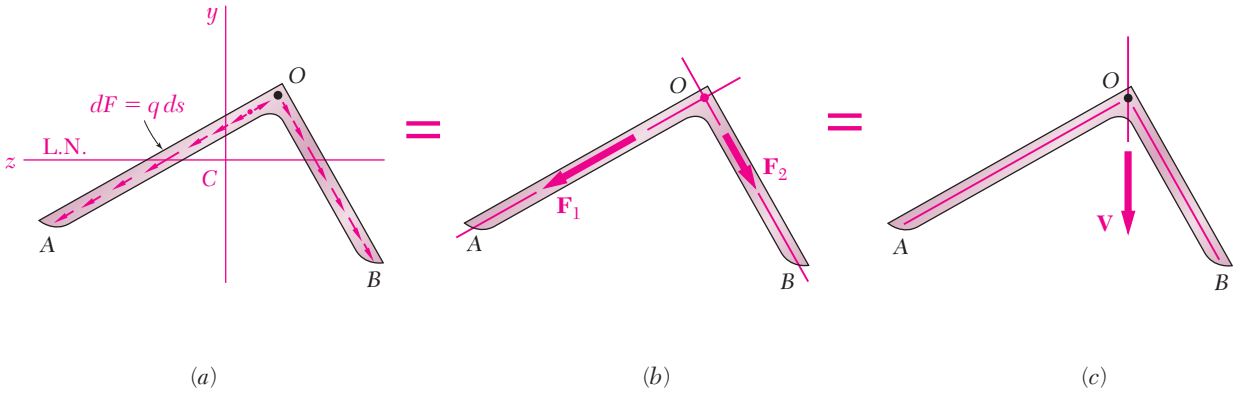


Fig. 6.59

O mesmo raciocínio pode ser aplicado quando a força **P** for perpendicular ao outro eixo principal *Cy* da seção da cantoneira. E, como qualquer força **P** aplicada no vértice *O* de uma seção transversal pode ser decomposta em componentes perpendiculares aos eixos principais, conclui-se que a barra não sofrerá torção se cada força for aplicada no vértice *O* de uma seção transversal. Concluímos então que *O* é o centro de cisalhamento da seção.

Cantoneiras com uma aba vertical e outra horizontal são encontradas em muitas estruturas. Conclui-se da discussão anterior que esses elementos não sofrerão torção se as forças verticais forem aplicadas ao longo da linha de

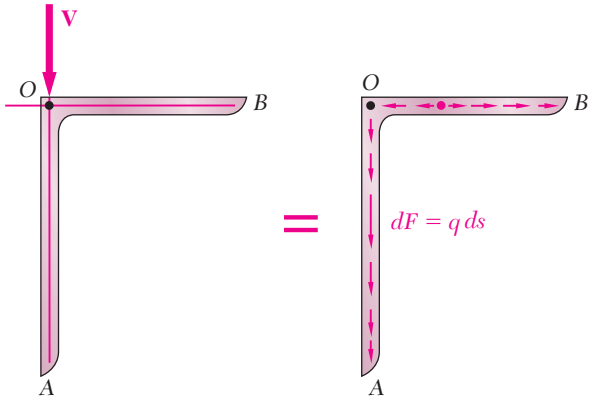


Fig. 6.60

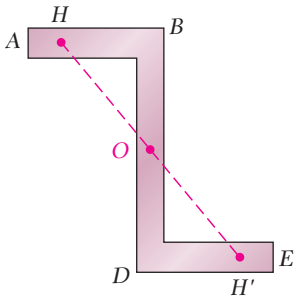


Fig. 6.61

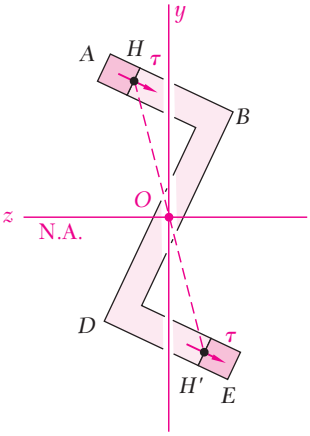


Fig. 6.62

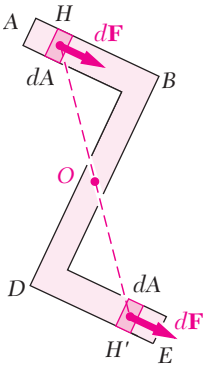


Fig. 6.63

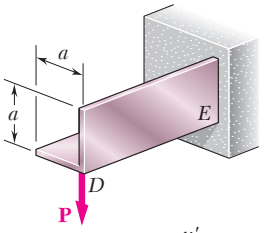
centro da aba vertical. Notamos na Fig. 6.60 que a resultante das forças de cisalhamento elementares que atuam na parte vertical *OA* de determinada seção será igual à força cortante **V**, enquanto a resultante das forças de cisalhamento na parte horizontal *OB* será zero:

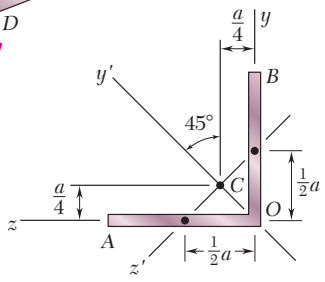
$$\int_O^A q\,ds = V \qquad \int_O^B q\,ds = 0$$

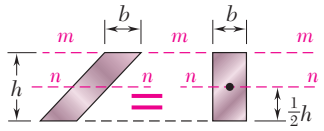
No entanto, isso *não* significa que não haverá tensão de cisalhamento na aba horizontal da barra. Decompondo a força cortante **V** em componentes perpendiculares aos eixos principais da seção e calculando a tensão de cisalhamento em cada ponto, podemos verificar que τ é zero em apenas um ponto entre *O* e *B* (ver o Problema Resolvido 6.6).

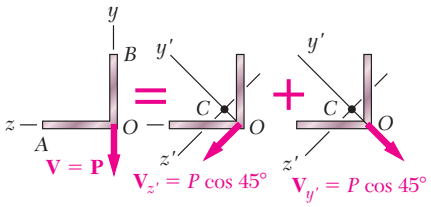
Outro tipo de barra de paredes finas encontrado frequentemente na prática é o perfil Z. Embora a seção transversal de um perfil Z não possua qualquer eixo de simetria, ela possui um *centro de simetria O* (Fig. 6.61). Isso significa que, para qualquer ponto *H* da seção transversal, corresponde outro ponto *H′*, tal que o segmento de linha reta *HH′* seja dividido ao meio por *O*. É claro que o centro de simetria *O* coincide com o centroide da seção transversal. Como veremos agora, o ponto *O* é também o centro de cisalhamento da seção transversal.

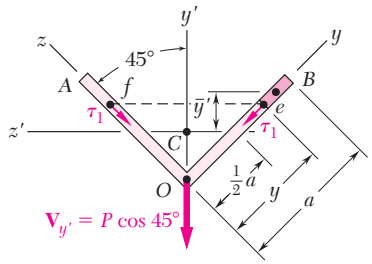
Conforme fizemos anteriormente no caso de uma cantoneira, consideraremos que as forças serão aplicadas em um plano perpendicular a um dos eixos principais da seção, de modo que esse eixo seja também a linha neutra da seção (Fig. 6.62). Consideraremos também que as tensões de cisalhamento na seção serão definidas pela Equação (6.6), isto é, que a barra sofrerá flexão sem sofrer torção. Chamando de *Q* o momento estático em relação à linha neutra da parte *AH* da seção transversal, e de *Q′* o momento estático da parte *EH′*, notamos que $Q' = -Q$. Assim, as tensões de cisalhamento em *H* e *H′* têm a mesma intensidade e a mesma direção, e as forças de cisalhamento que atuam em pequenos elementos de área *dA*, localizados, respectivamente, em *H* e *H′*, são forças iguais que têm momentos iguais e opostos em relação a *O* (Fig. 6.63). Como isso vale para qualquer par de elementos simétricos, conclui-se que a resultante das forças de cisalhamento que atuam na seção tem um momento zero em relação a *O*. Isso significa que a força cortante **V** na seção é direcionada ao longo de uma linha que passa pelo ponto *O*. Como essa análise pode ser repetida quando as forças são aplicadas em um plano perpendicular aos outros eixos principais, concluímos que o ponto *O* é o centro de cisalhamento da seção.

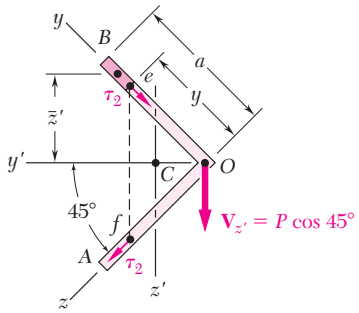


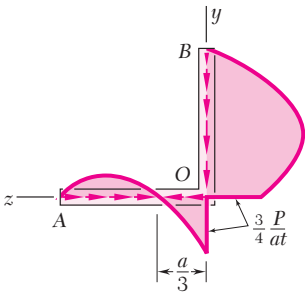












PROBLEMA RESOLVIDO 6.6

Determine a distribuição de tensões de cisalhamento na cantoneira de paredes finas *DE* de espessura uniforme *t* para o carregamento mostrado.

SOLUÇÃO

Centro de cisalhamento. Recordamos da Seção 6.9 que o centro de cisalhamento da seção transversal de uma cantoneira de paredes finas está localizado em seu vértice. Como a força **P** está aplicada em *D*, ela provoca flexão, mas não provoca torção na cantoneira.

Eixos principais. Localizamos o centroide *C* de determinada seção transversal *AOB*. Como o eixo y' é um eixo de simetria, os eixos y' e z' são os eixos principais de inércia da seção. Lembramos que, para o paralelogramo mostrado, $I_{nn} = \frac{1}{12}bh^3$ e $I_{mm} = \frac{1}{3}bh^3$. Considerando cada aba da seção um paralelogramo, determinamos agora os momentos de inércia $I_{y'}$ e $I_{z'}$:

$$I_{y'} = 2\left[\frac{1}{3}\left(\frac{t}{\cos 45°}\right)(a\cos 45°)^3\right] = \frac{1}{3}ta^3$$

$$I_{z'} = 2\left[\frac{1}{12}\left(\frac{t}{\cos 45°}\right)(a\cos 45°)^3\right] = \frac{1}{12}ta^3$$

Superposição. A força cortante **V** na seção é igual à força **P**. Nós a decompomos nas componentes paralelas aos eixos principais.

Tensões de cisalhamento devido a $V_{y'}$. Determinamos a tensão de cisalhamento no ponto *e* de coordenada *y*:

$$\bar{y}' = \tfrac{1}{2}(a + y)\cos 45° - \tfrac{1}{2}a\cos 45° = \tfrac{1}{2}y\cos 45°$$

$$Q = t(a - y)\bar{y}' = \tfrac{1}{2}t(a - y)y\cos 45°$$

$$\tau_1 = \frac{V_{y'}Q}{I_{z'}t} = \frac{(P\cos 45°)[\frac{1}{2}t(a - y)y\cos 45°]}{(\frac{1}{12}ta^3)t} = \frac{3P(a - y)y}{ta^3}$$

A tensão de cisalhamento no ponto *f* é representada por uma função similar de *z*.

Tensões de cisalhamento devido a $V_{z'}$. Consideramos novamente o ponto *e*:

$$\bar{z}' = \tfrac{1}{2}(a + y)\cos 45°$$

$$Q = (a - y)t\bar{z}' = \tfrac{1}{2}(a^2 - y^2)t\cos 45°$$

$$\tau_2 = \frac{V_{z'}Q}{I_{y'}t} = \frac{(P\cos 45°)[\frac{1}{2}(a^2 - y^2)t\cos 45°]}{(\frac{1}{3}ta^3)t} = \frac{3P(a^2 - y^2)}{4ta^3}$$

A tensão de cisalhamento no ponto *f* é representada por uma função similar de *z*.

Tensões combinadas. ***Ao longo da aba vertical.*** A tensão de cisalhamento no ponto *e* é

$$\tau_e = \tau_2 + \tau_1 = \frac{3P(a^2 - y^2)}{4ta^3} + \frac{3P(a - y)y}{ta^3} = \frac{3P(a - y)}{4ta^3}[(a + y) + 4y]$$

$$\tau_e = \frac{3P(a - y)(a + 5y)}{4ta^3} \blacktriangleleft$$

Ao longo da aba horizontal. A tensão de cisalhamento no ponto *f* é

$$\tau_f = \tau_2 - \tau_1 = \frac{3P(a^2 - z^2)}{4ta^3} - \frac{3P(a - z)z}{ta^3} = \frac{3P(a - z)}{4ta^3}[(a + z) - 4z]$$

$$\tau_f = \frac{3P(a - z)(a - 3z)}{4ta^3} \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

6.61 até 6.64 Determine a localização do centro de cisalhamento O de uma viga de paredes finas de espessura uniforme com a seção transversal mostrada.

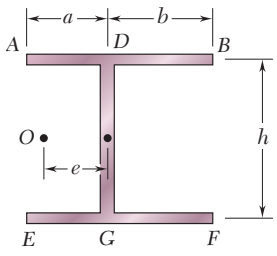


Fig. P6.61

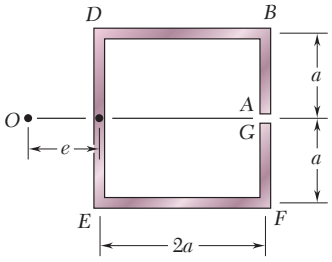


Fig. P6.62

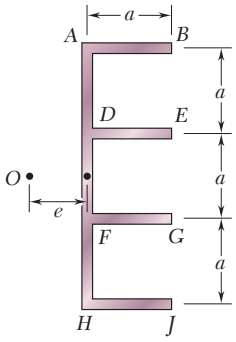


Fig. P6.63

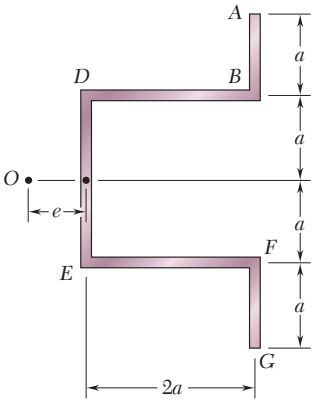


Fig. P6.64

6.65 e 6.66 Uma viga extrudada tem a seção transversal mostrada na figura. Determine (*a*) a localização do centro de cisalhamento O e (*b*) a distribuição das tensões de cisalhamento provocadas pela força cortante vertical de 12,23 kN aplicadas em O.

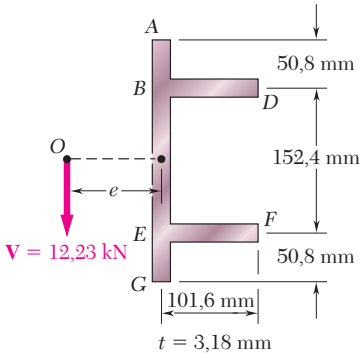


Fig. *P6.65*

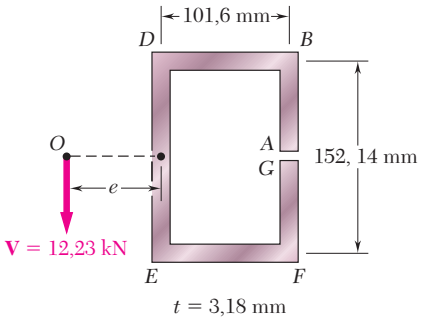


Fig. *P6.66*

6.67 e 6.68 Para uma viga extrudada com a seção transversal mostrada, determine (*a*) a localização do centro de cisalhamento *O* e (*b*) a distribuição das tensões de cisalhamento provocadas pela força cortante vertical **V** mostrada aplicada em *O*.

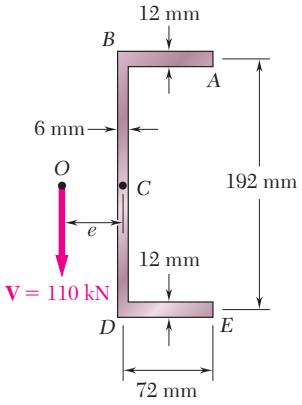


Fig. P6.67

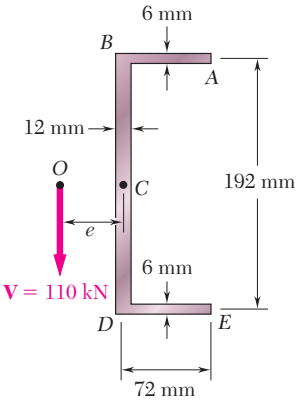


Fig. P6.68

6.69 até *6.74* Determine a localização do centro de cisalhamento *O* de uma viga de paredes finas de espessura uniforme com a seção transversal mostrada.

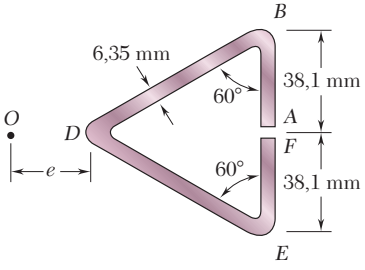


Fig. P6.69

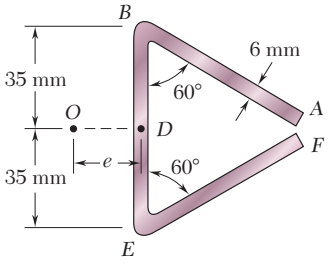


Fig. P6.70

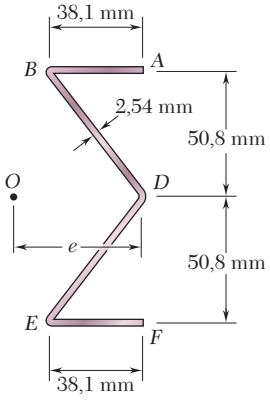


Fig. P6.71

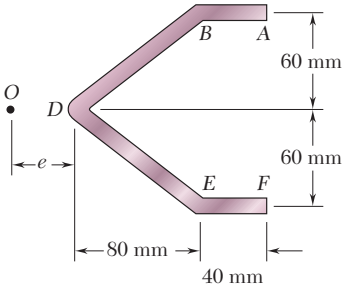


Fig. P6.72

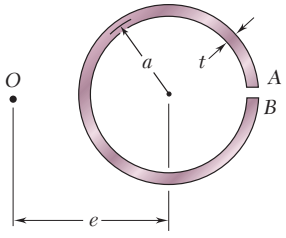


Fig. *P6.73*

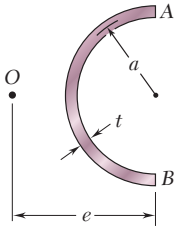


Fig. *P6.74*

6.75 e 6.76 Uma viga de paredes finas tem a seção transversal mostrada na figura. Determine a localização do centro de cisalhamento O da seção transversal.

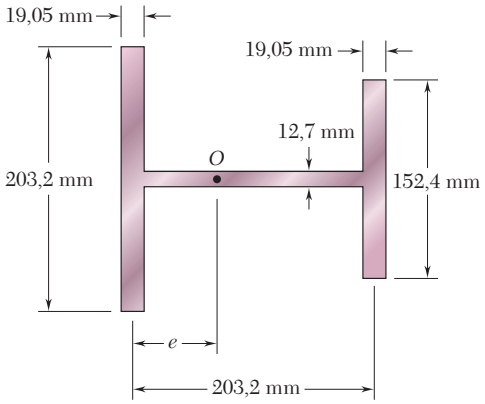


Fig. P6.75

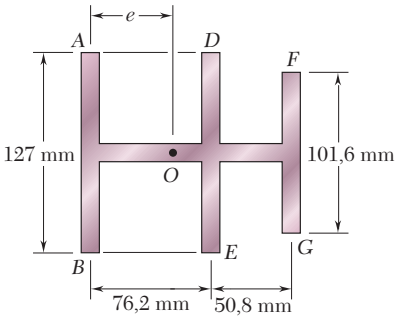


Fig. P6.76

6.77 e 6.78 Uma viga de paredes finas de espessura uniforme tem a seção transversal mostrada na figura. Determine a dimensão b para a qual o centro de cisalhamento O da seção transversal está localizado no ponto indicado.

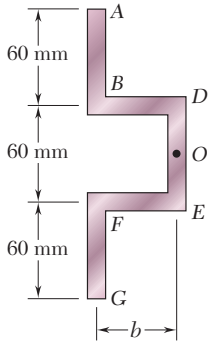


Fig. P6.77

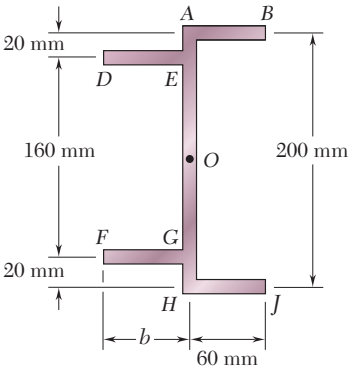


Fig. P6.78

6.79 Para a cantoneira e o carregamento do Problema Resolvido 6.6, verifique se $\int qdz = 0$ ao longo da aba horizontal da cantoneira e $\int qdy = P$ ao longo de sua aba vertical.

6.80 Para a cantoneira e o carregamento do Problema Resolvido 6.6, (*a*) determine os pontos em que a tensão de cisalhamento é máxima e os valores correspondentes da tensão, (*b*) verifique também se os pontos obtidos estão localizados na linha neutra correspondende ao carregamento dado.

****6.81*** A viga em balanço AB, consistindo na metade de um tubo de paredes finas com raio médio de 31,8 mm e espessura de parede de 9,53 mm, está submetida a uma força vertical de 2 224 kN. Sabendo que a linha de ação da força passa pelo centroide C da seção transversal da viga, determine (*a*) o sistema equivalente de força e momento no centro de cisalhamento da seção transversal e (*b*) a tensão de cisalhamento máxima na viga. (*Sugestão*: No Problema 6.74 mostra-se a posição do centro de cisalhamento O, distante em relação ao diâmetro vertical, do equivalente ao dobro da distância desse diâmetro ao centróide C.)

****6.82*** Resolva o Problema 6.81, considerando que a espessura da viga foi reduzida para 6,35 mm.

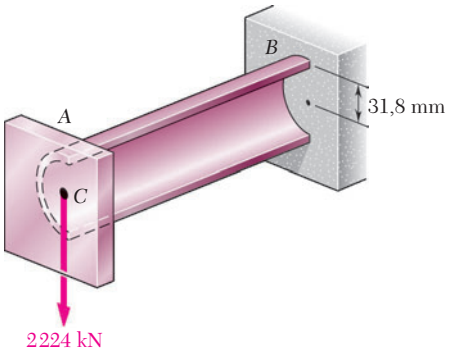


Fig. P6.81

***6.83** A viga em balanço mostrada consiste em um perfil Z de 6,4 mm de espessura. Para o carregamento dado, determine a distribuição das tensões de cisalhamento ao longo da linha $A'B'$ na aba horizontal superior do perfil Z. Os eixos x' e y' são os eixos principais da seção transversal e os momentos de inércia correspondentes são $I_{x'} = 69{,}2 \times 10^6\ \text{mm}^4$ e $I_{y'} = 5{,}66 \times 10^6\ \text{mm}^4$.

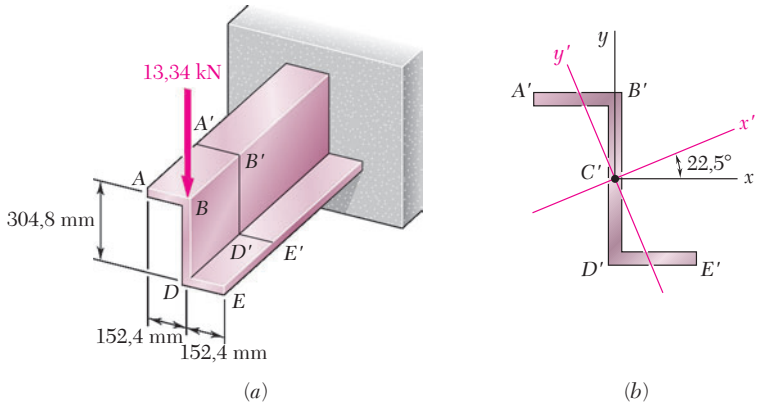


Fig. *P6.83*

***6.84** Para a viga em balanço e o carregamento do Problema 6.83, determine a distribuição de tensão de cisalhamento ao longo da linha $B'D'$ na alma vertical do perfil Z.

***6.85** Determine a distribuição de tensões de cisalhamento ao longo da linha $D'B'$ na aba horizontal da cantoneira para o carregamento mostrado. Os eixos x' e y' são os eixos principais da seção transversal.

***6.86** Para a cantoneira e o carregamento do Problema 6.85, determine a distribuição de tensões de cisalhamento ao longo da linha $D'A'$ na aba vertical.

***6.87** Uma placa de aço, com 160 mm de largura e 8 mm de espessura, é dobrada para formar a viga em forma de U mostrada na figura. Sabendo que a força vertical **P** atua em um ponto do plano médio da alma do U, determine (*a*) o torque **T** que faria o U torcer da mesma maneira como o faz sob a carga **P** e (*b*) a tensão de cisalhamento máxima no U provocada pela força **P**.

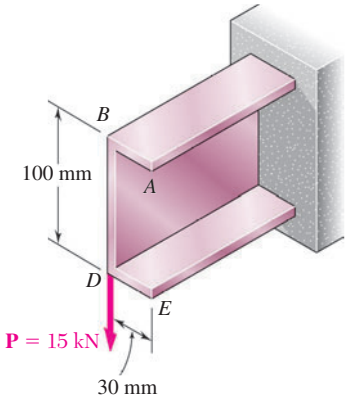


Fig. P6.87

***6.88** Resolva o Problema 6.81, considerando que uma placa de 6 mm de espessura é dobrada para formar o U mostrado.

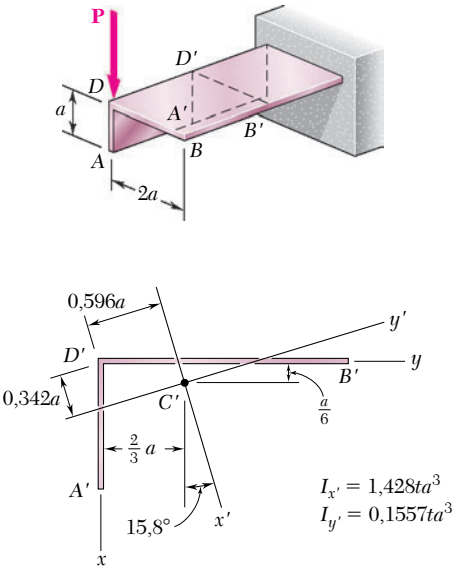


Fig. P6.85

REVISÃO E RESUMO DO CAPÍTULO 6

Tensões em um elemento de viga

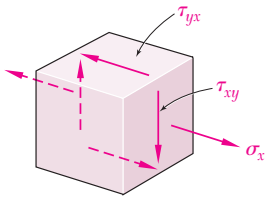


Fig. 6.2

Este capítulo foi dedicado à análise de vigas e barras de paredes finas sob carregamentos transversais.

Na Seção 6.1, consideramos um pequeno elemento localizado no plano vertical de simetria de uma viga sob um carregamento transversal (Fig. 6.2) e vimos que as tensões normais σ_x e tensões de cisalhamento τ_{xy} atuavam nas faces transversais daquele elemento, enquanto tensões de cisalhamento τ_{yx}, iguais em intensidade a τ_{xy}, atuavam em suas faces horizontais.

Na Seção 6.2, consideramos uma viga prismática AB com um plano de simetria vertical suportando várias cargas concentradas e distribuídas (Fig. 6.5). A uma distância x da extremidade A, separamos da viga

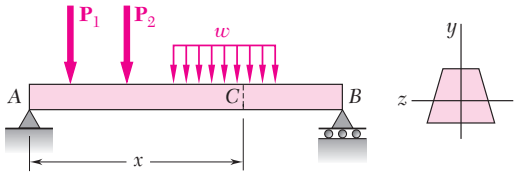


Fig. 6.5

um elemento $CDD'C'$ de comprimento Δx que se estende pela largura da viga desde a sua superfície superior até um plano horizontal localizado a uma distância y_1 da linha neutra (Fig. 6.6). Concluímos que a

Força cortante horizontal em uma viga

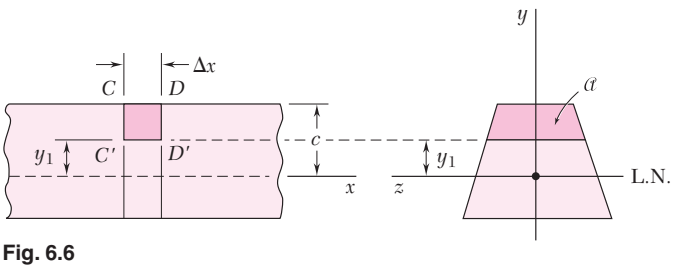


Fig. 6.6

intensidade da força cortante **ΔH** que atua na face inferior do elemento de viga era

$$\Delta H = \frac{VQ}{I}\Delta x \tag{6.4}$$

na qual V = força cortante vertical na seção transversal dada
Q = momento estático em relação à linha neutra da parte sombreada $\mathcal{A}$ da seção
I = momento de inércia da área inteira da seção transversal

A *força cortante horizontal por unidade de comprimento*, ou *fluxo de cisalhamento*, representada pela letra q, foi obtida dividindo-se ambos os membros da Equação (6.4) por Δx:

$$q = \frac{\Delta H}{\Delta x} = \frac{VQ}{I} \tag{6.5}$$

Fluxo de cisalhamento

Dividindo ambos os membros da Equação (6.4) pela área ΔA da face horizontal do elemento e observando que $\Delta A = t\,\Delta x$, em que t é a largura do elemento no corte, obtivemos na Seção 6.3 a seguinte expressão para a *tensão de cisalhamento média* na face horizontal do elemento

Tensões de cisalhamento em uma viga

$$\tau_{\text{méd}} = \frac{VQ}{It} \tag{6.6}$$

Notamos ainda que, como as tensões de cisalhamento τ_{xy} e τ_{yx} que atuam, respectivamente, em um plano transversal e um plano horizontal através de D' são iguais, a expressão em (6.6) também representa o valor médio de τ_{xy} ao longo da linha $D'_1D'_2$ (Fig. 6.12).

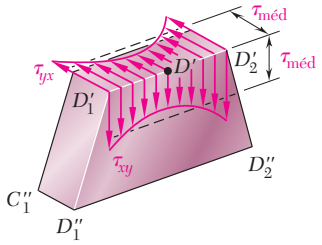


Fig. 6.12

Nas Seções 6.4 e 6.5, analisamos as tensões de cisalhamento em uma viga de seção transversal retangular. Concluímos que a distribuição de tensões é parabólica e que a tensão máxima, que ocorre no centro da seção, é

Tensões de cisalhamento em uma viga de seção transversal retangular

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{3}{2}\frac{\text{V}}{\text{A}} \tag{6.10}$$

em que A é a área da seção retangular. Para vigas de mesas largas, concluímos que uma boa aproximação da tensão de cisalhamento máxima pode ser obtida dividindo-se a força cortante V pela área da seção transversal da alma.

Na Seção 6.6, mostramos que as Equações (6.4) e (6.5) poderiam ainda ser usadas para determinar, respectivamente, a força cortante longitudinal $\Delta\mathbf{H}$ e o fluxo de cisalhamento q que atua em um elemento de viga, se o elemento estivesse limitado por uma superfície curva arbitrária em lugar de um plano horizontal (Fig. 6.24). Isso nos possibilitou, na Seção 6.7, a

Cisalhamento longitudinal em superfície curva

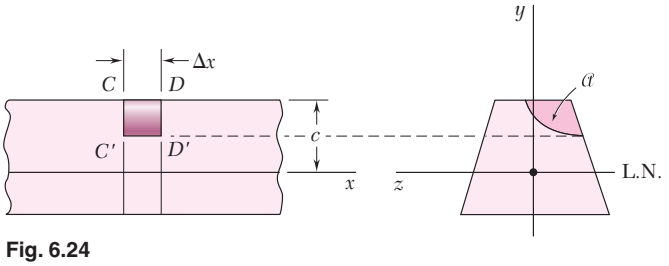


Fig. 6.24

estender o uso da Equação (6.6) para a determinação da tensão de cisalhamento média em barras de paredes finas como as vigas de mesas largas e as vigas caixão, nas mesas dessas barras, e em suas almas (Fig. 6.32).

Tensões de cisalhamento em barras de paredes finas

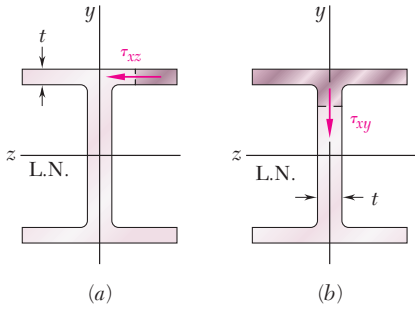


Fig. 6.32

Deformações plásticas

Na Seção 6.8, consideramos o efeito das deformações plásticas na intensidade e na distribuição de tensões de cisalhamento. Do Capítulo 4 recordamos que, uma vez iniciada a deformação plástica, o carregamento adicional faz as zonas plásticas penetrarem no núcleo elástico de uma viga. Após demonstrar que as tensões de cisalhamento só podem ocorrer no núcleo elástico de uma viga, notamos que um aumento no carregamento e o decréscimo resultante no tamanho do núcleo elástico contribuem para um aumento nas tensões de cisalhamento.

Carregamento assimétrico; centro de cisalhamento

Na Seção 6.9, consideramos os elementos prismáticos que *não estão* sob carga em seu plano de simetria e observamos que, em geral, ocorrem tanto flexão quanto torção. Aprendemos a localizar o ponto O da seção transversal, conhecido como *centro de cisalhamento*, em que as forças deverão ser aplicadas caso o elemento deva somente sofrer flexão sem sofrer torção (Fig. 6.49), e vimos que se as forças forem aplicadas naquele ponto, permanecerão válidas as seguintes equações:

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \qquad \tau_{\text{méd}} = \frac{VQ}{It} \tag{4.16, 6.6}$$

Usando o princípio da superposição, aprendemos também a determinar as tensões em barras assimétricas de paredes finas como perfis U, cantoneiras e vigas extrudadas [Exemplo 6.7 e Problema Resolvido 6.6].

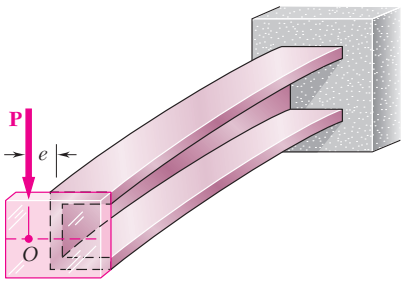


Fig. 6.49

PROBLEMAS DE REVISÃO

6.89 Três tábuas, cada uma com 38,1 × 88,9 mm de seção transversal retangular, são pregadas para formar uma viga que é submetida a uma força cortante vertical de 1 112 N. Sabendo que o espaçamento entre os pregos é $s = 63{,}5$ mm, determine a força cortante em cada prego.

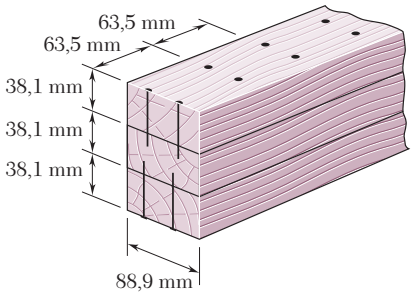


Fig. P6.89

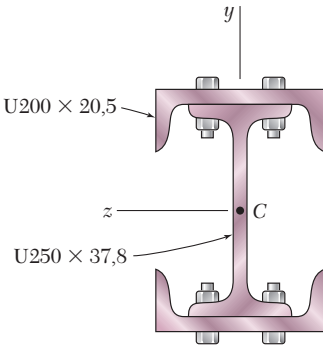


Fig. *P6.90*

6.90 Uma coluna é fabricada conectando-se dois perfis laminados de aço, com parafusos de diâmetro igual a 19,05 mm espaçados longitudinalmente a cada 127 mm, os elementos laminados mostrados. Determine a tensão de cisalhamento média nos parafusos causada pela força cortante de 133,4 kN paralela ao eixo *y*.

6.91 Para a viga e o carregamento mostrados, considere a seção *n*-*n* e determine (*a*) a maior tensão de cisalhamento naquela seção e (*b*) a tensão de cisalhamento no ponto *a*.

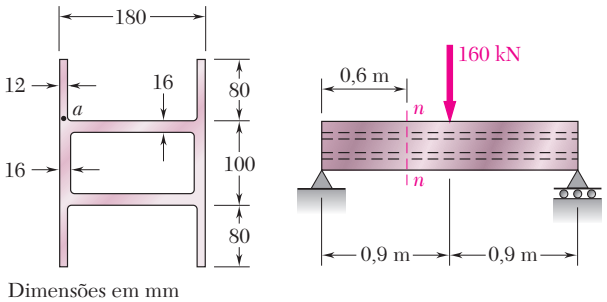


Fig. P6.91

6.92 Para a viga e o carregamento mostrados, considere a seção *n-n* e determine a tensão de cisalhamento no (*a*) ponto *a* e no (*b*) ponto *b*.

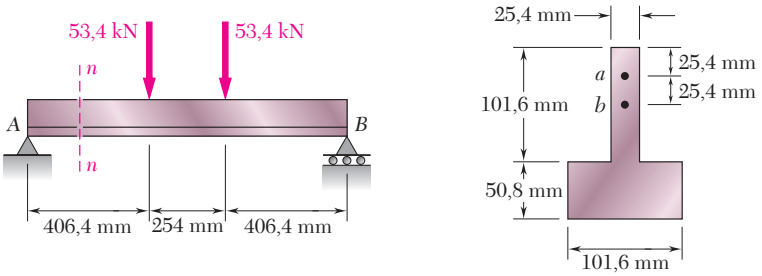


Fig. P6.92

6.93 Para a viga e o carregamento do Problema 6.92, determine a maior tensão de cisalhamento na seção *n-n*.

6.94 Algumas pranchas são coladas para formar a seção de viga caixão mostrada. Sabendo que essa viga é submetida a uma força cortante vertical de 3 kN, determine a tensão de cisalhamento média na junta colada (*a*) em A e (*b*) em B.

6.95 Sabendo que a viga de perfil laminado W360 × 122 está submetida a um carregamento vertical cortante de 250 kN, determine a tensão de cisalhamento (*a*) no ponto *a* e (*b*) no centroide *C* da seção.

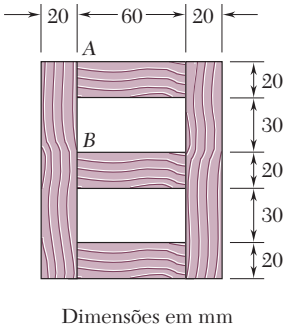


Fig. P6.94

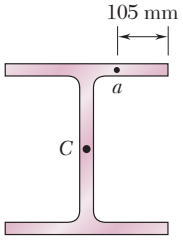


Fig. *P6.95*

6.96 Uma viga consiste de cinco tábuas com seção transversal de 38,1 × 152,4 mm, conectadas por parafusos de aço com um espaçamento longitudinal de 228,6 mm. Sabendo que a força cortante na viga é vertical e igual a 8 896 kN, e que a tensão de cisalhamento média admissível em cada parafuso é de 51,7 MPa, determine o menor diâmetro permitido para o parafuso que pode ser usado.

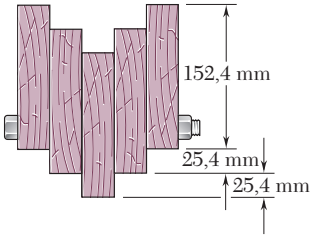
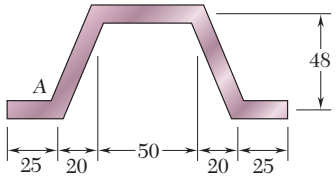


Fig. P6.96

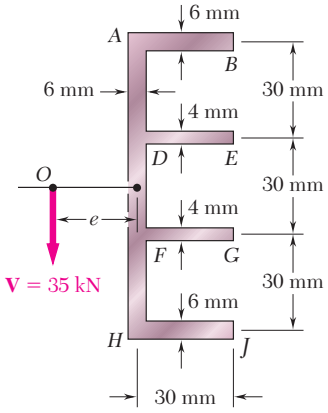
6.97 A chapa de 4 mm de espessura é dobrada conforme a figura e depois é usada como viga. Para uma força cortante vertical de 12 kN, determine (*a*) a tensão de cisalhamento no ponto *A* e (*b*) a máxima tensão de cisalhamento na viga. Faça um esboço do fluxo de cisalhamento na seção transversal.



Dimensões em mm

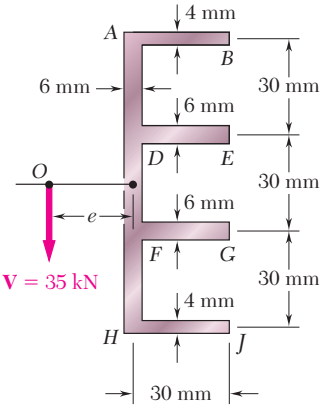
Fig. P6.96

6.98 e *6.99* Para a viga extrudada de seção transversal mostrada, determine (*a*) a localização do centro de cisalhamento *O* e (*b*) a distribuição das tensões de cisalhamento provocadas pela força cortante vertical **V** mostrada aplicada em *O*.



$I_z = 1{,}149 \times 10^6\ \text{mm}^4$

Fig. P6.98



$I_z = 0{,}933 \times 10^6\ \text{mm}^4$

Fig. *P6.99*

6.100 Determine a localização do centro de cisalhamento *O* de uma viga de paredes finas, de espessura uniforme, como a seção transversal mostrada na figura.

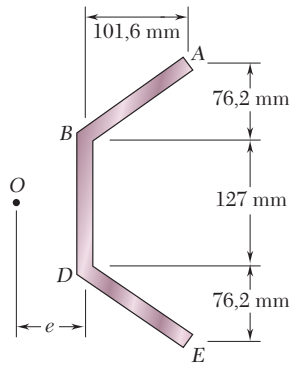


Fig. P6.100

PROBLEMAS PARA COMPUTADOR

Os problemas a seguir devem ser resolvidos no computador.

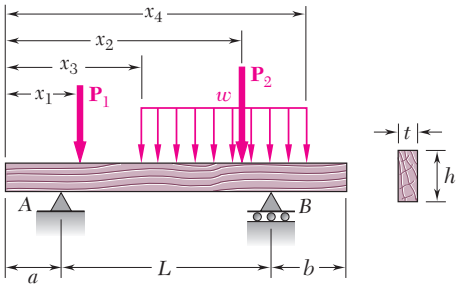


Fig. P6.C1

6.C1 Uma viga de madeira deve ser projetada para suportar uma força distribuída e até duas forças concentradas conforme mostra a figura. Uma das dimensões de sua seção transversal retangular uniforme foi especificada e a outra precisa ser determinada de maneira que a tensão normal máxima e a tensão de cisalhamento máxima na viga não excedam os valores admissíveis dados de σ_{adm} e τ_{adm}. Medindo x a partir da extremidade A, elabore um programa de computador que calcule para seções transversais sucessivas — desde $x = 0$ até $x = L$ e usando os incrementos Δx dados — a força cortante, o momento fletor e o menor valor da dimensão desconhecida que satisfaça naquela seção (1) a condição da tensão normal admissível, (2) a condição da tensão de cisalhamento admissível. Use esse programa para projetar as vigas de seção transversal uniforme dos problemas seguintes, considerando $\sigma_{adm} = 12$ MPa e $\tau_{adm} = 825$ kPa, e usando os incrementos indicados: (*a*) Problema 5.65 ($\Delta x = 0{,}1$ m), (*b*) Problema 5.157 ($\Delta x = 0{,}2$ m).

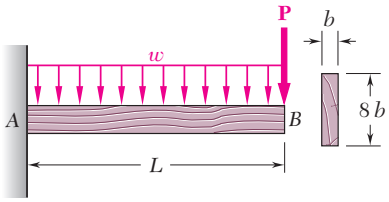


Fig. P6.C2

6.C2 Uma viga em balanço AB de comprimento L e de seção transversal retangular uniforme mostrada na figura suporta uma força concentrada **P** em sua extremidade livre e uma força uniformemente distribuída w ao longo de todo o seu comprimento. Elabore um programa de computador para determinar o comprimento L e a largura b da viga para a qual a tensão normal máxima e a tensão de cisalhamento máxima na viga atinjam os maiores valores admissíveis. Considerando $\sigma_{adm} = 12{,}4$ MPa e $\tau_{adm} = 0{,}83$ MPa, use esse programa para determinar as dimensões L e b quando (*a*) $P = 4{,}45$ kN e $w = 0$, (*b*) $P = 0$ e $w = 2{,}2$ kN/m, (*c*) $P = 2{,}225$ kN e $w = 2{,}2$ kN/m.

6.C3 Uma viga com a seção transversal mostrada na figura é submetida a uma força cortante vertical **V**. Elabore um programa de computador que possa ser utilizado para calcular a tensão de cisalhamento ao longo da linha entre duas áreas retangulares adjacentes quaisquer que formam a seção transversal. Use esse programa para resolver (*a*) Problema 6.10, (*b*) Problema 6.12 e (*c*) Problema 6.21.

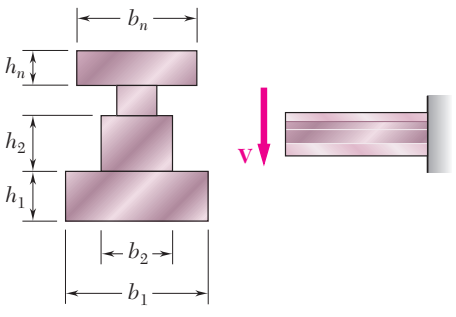


Fig. P6.C3

6.C4 Uma placa de espessura uniforme t é dobrada para formar uma viga com um plano vertical de simetria, conforme mostra a figura. Elabore um programa de computador que possa ser utilizado para determinar a distribuição de tensões de cisalhamento provocadas pela força cortante vertical **V**. Use esse programa (*a*) para resolver o Problema 6.47 e (*b*) para encontrar a tensão de cisalhamento em um ponto E para o perfil e a força do Problema 6.50, considerando uma espessura $t = 6{,}35$ mm.

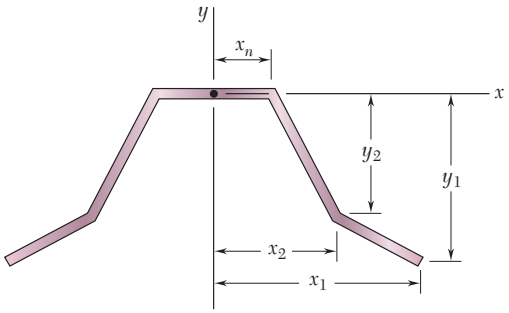


Fig. P6.C4

6.C5 A seção transversal de uma viga extrudada é simétrica em relação ao eixo x e é formada por vários segmentos retos, conforme mostra a figura. Elabore um programa de computador que possa ser utilizado para determinar (*a*) a localização do centro de cisalhamento O e (*b*) a distribuição das tensões de cisalhamento provocadas por uma força cortante vertical aplicada no ponto O. Use esse programa para resolver os Problemas 6.66 e 6.70.

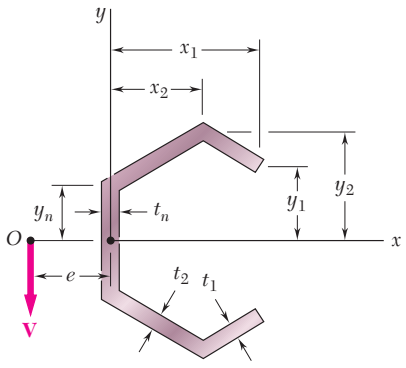


Fig. P6.C5

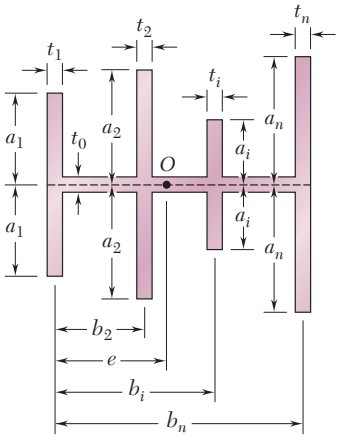


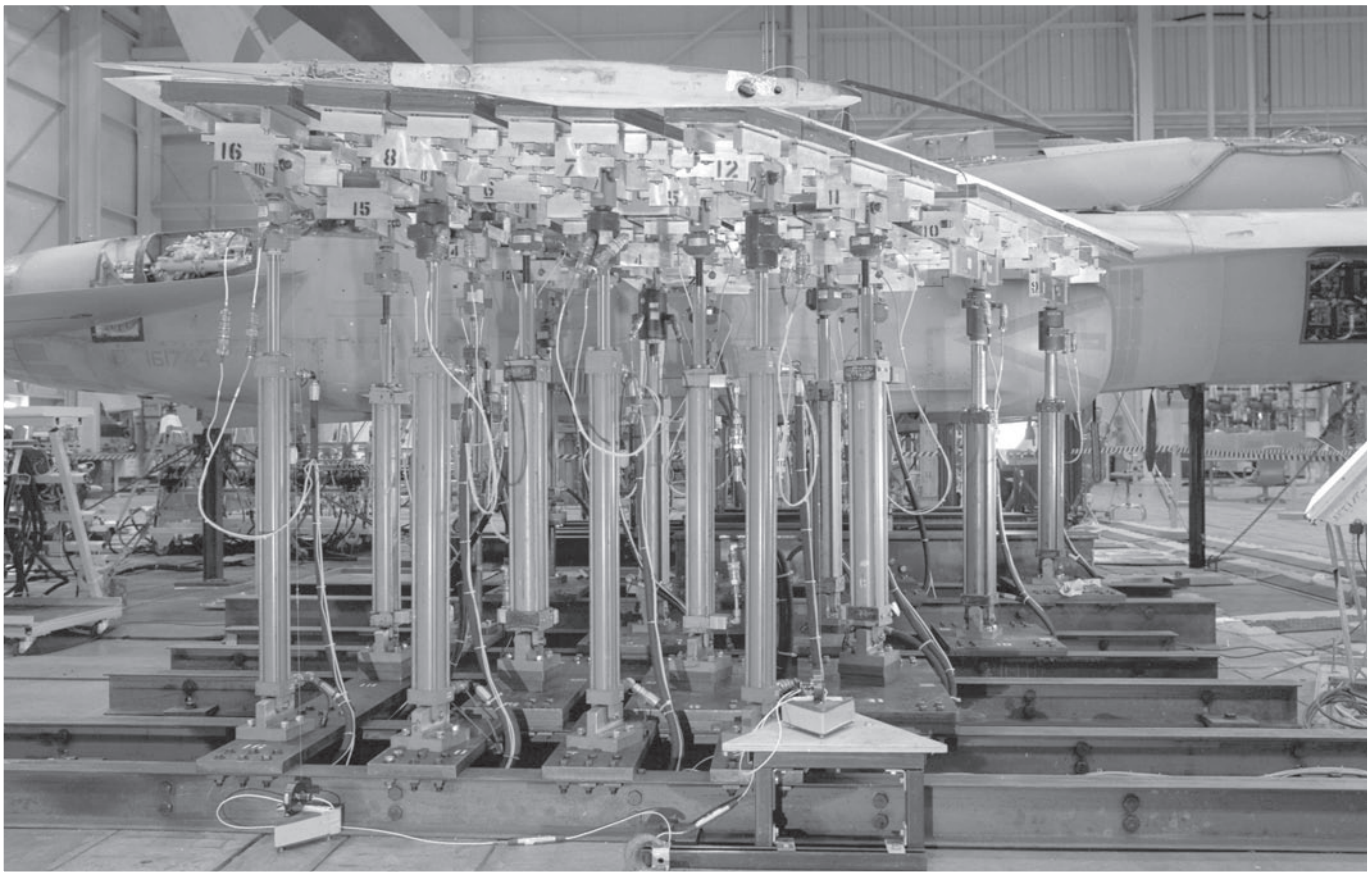
Fig. P6.C6

6.C6 Uma viga de paredes finas tem a seção transversal mostrada na figura. Elabore um programa de computador que possa ser utilizado para determinar a localização do centro de cisalhamento O da seção transversal. Use esse programa para resolver o Problema 6.75.

CAPÍTULO

7

Transformações de tensão e deformação



O avião mostrado está passando por ensaios a fim de determinar os esforços de sustentação que se distribuem pela asa. Este capítulo trata das tensões e deformações em estruturas e componentes de máquinas.

7.1. Introdução

Vimos na Seção 1.12 que o estado mais geral de tensão em um dado ponto Q pode ser representado por seis componentes. Três dessas componentes, σ_x, σ_y e σ_z, definem as tensões normais que atuam nas faces de um pequeno elemento de volume centrado em Q e com a mesma orientação dos eixos de coordenadas (Fig. 7.1*a*), e as outras três, τ_{xy}, τ_{yz} e τ_{zx},† definem as componentes das tensões de cisalhamento no mesmo elemento. Conforme destacamos na ocasião, o mesmo estado de tensão poderá ser representado por um conjunto diferente de componentes se os eixos de coordenadas sofrerem uma rotação em relação aos primeiros (Fig. 7.1*b*). Propomos na primeira parte deste capítulo determinar como as componentes de tensão são transformadas quando uma rotação dos eixos de coordenadas é realizada. A segunda parte do capítulo será dedicada a uma análise similar da transformação das componentes de

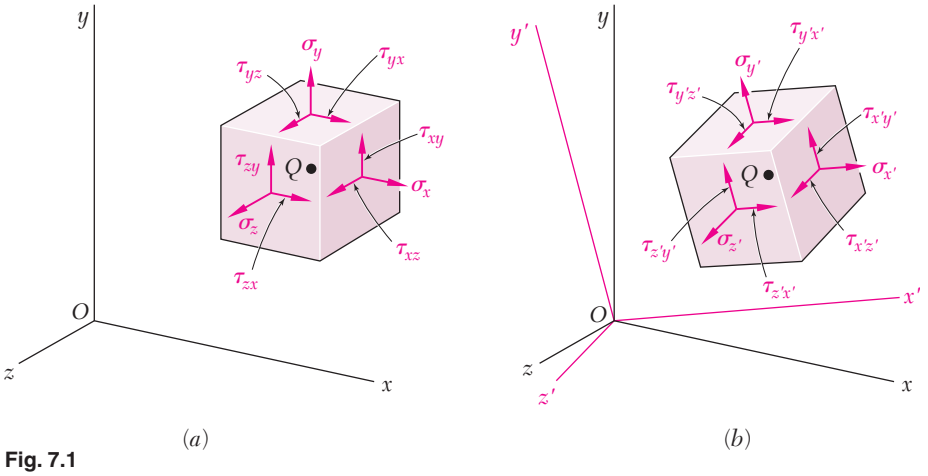


Fig. 7.1

deformação específica.

Nossa discussão sobre a transformação de tensão tratará principalmente do *estado plano de tensão*, isto é, de uma situação na qual duas das faces do elemento de volume estão livres de qualquer tensão. Se o eixo z for escolhido como perpendicular a essas faces, temos $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$, e as únicas componentes de tensão restantes são σ_x, σ_y e τ_{xy} (Fig. 7.2). Uma situação assim ocorre em uma placa fina submetida a forças que atuam no plano médio da espessura da placa (Fig. 7.3). Ela ocorre também na superfície livre de um elemento estrutural ou componente de máquina, isto é, em qualquer ponto da superfície daquele ele-

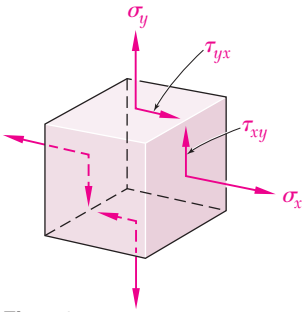


Fig. 7.2

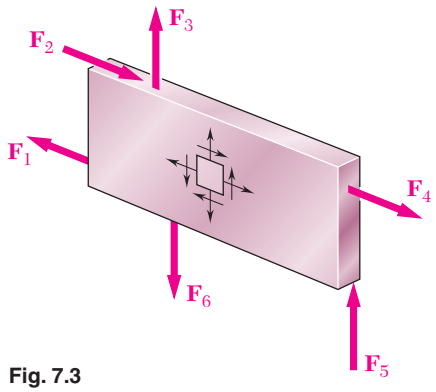


Fig. 7.3

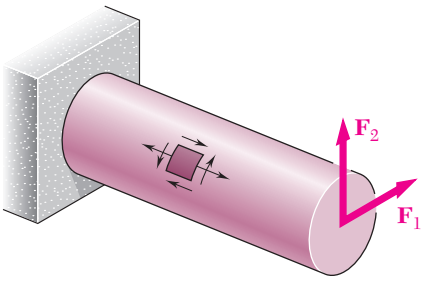


Fig. 7.4

†Lembramos que $\tau_{yx} = \tau_{xy}$, $\tau_{zy} = \tau_{yz}$ e $\tau_{xz} = \tau_{zx}$.

mento ou componente que não esteja submetido a uma força externa (Fig. 7.4).

Considerando na Seção 7.2 um estado plano de tensão em um dado ponto Q caracterizado pelas componentes de tensão σ_x, σ_y, e τ_{xy} associadas com o elemento mostrado na Fig. 7.5*a*, você aprenderá a determinar as componentes $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ e $\tau_{x'y'}$ associadas com aquele elemento depois que ele sofreu uma rotação de um ângulo θ em torno do eixo z (Fig. 7.5*b*). Na Seção 7.3, você determinará o valor θ_p de θ para o qual as tensões $\sigma_{x'}$ e $\sigma_{y'}$ são, respectivamente, máximo e mínimo; esses valores da tensão normal são as *tensões principais* no ponto Q, e as faces correspondentes do elemento definem os *planos principais de tensão* naquele ponto. Você determinará também o valor de θ_c do ângulo de rotação para o qual a tensão de cisalhamento é máxima, bem como o valor daquela tensão.

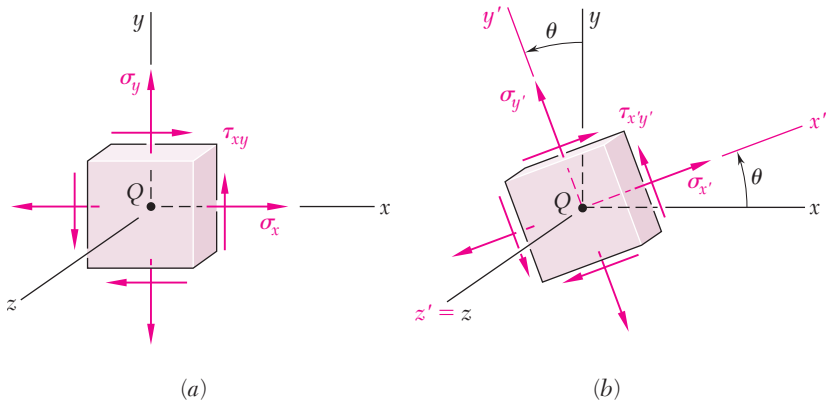


Fig. 7.5

Na Seção 7.4 será apresentado um método alternativo para a solução de problemas que envolvem estado plano de tensão, a transformação de tensões planas com base no uso do *círculo de Mohr*.

Na Seção 7.5, vamos considerar o *estado tridimensional de tensão* em um dado ponto. Será desenvolvida uma fórmula para a determinação da tensão normal em um plano de orientação arbitrária naquele ponto. Na Seção 7.6, discutiremos as rotações de um elemento de volume em relação a cada um dos eixos principais de tensão e veremos que as transformações de tensão correspondentes podem ser descritas por três diferentes círculos de Mohr. Você observará também que, no caso de um estado *plano de tensão* em um dado ponto, o valor máximo da tensão de cisalhamento obtida anteriormente, considerando rotações no plano de tensão, não representa necessariamente a tensão de cisalhamento máxima naquele ponto. Isso o levará a distinguir entre tensões de cisalhamento máximas *no plano* e *fora do plano das tensões*.

O *critério de escoamento* para materiais dúcteis em estado plano de tensão será desenvolvido na Seção 7.7. Para prever se um dado material escoará em algum ponto crítico sob condições dadas de carregamento, você determinará as tensões principais σ_a e σ_b naquele ponto e verificará se σ_a, σ_b e a tensão de escoamento σ_E do material satisfazem a algum critério. Dois critérios de uso comum são: o *critério da tensão de cisalhamento máxima* e o *critério da energia de distorção máxima*. Na Seção 7.8, serão desenvolvidos de modo similar *critérios de fratura* para materiais frágeis submetidos a estado plano de tensão; esses critérios envolverão as tensões principais σ_a e σ_b em algum ponto crítico e o limite de tensão σ_L do material. Serão discutidos dois critérios: o critério da *tensão normal máxima* e o *critério de Mohr*.

Os *vasos de pressão de paredes finas* proporcionam uma aplicação importante para a análise do estado plano de tensão. Na Seção 7.9, discutiremos as tensões em vasos de pressão cilíndricos e esféricos (Figs. 7.6 e 7.7).

Fig. 7.6

Fig. 7.7

As Seções 7.10 e 7.11 serão dedicadas a uma discussão da *transformação do estado plano de deformação* e do *círculo de Mohr para o estado plano de deformação*. Na Seção 7.12 vamos considerar a análise tridimensional da deformação específica e veremos como os círculos de Mohr podem ser utilizados para determinar a deformação de cisalhamento máxima em um dado ponto. Dois casos particulares são de interesse especial e não devem ser confundidos: o caso de *estado plano de deformação* e o caso de *estado plano de tensão*.

Finalmente, na Seção 7.13 discutiremos o uso dos extensômetros para medir a deformação específica normal na superfície de um elemento estrutural ou componente de máquina. Você verá como as componentes ϵ_x, ϵ_y e τ_{xy}, caracterizando o estado de deformação específica em um dado ponto, podem ser calculadas a partir das medidas feitas com três extensômetros de deformação formando uma *roseta de deformação*.

7.2. Transformação do estado plano de tensão

Vamos considerar que existe um estado plano de tensão para o ponto Q (com $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$), e que ele é definido pelas componentes de tensão σ_x, σ_y e τ_{xy} associadas ao elemento mostrado na Fig. 7.5*a*. Propomos determinar as componentes de tensão $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ e $\tau_{x'y'}$ associadas ao elemento depois que ele sofreu uma rotação de um ângulo θ em torno do eixo z (Fig. 7.5*b*), e expressar essas componentes em termos de σ_x, σ_y, τ_{xy} e θ.

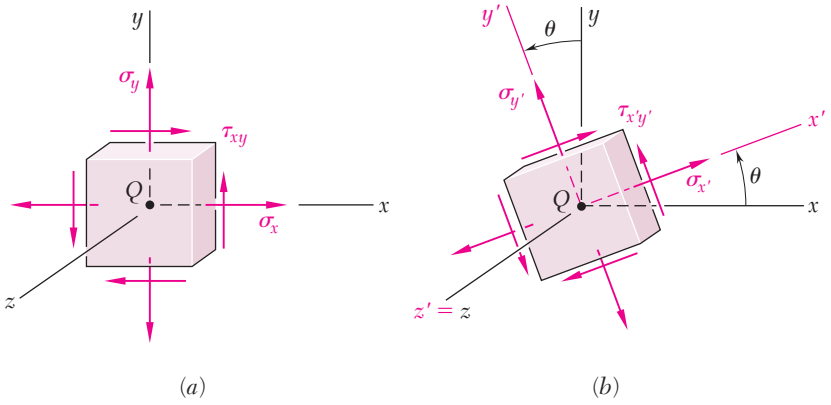


Fig. 7.5 (repetida)

Para determinar a tensão normal $\sigma_{x'}$ e a tensão de cisalhamento $\tau_{x'y'}$ que atuam na face perpendicular ao eixo x', consideramos um elemento prismático com faces respectivamente perpendiculares aos eixos x, y e x' (Fig. 7.8*a*). Observamos que, se a área da face oblíqua é representada por ΔA, as áreas das faces vertical e horizontal são, respectivamente, iguais a $\Delta A \cos\theta$ e $\Delta A \operatorname{sen}\theta$. Conclui-se que as *forças resultantes* que atuam nas três faces são aquelas mostradas na Fig. 7.8*b*. (Não há forças aplicadas nas faces triangulares do elemento visto que as tensões, normal e de cisalhamento

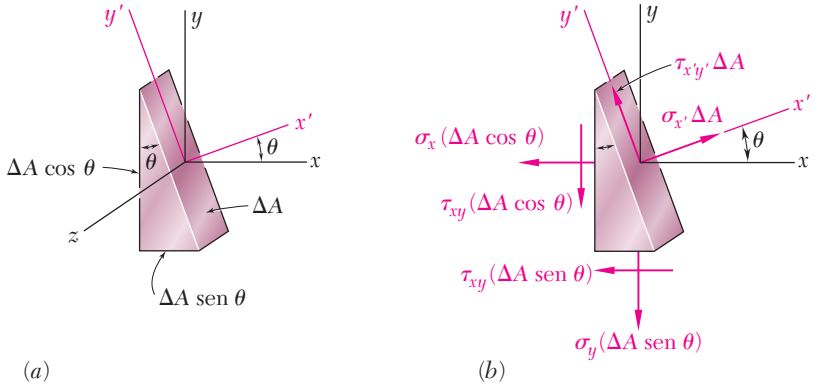


Fig. 7.8

correspondentes, foram todas consideradas iguais a zero.) Usando as componentes ao longo dos eixos x' e y', escrevemos as seguintes equações de equilíbrio:

$$\Sigma F_{x'} = 0: \quad \sigma_{x'}\,\Delta A - \sigma_x(\Delta A \cos\theta)\cos\theta - \tau_{xy}(\Delta A \cos\theta)\operatorname{sen}\theta - \sigma_y(\Delta A \operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta - \tau_{xy}(\Delta A \operatorname{sen}\theta)\cos\theta = 0$$

$$\Sigma F_{y'} = 0: \quad \tau_{x'y'}\,\Delta A + \sigma_x(\Delta A \cos\theta)\operatorname{sen}\theta - \tau_{xy}(\Delta A \cos\theta)\cos\theta - \sigma_y(\Delta A \operatorname{sen}\theta)\cos\theta + \tau_{xy}(\Delta A \operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta = 0$$

Resolvendo a primeira equação para $\sigma_{x'}$ e a segunda para $\tau_{x'y'}$, temos

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \operatorname{sen}^2\theta + 2\tau_{xy} \operatorname{sen}\theta \cos\theta \tag{7.1}$$

$$\tau_{x'y'} = -(\sigma_x - \sigma_y) \operatorname{sen}\theta \cos\theta + \tau_{xy}(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) \tag{7.2}$$

Usando as relações trigonométricas

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \qquad \cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta \tag{7.3}$$

e

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \qquad \operatorname{sen}^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \tag{7.4}$$

escrevemos a Equação (7.1) da seguinte maneira

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + \sigma_y \frac{1 - \cos 2\theta}{2} + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta$$

ou

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta \tag{7.5}$$

Usando as relações (7.3), escrevemos a Equação (7.2) da seguinte maneira

$$\tau_{x'y} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \operatorname{sen} 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \tag{7.6}$$

A expressão para a tensão normal $\sigma_{y'}$ é obtida substituindo-se θ na Equação (7.5) pelo ângulo $\theta + 90°$, que é o ângulo que o eixo y' forma com o eixo x. Como $\cos(2\theta + 180°) = -\cos 2\theta$ e $\operatorname{sen}(2\theta + 180°) = -\operatorname{sen} 2\theta$, temos

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta \tag{7.7}$$

Somando as Equações (7.5) e (7.7) membro a membro, obtemos

$$\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y \tag{7.8}$$

Como $\sigma_z = \sigma_{z'} = 0$, verificamos então que, no caso de estado plano de tensão, a soma das tensões normais que atuam no elemento de volume do material é independente da orientação desse elemento.†

†Cf. nota de rodapé na página 88.

7.3. Tensões principais e tensão de cisalhamento máxima

As Equações (7.5) e (7.6) obtidas na seção anterior são as equações paramétricas de uma circunferência. Isso significa que, se escolhermos um sistema de eixos cartesianos ortogonais e representarmos um ponto M de abscissa $\sigma_{x'}$ e ordenada $\tau_{x'y'}$ para um dado valor do parâmetro θ, todos os pontos assim obtidos pertencerão a uma circunferência. Para estabelecer essa propriedade eliminamos θ das Equações (7.5) e (7.6); isso é feito passando primeiro $(\sigma_x + \sigma_y)/2$ para o primeiro membro da Equação (7.5) e elevando ao quadrado ambos os membros da equação, depois elevando ao quadrado ambos os membros da Equação (7.6), e finalmente somando membro a membro as duas equações obtidas dessa forma. Temos

$$\left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 \tag{7.9}$$

Definindo

$$\sigma_{\text{méd}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad \text{e} \quad R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{7.10}$$

escrevemos a identidade (7.9) na forma

$$(\sigma_{x'} - \sigma_{\text{méd}})^2 + \tau_{x'y'}^2 = R^2 \tag{7.11}$$

que é a equação de uma circunferência de raio R centrado no ponto C de abscissa $\sigma_{\text{méd}}$ e ordenada 0 (Fig. 7.9). Pode-se observar que, em virtude da simetria da circunferência em relação ao eixo horizontal, o mesmo resultado teria sido obtido se, em vez de representar o ponto M, tivéssemos representado um ponto N de abscissa $\sigma_{x'}$ e ordenada $-\tau_{x'y'}$ (Fig. 7.10). Essa propriedade será usada na Seção 7.4.

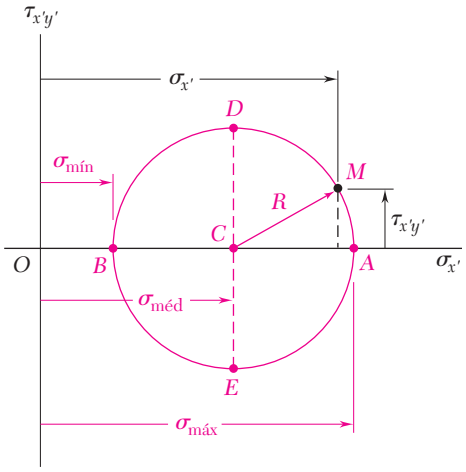


Fig. 7.9

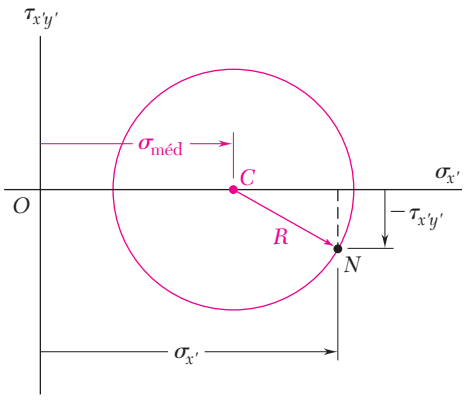


Fig. 7.10

Os dois pontos A e B em que a circunferência da Fig. 7.9 intercepta o eixo horizontal são de especial interesse: o ponto A corresponde ao valor máximo da tensão normal $\sigma_{x'}$, enquanto o ponto B corresponde a seu valor mínimo. Além

disso, ambos os pontos correspondem a um valor zero da tensão de cisalhamento $\tau_{x'y'}$. Assim, os valores θ_p do parâmetro θ que correspondem aos pontos A e B podem ser obtidos fazendo-se $\tau_{x'y'} = 0$ na Equação (7.6). Escrevemos†

$$\operatorname{tg} 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \tag{7.12}$$

Essa equação define dois valores de $2\theta_p$ que estão defasados em 180° e, portanto, dois valores de θ_p que estão defasados em 90°. Qualquer um desses valores pode ser utilizado para determinar a orientação do elemento correspondente (Fig. 7.11). Os planos que contêm as faces do elemento obtido dessa maneira são chamados de *planos principais de tensão* no ponto Q, e os valo-

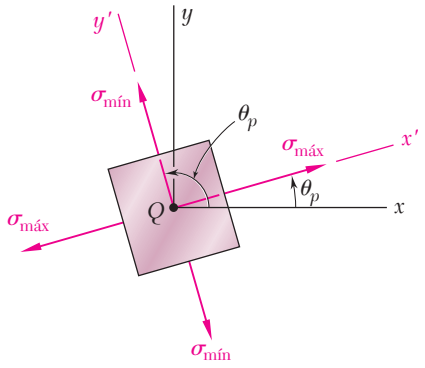


Fig. 7.11

res correspondentes $\sigma_{máx}$ e $\sigma_{mín}$ das tensões normais que atuam nesses planos são chamados de *tensões principais* em Q. Como os dois valores θ_p definidos pela Equação (7.12) foram obtidos fazendo-se $\tau_{x'y'} = 0$ na Equação (7.6), está claro que nenhuma tensão de cisalhamento atua nos planos principais.

Observamos da Fig. 7.9 que

$$\sigma_{máx} = \sigma_{méd} + R \qquad \text{e} \qquad \sigma_{mín} = \sigma_{méd} - R \tag{7.13}$$

Substituindo $\sigma_{méd}$ e R da Equação (7.10), escrevemos

$$\sigma_{máx,\,mín} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{7.14}$$

A menos que seja possível dizer por inspeção qual dos dois planos principais está submetido a $\sigma_{máx}$ e qual está submetido a $\sigma_{mín}$, é necessário substituir um dos valores de θ_p na Equação (7.5) para determinar qual dos dois planos corresponde ao valor máximo da tensão normal.

Voltando novamente à circunferência da Fig. 7.9, notamos que os pontos D e E localizados no diâmetro vertical da circunferência correspondem ao maior valor numérico da tensão de cisalhamento $\tau_{x'y'}$. Como a abscissa dos pontos D e E é $\sigma_{méd} = (\sigma_x + \sigma_y)/2$, os valores de θ_c do parâmetro θ correspondentes a esses pontos são obtidos fazendo-se $\sigma_{x'} = (\sigma_x + \sigma_y)/2$ na Equa-

†Essa relação pode também ser obtida determinando-se que a derivada de $\sigma_{x'}$ na Equação (7.5) seja igual a zero: $d\sigma_{x'}/d\theta = 0$.

ção (7.5). Conclui-se que a soma dos dois últimos termos naquela equação deve ser zero. Assim, para $\theta = \theta_c$, escrevemos†

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta_c + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta_c = 0$$

ou

$$\operatorname{tg} 2\theta_c = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \tag{7.15}$$

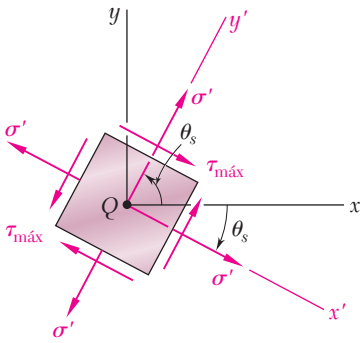


Fig. 7.12

Essa equação define dois valores $2\theta_c$ defasados em 180° e, portanto, dois valores θ_c defasados em 90°. Qualquer um desses valores pode ser utilizado para determinar a orientação do elemento correspondente à tensão de cisalhamento máxima (Fig. 7.12). Observando na Fig. 7.9 que o valor máximo da tensão de cisalhamento é igual ao raio R da circunferência, e lembrando a segunda das Equações (7.10), escrevemos

$$\tau_{\text{máx}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{7.16}$$

Conforme observamos anteriormente, a tensão normal correspondente à condição de tensão de cisalhamento máxima é

$$\sigma' = \sigma_{\text{méd}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \tag{7.17}$$

Comparando as Equações (7.12) e (7.15), notamos que $\operatorname{tg} 2\theta_c$ é o inverso negativo de $\operatorname{tg} 2\theta_p$. Isso significa que os ângulos $2\theta_c$ e $2\theta_p$ estão defasados em 90° e, portanto, que os ângulos θ_c e θ_p estão defasados em 45°. Concluímos então que *os planos de tensão de cisalhamento máxima estão defasados em 45° dos planos principais*. Isso confirma os resultados obtidos anteriormente na Seção 1.12 no caso de um carregamento axial centrado (Fig. 1.40) e na Seção 3.4 no caso de um carregamento de torção (Fig. 3.20).

Devemos estar cientes de que nossa análise da transformação da tensão no estado plano de tensão esteve limitada a rotações *no plano da tensão*. Se o elemento de volume da Fig. 7.5 sofrer rotações em torno de um eixo que não seja o eixo z, suas faces podem estar submetidas a tensões de cisalhamento maiores do que a tensão definida pela Equação (7.16). Conforme veremos na Seção 7.5, isso ocorre quando as tensões principais definidas pela Equação (7.14) têm o mesmo sinal, isto é, quando ambas são de tração ou de compressão. Assim, o valor dado pela Equação (7.16) é chamado de tensão de cisalhamento máxima *no plano da tensão*.

†Essa relação pode também ser obtida determinando-se que a derivada de $\tau_{x'y'}$ na Equação (7.6) seja igual a zero: $d\tau_{x'y'}/d\theta = 0$.

EXEMPLO 7.1

Para o estado plano de tensão mostrado na Fig. 7.13, determine (*a*) os planos principais, (*b*) as tensões principais e (*c*) a tensão de cisalhamento máxima e a tensão normal correspondente.

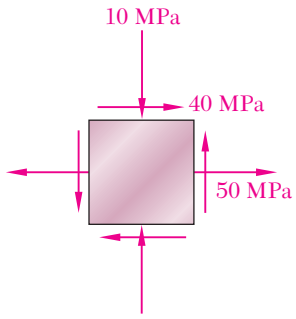


Fig. 7.13

(a) Planos principais. Seguindo a convenção usual de sinais, escrevemos as componentes de tensão como

$$\sigma_x = +50 \text{ MPa} \qquad \sigma_y = -10 \text{ MPa} \qquad \tau_{xy} = +40 \text{ MPa}$$

Substituindo na Equação (7.12), temos

$$\text{tg } 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2(+40)}{50 - (-10)} = \frac{80}{60}$$
$$2\theta_p = 53{,}1° \quad \text{e} \quad 180° + 53{,}1° = 233{,}1°$$
$$\theta_p = 26{,}6° \quad \text{e} \quad 116{,}6°$$

(b) Tensões principais. A Equação (7.14) fornece

$$\sigma_{\text{máx, mín}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$
$$= 20 \pm \sqrt{(30)^2 + (40)^2}$$
$$\sigma_{\text{máx}} = 20 + 50 = 70 \text{ MPa}$$
$$\sigma_{\text{mín}} = 20 - 50 = -30 \text{ MPa}$$

Os planos e as tensões principais estão esboçados na Fig. 7.14. Fazendo $\theta = 26{,}6°$ na Equação (7.5), verificamos que a tensão normal que atua na face *BC* do elemento é a tensão máxima

$$\sigma_{x'} = \frac{50 - 10}{2} + \frac{50 + 10}{2} \cos 53{,}1° + 40 \text{ sen } 53{,}1°$$
$$= 20 + 30 \cos 53{,}1° + 40 \text{ sen } 53{,}1° = 70 \text{ MPa} = \sigma_{\text{máx}}$$

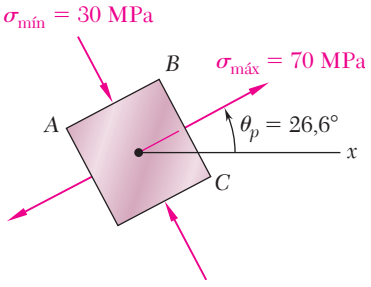


Fig. 7.14

(c) Tensão de cisalhamento máxima. A Equação (7.16) fornece

$$\tau_{\text{máx}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{(30)^2 + (40)^2} = 50 \text{ MPa}$$

Como $\sigma_{\text{máx}}$ e $\sigma_{\text{mín}}$ têm sinais opostos, o valor obtido para $\tau_{\text{máx}}$ realmente representa o valor máximo da tensão de cisalhamento no ponto considerado. A orientação dos planos de tensão de cisalhamento máxima e o sentido das tensões de cisalhamento são melhor determinados cortando-se o elemento por uma seção ao longo do plano diagonal *AC* do elemento da Fig. 7.14. Como as faces *AB* e *BC* do elemento estão contidas nos planos principais, o plano diagonal *AC* deve ser um dos planos de tensão de cisalhamento máxima (Fig. 7.15).

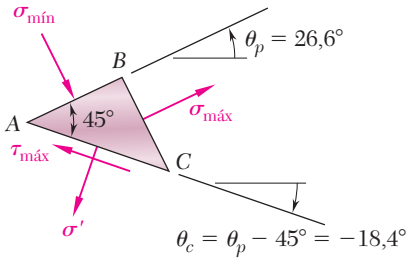


Fig. 7.15

Além disso, as condições de equilíbrio para o elemento prismático *ABC* requerem que a tensão de cisalhamento que atua em *AC* seja direcionada conforme mostra a figura. O elemento de volume correspondente à tensão de cisalhamento máxima é mostrado na Fig. 7.16. A tensão normal em cada uma das quatro faces do elemento é dada pela Equação (7.17)

$$\sigma' = \sigma_{\text{méd}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{50 - 10}{2} = 20 \text{ MPa}$$

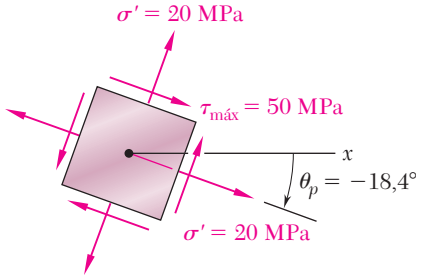
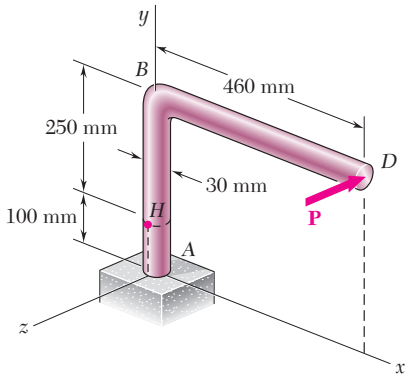
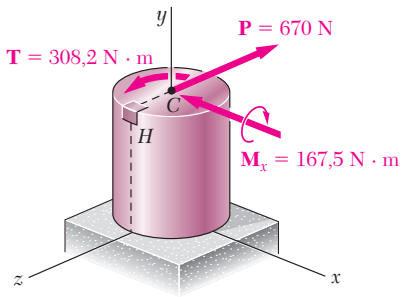


Fig. 7.16



PROBLEMA RESOLVIDO 7.1

Uma única força horizontal **P** de intensidade de 670 N é aplicada à extremidade *D* da alavanca *ABD*. Sabendo que a parte *AB* da alavanca tem um diâmetro de 30 mm, determine (*a*) as tensões normal e de cisalhamento em um elemento localizado no ponto *H* e que possui lados paralelos aos eixos *x* e *y* e (*b*) os planos e tensões principais no ponto *H*.

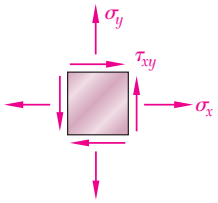


SOLUÇÃO

Sistema de força e momento. Substituímos a força **P** por um sistema de força e momento equivalente no centro *C* da seção transversal que contém o ponto *H*:

$$P = 670\ \text{N} \qquad T = (670\ \text{N})(0{,}46\ \text{m}) = 308{,}2\ \text{N} \cdot \text{m}$$
$$M_x = (670\ \text{N})(0{,}25\ \text{m}) = 167{,}5\ \text{N} \cdot \text{m}$$

***a*. Tensões σ_x, σ_y, τ_{xy} no ponto *H*.** Usando a convenção de sinais mostrada na Fig. 7.2, determinamos o sentido e o sinal de cada um dos componentes de tensão examinando cuidadosamente o esboço do sistema de força e momento no ponto *C*

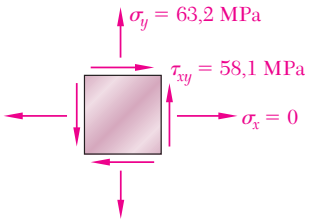


$$\sigma_x = 0 \qquad \sigma_y = +\frac{Mc}{I} = +\frac{(167{,}5\ \text{N} \cdot \text{m})(0{,}015\ \text{m})}{\frac{1}{4}\pi\,(0{,}015\ \text{m})^4} \qquad \sigma_y = 63{,}2\ \text{MPa} \blacktriangleleft$$

$$\tau_{xy} = +\frac{Tc}{J} = +\frac{(308{,}2\ \text{N} \cdot \text{m})(0{,}015\ \text{m})}{\frac{1}{2}\pi\,(0{,}015\ \text{m})^4} \qquad \tau_{xy} = 58{,}1\ \text{MPa} \blacktriangleleft$$

Notamos que a força cortante **P** não provoca qualquer tensão de cisalhamento no ponto *H*.

***b*. Planos principais e tensões principais.** Substituindo os valores dos componentes de tensão na Equação (7.12), determinamos a orientação dos planos principais

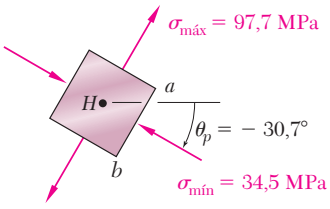


$$\text{tg}\,2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2(58{,}1)}{0 - 63{,}2} = -1{,}84$$
$$2\theta_p = -61{,}5° \qquad \text{e} \qquad 180° - 61{,}5° = +118{,}5°$$
$$\theta_p = -30{,}7° \qquad \text{e} \qquad +59{,}3° \blacktriangleleft$$

Substituindo na Equação (7.14), determinamos as intensidades das tensões principais

$$\sigma_{\text{máx, mín}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$
$$= \frac{0 + 63{,}2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0 - 63{,}2}{2}\right)^2 + (58{,}1)^2} = +31{,}6 \pm 66{,}1$$

$$\sigma_{\text{máx}} = +97{,}7\ \text{MPa} \blacktriangleleft$$
$$\sigma_{\text{mín}} = -34{,}5\ \text{MPa} \blacktriangleleft$$



Considerando a face *ab* do elemento mostrado, fazemos $\theta_p = -30{,}7°$ na Equação (7.5) e encontramos $\sigma_{x'} = -34{,}5$ MPa. Concluímos que as tensões principais são aquelas mostradas na figura.

PROBLEMAS

7.1 até 7.4 Para os estados de tensão mostrados nas figuras, determine as tensões normal e de cisalhamento que atuam na face oblíqua do elemento triangular sombreado na figura. Use um método de análise com base no equilíbrio daquele elemento, como foi feito nas deduções da Seção 7.2.

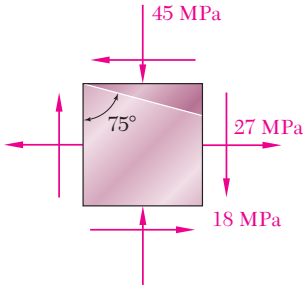


Fig. P7.1

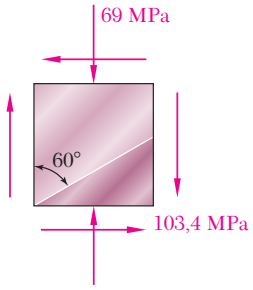


Fig. P7.2

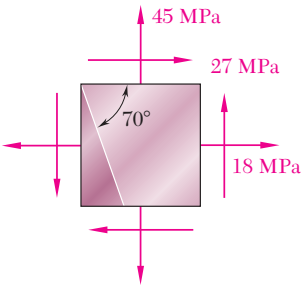


Fig. P7.3

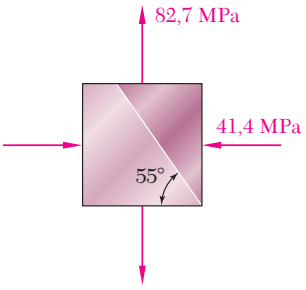
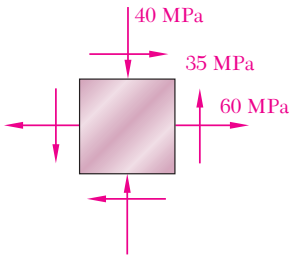
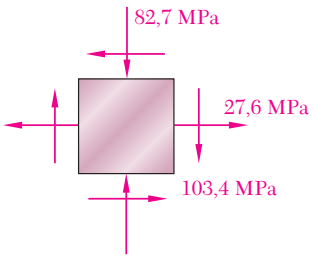


Fig. P7.4

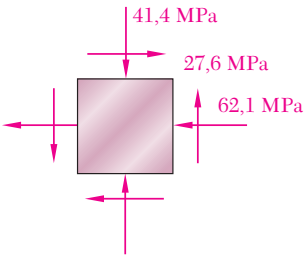
7.5 até 7.8 Para o estado de tensão dado, determine (*a*) os planos principais e (*b*) as tensões principais.



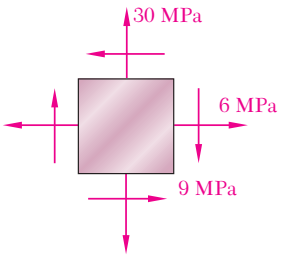
Figs. P7.5 e P7.9



Figs. *P7.6* e P7.10



Figs. *P7.7* e P7.11



Figs. P7.8 e P7.12

7.9 até *7.12* Para o estado de tensão dado, determine (*a*) a orientação dos planos de máxima tensão de cisalhamento no plano das tensões e (*b*) a tensão normal correspondente.

***7.13* até 7.16** Para o estado de tensão dado, determine as tensões normal e de cisalhamento depois que o elemento mostrado sofreu uma rotação de (*a*) 25° no sentido horário e (*b*) 10° no sentido anti-horário.

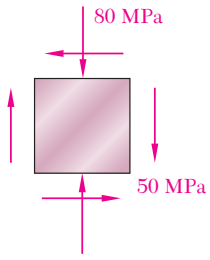


Fig. *P7.13*

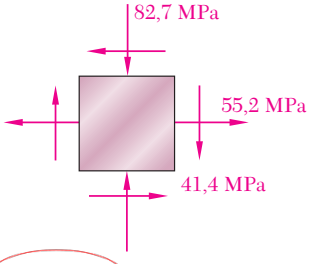


Fig. P7.14

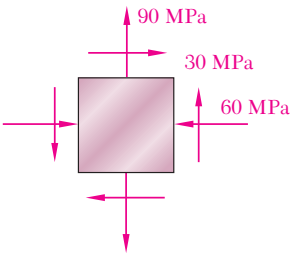


Fig. *P7.15*

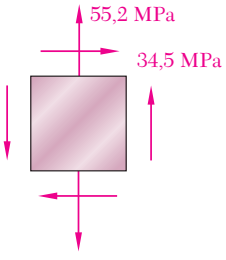


Fig. P7.16

7.17 e 7.18 As fibras de um elemento de madeira formam um ângulo de 15° com a vertical. Para o estado de tensão mostrado, determine (*a*) a tensão de cisalhamento no plano da tensão, paralela às fibras e (*b*) a tensão normal perpendicular às fibras.

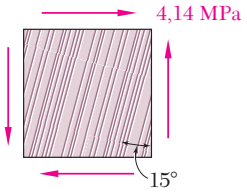


Fig. P7.17

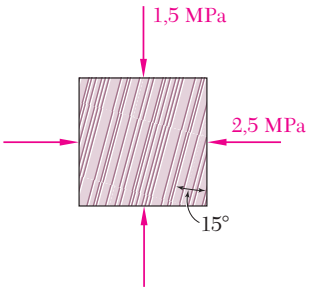


Fig. P7.18

7.19 Dois elementos de seção transversal uniforme de 50 mm × 80 mm são colados entre si ao longo do plano *a*-*a*, que forma um ângulo de 25° com a horizontal. Sabendo que as tensões admissíveis para a junta colada são $\sigma = 800$ kPa e $\tau = 600$ kPa, determine a maior força centrada **P** que pode ser aplicada.

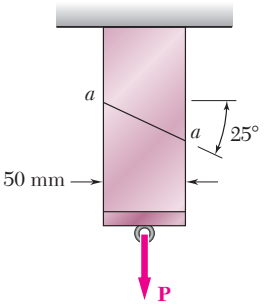


Fig. *P7.19*

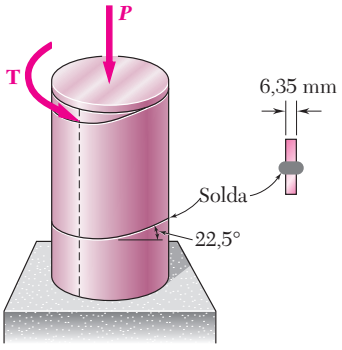
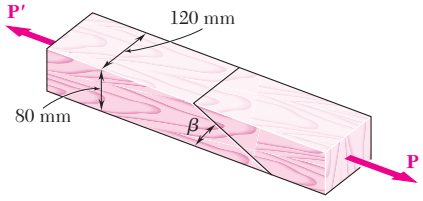


Fig. P7.20

7.20 Um tubo de aço com diâmetro externo igual a 304,8 mm é fabricado a partir de uma placa com espessura de 6,35 mm que é soldada formando uma hélice orientada a 22,5° em relação ao plano perpendicular ao eixo do tubo. Sabendo que uma força axial **P** de 178 kN e que um torque **T** de 9038 kN · mm são aplicados ao tubo segundo as direções mostradas, determine σ e τ nas direções, respectivamente, normal e tangencial à solda.

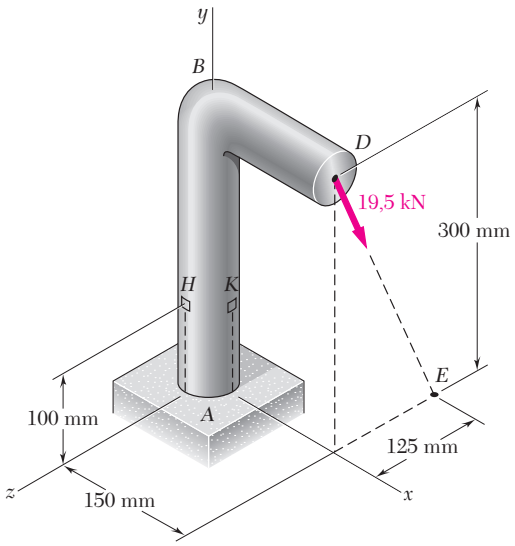


Figs. *P7.21* e P7.22

7.21 Dois elementos de madeira de seção transversal retangular uniforme de 80 × 120 mm são unidos por uma junta colada, conforme mostra a figura. Sabendo que $\beta = 25°$ e que são aplicadas forças centradas de intensidade $P = 10$ kN aos elementos mostrados, determine (*a*) a tensão de cisalhamento no plano das tensões, paralela à emenda e (*b*) a tensão normal perpendicular à emenda.

7.22 Dois elementos de madeira de seção transversal retangular uniforme de 80 mm × 120 mm são unidos por uma junta colada conforme mostra a figura. Sabendo que $\beta = 22°$ e que as tensões máximas admissíveis na junta são, respectivamente, 400 kPa em tração (perpendicular à emenda) e 600 kPa em cisalhamento (paralela à emenda), determine a maior força centrada **P** que pode ser aplicada.

7.23 Uma força de 19,5 kN é aplicada no ponto D do suporte de ferro fundido mostrado. Sabendo que o suporte tem um diâmetro de 60 mm, determine as tensões principais e a máxima tensão de cisalhamento no ponto H.



Figs. P7.23 e P7.24

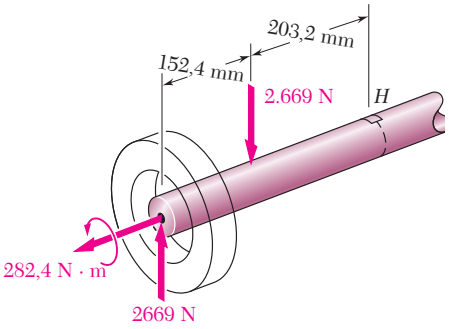


Fig. P7.25

7.24 Uma força de 19,5 kN é aplicada no ponto D do suporte de ferro fundido mostrado. Sabendo que o suporte tem um diâmetro de 60 mm, determine as tensões principais e a máxima tensão de cisalhamento no ponto *K*.

7.25 O eixo de um automóvel está sob a ação das forças e torque mostrados na figura. Sabendo que o diâmetro do eixo de seção transversal cheia é de 31,8 mm, determine (*a*) os planos e tensões principais no ponto *H* localizado na superfície superior do eixo e (*b*) a tensão de cisalhamento máxima no mesmo ponto.

7.26 Várias forças são aplicadas ao conjunto de tubos da figura. Sabendo que os diâmetros interno e externo do tubo são de 38,1 mm e 44,5 mm, respectivamente, determine (*a*) os planos e tensões principais no ponto *H* localizado sobre a superfície superior externa do tubo e (*b*) a tensão de cisalhamento máxima no mesmo ponto.

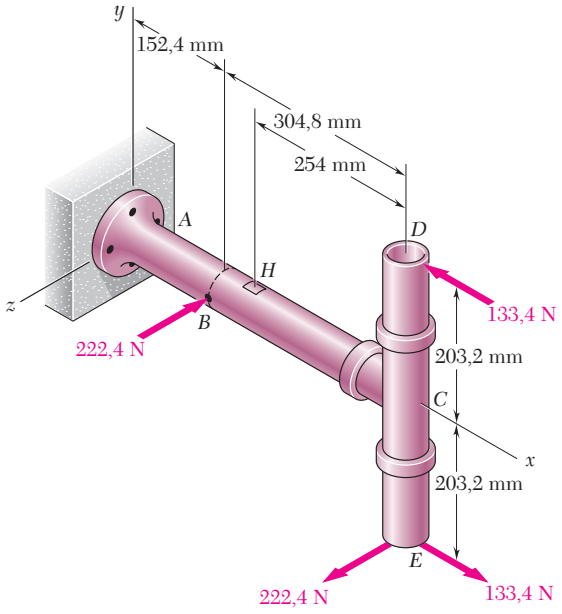


Fig. P7.26

7.27 Para o estado plano de tensão mostrado, determine o maior valor de σ_y para o qual a tensão de cisalhamento máxima no plano das tensões é igual ou menor que 75 MPa.

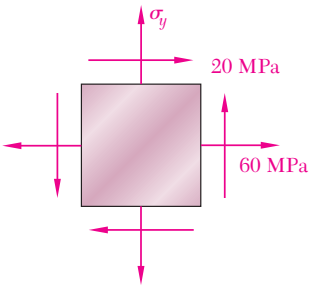


Fig. P7.27

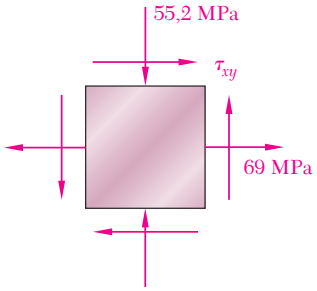


Fig. *P7.28*

7.28 Para o estado plano de tensão mostrado, determine (*a*) o maior valor de τ_{xy} para o qual a tensão de cisalhamento máxima no plano das tensões é igual ou menor que 82,7 MPa e (*b*) as tensões principais correspondentes.

7.29 Para o estado plano de tensão mostrado, determine (*a*) o valor de τ_{xy} para o qual a tensão de cisalhamento no plano da tensão paralela à solda é zero e (*b*) as tensões principais correspondentes.

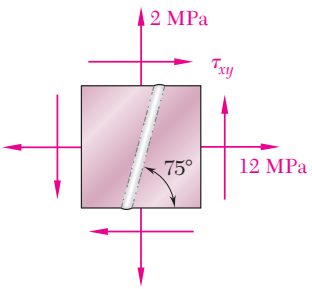


Fig. P7.29

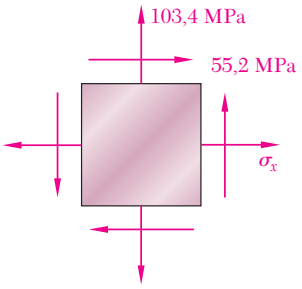


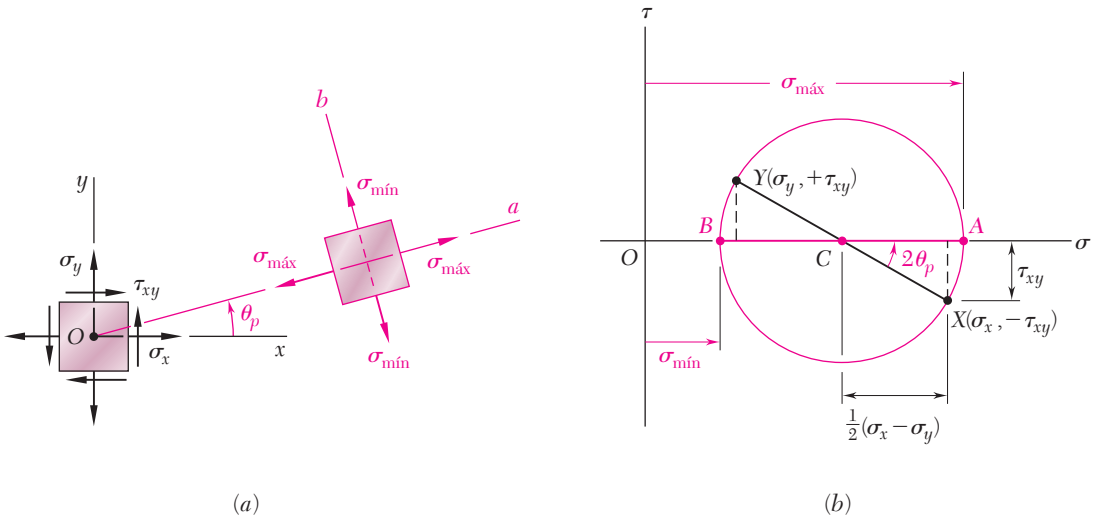
Fig. *P7.30*

7.30 Determine o intervalo de valores de σ_x para o qual a tensão de cisalhamento máxima no plano das tensões é igual ou menor que 69 MPa.

7.4. Círculo de Mohr para o estado plano de tensão

A circunferência usada na seção anterior para deduzir algumas das fórmulas básicas relacionadas com a transformação de tensões no estado plano de tensão foi introduzida inicialmente pelo engenheiro alemão Otto Mohr (1835 -1918) e é conhecida como *círculo de Mohr* para o estado plano de tensão. O nome círculo se deve ao estado tridimensional de tensão; no caso de estado plano de tensão, a figura obtida é uma circunferência. O nome círculo será utilizado para se referir à figura do estado plano de tensão. Como veremos agora, esse círculo pode ser utilizado para obter um método alternativo para a solução dos vários problemas considerados nas Seções 7.2 e 7.3. Esse método baseia-se em considerações geométricas simples e não requer o uso de fórmulas especializadas. Embora tenha sido idealizado originalmente para soluções gráficas, ele se adapta muito bem ao uso de uma calculadora.

Considere um elemento quadrado de um material submetido a um estado plano de tensão (Fig. 7.17*a*), e seja σ_x, σ_y e τ_{xy} as componentes da tensão que atuam nas faces do elemento. Representamos um ponto X de coordenadas σ_x e $-\tau_{xy}$, e um ponto Y de coordenadas σ_y e $+\tau_{xy}$ (Fig. 7.17*b*). Se τ_{xy} for positivo, conforme indicado na Fig. 7.17*a*, o ponto X estará localizado abaixo do eixo σ e o ponto Y acima, como mostra a Fig. 7.17*b*. Se τ_{xy} for negativo, X estará localizado acima do eixo σ e Y abaixo. Unindo X e Y por uma linha reta, definimos o ponto C, que é a intersecção da linha XY com o eixo σ, e traçamos o círculo de centro C e diâmetro XY. Notando que a abscissa de C e o raio do círculo são, respectivamente, iguais às quantidades $\sigma_{\text{méd}}$ e R definidas pelas Equações (7.10); concluímos que o círculo obtido é o círculo de Mohr para o estado plano de tensão. Assim, as abscissas dos pontos A e B em que o círculo intercepta o eixo σ representam, respectivamente, as tensões principais $\sigma_{\text{máx}}$ e $\sigma_{\text{mín}}$ no ponto considerado.



(*a*) (*b*)

Fig. 7.17

Notamos também que, como a tg $(XCA) = 2\tau_{xy}/(\sigma_x - \sigma_y)$, o ângulo XCA é igual em intensidade a um dos ângulos $2\theta_p$ que satisfazem à Equação (7.12). Assim, o ângulo θ_p, que define, na Fig. 7.17*a*, a orientação do plano principal correspondendo ao ponto A na Fig. 7.17*b*, pode ser obtido dividindo-se o valor do ângulo XCA, medido no círculo de Mohr, por dois. Observamos ainda que, se $\sigma_x > \sigma_y$ e $\tau_{xy} > 0$, como no caso considerado aqui, a rotação que faz CX coincidir com CA é anti-horária. Mas, neste caso, o ângulo θ_p obtido da Equação (7.12), que define a direção da normal Oa para o plano principal, é positivo; assim, a rotação que faz Ox coincidir com Oa também é anti-horária. Concluímos que os sentidos de rotação de ambas as partes da Fig. 7.17 são os mesmos; se uma rotação anti-horária através de $2\theta_p$ é necessária para fazer CX coincidir com CA no círculo de Mohr, uma rotação anti-horária através de θ_p fará Ox coincidir com Oa na Fig. 7.17*a*.†

†Isso ocorre em razão do fato de que estamos usando o círculo da Fig. 7.10, e não o da Fig. 7.9 como o círculo de Mohr.

Como o círculo de Mohr é definido de modo unívoco, o mesmo círculo pode ser obtido considerando as componentes de tensão $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ e $\tau_{x'y'}$, correspondendo aos eixos x' e y' mostrados na Fig. 7.18*a*. O ponto X' de coordenadas $\sigma_{x'}$ e $-\tau_{x'y'}$ e o ponto Y' de coordenadas $\sigma_{y'}$ e $+\tau_{x'y'}$ estão, portanto, localizados no círculo de Mohr, e o ângulo $X'CA$ na Fig. 7.18*b* deve ser igual a duas vezes o ângulo $x'Oa$ na Fig. 7.18*a*. Como o ângulo XCA é duas vezes o ângulo xOa, conforme já observamos, conclui-se que o ângulo XCX' na Fig. 7.18*b* é duas vezes o ângulo xOx' na Fig. 7.18*a*. Assim, o diâmetro $X'Y'$, que define as tensões normal e de cisalhamento $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ e $\tau_{x'y'}$, pode ser obtido pela rotação do diâmetro XY por meio de um ângulo igual a duas vezes o ângulo θ formado pelos eixos x' e x na Fig. 7.18*a*. Notamos que a rotação que faz o diâmetro XY coincidir com o diâmetro $X'Y'$ na Fig. 7.18*b* tem o mesmo sentido de rotação que faz os eixos xy coincidirem com os eixos $x'y'$ na Fig. 7.18*a*.

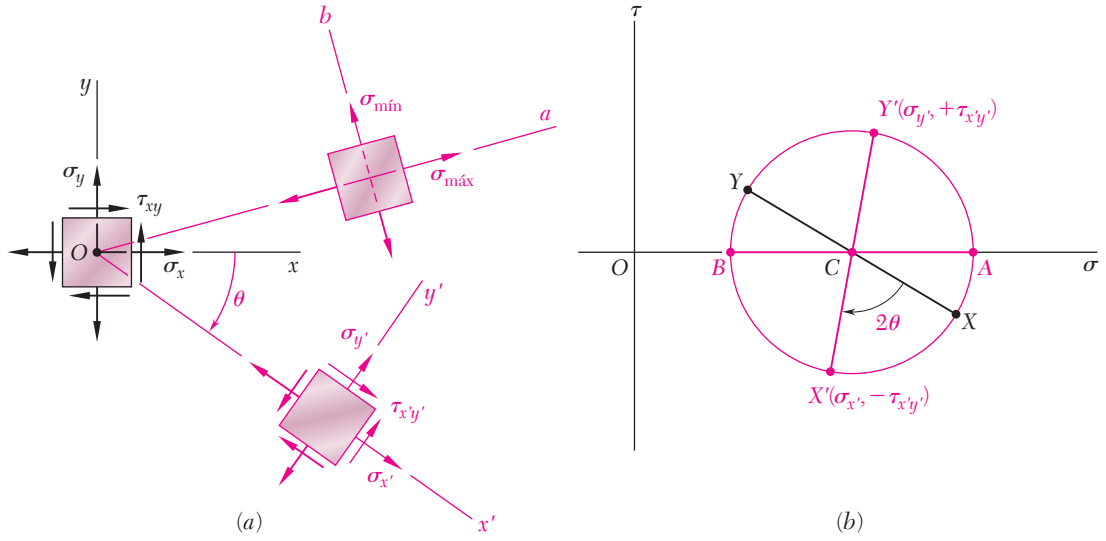


Fig. 7.18

A propriedade que acabamos de descrever pode ser usada para verificar o fato de que os planos de tensão de cisalhamento máximo estão a 45° dos planos principais. Sem dúvida, lembramos que os pontos D e E no círculo de Mohr correspondem aos planos de tensão de cisalhamento máxima, enquanto A e B correspondem aos planos principais (Fig. 7.19*b*). Como os diâmetros AB e DE do círculo de Mohr estão a 90° um do outro, conclui-se que as faces dos elementos correspondentes estão a 45° uma da outra (Fig. 7.19*a*).

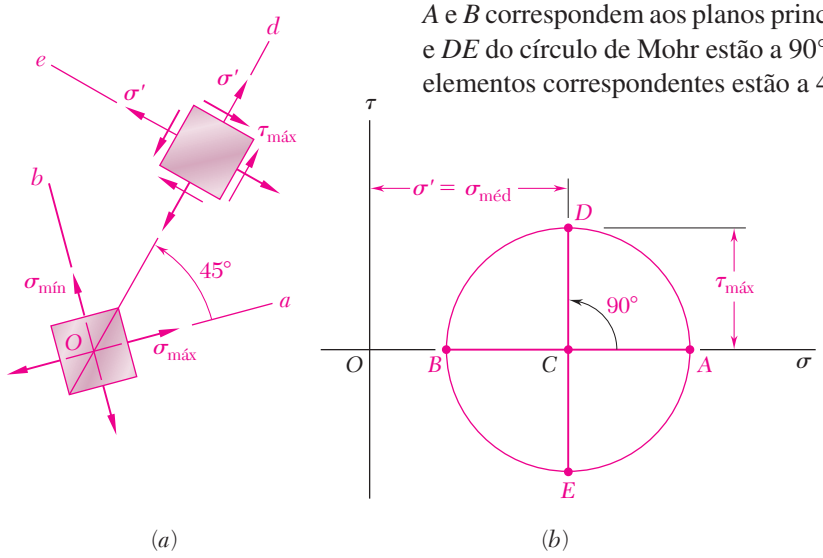


Fig. 7.19

A construção do círculo de Mohr para o estado plano de tensão é bastante simplificada se considerarmos separadamente cada face do elemento utilizado para definir as componentes de tensão. Das Figs. 7.17 e 7.18 observamos que, quando a tensão de cisalhamento que atua *sobre determinada face* tende a girar o elemento no *sentido horário*, o ponto do círculo de Mohr correspondente àquela face está localizado *acima* do eixo σ. Quando a tensão de cisalhamento em determinada face tende a rodar o elemento no *sentido anti-horário*, o ponto correspondente àquela face está localizado *abaixo* do eixo σ (Fig. 7.20). No que se refere às tensões normais, vale a convenção usual, isto é, uma tensão de tração considerada positiva é representada à direita, enquanto uma tensão de compressão considerada negativa é representada à esquerda.

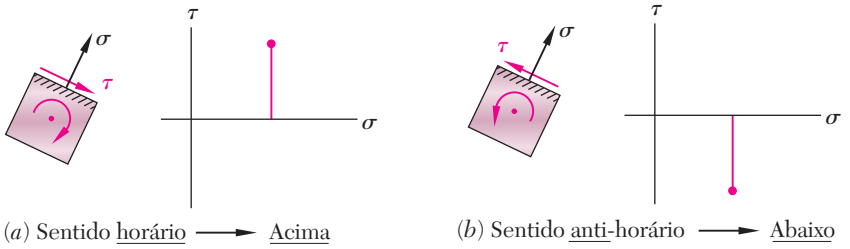


Fig. 7.20

EXEMPLO 7.2

Para o estado plano de tensão já considerado no Exemplo 7.1, (*a*) construa o círculo de Mohr, (*b*) determine as tensões principais e (*c*) determine a tensão de cisalhamento máxima e a tensão normal correspondente.

(a) Construção do círculo de Mohr. Notamos na Fig. 7.21*a* que a tensão normal que atua na face orientada em direção ao eixo *x* é de tração (positiva) e que a tensão de cisalhamento que atua naquela face tende a rodar o elemento no sentido anti-horário. O ponto *X* do círculo de Mohr, portanto, será representado à direita do eixo vertical e abaixo do eixo horizontal (Fig. 7.21*b*). Um exame análogo da tensão normal e tensão de cisalhamento que atua na face superior do elemento mostra que o ponto *Y* deverá ser representado à esquerda do eixo vertical e acima do eixo horizontal. Traçando a linha *XY*, obtemos o centro *C* do círculo de Mohr; sua abscissa é

$$\sigma_{\text{méd}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{50 + (-10)}{2} = 20 \text{ MPa}$$

Como os lados do triângulo sombreado são

$$CF = 50 - 20 = 30 \text{ MPa} \qquad \text{e} \qquad FX = 40 \text{ MPa}$$

o raio do círculo é

$$R = CX = \sqrt{(30)^2 + (40)^2} = 50 \text{ MPa}$$

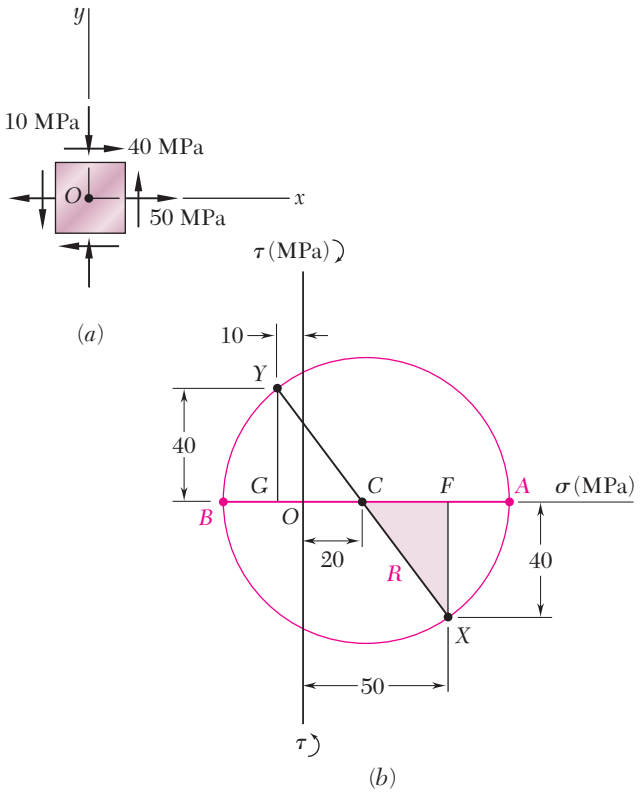


Fig. 7.21

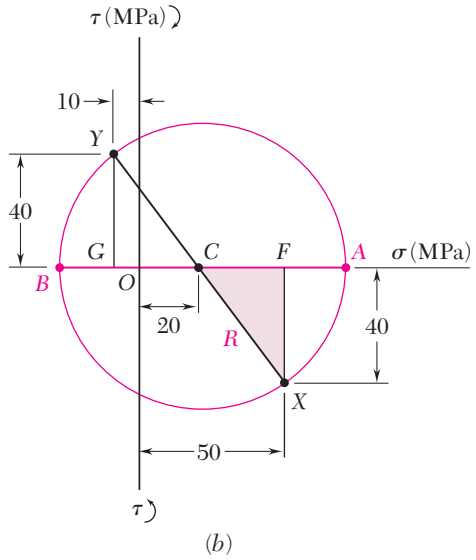


Fig. 7.21b (repetida)

(b) Planos principais e tensões principais. As tensões principais são

$$\sigma_{máx} = OA = OC + CA = 20 + 50 = 70 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{mín} = OB = OC - BC = 20 - 50 = -30 \text{ MPa}$$

Lembrando que o ângulo ACX representa $2\theta_p$ (Fig. 7.21*b*), escrevemos

$$\text{tg } 2\theta_p = \frac{FX}{CF} = \frac{40}{30}$$

$$2\theta_p = 53{,}1° \qquad \theta_p = 26{,}6°$$

Como a rotação que faz CX coincidir com CA na Fig. 7.22*b* é anti-horária, a rotação que faz Ox coincidir com o eixo Oa correspondente a $\sigma_{máx}$ na Fig. 7.22*a* também será anti-horária.

(c) Tensão de cisalhamento máxima. Como mais uma rotação de 90° no sentido anti-horário faz CA coincidir com CD na Fig. 7.22*b*, uma rotação adicional de 45° no sentido anti-horário fará o eixo Oa coincidir com o eixo Od, correspondendo à tensão de cisalhamento máxima na Fig. 7.22*a*. Notamos na Fig. 7.22*b* que $\tau_{máx} = R = 50$ MPa e que a tensão normal correspondente é $\sigma' = \sigma_{méd} = 20$ MPa. Como o ponto D está localizado acima do eixo σ na Fig. 7.22*b*, as tensões de cisalhamento que atuam nas faces perpendiculares a Od na Fig. 7.22*a* devem ser direcionadas de modo que obtenham a tendência de rodar o elemento no sentido horário.

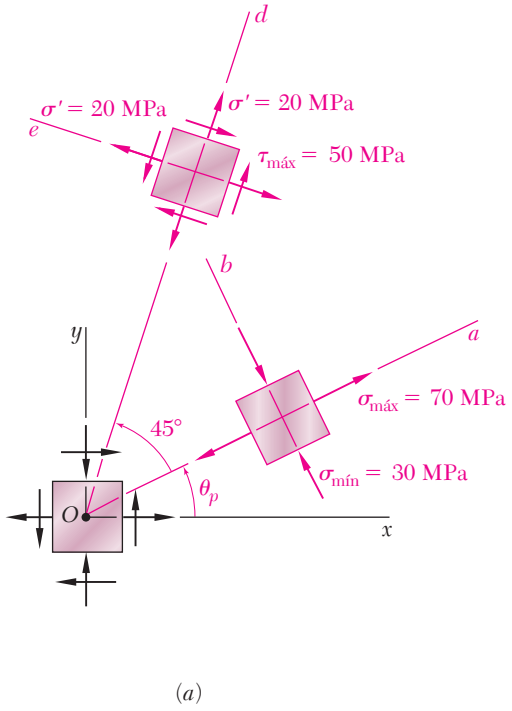


Fig. 7.22

O círculo de Mohr proporciona uma maneira conveniente de verificar os resultados obtidos anteriormente para tensões sob um carregamento axial centrado (Seção 1.12) e sob um carregamento torcional (Seção 3.4). No primeiro caso (Fig. 7.23*a*), temos $\sigma_x = P/A$, $\sigma_y = 0$, e $\tau_{xy} = 0$. Os pontos X e Y correspondentes definem um círculo de raio $R = P/2A$ que

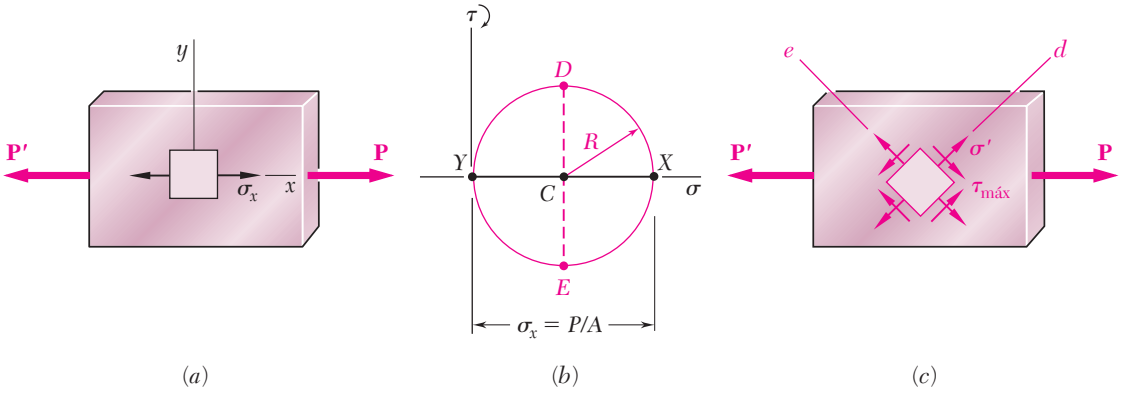


Fig. 7.23 Círculo de Mohr para carga axial centrada.

passa pela origem dos eixos de coordenadas (Fig. 7.23*b*). Os pontos D e E dão origem à orientação dos planos de tensão de cisalhamento máxima (Fig. 7.23*c*), bem como os valores de $\tau_{máx}$ e das tensões normais correspondentes σ'

$$\tau_{máx} = \sigma' = R = \frac{P}{2A} \tag{7.18}$$

No caso de torção (Fig. 7.24*a*), temos $\sigma_x = \sigma_y = 0$ e $\tau_{xy} = \tau_{máx} = Tc/J$. Os pontos X e Y, portanto, estão localizados no eixo τ, e o círculo de Mohr é

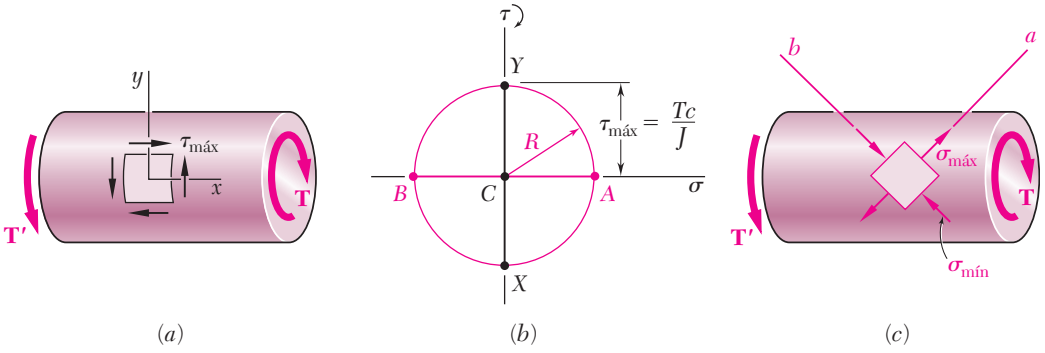
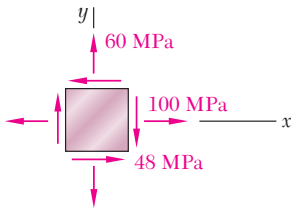


Fig. 7.24 Círculo de Mohr para carga torcional.

um círculo de raio $R = Tc/J$ centrado na origem (Fig. 7.24*b*). Os pontos A e B definem os planos principais (Fig. 7.24*c*) e as tensões principais

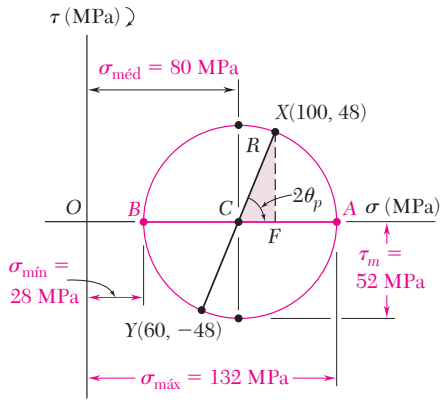
$$\sigma_{máx,\,mín} = \pm R = \pm \frac{Tc}{J} \tag{7.19}$$

PROBLEMA RESOLVIDO 7.2



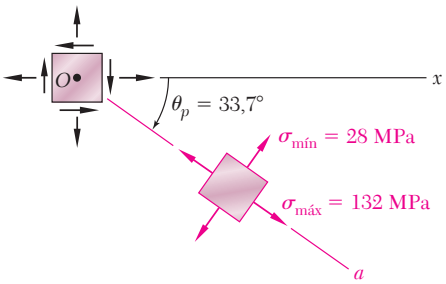
Para o estado plano de tensão mostrado, determine (*a*) os planos e tensões principais e (*b*) as componentes de tensão que atuam no elemento obtido pela rotação do elemento dado no sentido anti-horário de 30°.

SOLUÇÃO



Construção do círculo de Mohr. Notamos que em uma face perpendicular ao eixo *x*, a tensão normal é de tração e a tensão de cisalhamento tende a girar o elemento no sentido horário; assim, representamos o ponto *X* por 100 unidades à direita do eixo vertical e 48 unidades acima do eixo horizontal. De uma maneira análoga, examinamos os componentes de tensão na face superior e representamos o ponto *Y* (60, –48). Unindo os pontos *X* e *Y* por uma linha reta, definimos o centro *C* do círculo de Mohr. A abscissa de *C*, que representa $\sigma_{méd}$, e o raio *R* do círculo podem ser medidos diretamente ou calculados da seguinte maneira

$$\sigma_{méd} = OC = \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \tfrac{1}{2}(100 + 60) = 80 \text{ MPa}$$
$$R = \sqrt{(CF)^2 + (FX)^2} = \sqrt{(20)^2 + (48)^2} = 52 \text{ MPa}$$



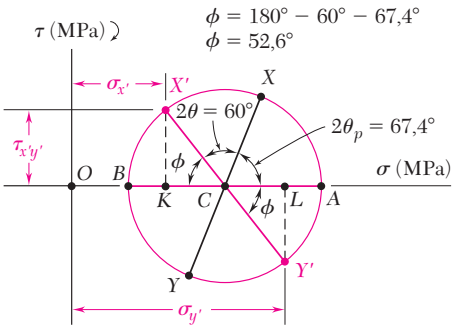
***a*. Planos principais e tensões principais.** Rodamos o diâmetro *XY* no sentido horário por $2\theta_p$ até que ele coincida com o diâmetro *AB*. Temos

$$\text{tg } 2\theta_p = \frac{XF}{CF} = \frac{48}{20} = 2{,}4 \qquad 2\theta_p = 67{,}4° \downarrow \qquad \theta_p = 33{,}7° \downarrow \blacktriangleleft$$

As tensões principais são representadas pelas abscissas dos pontos *A* e *B*

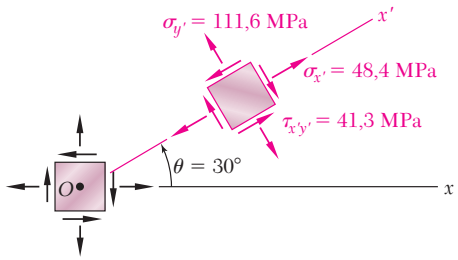
$$\sigma_{máx} = OA = OC + CA = 80 + 52 \qquad \sigma_{máx} = +132 \text{ MPa} \blacktriangleleft$$
$$\sigma_{mín} = OB = OC - BC = 80 - 52 \qquad \sigma_{mín} = +\ 28 \text{ MPa} \blacktriangleleft$$

Como a rotação que faz *XY* coincidir com *AB* está no sentido horário, a rotação que faz *Ox* coincidir com o eixo *Oa* correspondendo a $\sigma_{máx}$ também estará no sentido horário; obtemos a orientação mostrada para os planos principais.



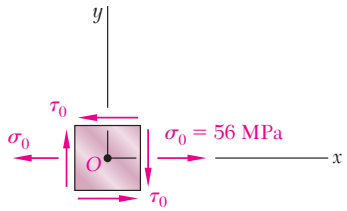
***b*. Componentes de tensão no elemento rodado de 30° ↰.** Os pontos *X′* e *Y′* no círculo de Mohr que correspondem às componentes de tensão no elemento rodado são obtidos girando-se *XY* no sentido anti-horário através de $2\theta = 60°$. Encontramos

$$\phi = 180° - 60° - 67{,}4° \qquad \phi = 52{,}6° \blacktriangleleft$$
$$\sigma_{x'} = OK = OC - KC = 80 - 52 \cos 52{,}6° \qquad \sigma_{x'} = +\ 48{,}4 \text{ MPa} \blacktriangleleft$$
$$\sigma_{y'} = OL = OC + CL = 80 + 52 \cos 52{,}6° \qquad \sigma_{y'} = +111{,}6 \text{ MPa} \blacktriangleleft$$
$$\tau_{x'y'} = KX' = 52 \text{ sen } 52{,}6° \qquad \tau_{x'y'} = \ \ 41{,}3 \text{ MPa} \blacktriangleleft$$



Como *X′* está localizado acima do eixo horizontal, a tensão de cisalhamento na face perpendicular a *Ox′* tende a girar o elemento no sentido horário.

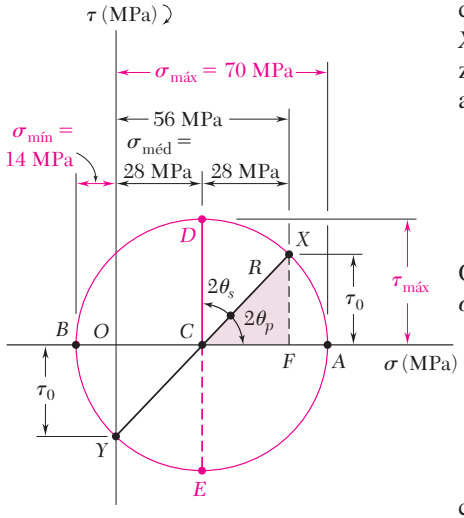
PROBLEMA RESOLVIDO 7.3



Um estado plano de tensão consiste em uma tensão de tração $\sigma_0 = 56$ MPa que atua nos planos verticais e em tensões de cisalhamento desconhecidas. Determine (*a*) a intensidade da tensão de cisalhamento τ_0 para que a maior tensão normal seja 70 MPa e (*b*) a tensão de cisalhamento máxima correspondente.

SOLUÇÃO

Construção do círculo de Mohr. Consideramos que as tensões de cisalhamento atuam nos sentidos mostrados. Assim, a tensão de cisalhamento τ_0 em uma face perpendicular ao eixo x tende a girar o elemento no sentido horário, e representamos o ponto X de coordenadas 56 MPa e τ_0 acima do eixo horizontal. Considerando uma face horizontal do elemento, observamos que $\sigma_y = 0$ e que τ_0 tende a girar o elemento no sentido anti-horário; assim, representamos o ponto Y a uma distância τ_0 abaixo de O.



Notamos que a abscissa do centro C do círculo de Mohr é

$$\sigma_{méd} = \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \tfrac{1}{2}(56 + 0) = 28 \text{ MPa}$$

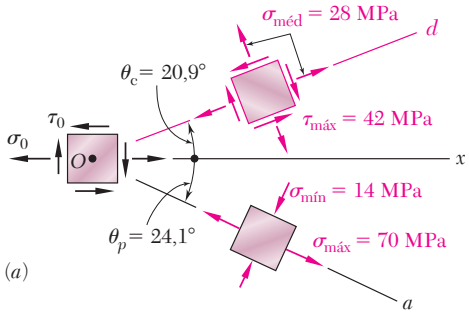
O raio R do círculo é determinado observando-se que a tensão normal máxima, $\sigma_{máx} = 70$ MPa, é representada pela abscissa do ponto A e escrevemos

$$\sigma_{máx} = \sigma_{méd} + R$$
$$70 \text{ MPa} = 28 \text{ MPa} + R \qquad R = 42 \text{ MPa}$$

***a*. Tensão de cisalhamento τ_0.** Considerando o triângulo retângulo CFX, encontramos

$$\cos 2\theta_p = \frac{CF}{CX} = \frac{CF}{R} = \frac{28 \text{ MPa}}{42 \text{ MPa}} \qquad 2\theta_p = 48{,}2° \downarrow \qquad \theta_p = 24{,}1° \downarrow$$

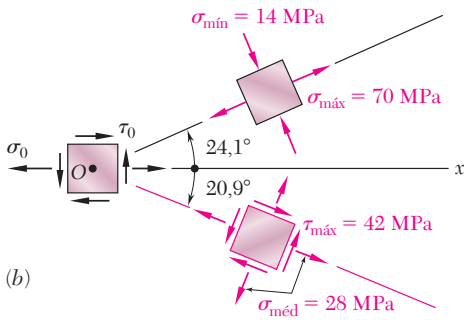
$$\tau_0 = FX = R \operatorname{sen} 2\theta_p = (42 \text{ MPa}) \operatorname{sen} 48{,}2° \qquad \tau_0 = 31{,}3 \text{ MPa} \blacktriangleleft$$



***b*. Tensão de cisalhamento máxima.** As coordenadas do ponto D do círculo de Mohr representam a tensão de cisalhamento máxima e a tensão normal correspondente.

$$\tau_{máx} = R = 42 \text{ MPa} \qquad \tau_{máx} = 42 \text{ MPa} \blacktriangleleft$$

$$2\theta_c = 90° - 2\theta_p = 90° - 48{,}2° = 41{,}8° \curvearrowleft \qquad \theta_x = 20{,}9° \curvearrowleft$$



A tensão de cisalhamento máxima atua em um elemento orientado conforme mostra a Fig. *a*. (A figura também mostra o elemento sobre o qual estão atuando as tensões principais.)

Nota. Se a nossa hipótese original sobre o sentido de τ_0 estivesse errada, obteríamos o mesmo círculo e as mesmas respostas, mas a orientação dos elementos seria conforme mostra a Fig. *b*.

PROBLEMAS

7.31 Resolva os Problemas 7.5 e 7.9 usando o círculo de Mohr.

7.32 Resolva os Problemas 7.6 e 7.10 usando o círculo de Mohr.

7.33 Resolva o Problema 7.11 usando o círculo de Mohr.

7.34 Resolva o Problema 7.12 usando o círculo de Mohr.

7.35 Resolva o Problema 7.13 usando o círculo de Mohr.

7.36 Resolva o Problema 7.14 usando o círculo de Mohr.

7.37 Resolva o Problema 7.15 usando o círculo de Mohr.

7.38 Resolva o Problema 7.16 usando o círculo de Mohr.

7.39 Resolva o Problema 7.17 usando o círculo de Mohr.

7.40 Resolva o Problema 7.18 usando o círculo de Mohr.

7.41 Resolva o Problema 7.19 usando o círculo de Mohr.

7.42 Resolva o Problema 7.20 usando o círculo de Mohr.

7.43 Resolva o Problema 7.21 usando o círculo de Mohr.

7.44 Resolva o Problema 7.22 usando o círculo de Mohr.

7.45 Resolva o Problema 7.23 usando o círculo de Mohr.

7.46 Resolva o Problema 7.24 usando o círculo de Mohr.

7.47 Resolva o Problema 7.25 usando o círculo de Mohr.

7.48 Resolva o Problema 7.26 usando o círculo de Mohr.

7.49 Resolva o Problema 7.27 usando o círculo de Mohr.

7.50 Resolva o Problema 7.28 usando o círculo de Mohr.

7.51 Resolva o Problema 7.29 usando o círculo de Mohr.

7.52 Resolva o Problema 7.30 usando o círculo de Mohr.

7.53 Sabendo que o suporte *AB* tem espessura uniforme e igual a 15,88 mm, determine (*a*) os planos e tensões principais no ponto *H* e (*b*) a máxima tensão de cisalhamento no ponto *H*.

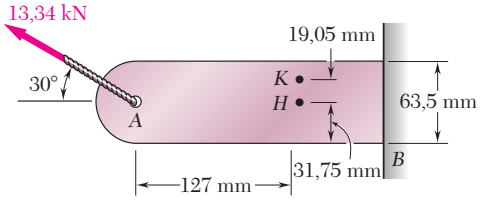


Fig. *P7.53*

7.54 Resolva o Problema 7.53 considerando o ponto *K*.

7.55 a 7.58 Determine os planos e tensões principais para o estado plano de tensão resultante da superposição dos dois estados de tensão mostrados.

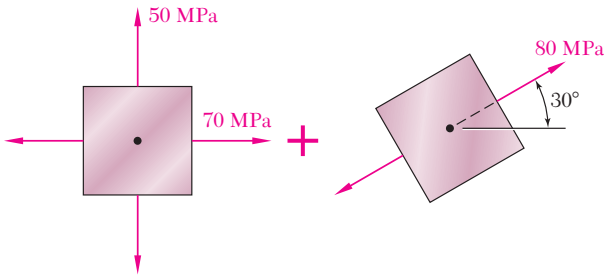


Fig. P7.55

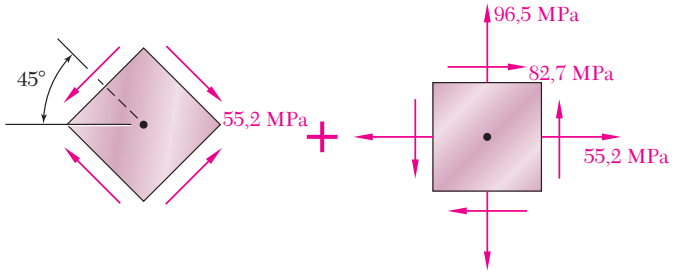


Fig. P7.56

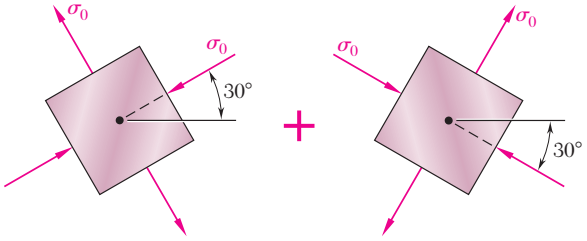


Fig. P7.57

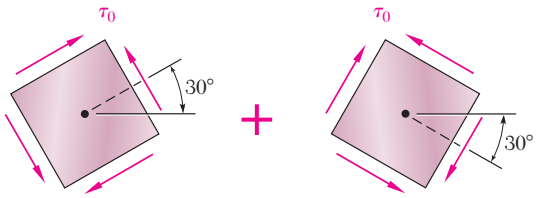
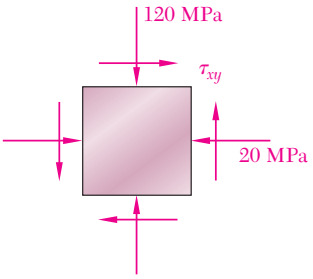


Fig. P7.58

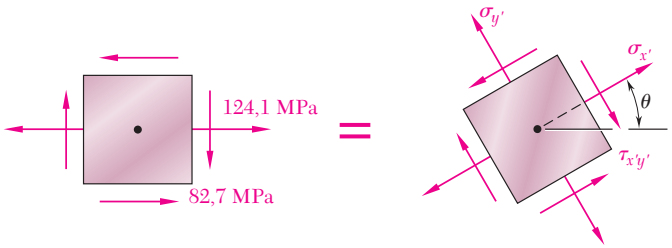
7.59 Para o elemento mostrado, determine o intervalo de valores de τ_{xy} para os quais a tensão de tração máxima é igual ou menor que 60 MPa.

7.60 Para o elemento mostrado, determine o intervalo de valores de τ_{xy} para os quais a tensão de cisalhamento máxima no plano da tensão é igual ou menor que 150 MPa.

7.61 Para o estado de tensão mostrado, determine o intervalo de valores de θ para os quais a tensão normal $\sigma_{x'}$ é igual ou menor que 137,5 MPa.



Figs. *P7.59* e *P7.60*



Figs. P7.61 e P7.62

7.62 Para o estado plano de tensão mostrado, determine o intervalo de valores de θ para os quais a tensão normal $\sigma_{x'}$ é igual ou menor que 69 MPa.

7.63 Para o estado de tensão mostrado, sabe-se que as tensões normal e de cisalhamento estão direcionadas conforme mostra a figura e que $\sigma_x = 96{,}5$ MPa, $\sigma_y = 62{,}1$ MPa e $\sigma_{mín} = 34{,}5$ MPa. Determine (*a*) a orientação dos planos principais, (*b*) a tensão principal $\sigma_{máx}$ e (*c*) a tensão de cisalhamento máxima no plano das tensões.

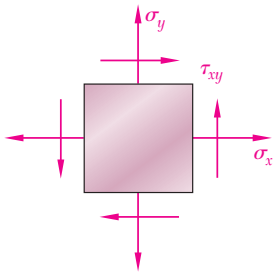


Fig. P7.63

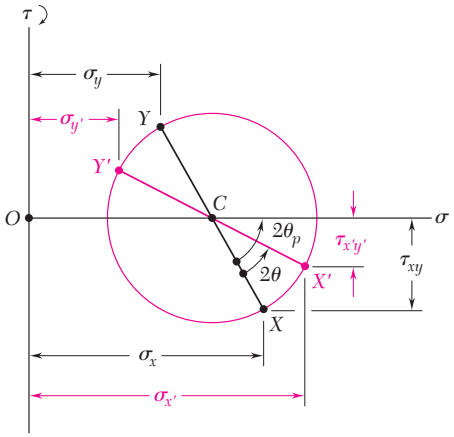


Fig. P7.64

7.64 O círculo de Mohr mostrado corresponde ao estado de tensão dado nas Figs. 7.5*a* e *b*. Notando que $\sigma_{x'} = \text{OC} + (CX')\cos(2\theta_p - 2\theta)$ e que $\tau_{x'y'} = (CX')\,\text{sen}\,(2\theta_p - 2\theta)$, determine as expressões para $\sigma_{x'}$ e $\tau_{x'y'}$ dadas nas Equações (7.5) e (7.6), respectivamente. [*Sugestão*: Use $\text{sen}\,(A + B) = \text{sen}\,A\cos B + \cos A\,\text{sen}\,B$ e $\cos(A + B) = \cos A\cos B - \text{sen}\,A\,\text{sen}\,B$.]

7.65 (*a*) Prove que a expressão $\sigma_{x'}\sigma_{y'} - \tau^2_{x'y'}$, em que $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ e $\tau_{x'y'}$ são componentes da tensão ao longo de eixos retangulares x' e y', é independente da orientação desses eixos. Mostre também que a expressão dada representa o quadrado da tangente traçada a partir da origem das coordenadas do círculo de Mohr. (*b*) Usando a propriedade da invariância estabelecida na parte *a*, expresse a tensão de cisalhamento τ_{xy} em termos de σ_x, σ_y, e das tensões principais $\sigma_{máx}$ e $\sigma_{mín}$.

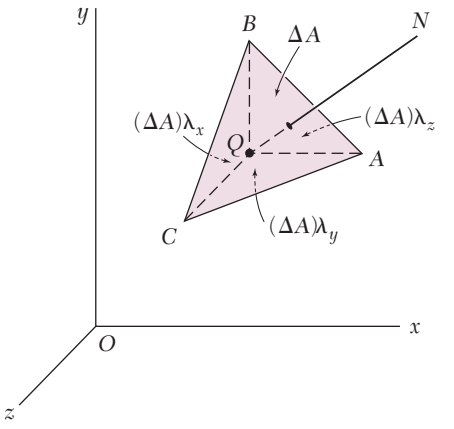


Fig. 7.25

7.5. Estado geral de tensão

Nas seções anteriores, estudamos um estado plano de tensão com $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$, e consideramos somente transformações de tensão associadas a uma rotação em torno do eixo z. Vamos considerar agora o estado geral de tensões representado na Fig. 7.1*a* e a transformação de tensão associada à rotação dos eixos mostrada na Fig. 7.1*b*. No entanto, nossa análise estará limitada à determinação da *tensão normal* σ_n em um plano de orientação arbitrária.

Considere o tetraedro mostrado na Fig. 7.25. Três de suas faces são paralelas aos planos coordenados, enquanto a quarta face, *ABC*, é perpendicular à linha *QN*. Chamando de ΔA a área da face *ABC*, e de λ_x, λ_y e λ_z os cossenos diretores da linha *QN*, determinamos os valores das áreas das faces perpendiculares aos eixos x, y e z, que são, respectivamente, $(\Delta A)\lambda_x$, $(\Delta A)\lambda_y$ e $(\Delta A)\lambda_z$. Se o estado de tensão no ponto *Q* é definido pelas componentes de tensão σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz} e τ_{zx}, então as *forças* que atuam nas faces paralelas aos planos coordenados podem ser obtidas multiplicando-se as componentes de tensão apropriadas pela área de cada face (Fig. 7.26). Entretanto, as forças que atuam na face *ABC* consistem em uma força normal de intensidade $\sigma_n\,\Delta A$ direcionada ao longo de *QN*, e de uma força de cisalhamento de intensidade $\tau\,\Delta A$ perpendicular a *QN* mas de direção desconhecida. Note que como as faces *QBC*, *QCA* e *QAB*, respectivamente, estão voltadas para o sentido contrário ao dos eixos x, y e z, as forças que atuam nelas devem ser mostradas com sentidos negativos.

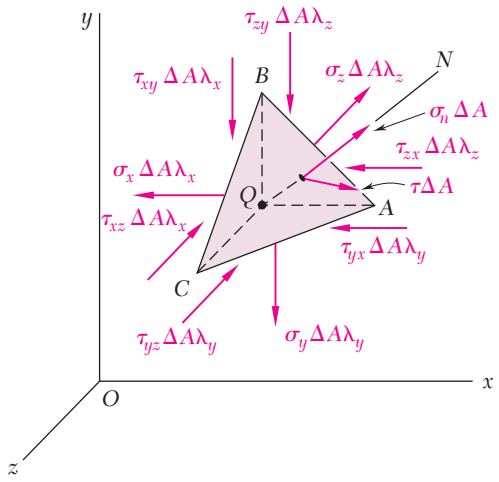


Fig. 7.26

Agora consideramos que a soma das componentes ao longo de QN de todas as forças que atuam no tetraedro é zero. Observando que a componente ao longo de QN de uma força paralela ao eixo x é obtida multiplicando-se a intensidade daquela força pelo cosseno diretor λ_x, e que as componentes das forças paralelas aos eixos y e z são obtidas de uma maneira análoga, escrevemos

$$\begin{aligned}\Sigma F_n = 0: \quad & \sigma_n\,\Delta A - (\sigma_x\,\Delta A\,\lambda_x)\lambda_x - (\tau_{xy}\,\Delta A\,\lambda_x)\lambda_y - (\tau_{xz}\,\Delta A\,\lambda_x)\lambda_z \\ & -(\tau_{yx}\,\Delta A\,\lambda_y)\lambda_x - (\sigma_y\,\Delta A\,\lambda_y)\lambda_y - (\tau_{yz}\,\Delta A\,\lambda_y)\lambda_z \\ & -(\tau_{zx}\,\Delta A\,\lambda_z)\lambda_x - (\tau_{zy}\,\Delta A\,\lambda_z)\lambda_y - (\sigma_z\,\Delta A\,\lambda_z)\lambda_z = 0\end{aligned}$$

Dividindo essa equação por ΔA e resolvendo para σ_n, temos

$$\sigma_n = \sigma_x\lambda_x^2 + \sigma_y\lambda_y^2 + \sigma_z\lambda_z^2 + 2\tau_{xy}\lambda_x\lambda_y + 2\tau_{yz}\lambda_y\lambda_z + 2\tau_{zx}\lambda_z\lambda_x \qquad (7.20)$$

Note que a expressão obtida para a tensão normal σ_n é uma *forma quadrática* em λ_x, λ_y e λ_z. Conclui-se que podemos selecionar os eixos de coordenadas de uma maneira tal que o membro direito da Equação (7.20) se reduza aos três termos que contêm os quadrados dos cossenos diretores.† Chamando esses eixos de a, b e c, as tensões normais correspondentes de σ_a, σ_b e σ_c, e os cossenos diretores de QN com relação a esses eixos de λ_a, λ_b e λ_c, escrevemos

$$\sigma_n = \sigma_a\lambda_a^2 + \sigma_b\lambda_b^2 + \sigma_c\lambda_c^2 \qquad (7.21)$$

Os eixos de coordenadas a, b, c são chamados de *eixos principais de tensão*. Como sua orientação depende do estado de tensão em Q e, portanto, da posição de Q, eles foram representados na Fig. 7.27 ligados a Q. Os planos coordenados correspondentes são conhecidos como *planos principais de tensão*, e as tensões normais correspondentes σ_a, σ_b e σ_c como *tensões principais* em Q.‡

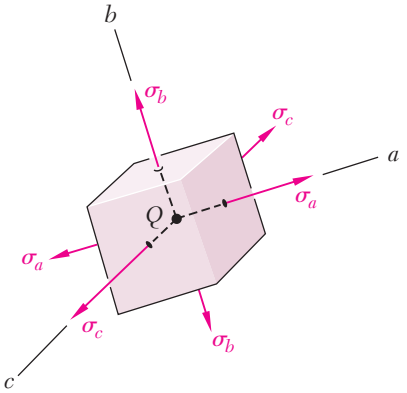


Fig. 7.27

†Na Seção 9.16 do livro BEER, F. P. e JOHNSTON, E. R. *Mecânica vetorial para engenheiros*, 7ª ed., McGraw-Hill/Interamericana do Brasil, 2006, encontra-se uma forma quadrática similar para representar o momento de inércia de um corpo rígido com relação a um eixo arbitrário. É mostrado na Seção 9.17 que essa forma está associada com uma *superfície quadrática* e que a redução da forma quadrática em termos que contêm somente os quadrados dos cossenos diretores é equivalente à determinação dos eixos principais daquela superfície.

‡Para uma discussão sobre a determinação dos planos principais de tensão e das tensões principais, ver TIMOSHENKO, S. P.; e GOODIER, J. N. *Theory of Elasticity*, 3. ed., McGraw-Hill Book Company, 1970, seção 77.

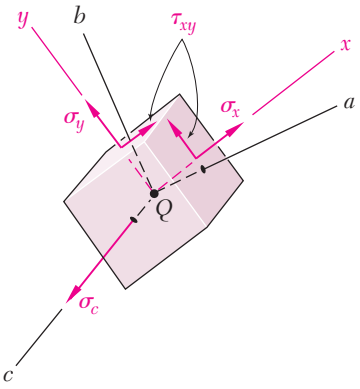


Fig. 7.28

7.6. Aplicação do círculo de Mohr na análise tridimensional da tensão

Se o elemento mostrado na Fig. 7.27 sofre uma rotação em torno de um dos eixos principais em Q, como o eixo c (Fig. 7.28), a transformação de tensão correspondente poderá ser analisada por meio do círculo de Mohr como se fosse uma transformação de um estado plano de tensão. Sem dúvida, as tensões de cisalhamento que atuam nas faces perpendiculares ao eixo c permanecem iguais a zero, (e a tensão normal σ_c, perpendicular ao plano ab, no qual ocorre a transformação permanece normal.) Usamos, portanto, o círculo de diâmetro AB para determinar as tensões, normal e de cisalhamento, que atuam nas faces do elemento quando ele sofre uma rotação em torno do eixo c (Fig. 7.29). Analogamente, círculos de diâmetros BC e CA podem ser utilizados para determinar as tensões no elemento quando ele sofre uma rotação em torno dos eixos a e b, respectivamente. Embora nossa análise esteja limitada a rotações em torno dos eixos principais, poderíamos mostrar que qualquer outra transformação de eixos levaria às tensões representadas na Fig. 7.29 por um ponto localizado dentro da área sombreada. Assim, o raio do maior dos três círculos resulta no máximo valor da tensão de cisalhamento no ponto Q.

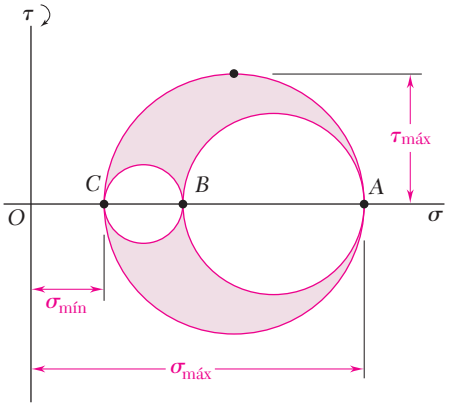


Fig. 7.29

Observando que o diâmetro daquele círculo é igual à diferença entre $\sigma_{máx}$ e $\sigma_{mín}$, escrevemos

$$\tau_{máx} = \tfrac{1}{2}|\sigma_{máx} - \sigma_{mín}| \tag{7.22}$$

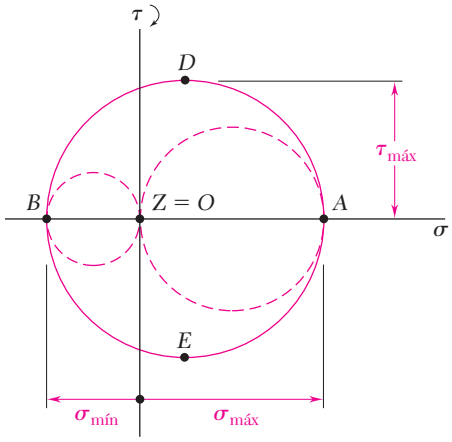


Fig. 7.30

em que $\sigma_{máx}$ e $\sigma_{mín}$ representam os valores *algébricos* das tensões máxima e mínima no ponto Q.

Vamos, agora, retornar ao caso particular do *estado plano de tensão*, que foi discutido nas Seções 7.2 até 7.4. Lembramos que, se forem selecionados os eixos x e y no estado plano de tensão, temos $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$. Isso significa que o eixo z, isto é, o eixo perpendicular ao plano de tensão, é um dos três eixos principais de tensão. Em um diagrama do círculo de Mohr, esse eixo corresponde à origem O, em que $\sigma = \tau = 0$. Lembramos também que os outros dois eixos principais correspondem aos pontos A e B em que o círculo de Mohr para o plano xy intercepta o eixo σ. Se A e B estão localizados em lados opostos da origem O (Fig. 7.30), as tensões principais

correspondentes representam as tensões normais máxima e mínima no ponto Q, e a tensão de cisalhamento máxima é igual à tensão de cisalhamento máxima "no plano" das tensões. Conforme observado na Seção 7.3, os planos de tensão de cisalhamento máxima correspondem aos pontos D e E do círculo de Mohr e estão a 45° dos planos principais que correspondem aos pontos A e B. Eles são, portanto, os planos diagonais sombreados mostrados nas Figs. 7.31*a* e *b*.

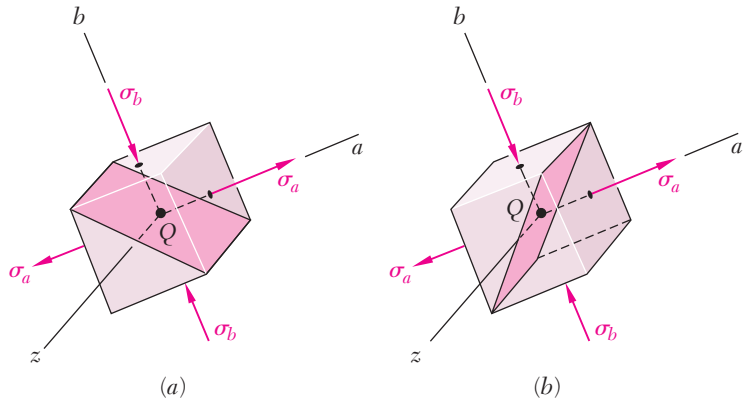


Fig. 7.31

Em contrapartida, se A e B estiverem no mesmo lado de O, ou seja, se σ_a e σ_b tiverem o mesmo sinal, então o círculo que define $\sigma_{máx}$, $\sigma_{mín}$ e $\tau_{máx}$ *não* será o círculo correspondente a uma transformação de tensão dentro do plano xy. Se $\sigma_a > \sigma_b > 0$, conforme consideramos na Fig. 7.32, temos $\sigma_{máx} = \sigma_a$, $\sigma_{mín} = 0$, e $\tau_{máx}$ será igual ao raio do círculo definido pelos pontos O e A, isto é, $\tau_{máx} = \frac{1}{2}\sigma_{máx}$. Notamos também que as normais Qd' e Qe' aos planos de tensão de cisalhamento máxima são obtidas rotacionando-se o eixo Qa em 45° dentro do plano za. Assim, os planos de tensão de cisalhamento máxima serão os planos diagonais sombreados mostrados nas Figs. 7.33*a* e *b*.

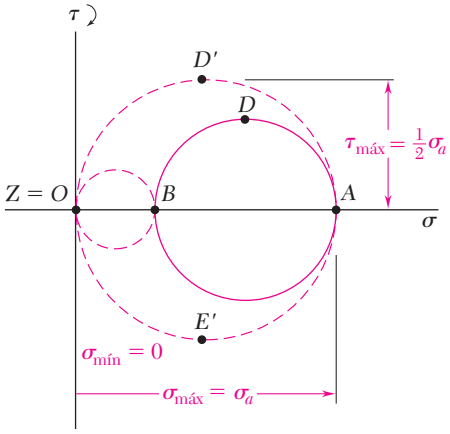


Fig. 7.32

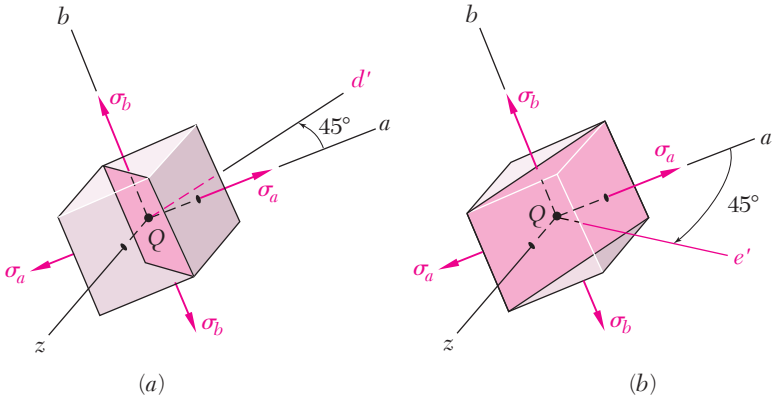


Fig. 7.33

EXEMPLO 7.3

Para o estado plano de tensão mostrado na Fig. 7.34, determine (*a*) os três planos principais e as tensões principais e (*b*) a tensão de cisalhamento máxima.

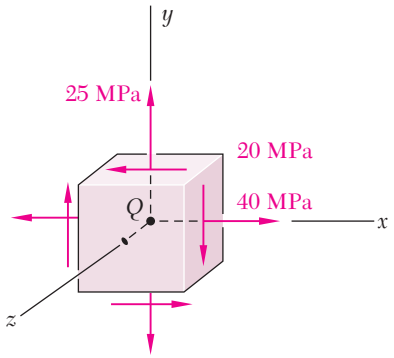


Fig. 7.34

(a) Planos principais e tensões principais. Construímos o círculo de Mohr para a transformação de tensão no plano *xy* (Fig. 7.35). O ponto *X* é representado por 40 unidades à direita do eixo τ e por 20 unidades acima do eixo σ (pois a tensão de cisalhamento correspondente tende a girar o elemento no sentido horário).

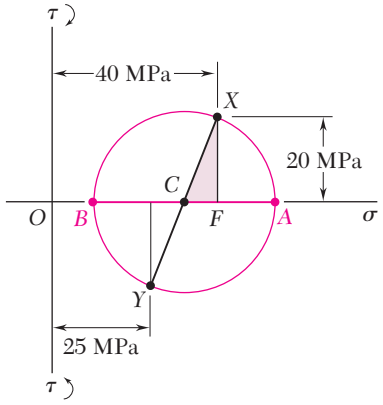


Fig. 7.35

O ponto *Y* é representado por 25 unidades à direita do eixo τ e por 20 unidades abaixo do eixo σ. Traçando a linha *XY*, obtemos o centro *C* do círculo de Mohr para o plano *xy*; sua abscissa é

$$\sigma_{\text{méd}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{40\text{ MPa} + 25\text{ MPa}}{2} = 32{,}5\text{ MPa}$$

Como os lados do triângulo retângulo *CFX* são $CF = 40 - 32{,}5 = 7{,}5$ MPa e $FX = 20$ MPa, o raio do círculo é

$$R = CX = \sqrt{(7{,}5)^2 + (20)^2} = 21{,}4\text{ MPa}$$

As tensões principais no plano das tensões são

$$\sigma_a = OA = OC + CA = 32{,}5 + 21{,}4\text{ MPa} = 53{,}9\text{ MPa}$$
$$\sigma_b = OB = OC - BC = 32{,}5 - 21{,}4\text{ MPa} = 11{,}1\text{ MPa}$$

Como as faces do elemento que são perpendiculares ao eixo *z* estão livres de tensão, essas faces definem um dos planos principais, e a tensão principal correspondente é $\sigma_z = 0$. Os outros dois planos principais são definidos pelos pontos *A* e *B* no círculo de Mohr. O ângulo θ_p, por meio do qual o elemento deverá sofrer rotação em torno do eixo *z* para fazer suas faces coincidirem com esses planos (Fig. 7.36), é metade do ângulo *ACX*. Temos

$$\text{tg } 2\theta_p = \frac{FX}{CF} = \frac{20}{7{,}5}$$
$$2\theta_p = 69{,}4° \downarrow \qquad \theta_p = 34{,}7° \downarrow$$

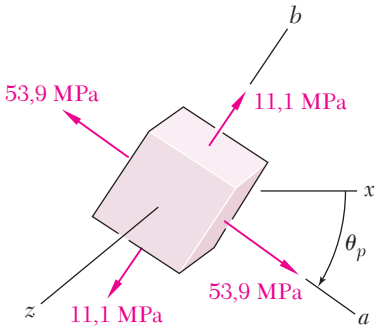


Fig. 7.36

(b) Tensão de cisalhamento máxima. Traçamos agora os círculos de diâmetros *OB* e *OA*, que correspondem, respectivamente, às rotações do elemento em torno dos eixos *a* e *b* (Fig. 7.37). Notamos que a tensão de cisalhamento máxima é igual ao raio do círculo de diâmetro *OA*. Temos então

$$\tau_{\text{máx}} = \tfrac{1}{2}\sigma_a = \tfrac{1}{2}(53{,}9\text{ MPa}) = 26{,}95\text{ MPa}$$

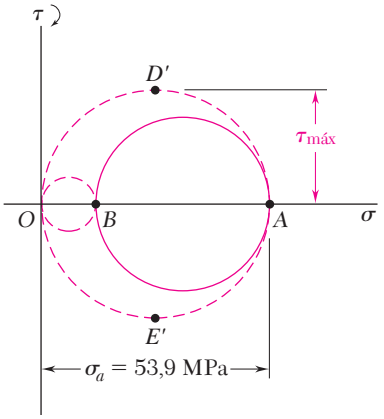


Fig. 7.37

Como os pontos D' e E', que definem os planos de tensão de cisalhamento máxima, estão localizados nas extremidades do diâmetro vertical do círculo, correspondendo a uma rotação em torno do eixo *b*, as faces do elemento da Fig. 7.36 podem ser levadas a coincidir com os planos de tensão de cisalhamento máxima por meio de uma rotação de 45° em torno do eixo *b*.

*7.7. Critérios de escoamento para materiais dúcteis em estado plano de tensão

Os elementos estruturais e componentes de máquinas feitos com material dúctil geralmente são projetados de modo que o material não escoe sob as condições esperadas de carregamento. Quando o elemento ou componente está sob um estado de tensão uniaxial (Fig. 7.38), o valor da tensão normal σ_x que fará o material escoar pode ser obtido facilmente por um ensaio de tração

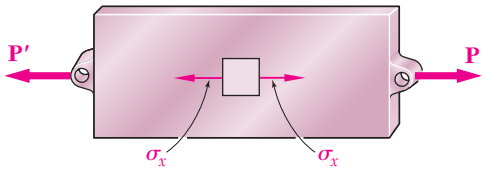


Fig. 7.38

executado em um corpo de prova do mesmo material, pois o corpo de prova e o elemento estrutural ou componente de máquina estão sob o mesmo estado de tensão. Assim, independentemente do mecanismo real que faz o material escoar, podemos dizer que o elemento ou componente estará seguro desde que $\sigma_x < \sigma_E$, em que σ_E é a tensão de escoamento do material do corpo de prova.

Em contrapartida, quando um elemento estrutural ou componente de máquina está em um estado plano de tensão (Fig. 7.39*a*), considera-se conveniente usar um dos métodos desenvolvidos anteriormente para determinar as tensões principais σ_a e σ_b em um dado ponto (Fig. 7.39*b*). O material pode então ser considerado como estando em um estado de tensão biaxial naquele ponto. Como esse estado é diferente do estado de tensão uniaxial encontrado em um corpo de prova submetido a um ensaio de tração, fica claro que não é possível prever diretamente, por meio de um ensaio como esse, se o elemento estrutural ou componente de máquina que está sendo investigado falhará ou não. Será necessário primeiro estabelecer algum critério referente ao mecanismo real de falha do material, que permitirá comparar os efeitos de ambos os estados de tensão no material. A finalidade desta seção é apresentar os dois critérios de escoamento utilizados mais frequentemente em materiais dúcteis.

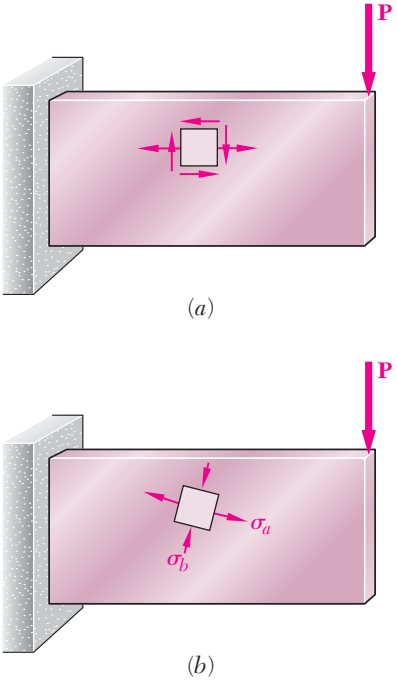


Fig. 7.39

Critério da tensão de cisalhamento máxima. Este critério baseia-se na observação de que o escoamento em materiais dúcteis é provocado pelo deslizamento do material ao longo de superfícies oblíquas, muito em razão, principalmente, das tensões de cisalhamento (cf. Seção 2.3). De acordo com esse critério, qualquer componente estrutural estará seguro desde que o valor máximo da tensão de cisalhamento $\tau_{máx}$ nesse componente permaneça menor que o valor correspondente da tensão de cisalhamento em um ensaio de tração com um corpo de prova do mesmo material, quando o corpo de prova começa a escoar.

Lembrando da Seção 1.11, em que o valor máximo da tensão de cisalhamento sob uma força axial centrada era igual à metade do valor da tensão axial normal correspondente, concluímos, então, que a tensão de cisalhamento máxima em um corpo de prova em um ensaio de tração é $\frac{1}{2}\sigma_E$, quando o corpo de prova começa a escoar. No entanto, vimos na Seção 7.6 que, para o estado plano de tensão, o valor máximo da tensão de cisalhamento $\tau_{máx}$ é igual a $\frac{1}{2}|\sigma_{máx}|$ se as tensões principais forem ambas positivas ou ambas negativas, e igual a $\frac{1}{2}|\sigma_{máx} - \sigma_{mín}|$ se a tensão máxima for positiva e a tensão mínima,

negativa. Assim, se as tensões principais σ_a e σ_b tiverem o mesmo sinal, o critério da tensão de cisalhamento máxima resultará em

$$|\sigma_a| < \sigma_E \qquad |\sigma_b| < \sigma_E \tag{7.23}$$

Se as tensões principais σ_a e σ_b tiverem sinais opostos, o critério da tensão de cisalhamento máxima resultará em

$$|\sigma_a - \sigma_b| < \sigma_E \tag{7.24}$$

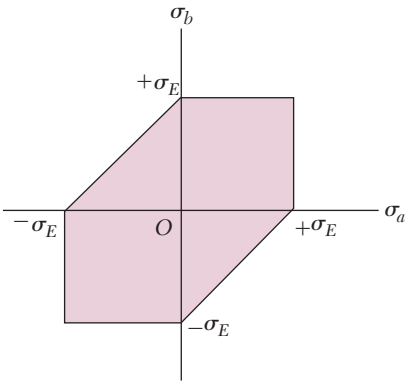


Fig. 7.40

As relações obtidas foram representadas graficamente na Fig. 7.40. Qualquer estado de tensão será representado graficamente naquela figura por um ponto de coordenadas σ_a e σ_b, em que σ_a e σ_b são as duas tensões principais. Se esse ponto cair dentro da área mostrada na figura, o componente estrutural estará seguro. Se ele cair fora dessa área, o componente falhará em decorrência do escoamento no material. O hexágono associado ao início do escoamento no material é conhecido como *hexágono de Tresca*, em homenagem ao engenheiro Francês Henri Edouard Tresca (1814-1885).

Critério da energia de distorção máxima. Este critério baseia-se na determinação da energia de distorção em um dado material, isto é, da energia associada a variações na forma do material (ao contrário da energia associada a variações em volume no mesmo material). De acordo com esse critério, também conhecido como *critério de von Mises*, em homenagem ao matemático alemão-americano Richard von Mises (1883-1953), um componente estrutural está seguro desde que o valor máximo da energia de distorção por unidade de volume naquele material permaneça menor que a energia de distorção por unidade de volume necessária para provocar escoamento em um corpo de prova do mesmo material, em um ensaio de tração. Como veremos na Seção 11.6, a energia de distorção por unidade de volume em um material isotrópico, em um estado plano de tensão, é

$$u_d = \frac{1}{6G}(\sigma_a^2 - \sigma_a\sigma_b + \sigma_b^2) \tag{7.25}$$

em que σ_a e σ_b são as tensões principais e G é o módulo de elasticidade transversal. No caso particular de um corpo de prova em ensaio de tração que está começando a escoar, temos $\sigma_a = \sigma_E$, $\sigma_b = 0$ e $(u_d)_E = \sigma_E^2/6G$. Assim, o critério de energia de distorção máxima indica que o componente estrutural estará seguro desde que $u_d < (u_d)_E$, ou

$$\sigma_a^2 - \sigma_a\sigma_b + \sigma_b^2 < \sigma_E^2 \tag{7.26}$$

isto é, desde que o ponto de coordenadas σ_a e σ_b fique dentro da área mostrada na Fig. 7.41. Essa área é limitada pela elipse da equação

$$\sigma_a^2 - \sigma_a\sigma_b + \sigma_b^2 = \sigma_E^2 \tag{7.27}$$

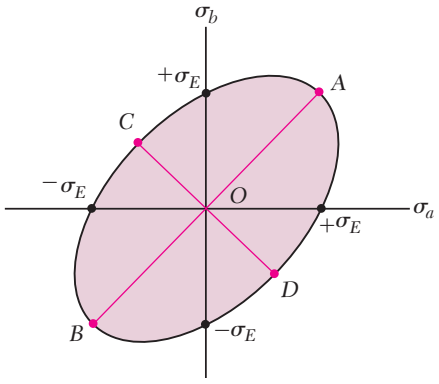


Fig. 7.41

que intercepta o eixo de coordenadas em $\sigma_a = \pm\,\sigma_E$ e $\sigma_b = \pm\,\sigma_E$. Podemos verificar que o eixo maior da elipse divide o primeiro e o terceiro quadrantes e se estende de A ($\sigma_a = \sigma_b = \sigma_E$) até B ($\sigma_a = \sigma_b = -\sigma_E$), enquanto seu eixo menor se estende de C ($\sigma_a = -\sigma_b = -0{,}577\sigma_E$) a D ($\sigma_a = -\sigma_b = 0{,}577\sigma_E$).

O critério da tensão de cisalhamento máxima e da energia de distorção máxima são comparados na Fig. 7.42. Notamos que a elipse passa pelos vértices do hexágono. Assim, para os estados de tensão representados por esses

seis pontos, os dois critérios trarão os mesmos resultados. Para qualquer outro estado de tensão, o critério da tensão de cisalhamento máxima é mais conservador que o critério de energia de distorção máxima, pois o hexágono está localizado dentro da elipse.

Um estado de tensão de interesse especial é aquele associado ao escoamento em um ensaio de torção. Lembramos da Fig. 7.24 da Seção 7.4 que, para torção, $\sigma_{\text{mín}} = -\sigma_{\text{máx}}$; assim, os pontos correspondentes na Fig. 7.42 estão localizados no bissetor do segundo e quarto quadrantes. Conclui-se que o escoamento ocorre em um ensaio de torção quando $\sigma_a = -\sigma_b = \pm 0{,}5\sigma_E$, de acordo com o critério da tensão de cisalhamento máxima, e quando $\sigma_a = -\sigma_b = \pm 0{,}577\sigma_E$, de acordo com o critério da energia de distorção máxima. Mas, lembrando novamente da Fig. 7.24, notamos que σ_a e σ_b devem ser iguais em intensidade a $\tau_{\text{máx}}$, ou seja, ao valor obtido de um ensaio de torção para a tensão de escoamento do material τ_E. Como os valores da tensão de escoamento σ_E em tração, e da tensão de escoamento τ_E em cisalhamento, são dados para vários materiais dúcteis no Apêndice B, podemos calcular a relação τ_E/σ_E para esses materiais e verificar que os valores obtidos variam de 0,55/0,60. Assim, o critério da energia de distorção máxima parece ser mais preciso que o critério da tensão de cisalhamento máxima quando se trata de prever o escoamento em torção.

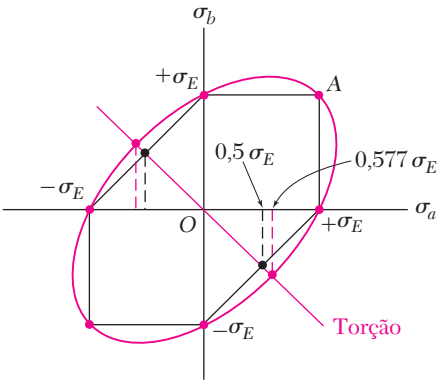


Fig. 7.42

*7.8. Critério de fratura para materiais frágeis em estado plano de tensão

Conforme vimos no Capítulo 2, os materiais frágeis são caracterizados pelo fato de que, quando submetidos a um ensaio de tração, eles falham subitamente por meio da ruptura ou fratura sem nenhum escoamento prévio. Quando um elemento estrutural ou componente de máquina feito de um material frágil está sob um estado de tensão de tração uniaxial,o valor da tensão normal que o faz falhar é igual ao limite de resistência σ_L desse material obtido no ensaio de tração, uma vez que o corpo de prova do ensaio e o elemento ou componente investigado estão sob o mesmo estado de tensão. No entanto, quando um elemento estrutural ou componente de máquina está em um estado plano de tensão, considera-se conveniente determinar primeiro as tensões principais σ_a e σ_b em um dado ponto, e usar um dos critérios indicados nesta seção para prever se o elemento estrutural ou componente de máquina falhará ou não.

Critério da tensão normal máxima. De acordo com esse critério, um certo componente estrutural falha quando a tensão normal máxima nesse componente atinge o limite de resistência σ_L obtido no ensaio de tração de um corpo de prova do mesmo material. Assim, o componente estrutural estará seguro desde que os valores absolutos das tensões principais σ_a e σ_b sejam ambos menores que σ_L

$$|\sigma_a| < \sigma_L \qquad |\sigma_b| < \sigma_L \tag{7.28}$$

O critério da tensão normal máxima pode ser expresso graficamente conforme mostra a Fig. 7.43. Se o ponto obtido representando os valores σ_a e σ_b das tensões principais cair dentro da área quadrada mostrada na figura, o componente estrutural estará seguro. Se ele cair fora dessa área, o componente falhará.

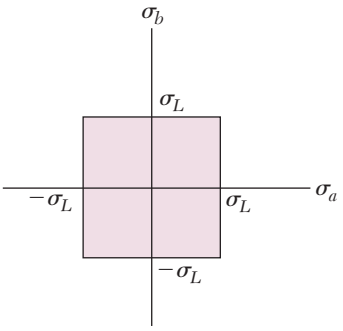


Fig. 7.43

O critério da tensão normal máxima, também conhecido como *critério de Coulomb*, em homenagem ao físico Francês Charles Augustin de Coulomb (1736-1806), tem uma limitação importante, pois se baseia na hipótese de que o limite de resistência do material é o mesmo em tração e em compressão. Conforme notamos na Seção 2.3, isso raramente ocorre em razão da presença de defeitos no material, como trincas microscópicas ou cavidades, que tendem a enfraquecer o material em tração, ao mesmo tempo em que não afetam de modo considerável sua resistência à compressão. Além disso, esse critério não admite outros efeitos senão aqueles das tensões normais no mecanismo de falha do material.†

Critério de Mohr. Este critério, sugerido pelo engenheiro alemão Otto Mohr, pode ser utilizado para prever o efeito de um dado estado plano de tensão em um material frágil, quando há disponíveis resultados de vários tipos de ensaios para esse material.

Vamos primeiramente considerar que um ensaio de tração e um ensaio de compressão foram executados em um certo material, e que foram determinados para ele os valores de σ_{LT} e σ_{LC} do limite de resistência em tração e em compressão. O estado de tensão correspondente à ruptura do corpo de prova no ensaio de tração pode ser representado em um diagrama do círculo de Mohr pelo círculo que intercepta o eixo horizontal em O e σ_{LT} (Fig. 7.45*a*). Analogamente, o estado de tensão correspondente à falha do corpo de prova no ensaio de compressão pode ser representado pelo círculo que intercepta o eixo horizontal em O e σ_{LC}. Está claro que um estado de tensão representado por um círculo contido inteiramente em um desses círculos será um estado de tensão seguro. Assim, se ambas as tensões principais forem positivas, o estado de tensão será seguro desde que $\sigma_a < \sigma_{LT}$ e $\sigma_b < \sigma_{LT}$; se ambas as tensões principais forem negativas, o estado de tensão será seguro desde que $|\sigma_a| < |\sigma_{LC}|$ e $|\sigma_b| < |\sigma_{LC}|$. Representando o ponto de coordenadas σ_a e σ_b (Fig. 7.45*b*), verificamos que o estado de tensão será seguro desde que aquele ponto recaia dentro de uma das áreas quadradas mostradas na figura.

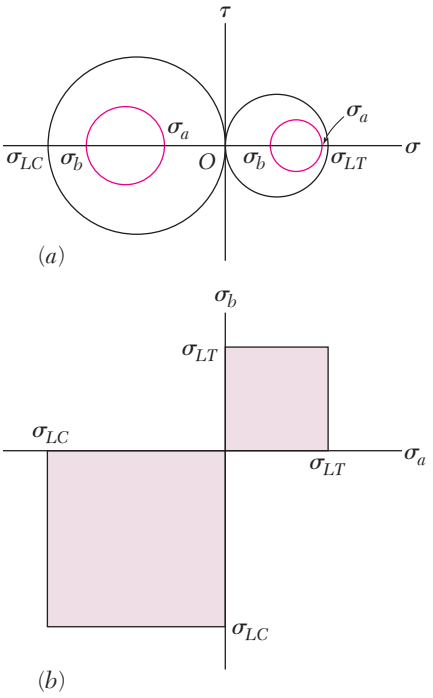


Fig. 7.45

Para analisarmos os casos em que σ_a e σ_b têm sinais opostos, consideramos agora que foi executado um ensaio de torção no corpo de prova do material e que seu limite de resistência ao cisalhamento, τ_L, foi determinado. Traçando o círculo centrado em O, que representa o estado de tensão correspondente à falha do corpo de prova no ensaio de torção (Fig. 7.46*a*), observamos que qualquer estado de tensão representado por um círculo contido inteiramente nesse círculo também será seguro. O critério de Mohr é uma

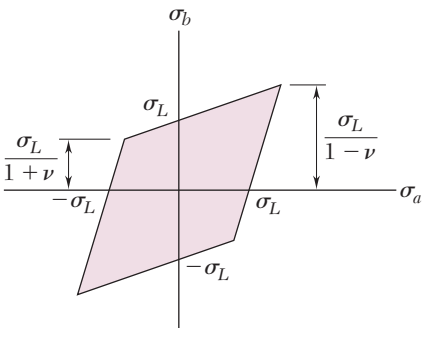


Fig. 7.44

†Outro critério de falha conhecido como *critério da deformação específica normal máxima*, ou critério de Saint-Venant, foi amplamente utilizado durante o século XIX. De acordo com esse critério, um dado componente estrutural estará seguro desde que o valor máximo da deformação específica normal nesse componente permaneça menor que o valor ϵ_L da deformação específica na qual um corpo de prova do mesmo material falhará em ensaio de tração. Mas, conforme será mostrado na Seção 7.12, a deformação específica será máxima ao longo de um dos eixos principais de tensão se a deformação for elástica e o material for homogêneo e isotrópico. Assim, chamando de ϵ_a e ϵ_b os valores da deformação específica normal ao longo dos eixos principais no plano de tensão, escrevemos

$$|\epsilon_a| < \epsilon_L \qquad |\epsilon_b| < \epsilon_L \tag{7.29}$$

Fazendo uso da lei de Hooke generalizada (Seção 2.12), poderíamos expressar essas relações em termos das tensões principais σ_a e σ_b e do limite de resistência σ_L do material. Veríamos que, de acordo com o critério da deformação específica normal máxima, o componente estrutural estará seguro desde que o ponto obtido representando σ_a e σ_b recaia dentro da área mostrada na Fig. 7.44, em que ν é o coeficiente de Poisson para o material.

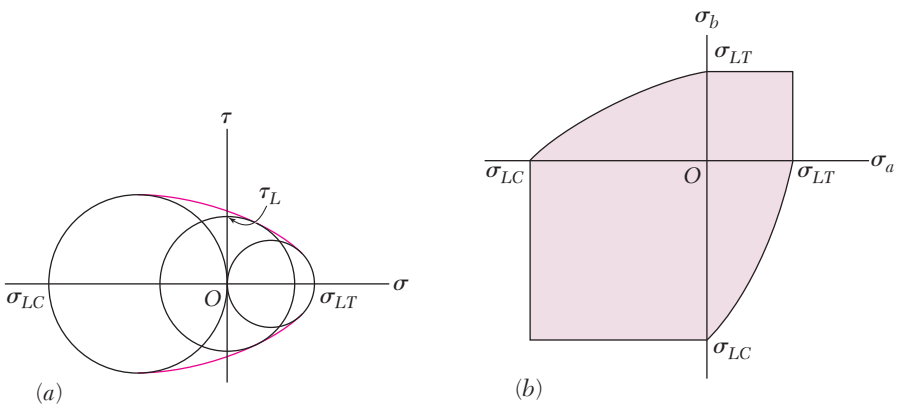


Fig. 7.46

extensão lógica dessa observação: de acordo com ele, um estado de tensão estará seguro se ele for representado por um círculo localizado inteiramente dentro da área limitada pela envoltória dos círculos correspondentes aos dados obtidos no ensaio. As outras partes do diagrama de tensões principais podem agora ser obtidas traçando-se vários círculos tangentes a essa envoltória, determinando-se os valores correspondentes de σ_a e σ_b, e representando-se os pontos de coordenadas σ_a e σ_b (Fig. 7.46*b*).

Podem ser traçados diagramas mais precisos quando existem mais resultados de ensaios que correspondem a vários estados de tensão. Por outro lado, se os únicos dados disponíveis forem os valores dos limites de resistências σ_{LT} e σ_{LC}, a envoltória da Fig. 7.46*a* será substituída pelas tangentes AB e $A'B'$ aos círculos, que correspondem, respectivamente, à falha em tração e à falha em compressão (Fig. 7.47*a*). Com base nas semelhanças de triângulos traçados nessa figura, notamos que a abscissa do centro C de um círculo tangente a AB e $A'B'$ está linearmente relacionada com seu raio R. Como $\sigma_a = OC + R$ e $\sigma_b = OC - R$, conclui-se que σ_a e σ_b estão também linearmente relacionados. Assim, a área sombreada corresponde ao critério de Mohr simplificado, que é limitada por linhas retas no segundo e quarto quadrantes (Fig. 7.47*b*).

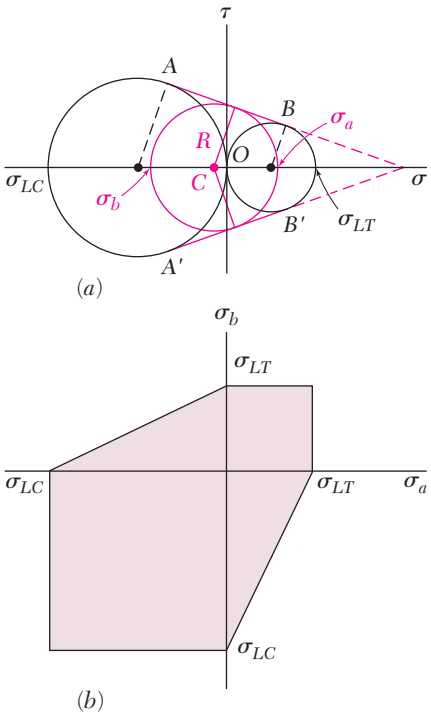
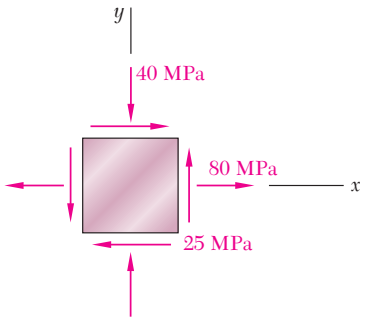


Fig. 7.47

Note que para determinar se um componente estrutural estará seguro sob um dado carregamento, o estado de tensão deve ser calculado em todos os pontos críticos do componente, isto é, em todos os pontos em que possam ocorrer concentrações de tensão. Isso pode ser feito em muitos casos usando os fatores de concentração de tensão dados nas Figs. 2.64, 3.32, 4.31 e 4.32. No entanto, há muitos exemplos em que a teoria da elasticidade deve ser usada para determinar o estado de tensão em um ponto crítico.

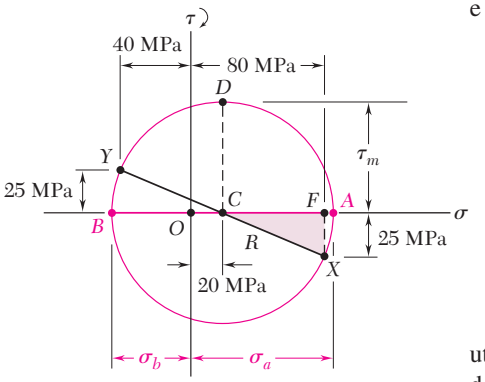
Deve-se tomar cuidado especial quando forem detectadas *trincas macroscópicas* em um componente estrutural. Embora se possa supor que o corpo de prova utilizado para determinar o limite de resistência à tração do material contenha o mesmo tipo de defeitos (isto é, trincas *microscópicas* ou cavidades) do componente estrutural que está sendo investigado, o corpo de prova certamente está isento de quaisquer trincas macroscópicas detectáveis. Quando uma trinca é detectada em um componente estrutural, é necessário determinar se essa trinca tenderá a se propagar sob condições esperadas de carregamento, causando a falha do componente, ou se ela permanecerá estável sem se propagar. Isso requer uma análise que envolve a energia associada com o crescimento da trinca. Esse tipo de análise está além do escopo deste texto e poderá ser feita por métodos da mecânica de fratura.



PROBLEMA RESOLVIDO 7.4

O estado plano de tensão mostrado na figura ocorre em um ponto crítico de um componente de máquina feito de aço. Após vários ensaios de tração, concluiu-se que a tensão de escoamento em tração é $\sigma_E = 250$ MPa para o tipo de aço utilizado. Determine o coeficiente de segurança em relação ao escoamento usando (*a*) o critério da tensão de cisalhamento máxima e (*b*) o critério da energia de distorção máxima.

SOLUÇÃO



Círculo de Mohr. Construímos o círculo de Mohr para o estado de tensão dado e encontramos

$$\sigma_{\text{méd}} = OC = \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \tfrac{1}{2}(80 - 40) = 20 \text{ MPa}$$

$$\tau_m = R = \sqrt{(CF)^2 + (FX)^2} = \sqrt{(60)^2 + (25)^2} = 65 \text{ MPa}$$

Tensões principais

$$\sigma_a = OC + CA = 20 + 65 = +85 \text{ MPa}$$
$$\sigma_b = OC - BC = 20 - 65 = -45 \text{ MPa}$$

***a*. Critério da tensão de cisalhamento máxima.** Como para a classe do aço utilizado a resistência à tração é $\sigma_E = 250$ MPa, a tensão de cisalhamento correspondente no escoamento é

$$\tau_E = \tfrac{1}{2}\sigma_E = \tfrac{1}{2}(250 \text{ MPa}) = 125 \text{ MPa}$$

Para $\tau_m = 65$ MPa:

$$C.S. = \frac{\tau_E}{\tau_m} = \frac{125 \text{ MPa}}{65 \text{ MPa}} \qquad C.S. = 1{,}92 \blacktriangleleft$$

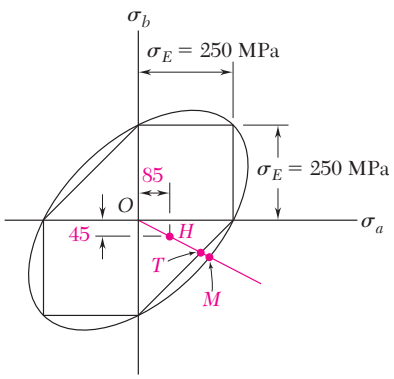
***b*. Critério da energia de distorção máxima.** Introduzindo um coeficiente de segurança na Equação (7.26), escrevemos

$$\sigma_a^2 - \sigma_a\sigma_b + \sigma_b^2 = \left(\frac{\sigma_E}{C.S.}\right)^2$$

Para $\sigma_a = +85$ MPa, $\sigma_b = -45$ MPa e $\sigma_E = 250$ MPa, temos

$$(85)^2 - (85)(-45) + (45)^2 = \left(\frac{250}{C.S.}\right)^2$$

$$114{,}3 = \frac{250}{C.S.} \qquad C.S. = 2{,}19 \blacktriangleleft$$



Comentário. Para um material dúctil com $\sigma_E = 250$ MPa, traçamos o hexágono associado com o critério da tensão de cisalhamento máxima e a elipse associada com o critério da energia de distorção máxima. O estado plano de tensão é representado pelo ponto H de coordenadas $\sigma_a = 85$ MPa e $\sigma_b = -45$ MPa. Notamos que a linha reta traçada entre os pontos O e H intercepta o hexágono no ponto T e a elipse no ponto M. Para cada critério, o valor obtido para *C.S.* pode ser verificado medindo-se os segmentos de reta indicados e calculando-se as relações entre eles:

$$(a)\ C.S. = \frac{OT}{OH} = 1{,}92 \qquad (b)\ C.S. = \frac{OM}{OH} = 2{,}19$$

PROBLEMAS

7.66 Para o estado plano de tensão mostrado na figura, determine a tensão de cisalhamento máxima quando (*a*) $\sigma_x = 0$ e $\sigma_y = 69$ MPa e (*b*) $\sigma_x = 124{,}1$ MPa e $\sigma_y = 55{,}2$ MPa. (*Sugestão*: Considere as tensões de cisalhamento no plano e fora do plano das tensões.)

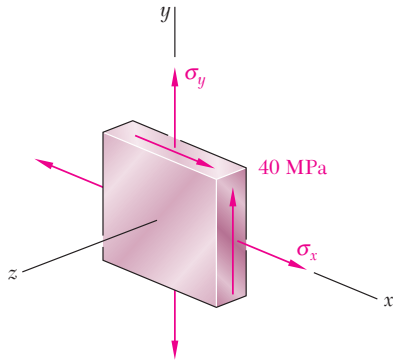
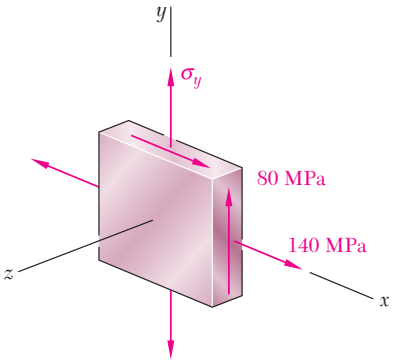


Fig. P7.66 e *P7.67*

7.67 Para o estado plano de tensão indicado, determine a tensão de cisalhamento máxima quando (*a*) $\sigma_x = 34{,}5$ MPa e $\sigma_y = 103{,}4$ MPa e (*b*) $\sigma_x = 82{,}7$ MPa e $\sigma_y = 13{,}79$ MPa. (*Sugestão*: Considere as tensões de cisalhamento no plano e fora do plano das tensões.)

7.68 Para o estado de tensão indicado, determine a tensão de cisalhamento máxima quando (*a*) $\sigma_y = 40$ MPa e (*b*) $\sigma_y = 120$ MPa. (*Sugestão*: Considere as tensões de cisalhamento no plano e fora do plano das tensões.)

7.69 Para o estado plano de tensão indicado, determine a tensão de cisalhamento máxima quando (*a*) $\sigma_y = 20$ MPa e (*b*) $\sigma_y = 140$ MPa. (*Sugestão*: Considere as tensões de cisalhamento no plano e fora do plano das tensões.)



Figs. P7.68 e P7.69

7.70 e 7.71 Para o estado de tensão indicado, determine a tensão de cisalhamento máxima quando (*a*) $\sigma_z = +24$ MPa, (*b*) $\sigma_z = -24$ MPa e (*c*) $\sigma_z = 0$.

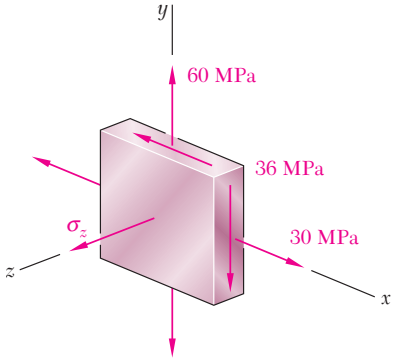


Fig. P7.70

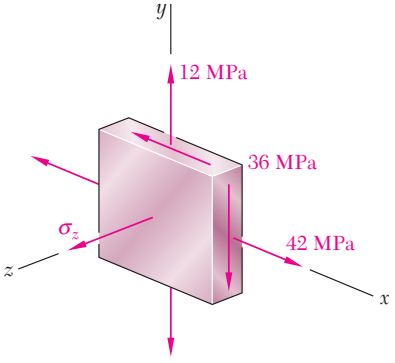


Fig. P7.71

7.72 e *7.73* Para o estado de tensão indicado, determine a tensão de cisalhamento máxima quando (*a*) $\tau_{yz} = 120{,}7$ MPa, (*b*) $\tau_{yz} = 55{,}2$ MPa e (*c*) $\tau_{yz} = 0$.

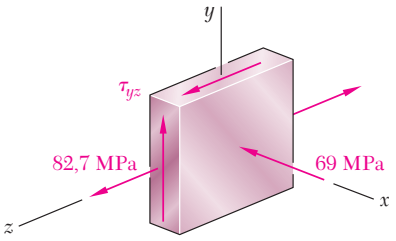


Fig. P7.72

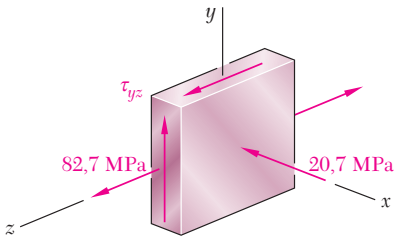


Fig. *P7.73*

7.74 Para o estado plano de tensão indicado, determine o valor de τ_{xy} para o qual a tensão de cisalhamento máxima é (*a*) 60 MPa e (*b*) 78 MPa.

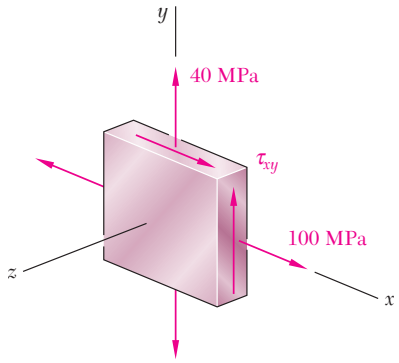


Fig. P7.74

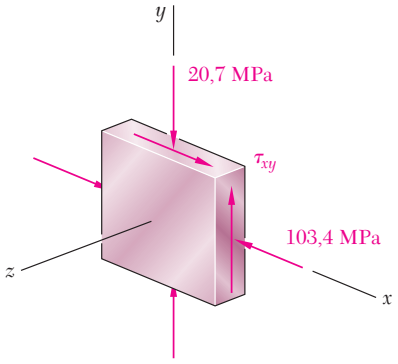


Fig. P7.75

7.75 Para o estado plano de tensão indicado, determine o valor de τ_{xy} para o qual a tensão de cisalhamento máxima é (*a*) 69 MPa e (*b*) 56,9 MPa.

7.76 Para o estado de tensão indicado, determine dois valores de σ_y para os quais a tensão de cisalhamento máxima é de 51,7 MPa.

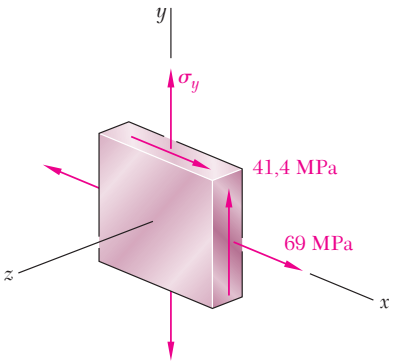


Fig. P7.76

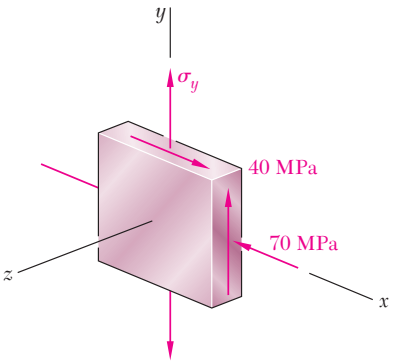


Fig. *P7.77*

7.77 Para o estado de tensão mostrado na figura, determine dois valores de σ_y para os quais a tensão de cisalhamento máxima é de 75 MPa.

7.78 Para o estado de tensão abaixo, determine o intervalo de valores de τ_{xz} para o qual a tensão de cisalhamento máxima é igual ou menor que 90 MPa.

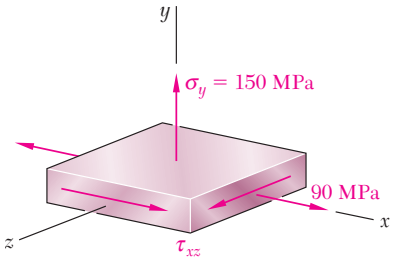


Fig. P7.78

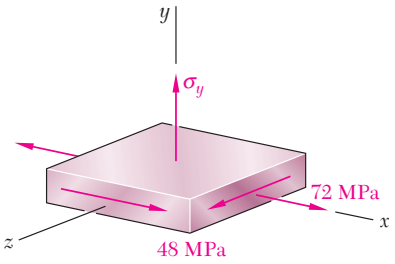


Fig. *P7.79*

7.79 Para o estado de tensão indicado, determine dois valores de σ_y para os quais a tensão de cisalhamento máxima é de 64 MPa.

***7.80** Para o estado de tensão do Problema 7.69, determine (*a*) o valor de σ_y para o qual a tensão de cisalhamento máxima seja a menor possível e (*b*) o valor correspondente da tensão de cisalhamento.

7.81 O estado plano de tensão indicado ocorre em um componente de máquina feito de um aço com $\sigma_E = 325$ MPa. Usando o critério da energia de distorção máxima, determine se ocorre o escoamento quando (*a*) $\sigma_0 = 200$ MPa, (*b*) $\sigma_0 = 240$ MPa e (*c*) $\sigma_0 = 280$ MPa. Caso o escoamento não ocorra, determine o coeficiente de segurança correspondente.

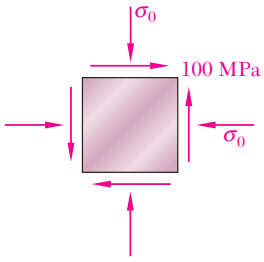


Fig. P7.81

7.82 Resolva o Problema 7.81 usando o critério da tensão de cisalhamento máxima.

7.83 O estado plano de tensão indicado ocorre em um componente de máquina feito de um aço com $\sigma_E = 248{,}2$ MPa. Usando o critério da energia de distorção máxima, verifique se ocorre escoamento quando (*a*) $\tau_{xy} = 103{,}4$ MPa, (*b*) $\tau_{xy} = 124{,}1$ MPa e (*c*) $\tau_{xy} = 144{,}8$ MPa. Caso o escoamento não ocorra, determine o coeficiente de segurança correspondente.

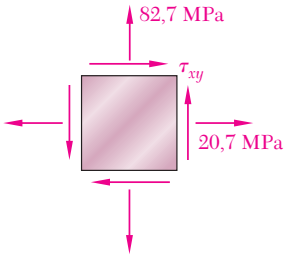


Fig. P7.83

7.84 Resolva o Problema 7.83 usando o critério da tensão de cisalhamento máxima.

7.85 O eixo *AB* de 44,45 mm de diâmetro é feito de uma classe de aço para o qual a tensão de escoamento é $\sigma_E = 248{,}2$ MPa. Usando o critério da tensão de cisalhamento máxima, determine a intensidade da força **P** para a qual o escoamento ocorre quando $T = 1694{,}7$ kN · mm.

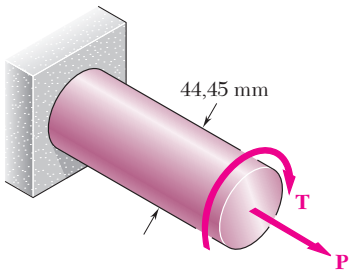


Fig. P7.85

7.86 Resolva o Problema 7.85 usando o critério da energia de distorção máxima.

7.87 O eixo *AB* de 36 mm de diâmetro é feito de um tipo de aço para o qual a tensão de escoamento é $\sigma_E = 250$ MPa. Usando o critério da tensão de cisalhamento máxima, determine a intensidade do torque **T** para a qual o escoamento ocorre quando $P = 200$ kN.

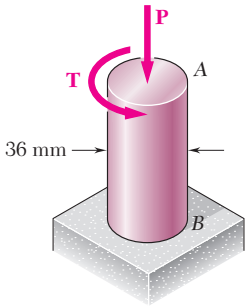


Fig. *P7.87*

7.88 Resolva o Problema 7.87 usando o critério da energia de distorção máxima.

7.89 e 7.90 O estado plano de tensão mostrado é o esperado ocorrer em uma base fundida de alumínio. Sabendo que para a liga de alumínio utilizada ocorrer $\sigma_{LT} = 69$ MPa e $\sigma_{LC} = 206{,}9$ MPa e usando o critério de Mohr, determine se ocorrerá a ruptura do componente.

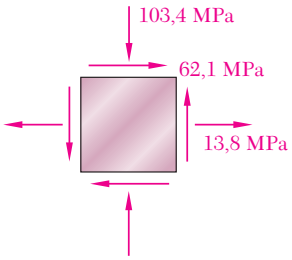


Fig. P7.89

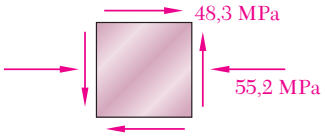


Fig. P7.90

7.91 e 7.92 O estado plano de tensão indicado é o que se espera que ocorra com uma peça fundida de alumínio. Sabendo que para a liga de alumínio utilizada $\sigma_{LT} = 80$ MPa e $\sigma_{LC} = 200$ MPa e usando o critério de Mohr, determine se ocorrerá a ruptura do componente.

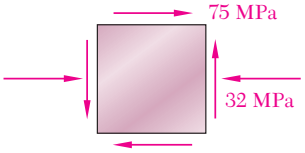


Fig. P7.91

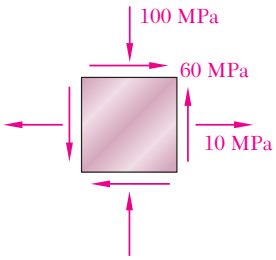


Fig. P7.92

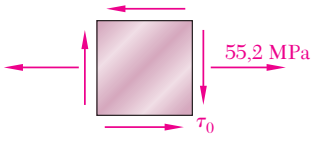


Fig. *P7.93*

7.93 O estado plano de tensão mostrado ocorrerá em um ponto crítico em uma peça fundida de alumínio que é feita de uma liga para a qual $\sigma_{UT} = 69$ MPa e $\sigma_{UC} = 172{,}4$ MPa. Usando o critério de Mohr, determine a tensão de cisalhamento τ_0 para a qual se espera que ocorra a falha.

7.94 O estado plano de tensão mostrado na figura ocorrerá em um ponto crítico em um tubo feito de uma liga de alumínio para a qual $\sigma_{LT} = 75$ MPa e $\sigma_{LC} = 150$ MPa. Usando o critério de Mohr, determine a tensão de cisalhamento τ_0 para a qual se espera que ocorra a falha.

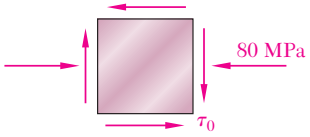


Fig. P7.94

7.95 A barra de alumínio fundido indicada na figura é feita de uma liga para a qual $\sigma_{LT} = 70$ MPa e $\sigma_{LC} = 175$ MPa. Sabendo que a intensidade T dos torques aplicados está crescendo lentamente e usando o critério de Mohr, determine a tensão de cisalhamento τ_0 que se espera no momento da ruptura.

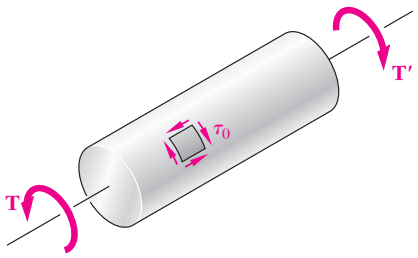


Fig. P7.95

7.96 A barra de alumínio fundido indicada na figura é feita de uma liga para a qual $\sigma_{LT} = 60$ MPa e $\sigma_{LC} = 120$ MPa. Usando o critério de Mohr, determine a intensidade do torque **T** para a qual se espera que ocorra a falha.

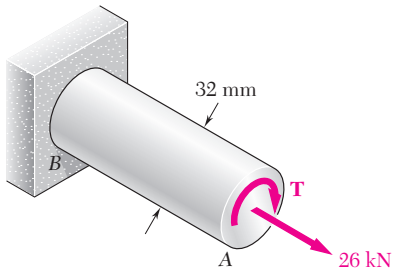


Fig. P7.96

7.97 Um componente de máquina é feito de um tipo de ferro fundido para o qual $\sigma_{LT} = 55{,}2$ MPa e $\sigma_{LC} = 137{,}9$ MPa. Para cada um dos estados de tensão indicados, e usando o critério de Mohr, determine a tensão normal σ_0 na qual se espera que haja a ruptura do componente.

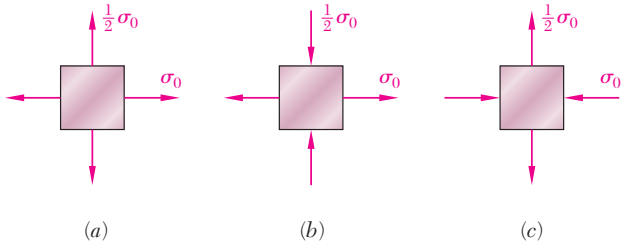


Fig. *P7.97*

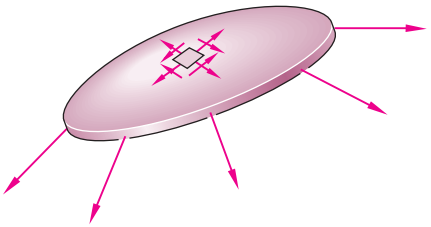


Fig. 7.48

7.9. Tensões em vasos de pressão de paredes finas

Os vasos de pressão de paredes finas consistem em uma importante aplicação de análise do estado plano de tensão. Como suas paredes oferecem pouca resistência à flexão, pode-se supor que os esforços internos que atuam em determiando parte da parede sejam tangentes à superfície do vaso (Fig. 7.48). As tensões resultantes em um elemento da parede estarão contidas em um plano tangente à superfície do vaso.

Nossa análise de tensões em vasos de pressão de paredes finas será limitada aos dois tipos de vasos encontrados com maior frequência: vasos de pressão cilíndricos e vasos de pressão esféricos (Figs. 7.49 e 7.50).

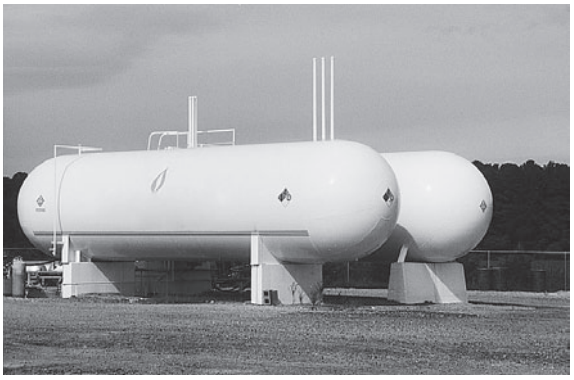


Fig. 7.49

Fig. 7.50

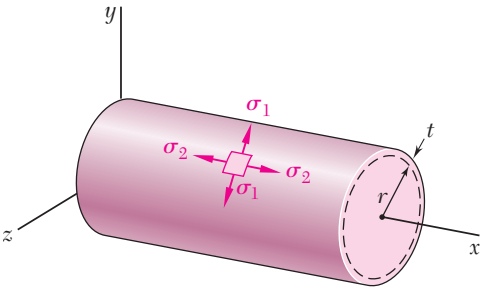


Fig. 7.51

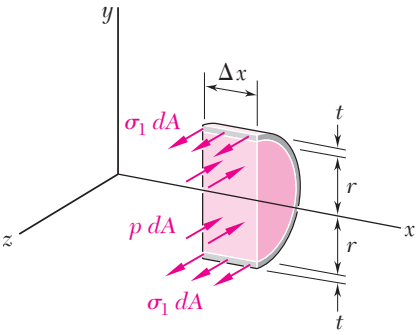


Fig. 7.52

Considere um vaso cilíndrico de raio interno r e espessura de parede t que contém um fluido sob pressão (Fig. 7.51). Propomos determinar as tensões que atuam em um pequeno elemento de parede com lados respectivamente paralelos e perpendiculares ao eixo do cilindro. Em razão da axissimetria do vaso e seu conteúdo, está claro que a tensão de cisalhamento não está atuando no elemento. As tensões normais σ_1 e σ_2 mostradas na Fig. 7.51 são, portanto, tensões principais. A tensão σ_1 é conhecida como *tensão tangencial* ou circunferencial e a tensão σ_2 é chamada de *tensão longitudinal*.

Para determinarmos a tensão tangencial σ_1, destacamos uma parte do vaso e seu conteúdo limitado pelo plano xy e por dois planos paralelos ao plano yz a uma distância Δx um do outro (Fig. 7.52). As forças paralelas ao eixo z que atuam no corpo livre consistem em forças elementares internas $\sigma_1\, dA$ que atuam nas seções da parede, e de forças elementares de pressão $p\, dA$ que atuam na parte do fluido incluído no corpo livre. Note que p representa a *pressão manométrica* do fluido, isto é, o excesso da pressão interna sobre a pressão atmosférica externa. A resultante das forças internas $\sigma_1\, dA$ é igual ao produto de σ_1 pela área da seção transversal $2t\, \Delta x$ da parede, enquanto a resultante das forças de pressão $p\, dA$ é igual ao produto de p pela área $2r\, \Delta x$.

Escrevendo a equação de equilíbrio $\Sigma F_z = 0$, temos

$$\Sigma F_z = 0: \qquad \sigma_1(2t\,\Delta x) - p(2r\,\Delta x) = 0$$

e, resolvendo para a tensão tangencial σ_1,

$$\sigma_1 = \frac{pr}{t} \tag{7.30}$$

Para determinarmos a tensão longitudinal σ_2, cortamos agora o vaso perpendicularmente ao eixo x e consideramos o corpo livre como parte do vaso e de seu conteúdo localizado à esquerda da seção (Fig. 7.53). As forças que

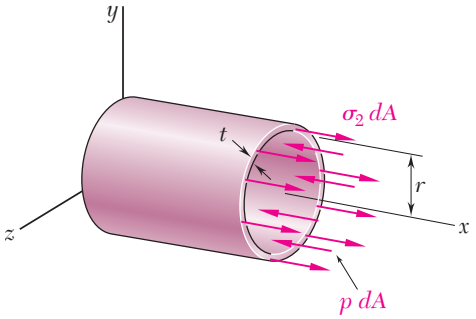


Fig. 7.53

atuam nesse corpo livre são as forças internas elementares $\sigma_2\,dA$ na seção da parede e as forças elementares de pressão $p\,dA$ que atuam na parte do fluido incluído no corpo livre. Observando que a área da seção de fluido é πr^2 e que a área da seção de parede pode ser obtida multiplicando-se o comprimento da circunferência $2\pi r$ do cilindro pela sua espessura de parede t, escrevemos a equação de equilíbrio†

$$\Sigma F_x = 0: \qquad \sigma_2(2\pi rt) - p(\pi r^2) = 0$$

e, resolvendo para a tensão longitudinal σ_2,

$$\sigma_2 = \frac{pr}{2t} \tag{7.31}$$

Observamos nas Equações (7.30) e (7.31) que a tensão tangencial σ_1 é o dobro da tensão longitudinal σ_2

$$\sigma_1 = 2\sigma_2 \tag{7.32}$$

†Usando o raio médio da seção de parede $r_m = r + \frac{1}{2}t$ no cálculo da resultante das forças naquela seção, obteríamos um valor mais preciso da tensão longitudinal, ou seja

$$\sigma_2 = \frac{pr}{2t}\frac{1}{1 + \dfrac{t}{2r}} \tag{7.31′}$$

No entanto, para um vaso de pressão de paredes finas, o termo $t/2r$ é suficientemente pequeno, possibilitando o uso da Equação (7.31) para projeto de engenharia e análise. Se um vaso de pressão não é do tipo de paredes finas (isto é, se $t/2r$ não é pequeno), as tensões σ_1 e σ_2 variam na parede e devem ser determinadas pelos métodos da teoria da elasticidade.

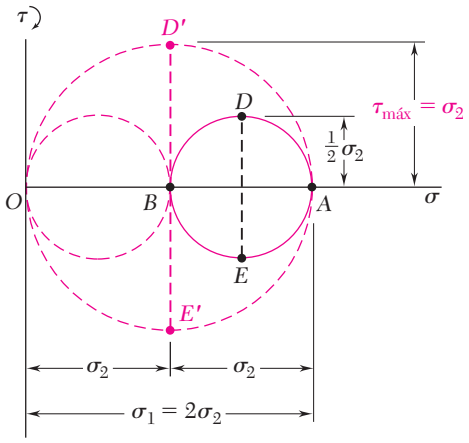


Fig. 7.54

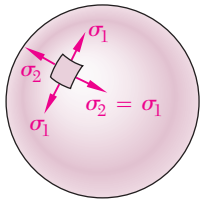


Fig. 7.55

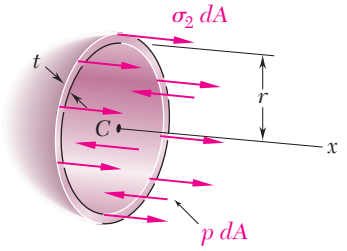


Fig. 7.56

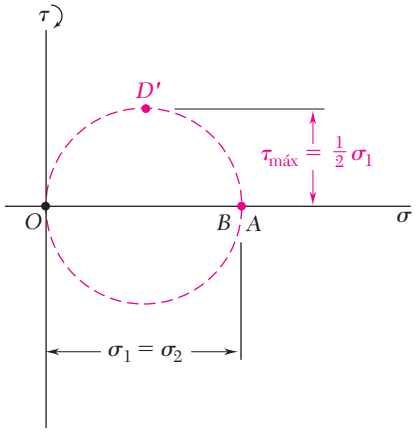


Fig. 7.57

Traçando o círculo de Mohr entre pontos A e B que correspondem, respectivamente, às tensões principais σ_1 e σ_2 (Fig. 7.54), e lembrando que a tensão de cisalhamento máxima no plano da tensão é igual ao raio desse círculo, temos

$$\tau_{\text{máx(no plano)}} = \tfrac{1}{2}\sigma_2 = \frac{pr}{4t} \tag{7.33}$$

Essa tensão corresponde aos pontos D e E e atua em um elemento obtido pela rotação do elemento original da Fig. 7.51 em 45° *dentro do plano* tangente à superfície do vaso. No entanto, a tensão de cisalhamento máxima é maior na parede do vaso. Ela é igual ao raio do círculo de diâmetro OA e corresponde a uma rotação de 45° em torno do eixo longitudinal e *fora do plano* das tensões.† Temos

$$\tau_{\text{máx}} = \sigma_2 = \frac{pr}{2t} \tag{7.34}$$

Consideramos agora um vaso esférico de raio interno r e parede com espessura t, que contém um fluido sob uma pressão manométrica p. Por razões de simetria, as tensões que atuam nas quatro faces de um pequeno elemento de parede devem ser iguais (Fig. 7.55). Temos

$$\sigma_1 = \sigma_2 \tag{7.35}$$

Para determinarmos o valor da tensão, cortamos o vaso por uma seção através do centro C do vaso e consideramos o corpo livre que consiste na parte do vaso e seu conteúdo localizado à esquerda da seção (Fig. 7.56). A equação de equilíbrio para esse corpo livre é a mesma do corpo livre da Fig. 7.53. Concluímos então que, para um vaso esférico,

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pr}{2t} \tag{7.36}$$

Como as tensões principais σ_1 e σ_2 são iguais, o círculo de Mohr para as transformações de tensão dentro do plano tangente à superfície do vaso se reduz a um ponto (Fig. 7.57); concluímos que a tensão normal no plano das tensões é constante e que a tensão de cisalhamento máxima no plano das tensões é zero. No entanto, a tensão de cisalhamento máxima na parede do vaso não é zero; ela é igual ao raio do círculo de diâmetro OA e corresponde a uma rotação de 45° fora do plano das tensões. Temos

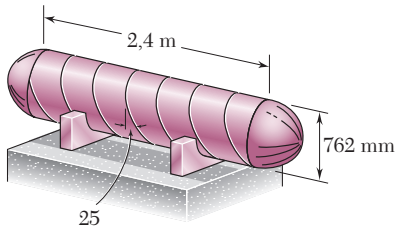
$$\tau_{\text{máx}} = \tfrac{1}{2}\sigma_1 = \frac{pr}{4t} \tag{7.37}$$

†Deve-se observar que, enquanto a terceira tensão principal é zero na superfície externa do vaso, ela é igual a $-p$ na superfície interna, e é representada por um ponto $C(-p, 0)$ no diagrama do círculo de Mohr. Assim, próximo à superfície interna do vaso, a tensão de cisalhamento máxima é igual ao raio do círculo de diâmetro CA, e, então, temos

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + p) = \frac{pr}{2t}\left(1 + \frac{t}{r}\right)$$

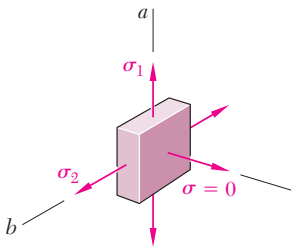
No entanto, para um vaso de paredes finas, o termo t/r é pequeno, e podemos desprezar a variação de $\tau_{\text{máx}}$ através da seção de parede. Essa observação também se aplica a vasos de pressão esféricos.

PROBLEMA RESOLVIDO 7.5



Um tanque de ar comprimido está apoiado em dois berços como mostra a figura; um dos berços foi projetado de modo que não exerça nenhuma força longitudinal no tanque. O corpo cilíndrico do tanque tem um diâmetro externo de 762 mm e é fabricado a partir de uma placa de aço de 9,5 mm de espessura por soldagem de topo ao longo de uma hélice que forma um ângulo de 25° com o plano transversal. As tampas das extremidades são esféricas e têm uma espessura de parede uniforme de 8,0 mm. Para uma pressão manométrica interna de 1,2 MPa, determine (*a*) a tensão normal e a tensão de cisalhamento máxima nas tampas esféricas e (*b*) as tensões em direções perpendiculares e paralelas à soldagem helicoidal.

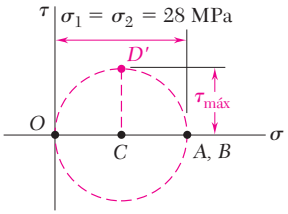
SOLUÇÃO



a. Tampa esférica. Usando a Equação (7.36), escrevemos

$$p = 1{,}2 \text{ MPa}, \quad t = 8{,}0 \text{ mm}, \quad r = 381 - 8 = 373 \text{ mm}$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pr}{2t} = \frac{(1{,}2 \text{ MPa})(373 \text{ mm})}{2(8{,}0 \text{ mm})} \qquad \sigma = 28 \text{ MPa} \blacktriangleleft$$



Notamos que para tensões em um plano tangente à tampa, o círculo de Mohr se reduz a um ponto (*A*, *B*) no eixo horizontal e que todas as tensões de cisalhamento no plano das tensões são zero. Na superfície da tampa a terceira tensão principal é zero e corresponde ao ponto *O*. Em um círculo de Mohr de diâmetro *AO*, o ponto *D′* representa a tensão de cisalhamento máxima; ela ocorre em planos a 45° em relação ao plano tangente à tampa.

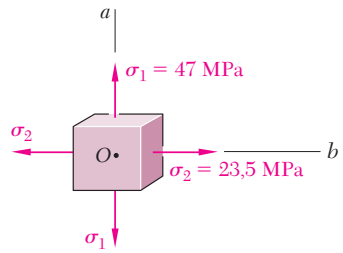
$$\tau_{\text{máx}} = \tfrac{1}{2}(28 \text{ MPa}) \qquad \tau_{\text{máx}} = 14 \text{ MPa} \blacktriangleleft$$

b. Corpo cilíndrico do tanque. Primeiro determinamos a tensão tangencial σ_1 e a tensão longitudinal σ_2. Usando as Equações (7.30) e (7.32), escrevemos

$$p = 1{,}2 \text{ MPa}, \quad t = 9{,}5 \text{ mm}, \quad r = 381 - 9{,}5 = 371{,}5 \text{ mm}$$

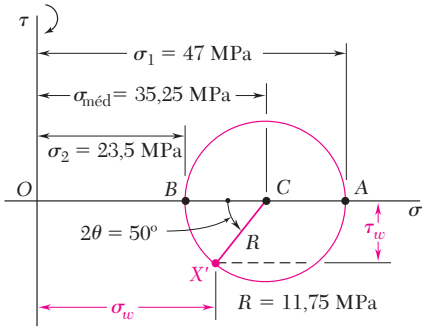
$$\sigma_1 = \frac{pr}{t} = \frac{(1{,}2 \text{ MPa})(371{,}5 \text{ mm})}{9{,}5 \text{ mm}} = 47 \text{ MPa} \qquad \sigma_2 = \tfrac{1}{2}\sigma_1 = 23{,}5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{méd}} = \tfrac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) = 35{,}25 \text{ MPa} \qquad R = \tfrac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = 11{,}75 \text{ MPa}$$



Tensões na solda. Considerando que tanto a tensão tangencial quanto a tensão longitudinal são tensões principais, traçamos o círculo de Mohr conforme está mostrado.

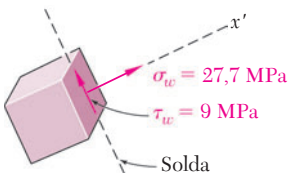
Um elemento com uma face paralela à solda é obtido rodando-se a face perpendicular ao eixo *Ob* no sentido anti-horário em 25°. Portanto, no círculo de Mohr localizamos o ponto *X′* correspondente aos componentes de tensão na solda rodando o raio *CB* no sentido anti-horário por meio de $2\theta = 50°$.



$$\sigma_w = \sigma_{\text{méd}} - R\cos 50° = 35{,}25 - 11{,}75\cos 50° \qquad \sigma_w = 27{,}7 \text{ MPa} \blacktriangleleft$$

$$\tau_w = R \operatorname{sen} 50° = 11{,}75 \operatorname{sen} 50° \qquad \tau_w = 9 \text{ MPa} \blacktriangleleft$$

Como *X′* está abaixo do eixo horizontal, τ_w tende a girar o elemento no sentido anti-horário.



PROBLEMAS

7.98 Determine a tensão normal em uma bola de basquete de 300 mm de diâmetro externo e espessura de parede de 3,0 mm que é inflada a uma pressão manométrica de 120 kPa.

7.99 Um vaso de pressão esférico, com diâmetro externo de 1,2 m, deve ser fabricado com um aço que tem um limite de tensão $\sigma_L = 450$ MPa. Sabendo que se deseja um coeficiente de segurança de 4 e que a pressão manométrica pode alcançar 3 MPa, determine a menor espessura de parede que deve ser usada.

7.100 Um reservatório de gás esférico feito de aço tem um diâmetro externo de 6096 mm e parede com espessura de 11,1 mm. Sabendo que a pressão interna é de 517,1 kPa, determine a tensão normal máxima e a tensão de cisalhamento máxima no reservatório.

7.101 Um vaso de pressão esférico tem um diâmetro externo de 3 m e parede com espessura de 12 mm. Sabendo que para o aço utilizado $\sigma_{adm} = 80$ MPa, $E = 200$ GPa e $\nu = 0{,}29$, determine (*a*) a pressão manométrica admissível e (*b*) o aumento correspondente no diâmetro do vaso.

7.102 Um reservatório de gás esférico com um diâmetro externo de 4572 mm e espessura de parede de 22,9 mm é feito de um aço para o qual $E = 200$ GPa e $\nu = 0{,}29$. Sabendo que a pressão manométrica no reservatório pode aumentar de zero a 1724 kPa, determine (*a*) a tensão normal máxima no reservatório e (*b*) seu aumento de diâmetro.

7.103 Sabe-se que a pressão manométrica máxima é de 10 MPa em um vaso de pressão esférico com um diâmetro externo de 200 mm e espessura de parede de 6 mm. Sabendo que o limite de tensão no aço utilizado é $\sigma_L = 400$ MPa, determine o coeficiente de segurança em relação à falha por tração.

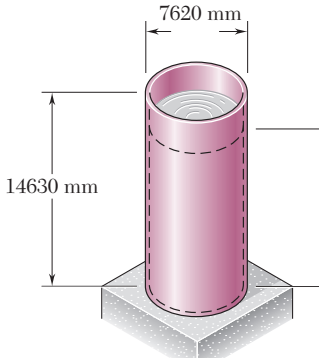


Fig. P7.104

7.104 O tanque de armazenagem cilíndrico não pressurizado indicado na figura tem uma parede com espessura de 4,76 mm e é feito de aço com um limite de resistência de 413,7 MPa na tração. Determine a altura máxima h com que ele pode ser preenchido com água quando se deseja um coeficiente de segurança de 4,0. (Peso específico da água $= 9{,}8$ kN/m^3.)

7.105 Para o tanque de armazenagem do Problema 7.104, determine a tensão normal máxima e a tensão de cisalhamento máxima na parede cilíndrica quando o tanque estiver totalmente cheio ($h = 14630$ mm).

7.106 Um tubo de aço com peso padronizado e com diâmetro nominal igual a 304,8 mm conduz água sob uma pressão de 2758 kPa. (*a*) Sabendo que o diâmetro externo é de 323,9 mm e a espessura da parede é de 9,525 mm, determine a máxima tensão de tração no tubo. (*b*) Resolva a parte *a*, considerando que seja utilizado um tubo extra pesado com 323,9 mm de diâmetro externo e espessura de parede igual a 12,7 mm.

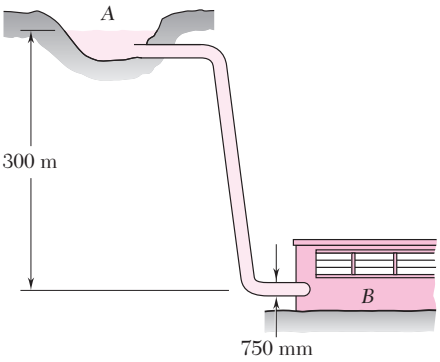
7.107 Um tanque de armazenamento contém propano líquido sob uma pressão de 1448 kPa, a uma temperatura de 38 °C. Sabendo que o tanque tem um diâmetro externo de 320 mm e espessura de parede de 2,79 mm, determine a tensão normal máxima e a tensão de cisalhamento máxima no tanque.

7.108 O tanque de armazenamento mostrado na Fig. 7.49 tem um diâmetro externo de 3,5 m e uma espessura de parede de 20 mm. Quando a pressão interna do tanque for 1,2 MPa, determine a tensão normal máxima e a tensão de cisalhamento máxima no tanque.

7.109 Determine a maior pressão interna que pode ser aplicada a um tanque cilíndrico com 1,75 m de diâmetro externo e 16 mm de espessura de parede, se o limite de tensão normal do aço utilizado é de 450 MPa e o coeficiente de segurança desejado de 5,0.

7.110 Uma adutora de aço tem um diâmetro externo de 750 mm, uma espessura de parede de 12 mm, e conecta um reservatório em *A* com uma estação geradora de energia em *B*. Sabendo que a densidade da água é de 1000 kg/m^3, determine a tensão normal máxima e a tensão de cisalhamento máxima na adutora sob condições estáticas.

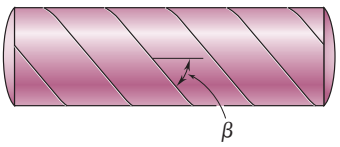
7.111 Uma adutora de aço tem um diâmetro externo de 750 mm e conecta um reservatório em *A* com uma estação geradora de energia em *B*. Sabendo que a densidade da água é de 1000 kg/m^3 e que a tensão normal admissível no aço é de 85 MPa, determine a menor espessura de parede que pode ser usada para a adutora.



Figs. P7.110 e P7.111

7.112 O tanque de pressão feito de aço mostrado na figura, tem um diâmetro interno de 762 mm e uma espessura de parede de 9,53 mm. Sabendo que as emendas de solda de topo formam um ângulo $\beta = 50°$ com o eixo longitudinal do tanque e que a pressão manométrica no tanque é de 1379 kPa, determine (*a*) a tensão normal perpendicular à solda e (*b*) a tensão de cisalhamento paralela à solda.

7.113 O tanque pressurizado mostrado na figura foi fabricado soldando-se tiras de chapa ao longo de uma hélice formando um ângulo β com um plano transversal. Determine o maior valor de β que pode ser utilizado considerando que a tensão normal perpendicular à solda não deve ser maior que 85% da tensão máxima no tanque.



Figs. P7.112 e P7.113

7.114 A parte cilíndrica do tanque de ar comprimido mostrado na figura é fabricada com uma placa de 6,35 mm de espessura soldada ao longo de uma hélice formando um ângulo $\beta = 30°$ com a horizontal. Sabendo que a tensão normal admissível para a solda é de 72,4 MPa, determine a maior pressão manométrica que pode ser usada no tanque.

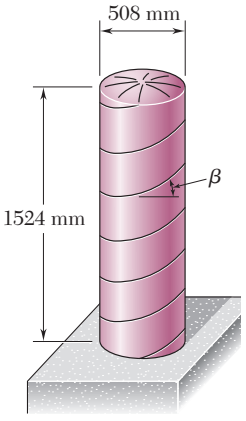


Fig. *P7.114*

7.115 Para o tanque de ar comprimido do Problema 7.114, determine a pressão manométrica que provocará uma tensão de cisalhamento paralela à solda de 27,6 MPa.

7.116 Chapas quadradas, cada uma com 16 mm de espessura, podem ser curvadas e soldadas entre si de duas maneiras, conforme mostra a figura, para formar a parte cilíndrica de um tanque de ar comprimido. Sabendo que a tensão normal admissível perpendicular à solda é de 65 MPa, determine a maior pressão manométrica possível em cada caso.

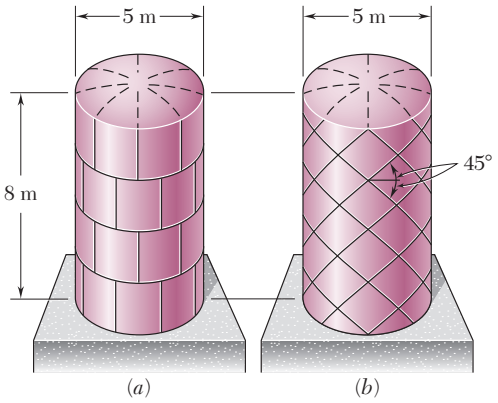


Fig. P7.116

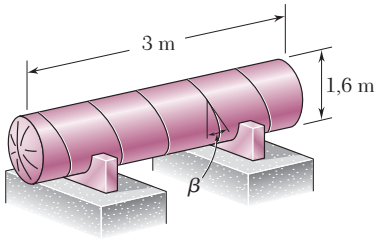


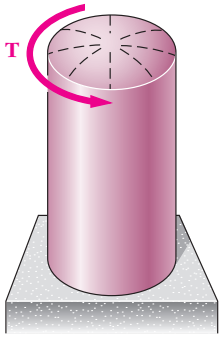
Fig. P7.117

7.117 O tanque de pressão mostrado na figura tem uma parede com espessura de 8,0 mm e possui emendas de solda de topo formando um ângulo $\beta = 20°$ com um plano transversal. Para uma pressão manométrica de 600 kPa, determine (*a*) a tensão normal perpendicular à solda e (*b*) a tensão de cisalhamento paralela à solda.

7.118 Para o tanque do Problema 7.117, determine a maior pressão manométrica admissível, sabendo que a tensão normal admissível perpendicular à solda é de 120 MPa e a tensão de cisalhamento admissível paralela à solda é de 80 MPa.

7.119 Para o tanque do Problema 7.117, determine o intervalo de valores de β que podem ser utilizados considerando que a tensão de cisalhamento paralela à solda não deve ultrapassar 12 MPa quando a pressão manométrica for de 600 kPa.

7.120 Um torque de intensidade $T = 12$ kN · m é aplicado à extremidade de um tanque que contém ar comprimido sob uma pressão de 8 MPa. Sabendo que o tanque tem um diâmetro interno de 180 mm e uma espessura de parede de 12 mm, determine a tensão normal máxima e a tensão de cisalhamento máxima no tanque.



Figs. *P7.120* e *P7.121*

7.121 O tanque mostrado na figura tem um diâmetro interno de 180 mm e uma espessura de parede de 12 mm. Sabendo que o tanque contém ar comprimido sob uma pressão de 8 MPa, determine a intensidade T do torque aplicado para o qual a tensão normal máxima é de 75 MPa.

7.122 Um vaso de pressão com diâmetro interno de 254 mm, espessura de parede de 6,35 mm e comprimento de 1219 mm é soldado em espiral e possui duas tampas laterais rígidas. A pressão manométrica dentro do vaso é de 2069 kPa e são aplicadas forças axiais centradas **P** e **P′** de 44,5 kN nas tampas laterais. Determine (*a*) a tensão normal perpendicular à solda e (*b*) a tensão de cisalhamento paralela à solda.

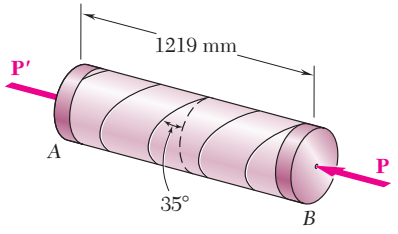


Fig. P7.122

7.123 Resolva o Problema 7.122 considerando que a intensidade *P* das duas forças é elevada para 133,4 kN.

7.124 O tanque de ar comprimido *AB* tem um diâmetro externo de 250 mm e espessura de parede de 8 mm. Ele é equipado com um anel no qual é aplicada uma força **P** de 40 kN horizontal em B. Sabendo que a pressão manométrica no tanque é de 5 MPa, determine a tensão normal máxima e a tensão de cisalhamento máxima no ponto *K*.

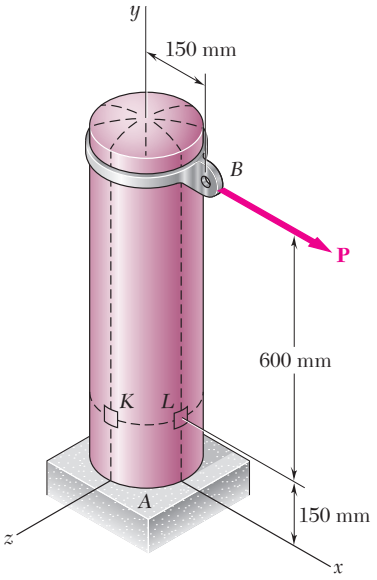


Fig. P7.124

7.125 No Problema 7.124 determine a máxima tensão normal e a máxima tensão de cisalhamento no ponto *L*.

7.126 Um anel de latão com diâmetro externo de 127 mm e espessura de 6,35 mm se encaixa exatamente dentro de um anel de aço com diâmetro interno de 127 mm e 318 mm de espessura, quando a temperatura de ambos é de 10 °C. Sabendo que a temperatura dos dois anéis é então aumentada para 51,7 °C, determine (*a*) a tensão de tração no anel de aço e (*b*) a pressão correspondente aplicada pelo anel de latão no anel de aço.

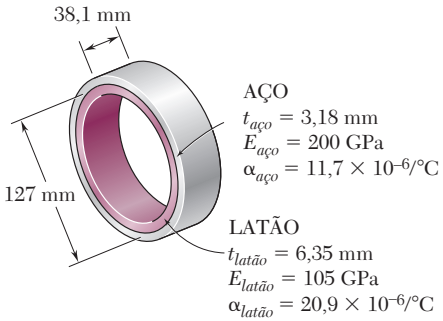


Fig. P7.126

7.127 Resolva o Problema 7.126 considerando que o anel de latão tem espessura de 3,18 mm e o anel de aço tem espessura de 6,35 mm.

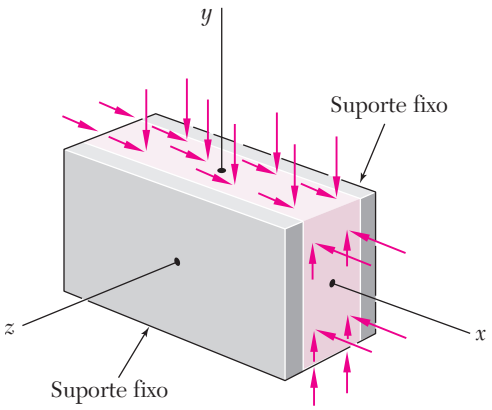


Fig. 7.58

*7.10. Transformação do estado plano de deformação

Vamos considerar agora as transformações de *deformação específica* sob uma rotação dos eixos de coordenadas. Nossa análise estará limitada inicialmente aos *estados planos de deformação*, isto é, a situações nas quais as deformações dos materiais ocorrem em planos paralelos, e são as mesmas em cada um desses planos. Se o eixo z é escolhido como perpendicular aos planos nos quais ocorrem as deformações, temos $\epsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$, e as únicas componentes de deformação que restam são ϵ_x, ϵ_y e γ_{xy}. Uma situação assim ocorre em uma placa submetida a forças uniformemente distribuídas, ao longo de suas bordas, e impedida de se expandir ou de se contrair lateralmente por meio de suportes fixos, rígidos e planos (Fig. 7.58). Poderíamos ter essa situação também em uma barra de comprimento infinito com seus lados submetidos a forças uniformemente distribuídas, pois, em razão da simetria, os elementos localizados em um dado plano transversal não podem se mover para fora desse plano. Esse modelo idealizado mostra que, no caso real de uma barra longa submetida a forças transversais uniformemente distribuídas (Fig. 7.59), existe um estado plano de deformação em qualquer seção transversal desde que essa seção não esteja localizada muito perto de qualquer uma das extremidades da barra.†

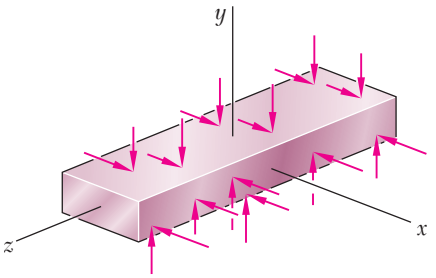


Fig. 7.59

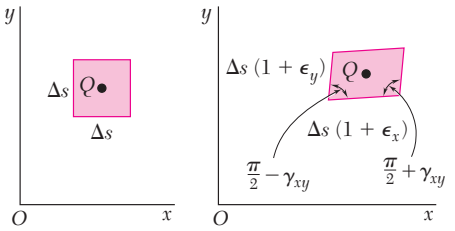


Fig. 7.60

Vamos supor que exista um estado plano de deformação no ponto Q (com $\epsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$), e que ele é definido pelas componentes de deformação ϵ_z, ϵ_y e γ_{xy} associadas com os eixos x e y. Conforme sabemos das Seções 2.12 e 2.14, isso significa que um elemento quadrado de centro Q, com lados de comprimento Δs respectivamente paralelos aos eixos x e y, é deformado transformando-se em um paralelogramo com lados de comprimento respectivamente iguais a $\Delta s(1 + \epsilon_x)$ e $\Delta s\ (1 + \epsilon_y)$, formando ângulos de $\frac{\pi}{2} - \gamma_{xy}$ e $\frac{\pi}{2} + \gamma_{xy}$ entre si (Fig. 7.60). Lembramos que, como resultado das deformações dos outros elementos localizados no plano xy, o elemento considerado pode também sofrer um movimento de corpo rígido, o que é irrelevante para a determinação das deformações no ponto Q e por isso será ignorado nesta análise. Nosso objetivo é determinar em termos de ϵ_x, ϵ_y, γ_{xy} e θ as componentes de tensão $\epsilon_{x'}$, $\epsilon_{y'}$ e $\gamma_{x'y'}$ associadas com o sistema de referência $x'y'$ obtido pela rotação dos eixos x e y de um ângulo θ. Como mostra a Fig. 7.61, essas novas componentes de deformação definem o paralelogramo no qual um quadrado com lados respectivamente paralelos aos eixos x' e y' é deformado.

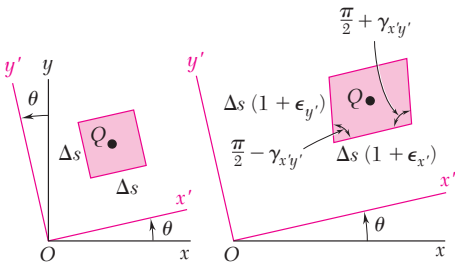


Fig. 7.61

†Deve-se observar que o estado *plano de deformação* e o estado *plano de tensão* (cf. Seção 7.1) não ocorrem simultaneamente, exceto para materiais ideais com um coeficiente de Poisson igual a zero. As restrições colocadas nos elementos da placa da Fig. 7.58 e da barra da Fig. 7.59 resultam em uma tensão σ_z diferente de zero. Em contrapartida, no caso da placa da Fig. 7.3, a ausência de qualquer restrição lateral resulta em $\sigma_z = 0$ e $\epsilon_z \neq 0$.

Primeiro deduzimos uma expressão para a deformação específica normal $\epsilon(\theta)$ ao longo de uma linha AB que forma um ângulo arbitrário θ com o eixo x. Para fazer isso, consideramos o triângulo retângulo ABC que tem o lado AB como hipotenusa (Fig. 7.62a), e o triângulo oblíquo $A'B'C'$ no qual o triângulo ABC é deformado (Fig. 7.62b). Chamando de Δs o comprimento de AB, expressamos o comprimento de $A'B'$ como $\Delta s\,[1 + \epsilon(\theta)]$. Analogamente, chamando de Δx e Δy os comprimentos dos lados AC e CB, expressamos os comprimentos de $A'C'$ e $C'B'$ como $\Delta x\,(1 + \epsilon_x)$ e $\Delta y\,(1 + \epsilon_y)$, respectivamente. Lembrando da Fig. 7.60 que o ângulo reto em C na Fig. 7.62a se transforma em um ângulo igual a $\frac{\pi}{2} + \gamma_{xy}$ na Fig. 7.62b, e aplicando a lei dos cossenos ao triângulo $A'B'C'$, escrevemos

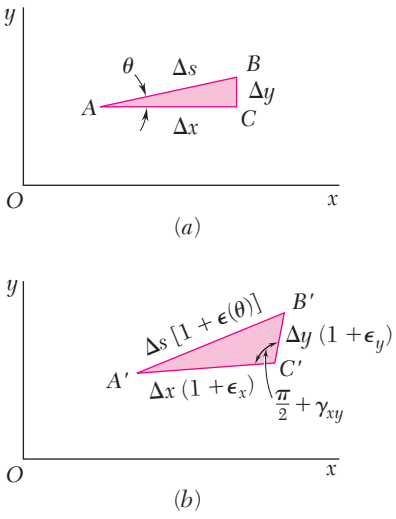


Fig. 7.62

$$(A'B')^2 = (A'C')^2 + (C'B')^2 - 2(A'C')(C'B')\cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma_{xy}\right)$$

$$(\Delta s)^2[1 + \epsilon(\theta)]^2 = (\Delta x)^2(1 + \epsilon_x)^2 + (\Delta y)^2(1 + \epsilon_y)^2 - 2(\Delta x)(1 + \epsilon_x)(\Delta y)(1 + \epsilon_y)\cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma_{xy}\right) \quad (7.38)$$

Mas, pela Fig. 7.62a, temos

$$\Delta x = (\Delta s)\cos\theta \qquad \Delta y = (\Delta s)\,\text{sen}\,\theta \quad (7.39)$$

e observamos que, como γ_{xy} é muito pequeno,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma_{xy}\right) = -\text{sen}\,\gamma_{xy} \approx -\gamma_{xy} \quad (7.40)$$

Substituindo os valores das Equações (7.39) e (7.40) na Equação (7.38), lembrando-se que $\cos^2\theta + \text{sen}^2\,\theta = 1$, e desprezando os termos de segunda ordem em $\epsilon(\theta)$, ϵ_x, ϵ_y e γ_{xy}, escrevemos

$$\epsilon(\theta) = \epsilon_x\cos^2\theta + \epsilon_y\,\text{sen}^2\,\theta + \gamma_{xy}\,\text{sen}\,\theta\cos\theta \quad (7.41)$$

A Equação (7.41) nos permite determinar a deformação específica normal $\epsilon(\theta)$ em qualquer direção AB, em termos das componentes de deformação ϵ_x, ϵ_y, γ_{xy} e do ângulo θ que AB forma com o eixo x. Verificamos que, para $\theta = 0$, a Equação (7.41) fornece $\epsilon(0) = \epsilon_x$ e que, para $\theta = 90°$, ela fornece $\epsilon(90°) = \epsilon_y$. No entanto, fazendo $\theta = 45°$ na Equação (7.41), obtemos a deformação específica normal na direção da bissetriz OB do ângulo formado pelos eixos x e y (Fig. 7.63). Chamando essa deformação específica de ϵ_{OB}, escrevemos

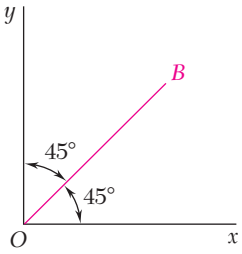


Fig. 7.63

$$\epsilon_{OB} = \epsilon(45°) = \tfrac{1}{2}(\epsilon_x + \epsilon_y + \gamma_{xy}) \quad (7.42)$$

Resolvendo a Equação (7.42) para γ_{xy}, temos

$$\gamma_{xy} = 2\epsilon_{OB} - (\epsilon_x + \epsilon_y) \quad (7.43)$$

Essa relação permite expressar a *deformação de cisalhamento* associada a um dado par de eixos retangulares em termos das *deformações específicas normais* medidas ao longo desses eixos e de sua bissetriz. Ela terá um papel fundamental em nossa dedução atual e será usada também na Seção 7.13, em conjunto com a determinação experimental das deformações de cisalhamento.

Lembramos que a finalidade principal desta seção é expressar as componentes de deformação associadas ao sistema de referência $x'y'$ da Fig. 7.61

em termos do ângulo θ e das componentes de deformação ϵ_x, ϵ_y e γ_{xy} associadas aos eixos x e y. Notamos que a deformação específica normal $\epsilon_{x'}$ ao longo do eixo x' é dada pela Equação (7.41). Usando as relações trigonométricas (7.3) e (7.4), escrevemos essa equação na forma alternativa

$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \operatorname{sen} 2\theta \tag{7.44}$$

Substituindo θ por $\theta + 90°$, obtemos a deformação específica normal ao longo do eixo y'. Como $\cos(2\theta + 180°) = -\cos 2\theta$ e $\operatorname{sen}(2\theta + 180°) = -\operatorname{sen} 2\theta$, temos

$$\epsilon_{y'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2} \operatorname{sen} 2\theta \tag{7.45}$$

Somando membro a membro as Equações (7.44) e (7.45), obtemos

$$\epsilon_{x'} + \epsilon_{y'} = \epsilon_x + \epsilon_y \tag{7.46}$$

Como $\epsilon_z = \epsilon_{z'} = 0$, vemos então no caso de estado plano de deformação que a soma das deformações específicas normais associadas a um elemento de volume do material é independente da orientação desse elemento.†

Substituindo agora θ por $\theta + 45°$ na Equação (7.44), obtemos uma expressão para a deformação específica normal ao longo da bissetriz OB' do ângulo formado pelos eixos x' e y'. Como $\cos(2\theta + 90°) = -\operatorname{sen} 2\theta$ e $\operatorname{sen}(2\theta + 90°) = \cos 2\theta$, temos

$$\epsilon_{OB'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \operatorname{sen} 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\theta \tag{7.47}$$

Escrevendo a Equação (7.43) em relação aos eixos x' e y', expressamos a deformação de cisalhamento $\gamma_{x'y'}$ nos termos das deformações específicas normais medidas ao longo dos eixos x' e y' e da bissetriz OB'

$$\gamma_{x'y'} = 2\epsilon_{OB'} - (\epsilon_{x'} + \epsilon_{y'}) \tag{7.48}$$

Substituindo os valores das Equações (7.46) e (7.47) em (7.48), obtemos

$$\gamma_{x'y'} = -(\epsilon_x - \epsilon_y) \operatorname{sen} 2\theta + \gamma_{xy} \cos 2\theta \tag{7.49}$$

As Equações (7.44), (7.45) e (7.49) são aquelas que definem a transformação do estado plano de deformação por meio de uma rotação de eixos no plano da deformação. Dividindo todos os termos da Equação (7.49) por 2, escrevemos essa equação na forma alternativa

$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \operatorname{sen} 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\theta \tag{7.49'}$$

e observamos que as Equações (7.44), (7.45) e (7.49′) para a transformação do estado plano de deformação são muito semelhantes às equações deduzidas na Seção 7.2 para a transformação do estado plano de tensão. Embora as primeiras possam ser obtidas por meio das segundas, substituindo-se as tensões normais pelas deformações específicas normais correspondentes, deve-se notar, no entanto, que as tensões de cisalhamento τ_{xy} e $\tau_{x'y'}$ deverão ser substituídas por *metade* das deformações de cisalhamento correspondentes, isto é, por $\frac{1}{2}\gamma_{xy}$ e $\frac{1}{2}\gamma_{x'y'}$, respectivamente.

†Cf. nota de rodapé na página 88.

*7.11. Círculo de Mohr para o estado plano de deformação

Como as equações para a transformação do estado plano de deformação têm a mesma forma das equações para transformação do estado plano de tensão, o uso do círculo de Mohr pode ser retomado para a análise do estado plano de deformação. Dadas as componentes de deformação ϵ_x, ϵ_y e γ_{xy} definindo a deformação apresentada na Fig. 7.60, representamos um ponto $X(\epsilon_x, -\frac{1}{2}\gamma_{xy})$ de abscissa igual à deformação específica normal ϵ_x e de ordenada igual a menos metade da deformação de cisalhamento γ_{xy}, e um ponto $Y(\epsilon_y, +\frac{1}{2}\gamma_{xy})$ (Fig. 7.64). Traçando o diâmetro XY, definimos o centro C do círculo de Mohr para o estado plano de deformação. A abscissa de C e o raio R do círculo são, respectivamente, iguais a

$$\epsilon_{méd} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \qquad \text{e} \qquad R = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \tag{7.50}$$

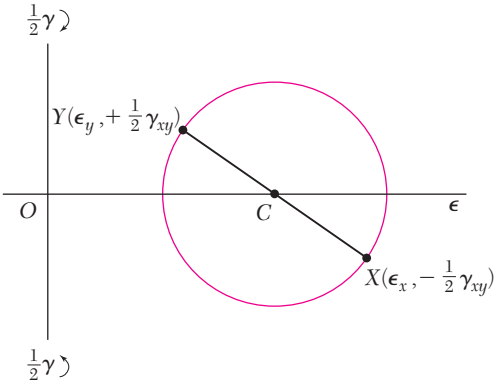


Fig. 7.64

Notamos que se γ_{xy} for positivo, conforme sugerimos na Fig. 7.60, os pontos X e Y serão representados, respectivamente, abaixo e acima do eixo horizontal na Fig. 7.64. Mas, na ausência de qualquer rotação global de corpo rígido, observa-se que o lado do elemento na Fig. 7.60 que está associado a ϵ_x gira no sentido anti-horário, enquanto o lado associado a ϵ_y gira no sentido horário. Assim, se a deformação de cisalhamento fizer um certo lado girar no *sentido horário*, o ponto correspondente no círculo de Mohr para o estado plano de deformação será representado *acima* do eixo horizontal, e se a deformação fizer o lado girar no *sentido anti-horário*, o ponto correspondente será representado *abaixo* do eixo horizontal. Observamos que essa convenção corresponde à usada para traçar o círculo de Mohr para o estado plano de tensão.

Os pontos A e B em que o círculo de Mohr intercepta o eixo horizontal correspondem às *deformações principais específicas* $\epsilon_{máx}$ e $\epsilon_{mín}$ (Fig. 7.65*a*). Encontramos

$$\epsilon_{máx} = \epsilon_{méd} + R \qquad \text{e} \qquad \epsilon_{mín} = \epsilon_{méd} - R \tag{7.51}$$

em que $\epsilon_{méd}$ e R são definidos pelas Equações (7.50). O valor correspondente de θ_p do ângulo θ é obtido observando-se que a deformação de cisalhamento é zero para A e B. Fazendo $\gamma_{x'y'} = 0$ na Equação (7.49), temos

$$\operatorname{tg} 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} \tag{7.52}$$

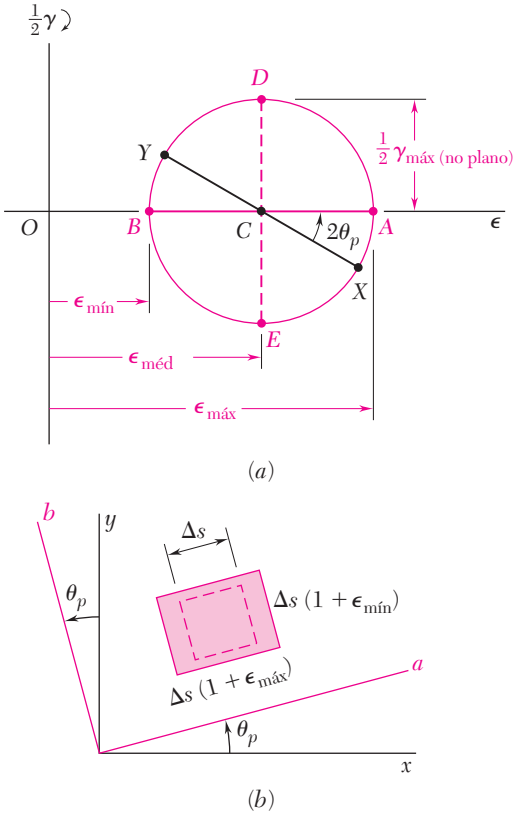


Fig. 7.65

Os eixos correspondentes a e b na Fig. 7.65*b* são os *eixos principais de deformação específica*. O ângulo θ_p, que define a direção do eixo principal Oa na Fig. 7.65*b* correspondendo ao ponto A na Fig. 7.65*a*, é igual à metade do ângulo XCA medido no círculo de Mohr, e a rotação que faz Ox coincidir com Oa tem o mesmo sentido da rotação que faz o diâmetro XY do círculo de Mohr coincidir com o diâmetro AB.

Lembramos da Seção 2.14 que, no caso da deformação elástica de um material homogêneo e isotrópico, pode aplicar-se a lei de Hooke para tensão e deformação de cisalhamento, o que resulta em $\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$ para qualquer par de eixos retangulares x e y. Assim, $\gamma_{xy} = 0$ quando $\tau_{xy} = 0$, o que indica que os eixos principais de deformação específica coincidem com os eixos principais de tensão.

A deformação de cisalhamento máxima no plano da deformação é definida pelos pontos D e E na Fig. 7.65a. Ela é igual ao diâmetro do círculo de Mohr. Lembrando a segunda das Equações (7.50), escrevemos

$$\gamma_{\text{máx(no plano)}} = 2R = \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} \tag{7.53}$$

Finalmente, notamos que os pontos X' e Y' que definem as componentes de deformação correspondentes a uma rotação dos eixos de coordenadas pelo ângulo θ (Fig. 7.61) são obtidos pela rotação do diâmetro XY do círculo de Mohr no mesmo sentido por meio de um ângulo 2θ (Fig. 7.66).

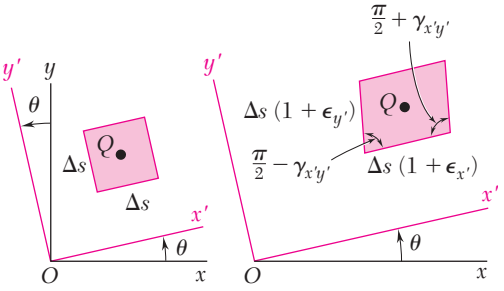


Fig. 7.61 (repetida)

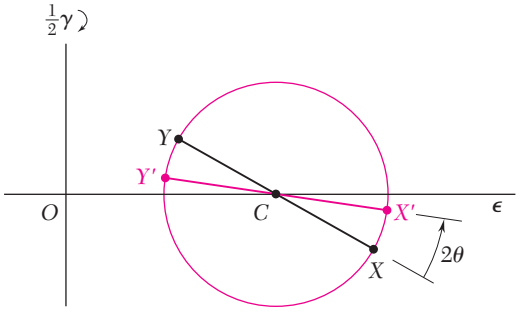


Fig. 7.66

EXEMPLO 7.4

De um material em estado plano de deformação, sabe-se que o lado horizontal de um quadrado de 10 mm × 10 mm se alonga em 4 μm, enquanto o seu lado vertical permanece inalterado, e que o ângulo do canto inferior esquerdo aumenta de $0{,}4 \times 10^{-3}$ rad (Fig. 7.67). Determine (a) os eixos principais e as deformações específicas principais e (b) a deformação de cisalhamento máxima e a deformação específica normal correspondente.

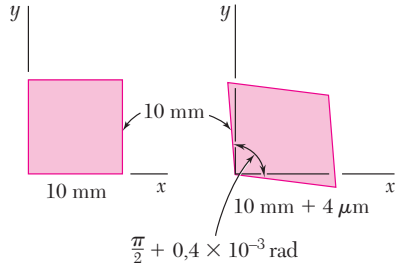


Fig. 7.67

(a) Eixos principais e deformações específica principais. Primeiro determinamos as coordenadas dos pontos X e Y no círculo de Mohr para deformação específica. Temos

$$\epsilon_x = \frac{+4 \times 10^{-6}\,\text{m}}{10 \times 10^{3}\,\text{m}} = +400\ \mu \qquad \epsilon_y = 0 \qquad \left|\frac{\gamma_{xy}}{2}\right| = 200\ \mu$$

Como o lado do quadrado associado a ϵ_x sofre rotação no *sentido horário*, o ponto X de coordenadas ϵ_x e $|\gamma_{xy}/2|$ é representado *acima* do eixo horizontal. Como $\epsilon_y = 0$ e o lado correspondente

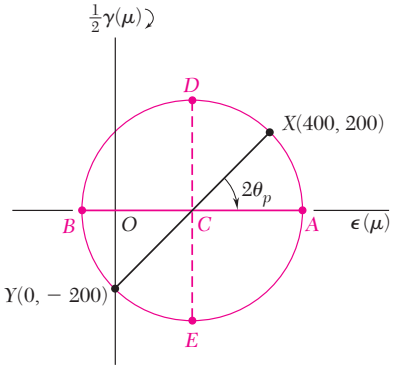


Fig. 7.68

sofre rotação no *sentido anti-horário*, o ponto Y é representado diretamente *abaixo* da origem (Fig. 7.68). Traçando o diâmetro XY, determinamos o centro C do círculo de Mohr e seu raio R. Temos

$$OC = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} = 200\ \mu \qquad OY = 200\ \mu$$
$$R = \sqrt{(OC)^2 + (OY)^2} = \sqrt{(200\ \mu)^2 + (200\ \mu)^2} = 283\ \mu$$

As deformações específicas principais são definidas pelas abscissas dos pontos A e B. Escrevemos

$$\epsilon_a = OA = OC + R = 200\ \mu + 283\ \mu = 483\ \mu$$
$$\epsilon_b = OB = OC - R = 200\ \mu - 283\ \mu = -83\ \mu$$

Os eixos principais Oa e Ob são mostrados na Fig. 7.69. Como $OC = OY$, o ângulo em C no triângulo OCY é 45°. Assim, o ângulo $2\theta_p$ que faz XY coincidir com AB é 45°↻ e o ângulo θ_p que faz Ox coincidir com Oa é 22,5°↻.

(b) Deformação de cisalhamento máxima. Os pontos D e E definem a deformação de cisalhamento máxima no plano da deformação que, como os eixos principais de deformação específica têm sinais opostos, é também a deformação de cisalhamento máxima real (ver Seção 7.12). Temos

$$\frac{\gamma_{máx}}{2} = R = 283\,\mu \qquad \gamma_{máx} = 566\,\mu$$

As deformações específicas normais correspondentes são ambas iguais a

$$\epsilon' = OC = 200\,\mu$$

Os eixos de deformação de cisalhamento máxima são mostrados na Fig. 7.70.

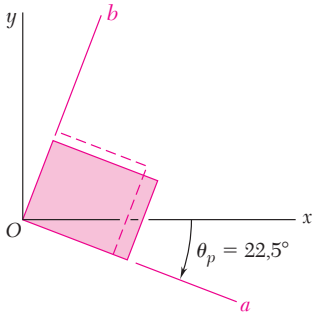


Fig. 7.69

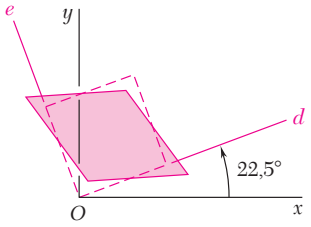


Fig. 7.70

*7.12. Análise tridimensional de deformação

Vimos na Seção 7.5 que, no caso mais geral de tensão, podemos determinar três eixos de coordenadas a, b e c, chamados de eixos principais de tensão. Um pequeno elemento de volume com faces respectivamente perpendiculares a esses eixos está livre de tensões de cisalhamento (Fig. 7.27); isto é, temos $\tau_{ab} = \tau_{bc} = \tau_{ca} = 0$. Conforme lembramos na seção anterior, a lei de Hooke para tensão e deformação de cisalhamento aplica-se quando a deformação é elástica e o material, homogêneo e isotrópico. Conclui-se que, nesse caso, $\gamma_{ab} = \gamma_{bc} = \gamma_{ca} = 0$, isto é, os eixos a, b e c são também os *eixos principais de deformação específica*. Um pequeno elemento de volume de lado unitário, centrado em Q e com faces respectivamente perpendiculares aos eixos principais é deformado em um paralelepípedo retangular de lados $1 + \epsilon_a$, $1 + \epsilon_b$ e $1 + \epsilon_c$ (Fig. 7.71).

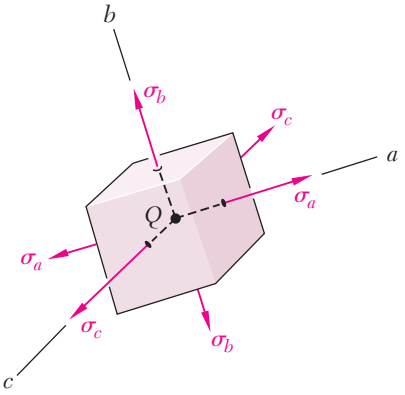


Fig. 7.27 (repetida)

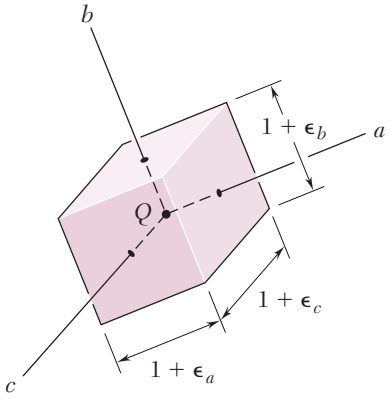


Fig. 7.71

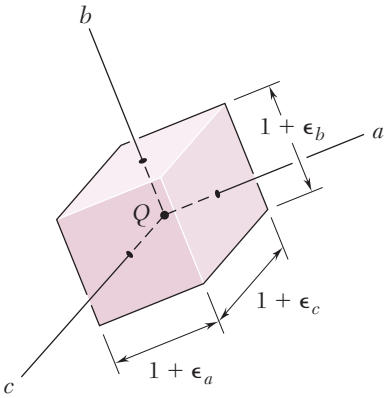


Fig. 7.71 (repetida)

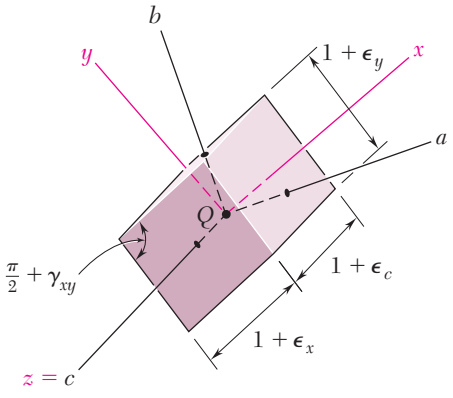


Fig. 7.72

Se o elemento da Fig. 7.71 sofrer uma rotação em torno de um dos seus eixos principais em Q, por exemplo, o eixo c (Fig. 7.72), o método de análise desenvolvido anteriormente para a transformação do estado plano de deformação poderá ser utilizado para determinar as componentes de deformação ϵ_x, ϵ_y e γ_{xy} associadas às faces perpendiculares ao eixo c, pois a dedução desse método não envolveu nenhuma outra componente de deformação.† Podemos, portanto, traçar o círculo de Mohr através dos pontos A e B correspondendo aos eixos principais a e b (Fig. 7.73). Da mesma forma, círculos de diâmetro BC e CA podem ser utilizados para analisar a transformação de deformação quando o elemento sofre uma rotação em torno dos eixos a e b, respectivamente.

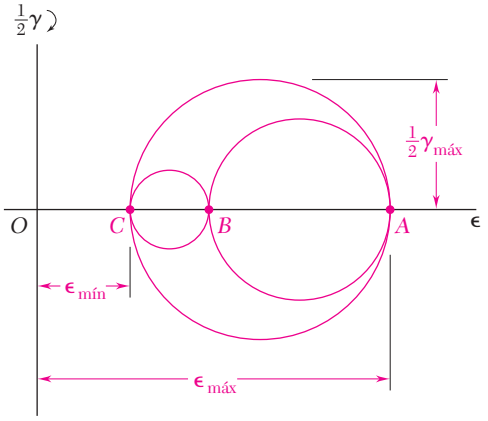


Fig. 7.73

A análise tridimensional de deformação por meio do círculo de Mohr está limitada aqui a rotações em torno dos eixos principais (como no caso da análise de tensão) e é usada para determinar a deformação de cisalhamento máxima $\gamma_{máx}$ no ponto Q. Como $\gamma_{máx}$ é igual ao diâmetro do maior dentre os três círculos mostrados na Fig. 7.73, temos

$$\gamma_{máx} = |\epsilon_{máx} - \epsilon_{mín}| \tag{7.54}$$

em que $\epsilon_{máx}$ e $\epsilon_{mín}$ representam os valores *algébricos* das deformações máxima e mínima no ponto Q.

Retornando ao caso particular do *estado plano de deformação*, e selecionando os eixos x e y no plano de deformação, temos $\epsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$. Assim,

†Notamos que as outras quatro faces do elemento permanecem retangulares e que as arestas paralelas ao eixo c permanecem inalteradas.

o eixo z é um dos três eixos principais em Q, e o ponto correspondente no diagrama do círculo de Mohr é a origem O, em que $\epsilon = \gamma = 0$. Se os pontos A e B que definem os eixos principais dentro do plano de deformação estiverem em lados opostos de O (Fig. 7.74a), as deformações específicas principais correspondentes representarão as deformações específicas normais máxima e mínima no ponto Q, e a deformação de cisalhamento máxima será igual à deformação de cisalhamento máxima no plano da deformação correspondente aos pontos D e E. Em contrapartida, se A e B estiverem do mesmo lado de O (Fig. 7.74b), ou seja, se ϵ_a e ϵ_b tiverem o mesmo sinal, então a deformação de cisalhamento máxima será definida pelos pontos D' e E' no círculo de diâmetro OA, e temos $\gamma_{máx} = \epsilon_{máx}$.

Consideramos agora o caso particular de *estado plano de tensão* encontrado em uma placa fina ou na superfície livre de um elemento estrutural ou componente de máquina (Seção 7.1). Selecionando os eixos x e y no plano de tensão, temos $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$ e verificamos ainda que o eixo z é um eixo principal de tensão. Como vimos anteriormente, se a deformação for elástica e se o material for homogêneo e isotrópico, conclui-se com a lei de Hooke que $\gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$; assim, o eixo z será também um eixo principal de deformação, e o círculo de Mohr poderá ser utilizado para analisar a transformação de deformação no plano xy. No entanto, conforme veremos agora, a lei de Hooke *não* permite concluir que $\epsilon_z = 0$; sem dúvida, um estado plano de tensão, em geral, não resultará em um estado plano de deformação .†

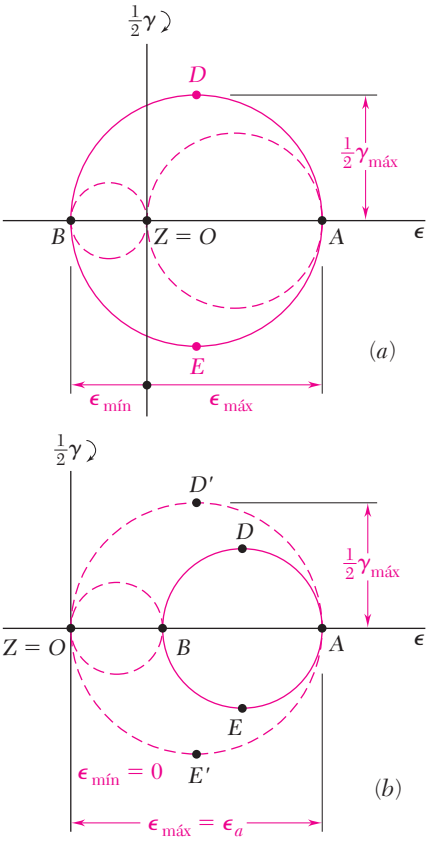


Fig. 7.74

Chamando de a e b os eixos principais no plano das tensões e de c o eixo principal perpendicular àquele plano, fazemos $\sigma_x = \sigma_a$, $\sigma_y = \sigma_b$ e $\sigma_z = 0$ nas Equações (2.28) de acordo com a lei de Hooke generalizada (Seção 2.12) e escrevemos

$$\epsilon_a = \frac{\sigma_a}{E} - \frac{\nu\sigma_b}{E} \tag{7.55}$$

$$\epsilon_b = -\frac{\nu\sigma_a}{E} + \frac{\sigma_b}{E} \tag{7.56}$$

$$\epsilon_c = -\frac{\nu}{E}(\sigma_a + \sigma_b) \tag{7.57}$$

Somando as Equações (7.55) e (7.56) membro a membro, temos

$$\epsilon_a + \epsilon_b = \frac{1 - \nu}{E}(\sigma_a + \sigma_b) \tag{7.58}$$

Resolvendo a Equação (7.58) para $\sigma_a + \sigma_b$ e substituindo na Equação (7.57), escrevemos

$$\epsilon_c = -\frac{\nu}{1 - \nu}(\epsilon_a + \epsilon_b) \tag{7.59}$$

A relação obtida define a terceira deformação específica principal em termos das deformações principais "no plano". Notamos que, se B estiver localizado entre A e C no diagrama do círculo de Mohr (Fig. 7.75), a deformação de cisalhamento máxima será igual ao diâmetro CA do círculo correspondente a uma rotação em torno do eixo b, fora do plano das tensões.

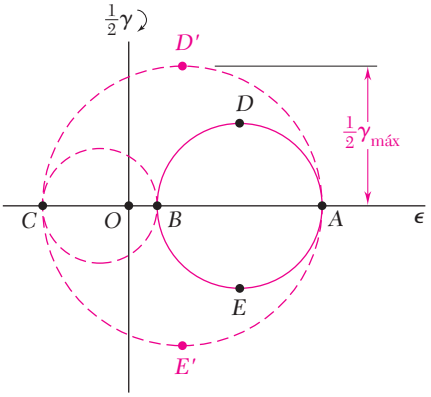


Fig. 7.75

†Ver a nota de rodapé na página 470.

EXEMPLO 7.5

Como resultado das medidas feitas na superfície de um componente de máquina usando extensômetros de deformação orientados de várias maneiras, ficou estabelecido que as deformações específicas principais na superfície livre são $\epsilon_a = +400\mu$ e $\epsilon_b = 50\mu$. Sabendo que o coeficiente de Poisson para o material é $\nu = 0{,}30$, determine (*a*) a deformação de cisalhamento máxima no plano das deformações e (*b*) o valor real da deformação de cisalhamento máxima próximo à superfície do componente.

(a) Deformação de cisalhamento máxima no plano das deformações. Traçamos o círculo de Mohr através dos pontos *A* e *B* seguindo as deformações específicas principais dadas (Fig. 7.76). A deformação de cisalhamento máxima no plano das deformações é definida pelos pontos *D* e *E* e é igual ao diâmetro do círculo de Mohr

$$\gamma_{\text{máx(no plano)}} = 400\mu + 50\mu = 450\mu$$

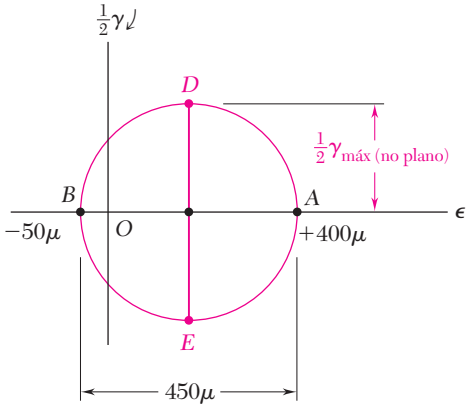


Fig. 7.76

(b) Deformação de cisalhamento máxima. Primeiro determinamos a terceira deformação específica principal ϵ_c. Como temos um estado plano de *tensão* na superfície do componente de máquina, usamos a Equação (7.59) e escrevemos

$$\epsilon_c = -\frac{\nu}{1-\nu}(\epsilon_a + \epsilon_b)$$

$$= -\frac{0{,}30}{0{,}70}(400\mu - 50\mu) = -150\mu$$

Traçando o círculo de Mohr através de *A* e *C*, e através de *B* e *C* (Fig. 7.77), verificamos que a deformação de cisalhamento máxima é igual ao diâmetro do círculo de diâmetro *CA*

$$\gamma_{\text{máx}} = 400 + 150 = 550\mu$$

Notamos que, apesar de ϵ_a e ϵ_b terem sinais opostos, a deformação de cisalhamento máxima no plano das deformações não representa a deformação de cisalhamento máxima real.

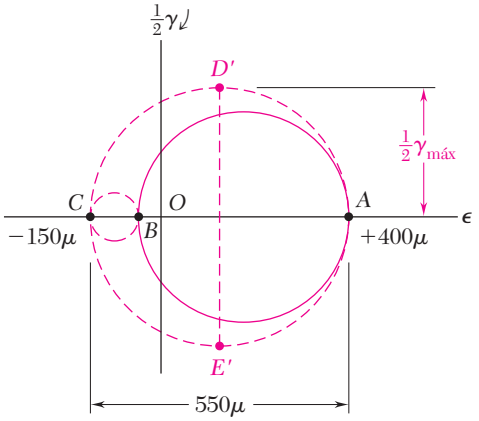


Fig. 7.77

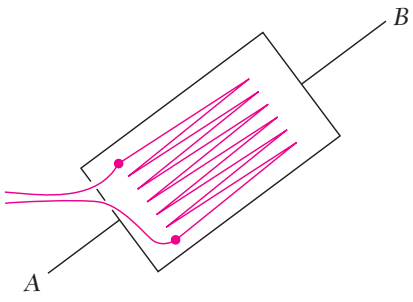


Fig. 7.78

*7.13. Medidas de deformação específica e rosetas de deformação

A deformação específica normal pode ser determinada em qualquer direção na superfície de um elemento estrutural ou componente de máquina fazendo-se duas marcas de referência *A* e *B* ao longo de uma linha traçada na direção desejada e medindo-se o comprimento do segmento *AB* antes e depois da carga ser aplicada. Se *L* é o comprimento indeformado de *AB* e δ, sua deformação, a deformação específica normal ao longo de *AB* é $\epsilon_{AB} = \delta/L$.

Um método mais conveniente e mais preciso para a medida de deformações específicas normais é aquele proporcionado por extensômetros elétricos. Um extensômetro elétrico típico consiste em um fio fino de um determinado comprimento, como mostra a Fig. 7.78, e colado a dois pedaços de papel. Para medir a deformação específica ϵ_{AB} de um dado material na direção *AB*, o extensômetro deve ser colado na superfície do material, com as dobras do fio em direção paralela a *AB*. À medida que o material se alonga, o comprimento do fio aumenta e o diâmetro diminui, fazendo aumentar a resistência elétrica do extensômetro. Medindo a corrente que passa por um extensômetro ade-

quadamente calibrado, a deformação específica ϵ_{AB} pode ser determinada com precisão e de modo contínuo, à medida que a carga é aumentada.

As componentes de deformação ϵ_x e ϵ_y podem ser determinadas em um dado ponto da superfície livre do material simplesmente medindo-se as deformações específicas normais ao longo dos eixos x e y adotados para esse ponto. Lembrando a Equação (7.43) da Seção 7.10, notamos que uma terceira medida da deformação específica normal, feita ao longo da bissetriz OB do ângulo formado pelos eixos x e y, nos permite determinar também a deformação de cisalhamento γ_{xy} (Fig. 7.79)

$$\gamma_{xy} = 2\epsilon_{OB} - (\epsilon_x + \epsilon_y) \tag{7.43}$$

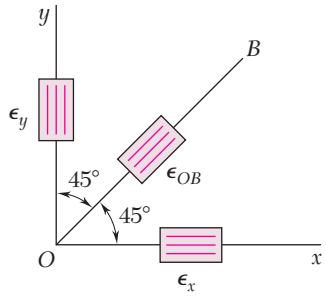


Fig. 7.79

Deve-se notar que as componentes de deformação ϵ_x, ϵ_y e γ_{xy} em um dado ponto poderiam ser obtidas a partir das medidas de deformação específica normal feitas ao longo de *qualquer das três linhas* traçadas a partir daquele ponto (Fig. 7.80). Chamando, respectivamente, de θ_1, θ_2 e θ_3 os ângulos que cada uma das três linhas formam com o eixo x, por ϵ_1, ϵ_2 e ϵ_3 as medidas correspondentes de deformações específicas, e substituindo esses valores na Equação (7.41), escrevemos as três equações

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 &= \epsilon_x \cos^2\theta_1 + \epsilon_y \operatorname{sen}^2\theta_1 + \gamma_{xy} \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_1 \\
\epsilon_2 &= \epsilon_x \cos^2\theta_2 + \epsilon_y \operatorname{sen}^2\theta_2 + \gamma_{xy} \operatorname{sen}\theta_2 \cos\theta_2 \\
\epsilon_3 &= \epsilon_x \cos^2\theta_3 + \epsilon_y \operatorname{sen}^2\theta_3 + \gamma_{xy} \operatorname{sen}\theta_3 \cos\theta_3
\end{aligned} \tag{7.60}$$

que podem ser resolvidas simultaneamente para ϵ_x, ϵ_y e γ_{xy}.†

O arranjo dos extensômetros utilizado para medir as três deformações específicas normais ϵ_1, ϵ_2 e ϵ_3 é conhecido como *roseta de deformação*. A roseta usada para medir as deformações específicas normais ao longo dos eixos x e y e da bissetriz do ângulo formado pelos eixos x e y é conhecida como roseta de 45°. Outra roseta usada frequentemente é a roseta de 60° (ver o Problema resolvido 7.7).

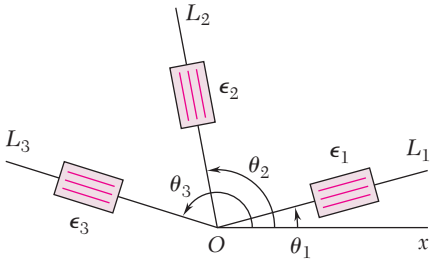
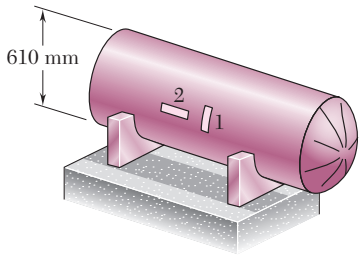


Fig. 7.80

†Deve-se observar que a superfície livre, na qual são feitas as medidas de deformações, está em um estado *plano de tensão*, enquanto as Equações (7.41) e (7.43) foram determinadas para um estado *plano de deformação*. No entanto, conforme observamos anteriormente, a perpendicular corresponde à superfície livre é um eixo principal de deformação e as deduções dadas na Seção 7.10 permanecem válidas.

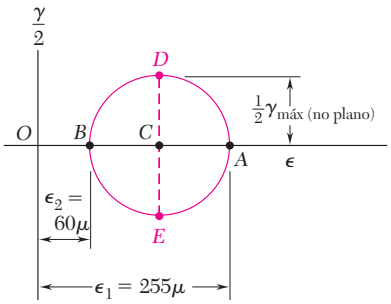


PROBLEMA RESOLVIDO 7.6

Um tanque de armazenamento cilíndrico utilizado para transportar gás sob pressão tem um diâmetro interno de 610 mm e parede com espessura de 19 mm. Foram colados extensômetros sobre sua superfície nas direções transversal e longitudinal que indicaram deformações de 255μ e 60μ, respectivamente. Por meio de um ensaio de torção determinou-se o módulo de elasticidade transversal do material utilizado no tanque com valor de $G = 77{,}2$ MPa; determine (*a*) a pressão manométrica dentro do tanque e (*b*) as tensões principais e a tensão de cisalhamento máxima na parede do tanque.

SOLUÇÃO

***a*. Pressão manométrica dentro do tanque.** Notamos que as deformações específicas dadas são as principais na superfície do tanque. Representando os pontos *A* e *B* correspondentes, traçamos o círculo de Mohr para a deformação. A deformação de cisalhamento máxima no plano das deformações é igual ao diâmetro do círculo.



$$\gamma_{\text{máx(no plano)}} = \epsilon_1 - \epsilon_2 = 255\mu - 60\mu = 195\mu$$

Pela lei de Hooke para tensão e deformação de cisalhamento, temos

$$\begin{aligned}\tau_{\text{máx(no plano)}} &= G\gamma_{\text{máx(no plano)}} \\ &= (77{,}2 \times 10^3 \text{ MPa})(195 \times 10^{-6}\text{ r} \\ &= 15{,}05 \text{ MPa}\end{aligned}$$

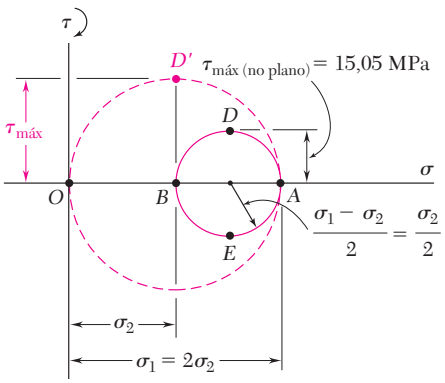
Usando esse valor e os dados fornecidos na Equação (7.33), escrevemos

$$\tau_{\text{máx(no plano)}} = \frac{pr}{4t} \qquad 15{,}05 \text{ MPa} = \frac{p(305 \text{ mm})}{4(19 \text{ mm})}$$

Resolvendo para a pressão manométrica p, temos

$$p = 3{,}75 \text{ MPa} \blacktriangleleft$$

***b*. Tensões principais e tensão de cisalhamento máxima.** Lembrando que, para um vaso de pressão cilíndrico de paredes finas, $\sigma_1 = 2\sigma_2$, traçamos o círculo de Mohr para a tensão e obtemos

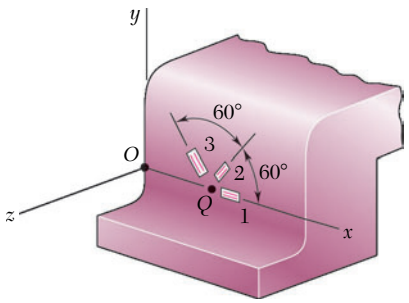


$$\sigma_2 = 2\tau_{\text{máx(no plano)}} = 2(15{,}05 \text{ MPa}) = 30{,}1 \text{ MPa} \qquad \sigma_2 = 30{,}1 \text{ MPa} \blacktriangleleft$$

$$\sigma_1 = 2\sigma_2 = 2(30{,}18 \text{ MPa}) \qquad \sigma_1 = 60{,}2 \text{ MPa} \blacktriangleleft$$

A tensão de cisalhamento máxima é igual ao raio do círculo de diâmetro *OA* e corresponde a uma rotação de 45° em torno do eixo longitudinal.

$$\tau_{\text{máx}} = \tfrac{1}{2}\sigma_1 = \sigma_2 = 30{,}1 \text{ MPa} \qquad \tau_{\text{máx}} = 30{,}1 \text{ MPa} \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESOLVIDO 7.7

Usando uma roseta de 60°, foram determinadas as seguintes deformações específicas no ponto Q na superfície de uma base de máquina de aço:

$$\epsilon_1 = 40\ \mu \qquad \epsilon_2 = 980\ \mu \qquad \epsilon_3 = 330\ \mu$$

Usando os eixos de coordenadas mostrados, determine no ponto Q (*a*) as componentes de deformações ϵ_x, ϵ_y e γ_{xy}, (*b*) as deformações específicas principais e (*c*) a deformação de cisalhamento máxima. (Use $\nu = 0{,}29$.)

SOLUÇÃO

***a*. Componentes de deformação ϵ_x, ϵ_y, γ_{xy}.** Para os eixos de coordenadas mostrados

$$\theta_1 = 0 \qquad \theta_2 = 60° \qquad \theta_3 = 120°$$

Substituindo esses valores nas Equações (7.60), temos

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 &= \epsilon_x(1) &&+ \epsilon_y(0) &&+ \gamma_{xy}(0)(1)\\
\epsilon_2 &= \epsilon_x(0{,}500)^2 &&+ \epsilon_y(0{,}866)^2 &&+ \gamma_{xy}(0{,}866)(0{,}500)\\
\epsilon_3 &= \epsilon_x(-0{,}500)^2 &&+ \epsilon_y(0{,}866)^2 &&+ \gamma_{xy}(0{,}866)(-0{,}500)
\end{aligned}$$

Resolvendo essas equações para ϵ_x, ϵ_y e γ_{xy}, obtemos

$$\epsilon_x = \epsilon_1 \qquad \epsilon_y = \tfrac{1}{3}(2\epsilon_2 + 2\epsilon_3 - \epsilon_1) \qquad \gamma_{xy} = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_3}{0{,}866}$$

Substituindo os valores dados para ϵ_1, ϵ_2 e ϵ_3, temos

$$\epsilon_x = 40\ \mu \qquad \epsilon_y = \tfrac{1}{3}[2(980) + 2(330) - 40] \qquad \epsilon_y = +860\ \mu \blacktriangleleft$$
$$\gamma_{xy} = (980 - 330)/0{,}866 \qquad \gamma_{xy} = 750\ \mu \blacktriangleleft$$

Essas deformações específica estão indicadas no elemento mostrado.

***b*. Deformações específica principais.** Observamos que o lado do elemento associado a ϵ_x sofre uma rotação no sentido anti-horário; assim, representamos o ponto X abaixo do eixo horizontal, isto é, $X(40, -375)$. Representamos então $Y(860, +375)$ e traçamos o círculo de Mohr.

$$\epsilon_{\text{méd}} = \tfrac{1}{2}(860\ \mu + 40\ \mu) = 450\ \mu$$
$$R = \sqrt{(375\ \mu)^2 + (410\ \mu)^2} = 556\ \mu$$
$$\text{tg}\ 2\theta_p = \frac{375\ \mu}{410\ \mu} \qquad 2\theta_p = 42{,}4°\downarrow \qquad \theta_p = 21{,}2°\downarrow$$

Os pontos A e B correspondem às deformações específicas principais. Temos

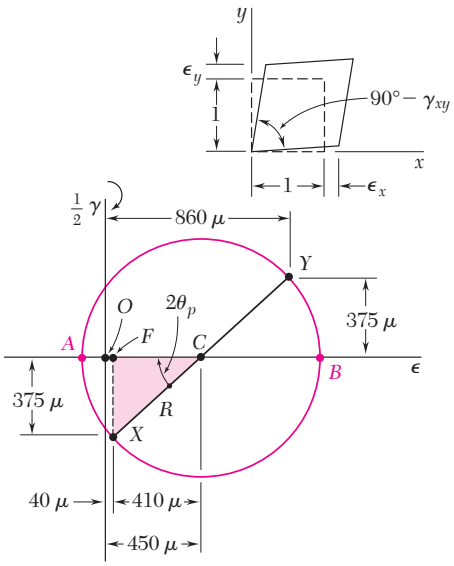
$$\epsilon_a = \epsilon_{\text{méd}} - R = 450\ \mu - 556\ \mu \qquad \epsilon_a = -106\ \mu \blacktriangleleft$$
$$\epsilon_b = \epsilon_{\text{méd}} + R = 450\ \mu + 556\ \mu \qquad \epsilon_b = +1006\ \mu \blacktriangleleft$$

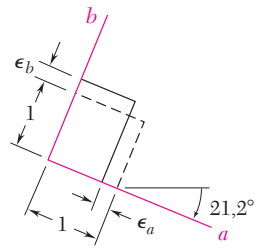
Como $\sigma_z = 0$ na superfície, usamos a Equação (7.59) para determinar a deformação específica principal ϵ_c

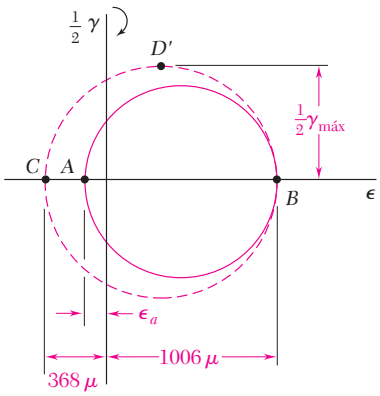
$$\epsilon_c = -\frac{\nu}{1-\nu}(\epsilon_a + \epsilon_b) = -\frac{0{,}29}{1 - 0{,}29}(-106\ \mu + 1006\ \mu) \qquad \epsilon_c = -368\ \mu \blacktriangleleft$$

***c*. Deformação de cisalhamento máxima.** Representando o ponto C e traçando o círculo de Mohr através dos pontos B e C, obtemos o ponto D' e escrevemos

$$\tfrac{1}{2}\gamma_{\text{máx}} = \tfrac{1}{2}(1006\ \mu + 368\ \mu) \qquad \gamma_{\text{máx}} = 1374\ \mu \blacktriangleleft$$







PROBLEMAS

7.128 até 7.131 Para o estado plano de deformação dado, use o método da Seção 7.10 para determinar o estado plano de deformação associado aos eixos x' e y' que sofreram uma rotação do ângulo θ dado.

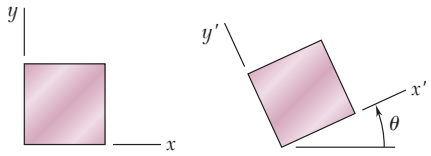


Fig. P7.128 até P7.135

	ϵ_x	ϵ_y	γ_{xy}	θ
7.128 e 7.132	-240μ	$+320\mu$	-330μ	65°↓
7.129 e 7.133	$+240\mu$	$+160\mu$	-150μ	60°↰
7.130* e *7.134	-350μ	0	$+120\mu$	15°↓
7.131 e 7.135	0	$+320\mu$	-10	30°↰

7.132 até 7.135 Para o estado plano de deformação dado, use o círculo de Mohr para determinar o estado plano de deformação associado aos eixos x' e y' que sofreram uma rotação do ângulo θ dado.

7.136 até 7.139 O seguinte estado de deformação foi medido na superfície de uma placa fina. Sabendo que a superfície da placa está livre de tensão, determine (*a*) a direção e a intensidade das deformações principais, (*b*) a deformação de cisalhamento máxima no plano das deformações e (*c*) a deformação de cisalhamento máxima. (Use $\nu = 1/3$.)

	ϵ_x	ϵ_y	γ_{xy}
7.136	$+30\ \mu$	$+570\ \mu$	$+720\ \mu$
7.137	$+160\ \mu$	-480μ	$-600\ \mu$
7.138	$-600\ \mu$	$-400\ \mu$	$+350\ \mu$
7.139	$-260\ \mu$	$-60\ \mu$	$+400\ \mu$

7.140 até 7.143 Para o estado plano de deformação dado, use o círculo de Mohr para determinar (*a*) a orientação e a intensidade das deformações principais, (*b*) a deformação máxima no plano e (*c*) a deformação de cisalhamento máxima.

	ϵ_x	ϵ_y	γ_{xy}
7.140	$+400\ \mu$	$+200\ \mu$	$+375\ \mu$
7.141	$-180\ \mu$	$-260\ \mu$	$+315\ \mu$
7.142	$+60\ \mu$	$+240\ \mu$	$-50\ \mu$
7.143	$+300\ \mu$	$+60\ \mu$	$+100\ \mu$

7.144 Determine a deformação específica ϵ_x utilizando a roseta mostrada sabendo que foram verificadas as seguintes deformações:

$$\epsilon_1 = +480\mu \qquad \epsilon_2 = -120\mu \qquad \epsilon_3 = +80\mu$$

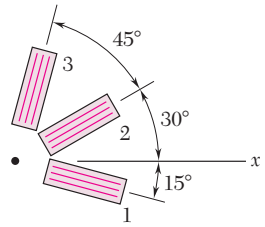


Fig. *P7.144*

7.145 As deformações específicas determinadas pelo uso da roseta ao lado durante o teste de um elemento de máquina são

$$\epsilon_1 = +600\mu \qquad \epsilon_2 = +450\mu \qquad \epsilon_3 = -75\mu$$

Determine (*a*) as deformações específicas principais no plano das deformações e (*b*) a deformação de cisalhamento máxima no plano das deformações.

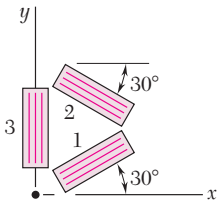


Fig. *P7.145*

7.146 A roseta indicada foi utilizada para determinar as seguintes deformações específicas na superfície de um gancho de guindaste:

$$\epsilon_1 = +420\mu \qquad \epsilon_2 = -45\mu \qquad \epsilon_4 = +165\mu$$

(*a*) Qual deverá ser a leitura do extensômetro 3? (*b*) Determine as deformações específicas principais e a deformação de cisalhamento máxima no plano das deformações.

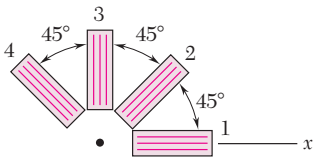


Fig. P7.146

7.147 As deformações específicas determinadas por uma roseta fixada, à superfície de um elemento de máquina são, conforme mostra a figura

$$\epsilon_1 = -93{,}1\mu \qquad \epsilon_2 = +385\mu$$
$$\epsilon_3 = +210\mu$$

Determine (*a*) a orientação e a intensidade das deformações específicas principais no plano da roseta e (*b*) a tensão de cisalhamento máxima no plano das tensões.

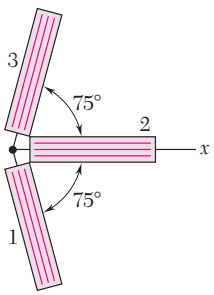


Fig. P7.147

7.148 Mostre que a soma das três medidas de deformação feitas com uma roseta de 60° é independente da orientação da roseta e igual a

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 3\epsilon_{méd}$$

em que $\epsilon_{méd}$ é a abscissa do centro do círculo de Mohr correspondente.

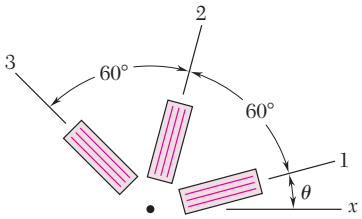


Fig. P7.148

7.149 Usando uma roseta de 45°, foram determinadas as deformações específicas ϵ_1, ϵ_2 e ϵ_3 para um determinado ponto. Usando o círculo de Mohr, mostre que as deformações específicas principais são

$$\epsilon_{máx,\,mín} = \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_3) \pm \frac{1}{\sqrt{2}}[(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2]^{\frac{1}{2}}$$

(*Sugestão*: Os triângulos sombreados são congruentes.)

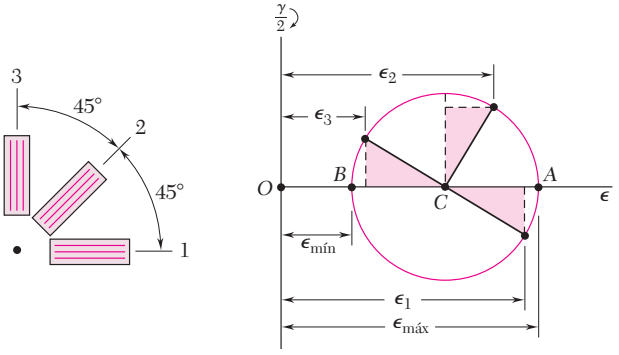


Fig. P7.149

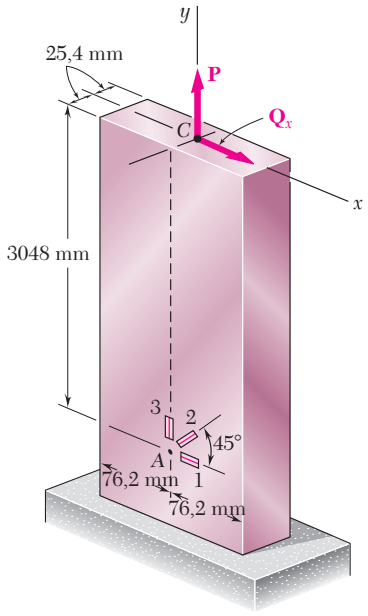


Fig. P7.150

7.150 Uma força axial centrada **P** e uma força horizontal **Q** são ambas aplicadas ao ponto *C* da barra de seção retangular mostrada na figura. Uma roseta de deformação de 45° na superfície da barra no ponto *A* indica as seguintes deformações:

$$\epsilon_1 = -60\mu \qquad \epsilon_2 = +240\mu$$
$$\epsilon_3 = +200\mu$$

Sabendo que $E = 200$ GPa e $\nu = 0{,}30$, determine as intensidades de **P** e $\mathbf{Q}_x$.

7.151 Resolva o Problema 7.150 considerando que a roseta no ponto *A* indica as seguintes deformações:

$$\epsilon_1 = -30\mu \quad \epsilon_2 = +250\mu \quad \epsilon_3 = +100\mu$$

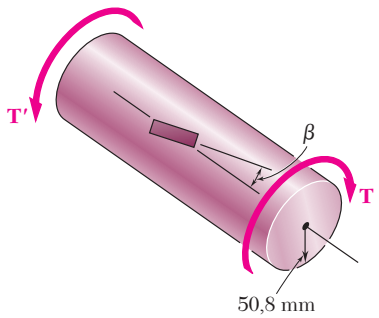


Fig. *P7.152*

7.152 Um único extensômetro é colado em um eixo de aço com seção transversal cheia de 101,6 mm de diâmetro formando um ângulo $\beta = 25°$ com uma linha paralela ao centro do eixo. Sabendo que $G = 79{,}3$ GPa, determine o torque **T** indicado por uma leitura no extensômetro de 300μ.

7.153 Resolva o Problema 7.152 considerando que o extensômetro forma um ângulo $\beta = 35°$ com uma linha paralela ao centro do eixo.

7.154 Um único extensômetro que forma um ângulo $\beta = 18°$ com um plano horizontal é utilizado para determinar a pressão manométrica no tanque de aço cilíndrico da figura. O tanque tem uma parede cilíndrica de 6 mm de espessura, um diâmetro interno de 600 mm, e é feito de um aço com $E = 200$ GPa e $\nu = 0{,}30$. Determine a pressão no tanque sabendo que o extensômetro indica uma leitura de 280 μ.

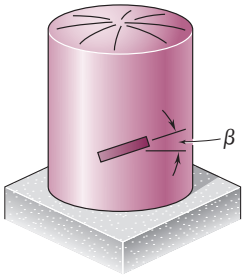


Fig. P7.154

7.155 Resolva o Problema 7.154 considerando que o extensômetro forma um ângulo $\beta = 35°$ com um plano horizontal.

7.156 Sabe-se que existe um estado plano de deformação na superfície de um componente de máquina. Sabendo que $E = 200$ GPa e $G = 77{,}2$ GPa, determine a direção e a intensidade das três deformações específicas principais (*a*) através da determinação do estado de deformação correspondente [use a Equação (2.43) e a, Equação (2.38)] e em seguida utilize o círculo de Mohr para deformação; e (*b*) utilize o círculo de Mohr para determinar os planos e tensões principais e então determine as deformações correspondentes.

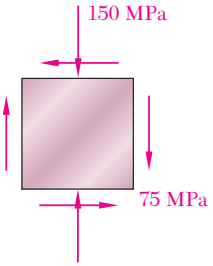


Fig. P7.156

7.157 O seguinte estado de deformação foi determinado na superfície de uma peça de máquina de ferro fundido:

$$\epsilon_x = -720\,\mu \qquad \epsilon_y = -400\mu \qquad \gamma_{xy} = +660\mu$$

Sabendo que $E = 69$ GPa e $G = 28$ GPa, determine os planos e tensões principais (*a*) indicando o correspondente estado plano de tensão [use a Equação (2.36), a Equação (2.43) e a primeira das duas equações do Problema 2.73] e em seguida utilize o círculo de Mohr para tensão e, (*b*) use o círculo de Mohr para deformação para determinar a orientação e a intensidade das deformações então determine as tensões correspondentes.

REVISÃO E RESUMO DO CAPÍTULO 7

A primeira parte deste capítulo foi dedicada ao estudo da *transformação do estado de tensão* sob a rotação de eixos e à sua aplicação para a solução de problemas de engenharia, e sua segunda parte tratou de um estudo similar da *transformação do estado de deformação*.

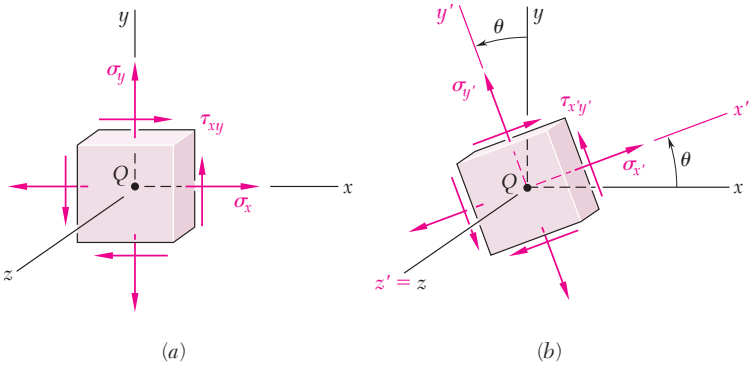


Fig. 7.5

Transformação do estado plano de tensão

Considerando primeiramente um estado *plano* de *tensão* em um dado ponto Q [Seção 7.2] e chamando de σ_x, σ_y e τ_{xy} as componentes de tensão associadas ao elemento mostrado na Fig. 7.5*a*, deduzimos as fórmulas a seguir, definindo as componentes $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ e $\tau_{x'y'}$ associadas àquele elemento depois de ele ter sofrido uma rotação através de um ângulo θ em torno do eixo z (Fig. 7.5*b*)

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\,\text{sen}\,2\theta \tag{7.5}$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\,\text{sen}\,2\theta \tag{7.7}$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\,\text{sen}\,2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta \tag{7.6}$$

Na Seção 7.3, determinamos os valores de θ_p do ângulo de rotação que correspondem aos valores máximo e mínimo da tensão normal no ponto Q. Escrevemos

$$\text{tg}\,2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \tag{7.12}$$

Os dois valores obtidos para θ_p estavam defasados em 90° (Fig. 7.11) e definiam os *planos principais de tensão* no ponto Q. Os valores corres-

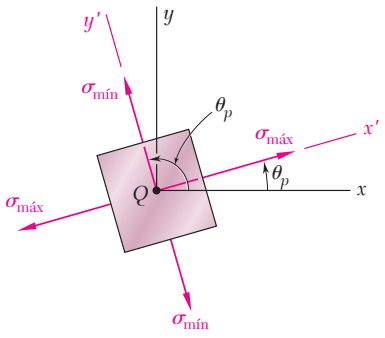


Fig. 7.11

pondentes da tensão normal eram chamados de *tensões principais* em Q; obtivemos

$$\sigma_{\text{máx, mín}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{7.14}$$

Observamos também que o valor correspondente da tensão de cisalhamento é zero. Em seguida, determinamos os valores de θ_c do ângulo θ para o qual ocorreu o maior valor da tensão de cisalhamento. Escrevemos

$$\text{tg } 2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \tag{7.15}$$

Os dois valores obtidos para θ_c eram defasados em 90° (Fig. 7.12). Observamos também que os planos de tensão de cisalhamento máxima estavam a 45° dos planos principais. O valor máximo da tensão de cisalhamento para uma rotação *no plano das tensões era*

$$\tau_{\text{máx}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{7.16}$$

e o valor correspondente das tensões normais era

$$\sigma' = \sigma_{\text{méd}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \tag{7.17}$$

Vimos na Seção 7.4 que o *círculo de Mohr* proporciona um método alternativo, com base em considerações geométricas simples, para a análise

Planos principais. Tensões principais

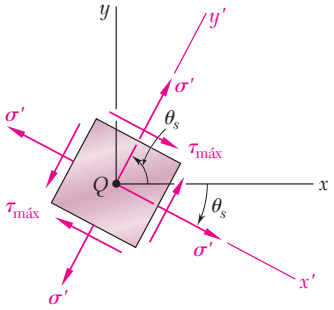


Fig. 7.12

Tensão de cisalhamento máxima no plano das tensões

Círculo de Mohr para tensão

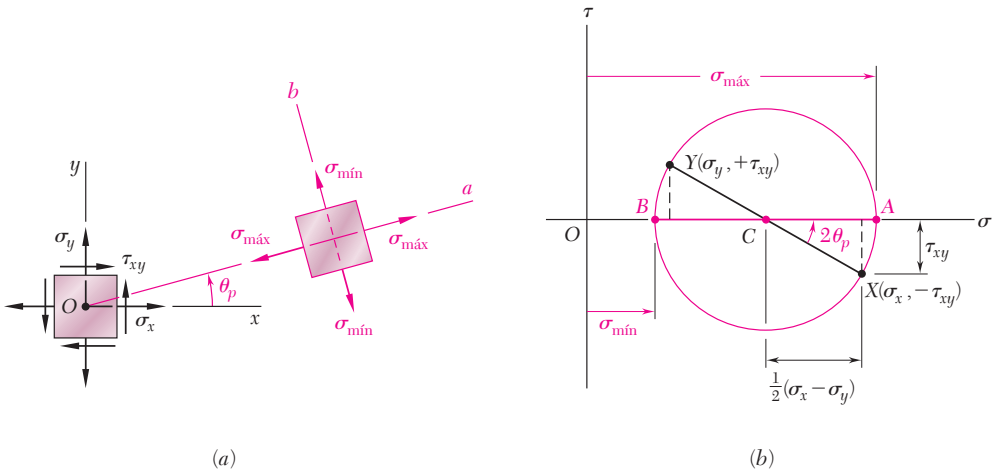


Fig. 7.17

das transformações do estado plano de tensão. Dado o estado de tensão mostrado em preto na Fig. 7.17*a*, representamos o ponto X de coordenadas σ_x, $-\tau_{xy}$, e o ponto Y de coordenadas σ_y, $+\tau_{xy}$ (Fig. 7.17*b*). Traçando o círculo de diâmetro XY, obtivemos o círculo de Mohr. As abscissas dos pontos de intersecção A e B do círculo com o eixo horizontal representam as tensões principais, e o ângulo de rotação que faz coincidir o diâmetro XY com AB é duas vezes o ângulo θ_p que define os planos principais na Fig. 7.17*a*, tendo ambos os ângulos o mesmo sentido. Observamos também que o diâmetro DE define a tensão de cisalhamento máxima e a orientação do plano correspondente (Fig. 7.19*b*) [Exemplo 7.2, Problemas resolvidos 7.2 e 7.3].

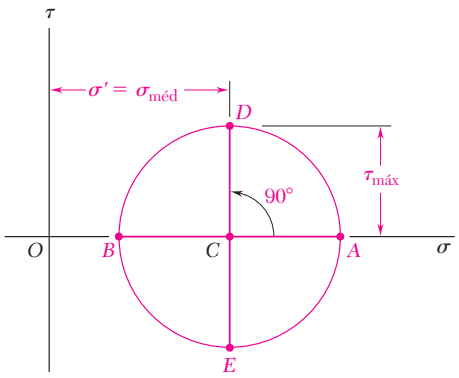


Fig. 7.19*b*

Estado geral de tensão

Considerando um *estado geral de tensão* caracterizado por seis componentes de tensão [Seção 7.5], mostramos que a tensão normal em um plano de orientação arbitrária pode ser expressa como uma forma quadrática dos cossenos diretores da perpendicular àquele plano. Isso prova a existência de três *eixos principais de tensão* e de três *tensões principais* em um dado ponto. Girando um pequeno elemento de volume em torno de cada um dos três eixos principais [Seção 7.6], traçamos o círculo de Mohr correspondente que forneceu os valores de $\sigma_{máx}$, $\sigma_{mín}$ e $\tau_{máx}$ (Fig. 7.29). No caso particular de *estado plano de tensão*, e se os eixos x e y forem selecionados no plano de tensão, o ponto C coincidirá com a origem O. Se A e B estiverem localizados em lados opostos de O, a tensão de cisalhamento máxima será igual à tensão de cisalhamento máxima "no plano" das tensões conforme foi determinado nas Seções 7.3 ou 7.4. Se A e B estiverem localizados no mesmo lado de O, isto não ocorrerá. Se $\sigma_a > \sigma_b > 0$, por exemplo, a tensão de cisalhamento máxima será igual a $1/2\sigma_a$ e corresponderá a uma rotação fora do plano das tensões (Fig. 7.32).

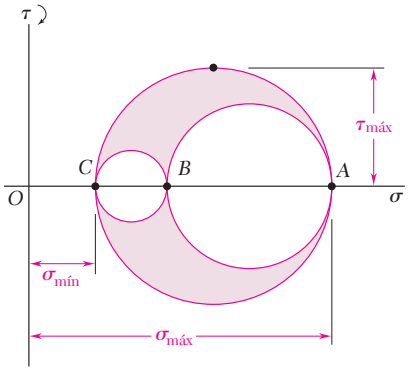


Fig. 7.29

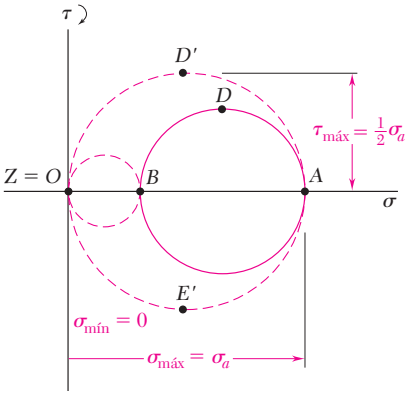


Fig. 7.32

Critérios de escoamento para materiais dúcteis

Critérios de escoamento para materiais dúcteis sob estado plano de tensão foram desenvolvidos na Seção 7.7. Para prevermos se um componente estrutural ou de máquina falhará em algum ponto crítico em razão do escoamento do material, primeiro determinamos as tensões principais σ_a e σ_b naquele ponto de acordo com condições de carregamento especificadas. Depois representamos graficamente o ponto de coordenadas σ_a e σ_b. Se esse ponto estiver dentro de uma certa área, o componente estará seguro; se ele estiver fora da área, o componente falhará. A área usada para o critério da tensão de cisalhamento máxima é mostrada na Fig. 7.40 e a área usada para o critério da energia de distorção máxima é mostrada na Fig. 7.41. Notamos que ambas dependem do valor da tensão de escoamento do material σ_E.

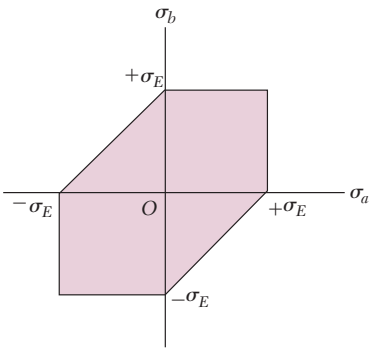


Fig. 7.40

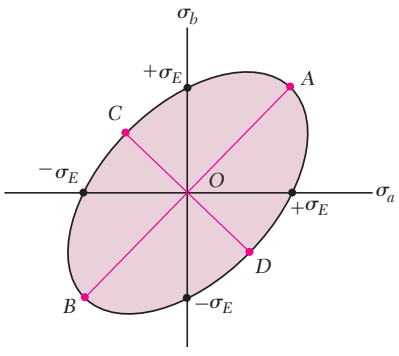


Fig. 7.41

Critérios de fratura para materiais frágeis sob estado plano de tensão foram desenvolvidos na Seção 7.8 de uma forma semelhante. O critério mais comumente utilizado é o *critério de Mohr*, que se vale dos resultados de vários tipos de ensaios disponíveis para um dado material. A área sombreada mostrada na Fig. 7.47*b* é usada quando os limites de resistência σ_{LT}

Critérios de fratura para materiais frágeis

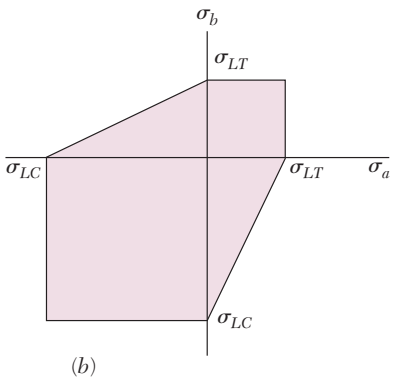


Fig. 7.47*b*

e σ_{LC} forem determinados, respectivamente, em um ensaio de tração e de compressão. Novamente, as tensões principais σ_a e σ_b foram determinadas em um dado ponto do componente estrutural ou de máquina que estava sendo analisado. Se o ponto correspondente cair dentro da área sombreada, o componente estará seguro; se cair fora, o componente se romperá.

Na Seção 7.9, discutimos as tensões em *vasos de pressão de paredes finas* e deduzimos fórmulas que relacionam tensões nas paredes dos vasos e a *pressão manométrica p* do fluido que eles contêm. No caso de um *vaso cilíndrico* de raio interno r e espessura de parede t (Fig. 7.51), obtivemos as seguintes expressões para a *tensão tangencial* σ_1 e para a *tensão longitudinal* σ_2

Vasos de pressão cilíndricos

$$\sigma_1 = \frac{pr}{t} \qquad \sigma_2 = \frac{pr}{2t} \tag{7.30, 7.31}$$

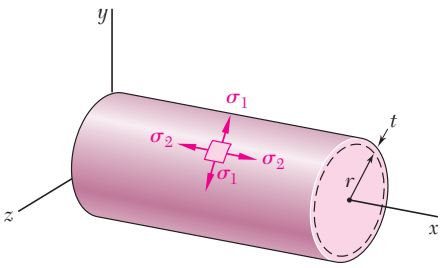


Fig. 7.51

Vimos também que a *tensão de cisalhamento máxima* ocorre fora do plano das tensões e é

$$\tau_{\text{máx}} = \sigma_2 = \frac{pr}{2t} \tag{7.34}$$

No caso de um *vaso esférico* de raio interno r e espessura de parede t (Fig. 7.55), vimos que as duas tensões principais são iguais

Vasos de pressão esféricos

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pr}{2t} \tag{7.36}$$

Novamente, a *tensão de cisalhamento máxima* ocorre fora do plano das tensões; ela é

$$\tau_{\text{máx}} = \tfrac{1}{2}\sigma_1 = \frac{pr}{4t} \tag{7.37}$$

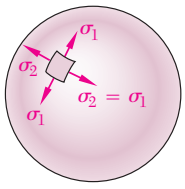


Fig. 7.55

Transformação do estado plano de deformação

A última parte do capítulo foi dedicada à *transformação de deformação*. Nas Seções 7.10 e 7.11, discutimos a transformação do *estado plano de deformação* e apresentamos o *círculo de Mohr para o estado plano de deformação*. A discussão foi análoga àquela da transformação de tensões, exceto que, onde foi usada a tensão de cisalhamento τ, usamos $1/2\gamma$, ou seja, *metade da deformação de cisalhamento*. As fórmulas obtidas para a transformação de deformação sob uma rotação de eixos por meio de um ângulo θ foram

$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\operatorname{sen} 2\theta \tag{7.44}$$

$$\epsilon_{y'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2}\operatorname{sen} 2\theta \tag{7.45}$$

$$\gamma_{x'y'} = -(\epsilon_x - \epsilon_y)\operatorname{sen}\ 2\theta + \gamma_{xy}\cos 2\theta \tag{7.49}$$

Círculo de Mohr para deformação

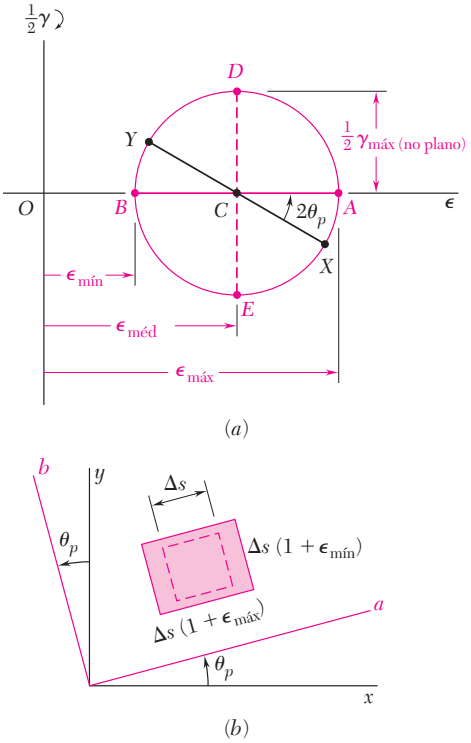


Fig. 7.65

Usando o círculo de Mohr para deformação (Fig. 7.65), obtivemos também as seguintes relações que definem o ângulo de rotação θ_p correspondente aos *eixos principais de deformação* e os valores das *deformações específicas principais* $\epsilon_{máx}$ e $\epsilon_{mín}$

$$\operatorname{tg} 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} \tag{7.52}$$

$$\epsilon_{máx} = \epsilon_{méd} + R \qquad \text{e} \qquad \epsilon_{mín} = \epsilon_{méd} - R \tag{7.51}$$

em que

$$\epsilon_{méd} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \qquad \text{e} \qquad R = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \tag{7.50}$$

A *deformação de cisalhamento máxima* para uma rotação no plano da deformação foi obtida sendo

$$\gamma_{máx\,(no\ plano)} = 2R = \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} \tag{7.53}$$

A Seção 7.12 foi dedicada à análise tridimensional da deformação, com aplicação na determinação da deformação de cisalhamento máxima nos casos particulares de estado plano de deformação e estado plano de tensão. No caso de *estado plano de tensão*, vimos também que a deformação específica principal ϵ_c em uma direção perpendicular ao plano de tensão poderia ser expressa da forma a seguir, em termos das deformações específicas principais "no plano" ϵ_a e ϵ_b

$$\epsilon_c = -\frac{\nu}{1 - \nu}(\epsilon_a + \epsilon_b) \tag{7.59}$$

Extensômetros. Roseta de deformação

Finalmente, discutimos na Seção 7.13 o uso dos *extensômetros* para medir a deformação específica normal na superfície de um elemento estrutural ou componente de máquina. Considerando uma *roseta de deformação* com três extensômetros alinhados ao longo de linhas formando, respectivamente, ângulos θ_1, θ_2 e θ_3 com o eixo x (Fig. 7.80), escrevemos as relações a seguir, entre as medidas ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3 dos extensômetros e as componentes ϵ_x, ϵ_y, γ_{xy} caracterizando o estado de deformação naquele ponto

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 &= \epsilon_x \cos^2\theta_1 + \epsilon_y \operatorname{sen}^2\theta_1 + \gamma_{xy} \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_1 \\
\epsilon_2 &= \epsilon_x \cos^2\theta_2 + \epsilon_y \operatorname{sen}^2\theta_2 + \gamma_{xy} \operatorname{sen}\theta_2 \cos\theta_2 \\
\epsilon_3 &= \epsilon_x \cos^2\theta_3 + \epsilon_y \operatorname{sen}^2\theta_3 + \gamma_{xy} \operatorname{sen}\theta_3 \cos\theta_3
\end{aligned} \tag{7.60}$$

Essas equações podem ser resolvidas para ϵ_x, ϵ_y e γ_{xy}, uma vez determinados os valores de ϵ_1, ϵ_2 e ϵ_3.

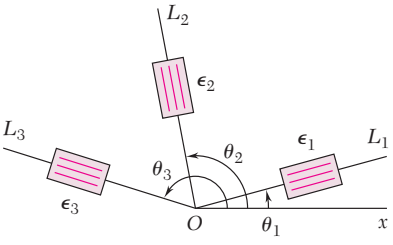


Fig. 7.80

PROBLEMAS DE REVISÃO

7.158 As fibras de um componente de madeira formam um ângulo de 15° com a vertical. Para o estado de tensão mostrado, determine (*a*) a tensão de cisalhamento no plano das tensões, paralela às fibras da madeira e (*b*) a tensão normal perpendicular às fibras da madeira.

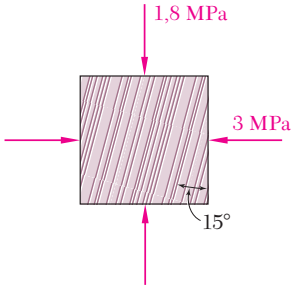


Fig. P7.158

7.159 A força centrada **P** é aplicada a um poste curto, conforme mostra a figura. Sabendo que as tensões no plano *a-a* são $\sigma = -103{,}4$ MPa e $\tau = 34{,}5$ MPa, determine (*a*) o ângulo β que o plano *a-a* forma com a horizontal e (*b*) a tensão de compressão máxima no poste.

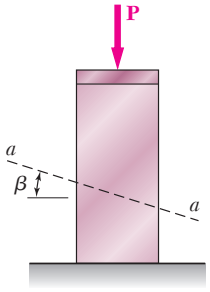


Fig. *P7.159*

7.160 O tubo de aço *AB* tem 102 mm de diâmetro externo e uma espessura de parede de 6 mm. Sabendo que o braço *CD* está rigidamente fixado ao tubo, determine as tensões principais e a tensão de cisalhamento máxima no ponto *H*.

7.161 O tubo de aço *AB* tem 102 mm de diâmetro externo e uma espessura de parede de 6 mm. Sabendo que o braço *CD* está rigidamente fixado ao tubo, determine as tensões principais e a tensão de cisalhamento máxima no ponto *K*.

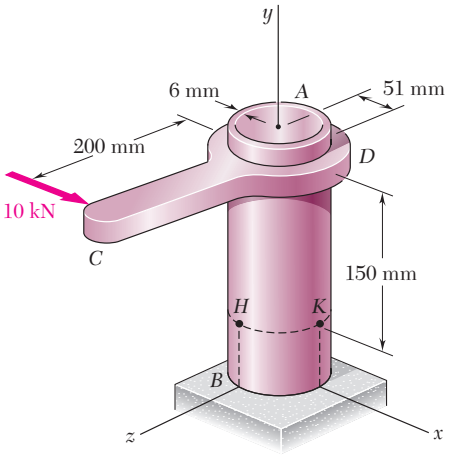


Fig. P7.160 e P7.161

7.162 Determine os planos principais e as tensões principais para o estado plano de tensões que resulta da superposição dos dois estados planos mostrados.

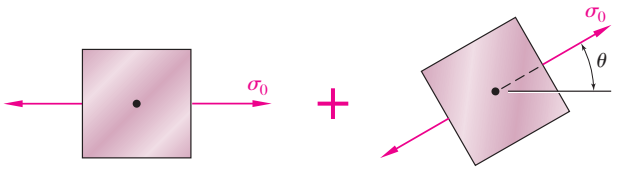


Fig. P7.162

7.163 Para o estado de tensão mostrado na figura, determine o intervalo de valores de θ para os quais a intensidade da tensão de cisalhamento $\tau_{x'y'}$ é igual ou menor que 40 MPa.

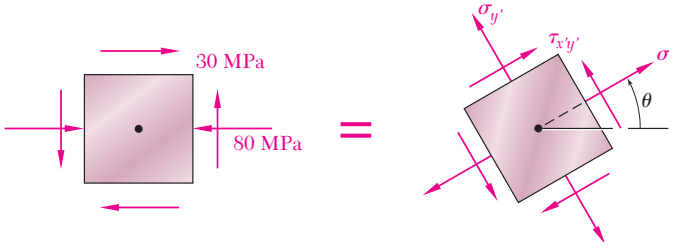


Fig. *P7.163*

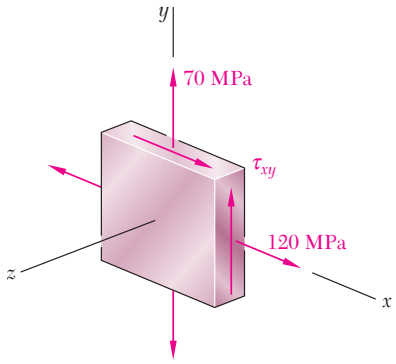


Fig. P7.164

7.164 Para o estado de tensão mostrado, determine o valor de τ_{xy} para o qual a tensão de cisalhamento máxima é 80 MPa.

7.165 O estado plano de tensões mostrado ocorre em um componente de máquina feito de aço com $\sigma_E = 206{,}9$ MPa. Utilizando o critério da máxima energia de distorção determine se o escoamento ocorrerá quando (*a*) $\tau_{xy} = 41{,}4$ MPa ksi, (*b*) $\tau_{xy} = 82{,}7$ MPa ksi e (*c*) $\tau_{xy} = 96{,}5$ MPa. Se o escoamento não ocorrer, determine o fator correspondente de segurança.

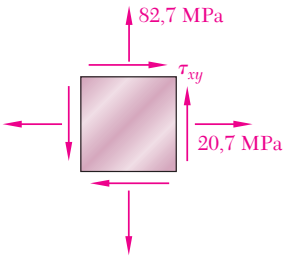


Fig. *P7.165*

7.166 Quando totalmente cheio, o tanque de armazenagem não pressurizado, mostrado na figura, contém água até uma altura de 14,63 m acima de sua base. Sabendo que a parte inferior do tanque tem uma espessura de parede de 15,88 mm, determine a tensão normal máxima e a tensão de cisalhamento máxima no tanque. (Peso específico da água = 9802 N/m^3.)

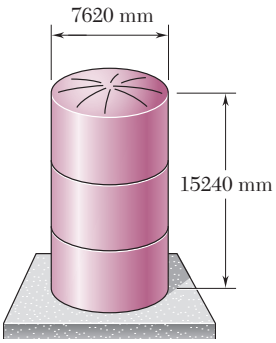


Fig. P7.166

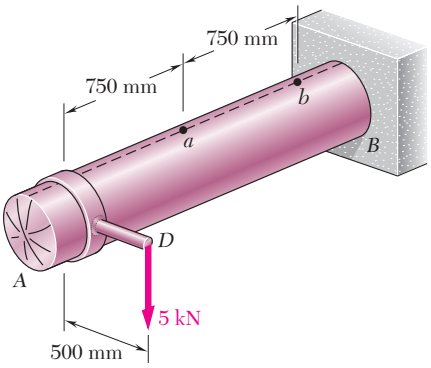


Fig. *P7.167*

7.167 O tanque de ar comprimido *AB* tem um diâmetro interno de 450 mm e espessura de parede uniforme de 6 mm. Sabendo que a pressão manométrica no tanque é de 1,2 MPa, determine a tensão normal máxima e a tensão de cisalhamento máxima no plano das tensões no ponto *a*, na superfície superior do tanque.

7.168 O tubo de latão *AD* é encaixado em uma jaqueta utilizada para aplicar uma pressão hidrostática de 3448 kPa à porção *BC* do tubo. Sabendo que a pressão interna do tubo é de 689,5 kPa, determine a máxima tensão normal no tubo.

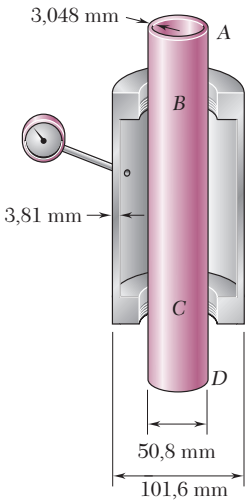


Fig. P7.168

7.169 Determine a maior deformação específica normal no plano das deformações, sabendo que foram obtidas as seguintes deformações específicas usando a roseta abaixo:

$$\epsilon_1 = -50\mu \qquad \epsilon_2 = +360\mu$$
$$\epsilon_3 = +515\mu$$

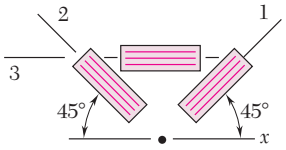


Fig. P7.169

PROBLEMAS PARA COMPUTADOR

Os problemas a seguir devem ser resolvidos com um computador.

7.C1 Um estado plano de tensão é definido pelas componentes de tensão σ_x, σ_y e τ_{xy} associadas ao elemento mostrado na Figura P7.C1*a*. (*a*) Elabore um programa de computador que possa ser utilizado para calcular as componentes de tensão $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ e $\tau_{x'y'}$ associadas ao elemento depois que ele sofreu uma rotação de um ângulo θ sobre o eixo z (Fig. P7.C1*b*). (*b*) Use esse programa para resolver os Problemas 7.13 a 7.16.

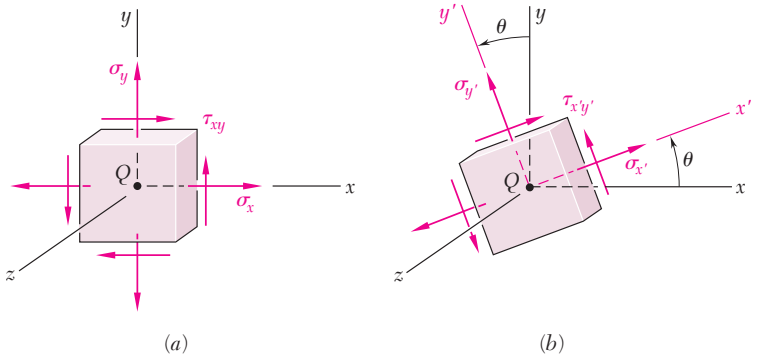


Fig. P7.C1

7.C2 Um estado plano de tensão é definido pelas componentes de tensão σ_x, σ_y e τ_{xy} associadas ao elemento mostrado na Figura P7.C1*a*. (*a*) Elabore um programa de computador que possa ser utilizado para calcular os eixos principais, as tensões principais, a tensão de cisalhamento máxima no plano das tensões e a tensão de cisalhamento máxima. (*b*) Use esse programa para resolver os Problemas 7.5, 7.9, 7.68 e 7.69.

7.C3 (*a*) Elabore um programa de computador que, para um dado estado plano de tensão e uma dada tensão de escoamento de um material dúctil, possa ser utilizado para determinar se o material escoará. O programa deverá usar o critério da tensão de cisalhamento máxima e o critério da energia máxima de distorção. Deverá também imprimir os valores das tensões principais e, se o material não escoar, calcular o coeficiente de segurança. (*b*) Use esse programa para resolver os Problemas 7.81, 7.82 e 7.165.

7.C4 (*a*) Elabore um programa de computador com base no critério de fratura de Mohr para materiais frágeis que, para um dado estado plano de tensão e valores dados de limite de resistência do material em tração e compressão, possa ser utilizado para determinar se ocorrerá ruptura. O programa deverá também imprimir os valores das tensões principais. (*b*) Use esse programa para resolver os Problemas 7.89 e 7.90 e para verificar as respostas dos Problemas 7.93 e 7.94.

7.C5 Um estado plano de deformação é definido pelas componentes de deformação ϵ_x, ϵ_y e γ_{xy} associadas aos eixos x e y. (*a*) Elabore um programa de computador que possa ser utilizado para calcular as componentes de deformação $\epsilon_{x'}$, $\epsilon_{y'}$ e $\gamma_{x'y'}$ associadas ao sistema de referência $x'y'$ obtido por meio da rotação dos eixos x e y de um ângulo θ. (*b*) Use esse programa para resolver os Problemas 7.129 e 7.131.

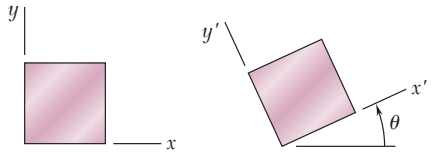


Fig. P7.C5

7.C6 Um estado de deformação é definido pelas componentes de deformação ϵ_x, ϵ_y e γ_{xy} associadas aos eixos x e y. (*a*) Elabore um programa de computador que possa ser utilizado para determinar a orientação e a intensidade das deformações específica principais, a deformação de cisalhamento máxima no plano das deformações e a deformação de cisalhamento máxima. (*b*) Use esse programa para resolver os Problemas 7.136 a 7.139.

7.C7 Um estado plano de deformação é definido pelas componentes de deformação ϵ_x, ϵ_y e γ_{xy} medidas em um ponto. (*a*) Elabore um programa de computador que possa ser utilizado para determinar a orientação e a intensidade das deformações específicas principais, a deformação de cisalhamento máxima no plano das deformações e a intensidade da deformação de cisalhamento. (*b*) Use esse programa para resolver os Problemas 7.140 a 7.143.

7.C8 Uma roseta com três extensômetros que formam, respectivamente, ângulos θ_1, θ_2 e θ_3 com o eixo x é fixada à superfície livre de um componente de máquina feito de um material com um dado coeficiente de Poisson ν. (*a*) Elabore um programa de computador que, para leituras fornecidas de ϵ_1, ϵ_2 e ϵ_3 dos extensômetros, possa ser utilizado para calcular as componentes de deformação associadas aos eixos x e y, e para determinar a orientação e a intensidade das três deformações específicas principais, a máxima deformação de cisalhamento no plano das deformações e a deformação de cisalhamento máxima. (*b*) Use esse programa para resolver os Problemas 7.144, 7.145, 7.146 e 7.169.

CAPÍTULO

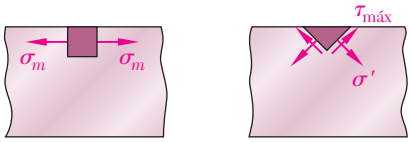
8

Tensões principais sob determinado carregamento

Em virtude da ação da gravidade e da força do vento, o poste que suporta a placa mostrada na figura está submetido simultaneamente à compressão, flexão e torção. Neste capítulo você aprenderá a determinar as tensões provocadas por esses carregamentos combinados em estruturas e componentes de máquinas.

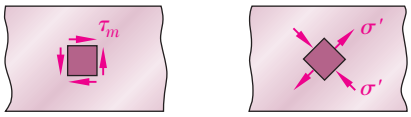
*8.1. Introdução

Na primeira parte desse capítulo, você aplicará, no projeto de vigas e eixos, os conhecimentos adquiridos no Capítulo 7 sobre transformação de tensões. Na segunda parte do capítulo, você aprenderá a determinar as tensões principais em componentes estruturais e elementos de máquinas sob determinadas condições de carregamento.



(*a*) (*b*)

Fig. 8.1



(*a*) (*b*)

Fig. 8.2

No Capítulo 5, você aprendeu a calcular a tensão normal máxima σ_m que ocorre em uma viga sob um carregamento transversal (Fig. 8.1*a*) e verificar se esse valor ultrapassava a tensão admissível σ_{adm} para determinado material. Se ultrapassasse, o projeto da viga não seria aceitável. Enquanto o material frágil tende a falhar em tração, o material dúctil tende a falhar em cisalhamento (Fig. 8.1*b*). O fato de que $\sigma_m > \sigma_{adm}$ indica que o $|M|_{máx}$ é muito grande para a seção transversal selecionada, mas não fornece nenhuma informação sobre o verdadeiro mecanismo da falha. Da mesma forma, o fato de que $\tau_m > \tau_{adm}$ simplesmente indica que $|V|_{máx}$ é muito grande para a seção transversal selecionada. Assim, enquanto o perigo para um material dúctil é realmente falhar em cisalhamento (Fig. 8.2*a*), o perigo para um material frágil é falhar em tração sob as tensões principais (Fig. 8.2*b*). A distribuição das tensões principais em uma viga será discutida na Seção 8.2.

Dependendo da forma da seção transversal da viga e do valor da força cortante V na seção crítica em que $|M| = |M|_{máx}$, é provável que o maior valor da tensão normal não ocorra na parte superior ou inferior da seção, mas em algum outro ponto no interior dela. Conforme você verá na Seção 8.2, uma combinação de grandes valores de σ_x e τ_{xy} próximo da junção da alma com as mesas de uma viga de perfil de mesas largas ou de uma viga de perfil I (padrão americano) pode resultar em um valor da tensão principal $\sigma_{máx}$ (Fig. 8.3) que é maior que o valor σ_m na superfície da viga.

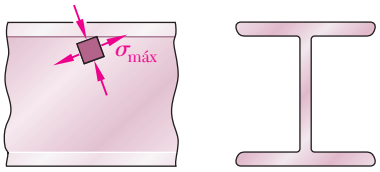


Fig. 8.3

A Seção 8.3 será dedicada ao projeto de eixos de transmissão submetidos a forças transversais, bem como a torques. Será levado em conta o efeito das tensões normais provocadas pelo momento fletor e das tensões de cisalhamento provocadas pelo momento torçor.

Na Seção 8.4, você aprenderá a determinar as tensões em determinado ponto K de um corpo de forma arbitrária submetido a um carregamento combinado. Primeiro, você reduzirá o carregamento dado a forças e momentos na seção que contém o ponto K. Em seguida, calculará as tensões, normal e de cisalhamento, em K. Finalmente, utilizando um dos métodos de transformação de tensão que você aprendeu no Capítulo 7, determinará os planos principais, tensões principais e tensão de cisalhamento máxima no ponto K.

*8.2. Tensões principais em uma viga

Considere uma viga prismática AB submetida a algum carregamento transversal arbitrário (Fig. 8.4). Chamamos de V e M, respectivamente, a força cortante e o momento fletor em uma seção que contém determinado ponto C. Lembramos com os Capítulos 5 e 6 que, dentro do limite elástico, as tensões que atuam em um pequeno elemento com faces perpendiculares, respectivamente, aos eixos x e y se reduzem somente a tensões normais $\sigma_m = Mc/I$ se o elemento estiver na superfície livre da viga e somente a tensões de cisalhamento $\tau_m = VQ/It$ se o elemento estiver na superfície neutra (Fig. 8.5).

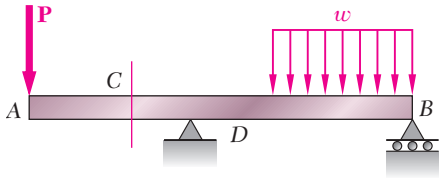


Fig. 8.4

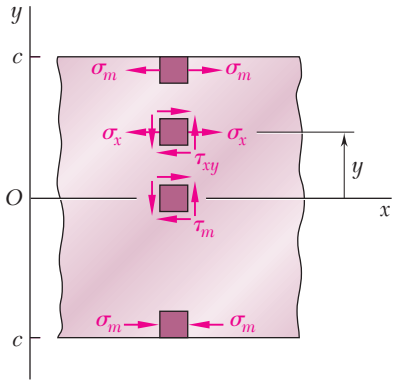


Fig. 8.5

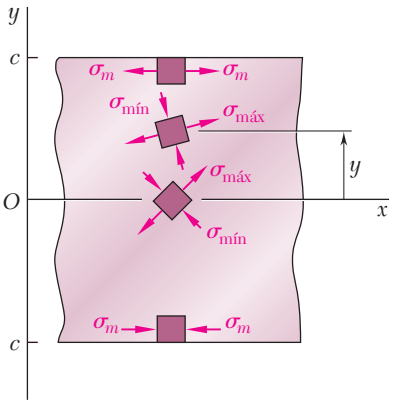


Fig. 8.6

Em qualquer outro ponto da seção transversal, um elemento de material está submetido simultaneamente às tensões normais

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \tag{8.1}$$

em que y é a distância da superfície neutra e I o momento de inércia da seção em relação ao eixo que passa pelo centroide e a tensões de cisalhamento

$$\tau_{xy} = -\frac{VQ}{It} \tag{8.2}$$

em que Q é o momento estático em relação à linha neutra da parte da área da seção transversal localizada acima do ponto em que as tensões são calculadas, e t é a espessura da seção transversal naquele ponto. Utilizando qualquer um dos métodos de análise apresentados no Capítulo 7, podemos obter as tensões principais em qualquer ponto da seção transversal (Fig. 8.6).

Surge a seguinte questão: pode a tensão normal máxima $\sigma_{máx}$, em algum ponto interno da seção transversal, ser maior que o valor de $\sigma_m = Mc/I$ calculado na superfície da viga? Se puder, então a determinação da maior tensão normal na viga envolverá muito mais aspectos além do cálculo de $|M|_{máx}$ e do uso da Equação (8.1). Podemos obter uma resposta para essa questão investigando a distribuição das tensões principais em uma viga de seção re-

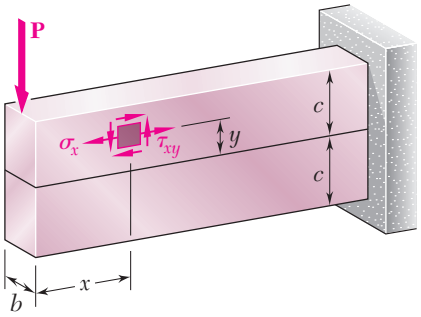


Fig. 8.7

tangular estreita e em balanço submetida a uma força concentrada **P** em sua extremidade livre (Fig. 8.7). Recordamos da Seção 6.5 que as tensões normal e de cisalhamento a uma distância x da força **P** e a uma distância y acima da superfície neutra são dadas, respectivamente, pelas Equações (6.13) e (6.12). Como o momento de inércia da seção transversal é

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{(bh)(2c)^2}{12} = \frac{Ac^2}{3}$$

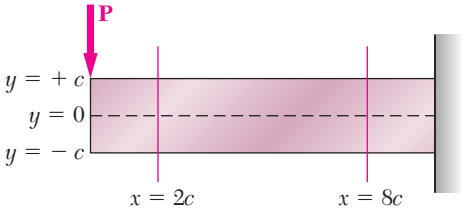
em que A é a área da seção transversal e c é a meia altura da viga, temos

$$\sigma_x = \frac{Pxy}{I} = \frac{Pxy}{\frac{1}{3}Ac^2} = 3\frac{P}{A}\frac{xy}{c^2} \tag{8.3}$$

e

$$\tau_{xy} = \frac{3}{2}\frac{P}{A}\left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right) \tag{8.4}$$

Utilizando o método da Seção 7.3 ou Seção 7.4, o valor de $\sigma_{máx}$ pode ser determinado em qualquer ponto da viga. A Figura 8.8 mostra os resultados dos cálculos das relações $\sigma_{máx}/\sigma_m$ e $\sigma_{mín}/\sigma_m$ em duas seções da viga, correspondendo, respectivamente, a $x = 2c$ e $x = 8c$. Em cada seção, essas relações



	$x = 2c$		$x = 8c$	
y/c	$\sigma_{mín}/\sigma_m$	$\sigma_{máx}/\sigma_m$	$\sigma_{mín}/\sigma_m$	$\sigma_{máx}/\sigma_m$
1,0	0	1,000	0	1,000
0,8	−0,010	0,810	−0,001	0,801
0,6	−0,040	0,640	−0,003	0,603
0,4	−0,090	0,490	−0,007	0,407
0,2	−0,160	0,360	−0,017	0,217
0	−0,250	0,250	−0,063	0,063
− 0,2	−0,360	0,160	−0,217	0,017
− 0,4	−0,490	0,090	−0,407	0,007
− 0,6	−0,640	0,040	−0,603	0,003
− 0,8	−0,810	0,010	−0,801	0,001
− 1,0	−1,000	0	−1,000	0

Fig. 8.8 Distribuição de tensões principais em duas seções transversais de uma viga retangular em balanço submetida a uma única força concentrada.

foram determinadas em 11 pontos diferentes e a orientação dos eixos principais foi indicada em cada ponto.†

Está claro que $\sigma_{máx}$ não ultrapassa σ_m em nenhuma das duas seções consideradas na Fig. 8.8 e que, se ela não ultrapassa σ_m em nenhum lugar, ela estará em seções próximas da força **P**, em que σ_m é pequena se comparada com τ_m.‡ Mas, para seções próximas da força **P**, não se aplica o princípio de Saint-Venant; as Equações (8.3) e (8.4) deixam de ser válidas, exceto no caso muito improvável de uma força distribuída parabolicamente sobre a seção da extremidade livre (cf. Seção 6.5), e deverão ser utilizados métodos de análise mais avançados levando em conta o efeito das concentrações de tensão. Concluímos então que, para vigas de seção transversal retangular e dentro do escopo da teoria apresentada neste texto, a tensão normal máxima pode ser obtida da Equação (8.1).

Na Fig. 8.8 as direções dos eixos principais foram determinadas em onze pontos em cada uma das duas seções consideradas. Se essa análise fosse estendida a um número maior de seções e a um número maior de pontos em cada seção, seria possível traçar dois sistemas ortogonais de curvas no lado da viga (Fig. 8.9). Um sistema consistiria em curvas tangentes aos eixos principais correspondendo a $\sigma_{máx}$ e o outro sistema em curvas tangentes aos eixos principais correspondendo a $\sigma_{mín}$. As curvas obtidas dessa maneira são conhecidas como *trajetórias de tensão*. Uma trajetória do primeiro grupo (linhas contínuas) define em cada um de seus pontos a direção da maior tensão de tração, enquanto uma trajetória do segundo grupo (linhas tracejadas) define a direção da maior tensão de compressão.§

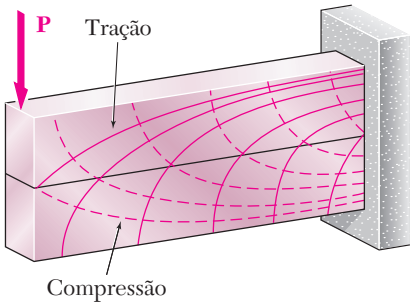


Fig. 8.9 Trajetórias de tensão.

A conclusão a que chegamos para vigas de seção transversal retangular é a de que a tensão normal máxima na viga pode ser obtida da Equação (8.1) e permanece válida para muitas vigas de seção transversal não retangular. No entanto, quando a largura da seção transversal varia de maneira que as maiores tensões de cisalhamento τ_{xy} ocorram em pontos próximos da superfície da viga, em que σ_x também é grande, pode ocorrer nesses pontos um valor da tensão principal $\sigma_{máx}$ maior que σ_m. Deve-se ficar particularmente atento a essa possibilidade ao selecionar vigas de mesas largas ou vigas de perfil I e calcular a tensão principal $\sigma_{máx}$ nas junções b e d da alma com as mesas da viga (Fig. 8.10). Isso é feito determinando-se σ_x e τ_{xy} naqueles pontos pelas Equações (8.1) e (8.2), respectivamente, e utilizando um dos métodos de análise do Capítulo 7 para obter $\sigma_{máx}$ (ver o Problema Resolvido 8.1). Um procedimento alternativo, utilizado no projeto para selecionar uma seção aceitável, consiste em utilizar para τ_{xy} o valor máximo da tensão de cisalhamento na seção, $\tau_{máx} = V/A_{alma}$, dado pela Equação (6.11) da Seção 6.4. Isso leva a um valor ligeiramente maior e, portanto, mais conservador da tensão principal $\sigma_{máx}$ na junção da alma com as mesas da viga (ver o Problema Resolvido 8.2).

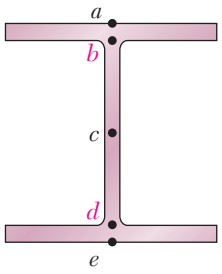


Fig. 8.10

†Ver o Problema 8.C2, que se refere ao programa utilizado para obter os resultados mostrados na Fig. 8.8.

‡Conforme verificado no Problema 8.C2, $\sigma_{máx}$ ultrapassa σ_m se $x \leq 0{,}544c$.

§Um material frágil, como o concreto, falhará em tração ao longo de planos que são perpendiculares às trajetórias de tensão de tração. Assim, para serem eficientes, as barras de aço de reforço devem ser colocadas de modo que interceptem esses planos. Entretanto, enrijecedores soldados na alma de uma viga serão eficazes para evitar a flambagem da alma somente se eles interceptarem planos perpendiculares às trajetórias de tensão de compressão.

*8.3. Projeto de eixos de transmissão

Quando discutimos o projeto de eixos de transmissão na Seção 3.7, consideramos somente as tensões provocadas pelos torques que atuavam nos eixos. No entanto, se a potência for transferida para o eixo ou do eixo por meio de engrenagens ou polias dentadas (Fig. 8.11*a*), as forças aplicadas nos dentes das engrenagens ou polias serão equivalentes aos sistemas de força e momento aplicados nos centros das seções transversais correspondentes (Fig. 8.11*b*). Isso significa que o eixo estará submetido a um carregamento transversal, bem como a um carregamento torcional.

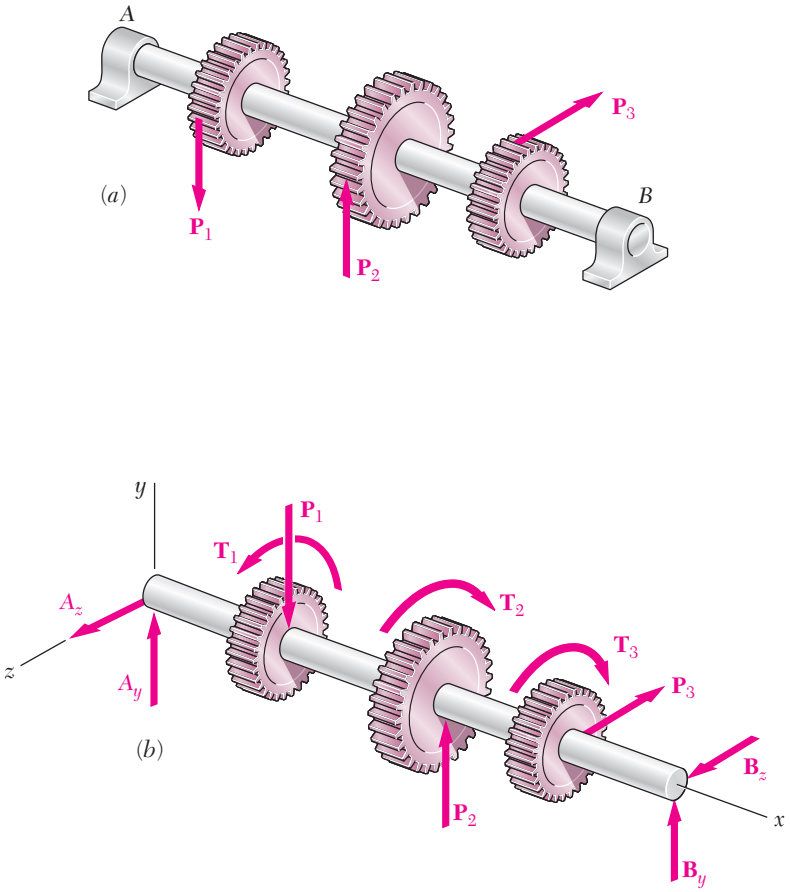


Fig. 8.11

As tensões de cisalhamento produzidas no eixo por cargas transversais são geralmente muito menores que aquelas produzidas pelos torques e serão desprezadas nessa análise.† As tensões normais provocadas pelas cargas transversais, no entanto, podem ser muito grandes e, conforme você verá agora, sua contribuição para a tensão de cisalhamento máxima $\tau_{máx}$ deverá ser levada em conta.

†Para uma aplicação em que as tensões de cisalhamento produzidas pelas cargas transversais devem ser consideradas, ver os Problemas 8.21 e 8.22.

Considere a seção transversal do eixo em algum ponto C. Representamos o torque $\mathbf{T}$ e os momentos fletores $\mathbf{M}_y$ e $\mathbf{M}_z$ atuando, respectivamente, em um plano horizontal e em um plano vertical pelos vetores conjugados mostrados (Fig. 8.12a). Como qualquer diâmetro da seção é um eixo principal de inércia para a seção, podemos substituir $\mathbf{M}_y$ e $\mathbf{M}_z$ por sua resultante $\mathbf{M}$ (Fig. 8.12b) para calcular as tensões normais σ_x que atuam na seção. Verificamos então que σ_x é máximo na extremidade do diâmetro perpendicular ao vetor que representa $\mathbf{M}$ (Fig. 8.13). Lembrando que os valores das tensões normais nesse ponto são, respectivamente, $\sigma_m = Mc/I$ e zero, enquanto a tensão de cisalhamento é $\tau_m = Tc/J$. Representamos os pontos correspondentes X e Y no círculo de Mohr (Fig. 8.14) e determinamos o valor da tensão de cisalhamento máxima.

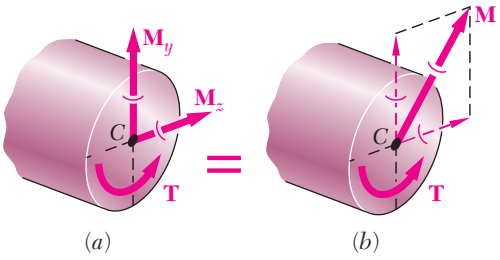


Fig. 8.12

$$\tau_{\text{máx}} = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{2}\right)^2 + (\tau_m)^2} = \sqrt{\left(\frac{Mc}{2I}\right)^2 + \left(\frac{Tc}{J}\right)^2}$$

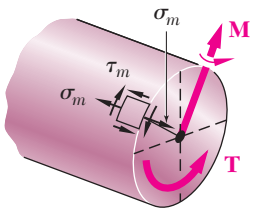


Fig. 8.13

Lembrando que, para uma seção transversal circular ou anular, $2I = J$, temos

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{c}{J}\sqrt{M^2 + T^2} \tag{8.5}$$

Concluímos que o valor mínimo admissível para a relação J/c para a seção transversal do eixo é

$$\frac{J}{c} = \frac{\left(\sqrt{M^2 + T^2}\right)_{\text{máx}}}{\tau_{\text{adm}}} \tag{8.6}$$

em que o numerador no membro da direita da expressão obtida representa o valor máximo de $\sqrt{M^2 + T^2}$ no eixo e τ_{adm}, a tensão de cisalhamento admissível. Expressando o momento fletor M em termos de suas componentes nos dois planos coordenados, temos também

$$\frac{J}{c} = \frac{\left(\sqrt{M_y^2 + M_z^2 + T^2}\right)_{\text{máx}}}{\tau_{\text{adm}}} \tag{8.7}$$

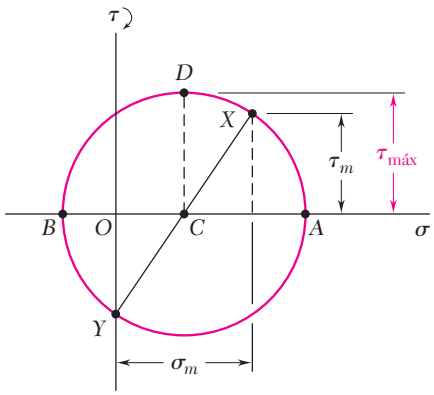
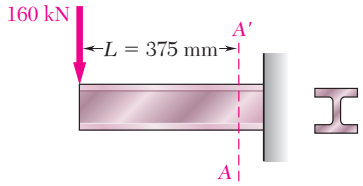


Fig. 8.14

As Equações (8.6) e (8.7) podem ser utilizadas para projetar eixos circulares cheios e vazados e deverão ser comparadas com a Equação (3.22) da Seção 3.7, que foi obtida considerando que o eixo havia sido solicitado somente por torção.

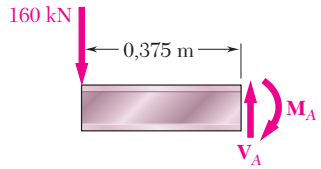
A determinação do valor máximo de $\sqrt{M_y^2 + M_z^2 + T^2}$ será facilitada se forem traçados os diagramas de momento fletor correspondentes a M_y e M_z, bem como um terceiro diagrama representando os valores de T ao longo do eixo (ver Problema Resolvido 8.3).

PROBLEMA RESOLVIDO 8.1



Uma força de 160 kN é aplicada, conforme mostra a figura, à extremidade de uma viga de aço laminado W200 × 52. Desprezando o efeito dos adoçamentos e das concentrações de tensão, verifique se as tensões normais na viga satisfazem à especificação de projeto de que elas devem ser iguais ou menores que 150 MPa na seção A-A'.

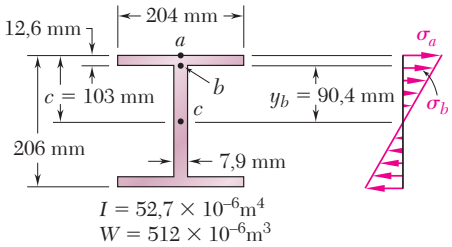
SOLUÇÃO



Força cortante e momento fletor. Na seção A-A', temos

$$M_A = (160\text{ kN})(0{,}375\text{ m}) = 60\text{ kN}\cdot\text{m}$$
$$V_A = 160\text{ kN}$$

Tensões normais no plano transversal. Consultando a tabela das *Propriedades de Perfis de Aço Laminado* no Apêndice C, obtemos os dados mostrados e então determinamos as tensões σ_a e σ_b.



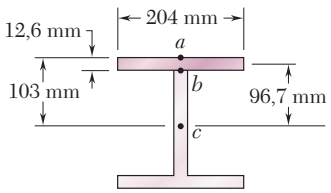
No ponto a:

$$\sigma_a = \frac{M_A}{W} = \frac{60\text{ kN}\cdot\text{m}}{512\times10^{-6}\text{ m}^3} = 117{,}2\text{ MPa}$$

No ponto b:

$$\sigma_b = \sigma_a\frac{y_b}{c} = (117{,}2\text{ MPa})\frac{90{,}4\text{ mm}}{103\text{ mm}} = 102{,}9\text{ MPa}$$

Notamos que as tensões normais no plano transversal são menores que 150 MPa.



Tensões de cisalhamento no plano transversal.

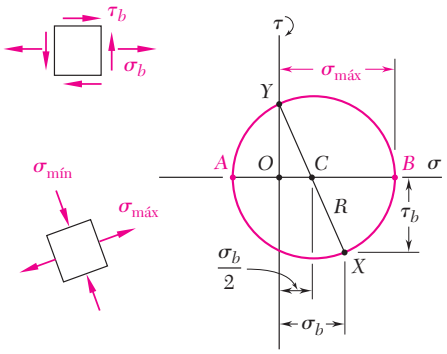
No ponto a:

$$Q = 0 \qquad \tau_a = 0$$

No ponto b:

$$Q = (204\times12{,}6)(96{,}7) = 248{,}6\times10^3\text{ mm}^3 = 248{,}6\times10^{-6}\text{ m}^3$$

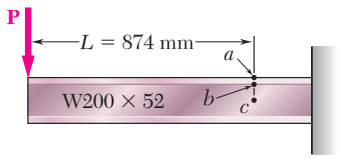
$$\tau_b = \frac{V_A Q}{It} = \frac{(160\text{ kN})(248{,}6\times10^{-6}\text{ m}^3)}{(52{,}7\times10^{-6}\text{ m}^4)(0{,}0079\text{ m})} = 95{,}5\text{ MPa}$$



Tensão principal no ponto *b*. O estado de tensão no ponto b consiste na tensão normal $\sigma_b = 102{,}4$ MPa e na tensão de cisalhamento $\tau_b = 95{,}5$ MPa. Traçamos o círculo de Mohr e encontramos

$$\sigma_{máx} = \frac{1}{2}\sigma_b + R = \frac{1}{2}\sigma_b + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sigma_b\right)^2 + \tau_b^2}$$
$$= \frac{102{,}9}{2} + \sqrt{\left(\frac{102{,}9}{2}\right)^2 + (95{,}5)^2}$$
$$\sigma_{máx} = 159{,}9\text{ MPa}$$

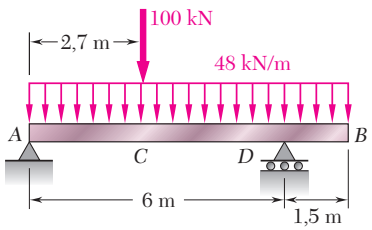
A especificação, $\sigma_{máx} \le 150$ MPa, *não* é satisfeita. ◀



Comentário. Para essa viga e esse carregamento, a tensão principal no ponto b é 36% maior que a tensão normal no ponto a. Para $L \ge 874$ mm, a tensão normal máxima ocorreria no ponto a.

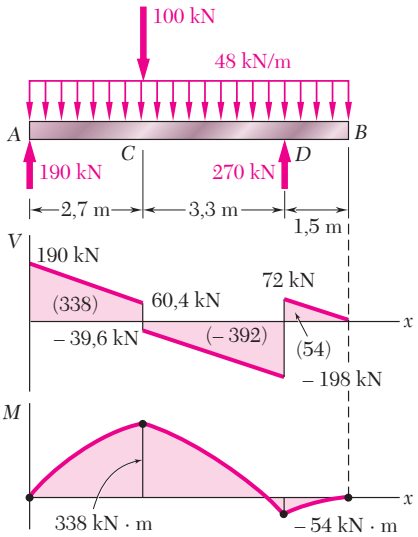
PROBLEMA RESOLVIDO 8.2

A viga biapoiada com um balanço AB suporta uma força uniformemente distribuída de 48 kN/m e uma força concentrada de 100 kN em C. Sabendo que para o tipo de aço a ser utilizado $\sigma_{adm} = 165$ MPa e $\tau_{adm} = 100$ MPa, selecione a viga de mesa larga que deverá ser utilizada.



SOLUÇÃO

Reações em *A* e *D*. Desenhamos o diagrama de corpo livre da viga. Das equações de equilíbrio $\Sigma M_D = 0$ e $\Sigma M_A = 0$ encontramos os valores de R_A e R_D mostrados no diagrama.



Diagramas de força cortante e momento fletor. Utilizando o método das Seções 5.2 e 5.3, traçamos os diagramas e observamos que

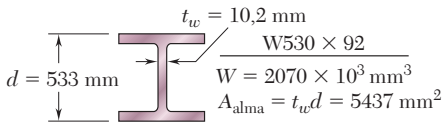
$$|M|_{máx} = 338 \text{ kN} \cdot \text{m} = 338 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} \qquad |V|_{máx} = 198 \text{ kN}$$

Módulo de resistência da seção. Para $|M|_{máx} = 338 \times 10^3$ N · m e $\sigma_{adm} = 165$ MPa, o módulo de resistência mínimo aceitável da seção para a viga de aço laminado é

$$W_{mín} = \frac{|M|_{máx}}{\sigma_{adm}} = \frac{338 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}}{165 \times 10^6 \text{ N/m}^2} = 2{,}048 \times 10^{-3} \text{ m}^3 = 2048 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

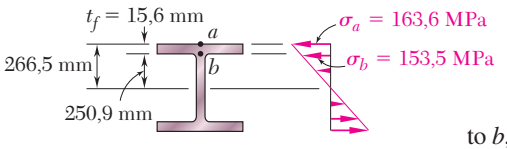
Seleção da viga de mesa larga. Na tabela de *Propriedades dos Perfis de Aço Laminado*, no Apêndice C, compilamos uma lista dos perfis mais leves de determinada altura que tenham um módulo de resistência da seção transversal maior que $W_{mín}$.

Perfil	W (mm³) 10^3
W610 × 101	2530
W530 × 92	2070
W460 × 113	2400
W410 × 144	2200
W310 × 143	2150
W250 × 167	2080



Selecionamos agora o perfil mais leve disponível, ou seja, **W530 × 92 ◄**

Tensão de cisalhamento. Como estamos projetando a viga, assumiremos de modo conservador que a força cortante máxima é uniformemente distribuída sobre a área da alma do perfil W530 × 92. Temos

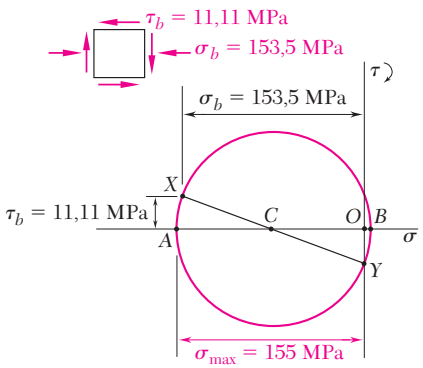


$$\tau_m = \frac{V_{máx}}{A_{alma}} = \frac{198 \times 10^3 \text{ N}}{5437 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 36{,}42 \text{ MPa} < 100 \text{ MPa} \qquad \text{(OK)}$$

Tensão principal no ponto *b*. Verificamos que a tensão principal máxima no ponto b, na seção crítica em que M é máximo, não ultrapassa $\sigma_{adm} = 165$ MPa. Temos

$$\sigma_a = \frac{M_{máx}}{W} = \frac{338 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}}{2070 \times 10^{-6} \text{ m}^3} = 163{,}3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_b = \sigma_a \frac{y_b}{c} = (163{,}3 \text{ MPa}) \frac{0{,}251 \text{ m}}{0{,}267 \text{ m}} = 153{,}5 \text{ MPa}$$



De forma conservadora, $\tau_b = \dfrac{V}{A_{alma}} = \dfrac{60{,}4 \times 10^3 \text{ N}}{5437 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 11{,}11 \text{ MPa}$

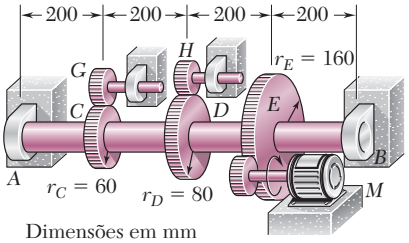
Traçamos o círculo de Mohr e encontramos

$$\sigma_{máx} = \tfrac{1}{2}\sigma_b + R = \frac{153{,}8 \text{ MPa}}{2} + \sqrt{\left(\frac{153{,}8 \text{ MPa}}{2}\right)^2 + (11{,}11 \text{ MPa})^2}$$

$$\sigma_{máx} = 155 \text{ MPa} < 165 \text{ MPa} \quad \text{(OK)} \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESOLVIDO 8.3

O eixo de seção cheia *AB* tem uma rotação de 480 rpm quando transmite 30 kW de potência do motor *M* para as máquinas-ferramentas conectadas às engrenagens *G* e *H*; 20 kW são transmitidos pela engrenagem *G* e 10 kW pela engrenagem *H*. Sabendo que $\tau_{adm} = 50$ MPa, determine o menor diâmetro admissível para o eixo *AB*.

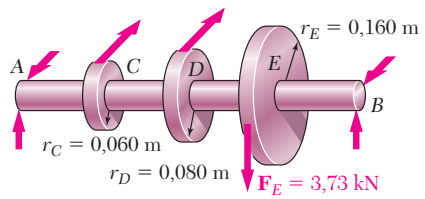


Dimensões em mm

SOLUÇÃO

Torques que atuam nas engrenagens. Observando que $f = 480$ rpm $= 8$ Hz, determinamos o torque que atua na engrenagem *E*:

$$T_E = \frac{P}{2\pi f} = \frac{30\text{ kW}}{2\pi(8\text{ Hz})} = 597\text{ N}\cdot\text{m}$$



A força tangencial correspondente que atua na engrenagem é

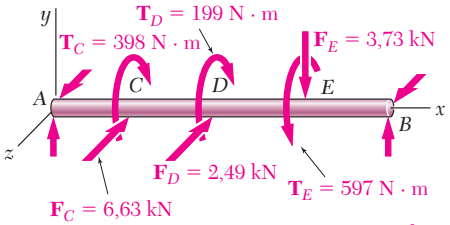
$$F_E = \frac{T_E}{r_E} = \frac{597\text{ N}\cdot\text{m}}{0{,}16\text{ m}} = 3{,}73\text{ kN}$$

Uma análise similar das engrenagens *C* e *D* resulta em:

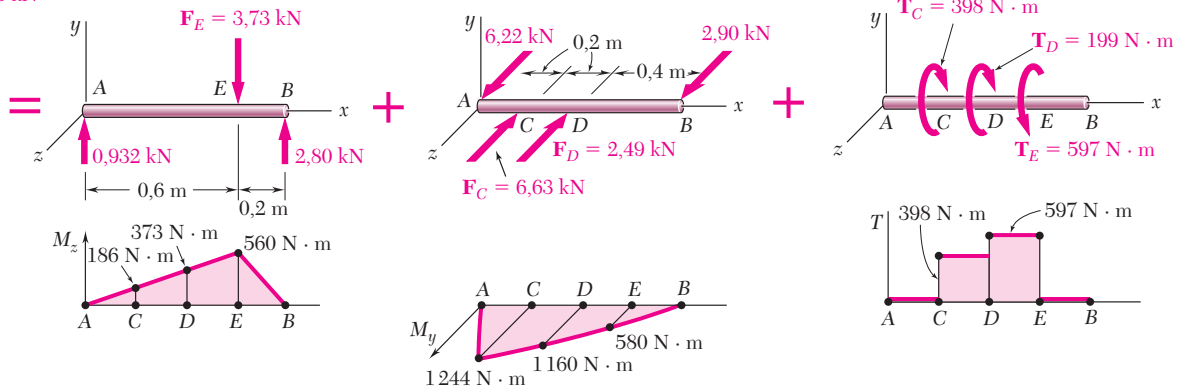
$$T_C = \frac{20\text{ kW}}{2\pi(8\text{ Hz})} = 398\text{ N}\cdot\text{m} \qquad F_C = 6{,}63\text{ kN}$$

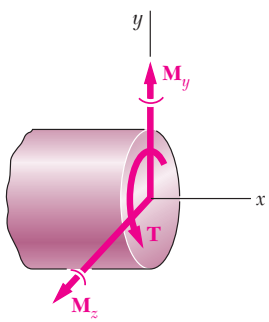
$$T_D = \frac{10\text{ kW}}{2\pi(8\text{ Hz})} = 199\text{ N}\cdot\text{m} \qquad F_D = 2{,}49\text{ kN}$$

Agora substituímos as forças nas engrenagens pelo sistema de força e momento equivalentes.



Diagramas de momento fletor e torque





Seção transversal crítica. Calculando $\sqrt{M_y^2 + M_z^2 + T^2}$ em todas as seções potencialmente críticas, vemos que seu valor máximo ocorre à direita de *D*:

$$\sqrt{M_y^2 + M_z^2 + T_{máx}^2} = \sqrt{(1160)^2 + (373)^2 + (597)^2} = 1357\text{ N}\cdot\text{m}$$

Diâmetro do eixo. Para $\tau_{adm} = 50$ MPa, a Equação (7.32) fornece

$$\frac{J}{c} = \frac{\sqrt{M_y^2 + M_z^2 + T_{máx}^2}}{\tau_{adm}} = \frac{1357\text{ N}\cdot\text{m}}{50\text{ MPa}} = 27{,}14 \times 10^{-6}\text{ m}^3$$

Para um eixo de seção circular cheia de raio *c*, temos

$$\frac{J}{c} = \frac{\pi}{2}c^3 = 27{,}14 \times 10^{-6} \qquad c = 0{,}02585\text{ m} = 25{,}85\text{ mm}$$

Diâmetro $= 2c = 51{,}7$ mm ◀

PROBLEMAS

8.1 Uma viga de aço laminado W250 × 58 suporta uma carga **P** conforme mostra a figura. Sabendo que $P = 200$ kN, $a = 254$ mm e $\sigma_{adm} = 124{,}1$ MPa, determine (*a*) o valor máximo da tensão normal σ_m na viga, (*b*) o valor máximo da tensão principal $\sigma_{máx}$ na junção da mesa com a alma e (*c*) se o perfil especificado é aceitável no que se refere a essas duas tensões.

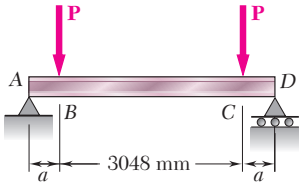


Fig. P8.1

8.2 Resolva o Problema 8.1 considerando que $P = 100$ kN e $a = 508$ mm.

8.3 Uma viga biapoiada com um balanço de aço laminado W920 × 446 suporta uma carga **P** conforme mostra a figura. Sabendo que $P = 700$ kN, $a = 2{,}5$ m e e $\sigma_{adm} = 100$ MPa, determine (*a*) o valor máximo da tensão normal σ_m na viga, (*b*) o valor máximo da tensão principal $\sigma_{máx}$ na junção da mesa com a alma e (*c*) se o perfil especificado é aceitável no que se refere a essas duas tensões.

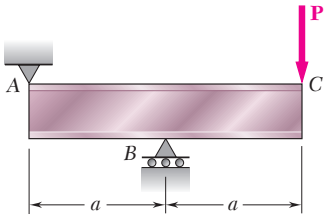


Fig. P8.3

8.4 Resolva o Problema 8.1 considerando que $P = 850$ kN e $a = 2{,}0$ m.

8.5* e *8.6 (*a*) Sabendo que $\sigma_{adm} = 165{,}5$ MPa e $\tau_{adm} = 100$ MPa, selecione o perfil de mesa larga mais econômico que deverá ser utilizado para suportar a carga mostrada. (*b*) Determine os valores a serem esperados para σ_m, τ_m e a tensão principal $\sigma_{máx}$ na junção da mesa com a alma do perfil selecionado.

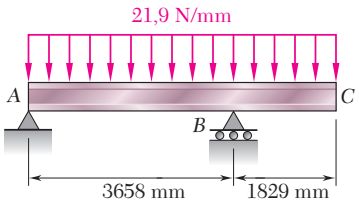


Fig. *P8.5*

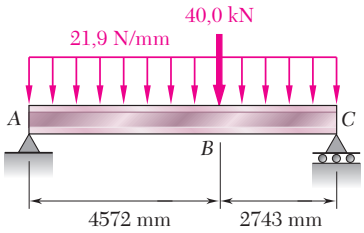


Fig. *P8.6*

8.7 e 8.8 (*a*) Sabendo que $\sigma_{adm} = 160$ MPa e $\tau_{adm} = 100$ MPa, selecione o perfil de mesa larga mais econômico que deverá ser utilizado para suportar o carregamento mostrado. (*b*) Determine os valores a serem esperados para σ_m, τ_m e a tensão principal $\sigma_{máx}$ na junção da mesa com a alma da viga selecionada.

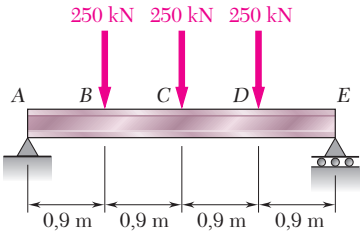


Fig. P8.7

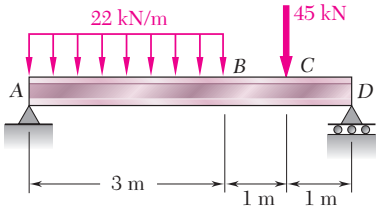


Fig. P8.8

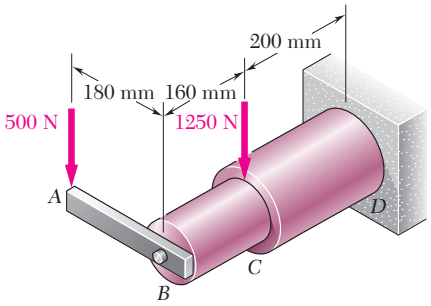


Fig. P8.15 e P8.16

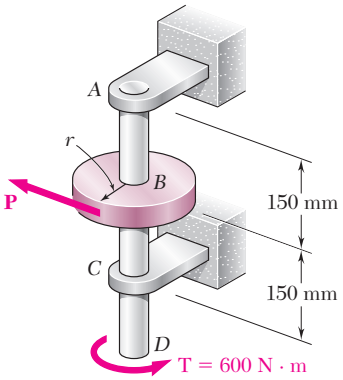


Fig. *P8.17*

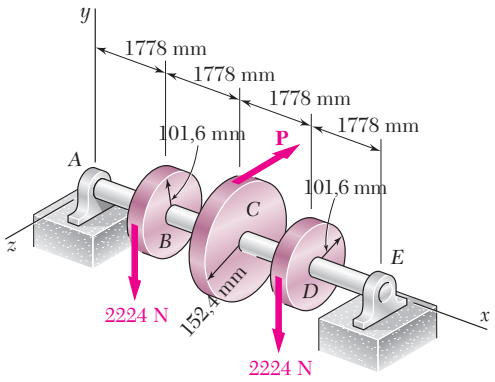


Fig. P8.19

8.9 até 8.14 Cada um dos problemas a seguir se refere a um perfil de aço laminado selecionado em um problema do Capítulo 5, para suportar determinado carregamento a um custo mínimo e ao mesmo tempo satisfazendo à condição $\sigma_m \leq \sigma_{adm}$. Para o projeto selecionado, determine (*a*) o valor real de σ_m na viga e (*b*) o valor máximo da tensão principal $\sigma_{máx}$ na junção de uma mesa com a alma.

8.9 Carregamento do Problema 5.74 e perfil W530 × 66 selecionado.

8.10 Carregamento do Problema 5.73 e perfil W250 × 28,4 selecionado.

8.11 Carregamento do Problema 5.78 e perfil I310 × 47,3 selecionado.

8.12 Carregamento do Problema 5.75 e perfil I510 × 98,3 selecionado.

8.13 Carregamento do Problema 5.77 e perfil I510 × 98,3 selecionado.

8.14 Carregamento do Problema 5.76 e perfil I510 × 98,3 selecionado.

8.15 Desprezando o efeito dos adoçamentos e da concentração de tensões, determine o menor diâmetro permissível para as barras BC e CD. Uitlize $\sigma_{adm} = 60$ MPa.

8.16 Sabendo que as barras BC e CD têm diâmetros de 24 mm e 36 mm, respectivamente, determine a tensão de cisalhamento máxima em cada barra. Despreze o efeito dos adoçamentos e da concentração de tensões.

8.17 Determine o menor diâmetro admissível para o eixo cheio *ABCD*, sabendo que $\tau_{adm} = 60$ MPa e que o raio do disco *B* é $r = 80$ mm.

8.18 A força de 4 kN é paralela ao eixo *x* e a força **Q** é paralela ao eixo *z*. O eixo *AD* é vazado. Sabendo que o diâmetro interno é metade do diâmetro externo e que $\tau_{adm} = 60$ MPa, determine o menor diâmetro externo admissível para o eixo.

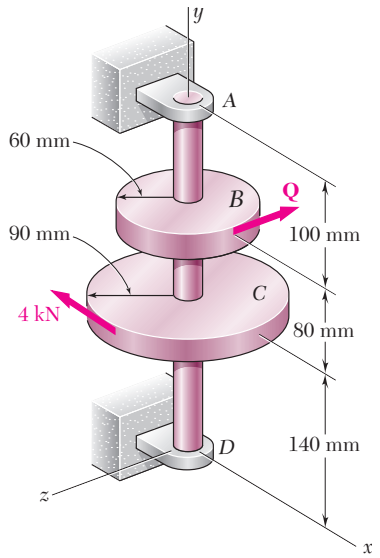


Fig. *P8.18*

8.19 As duas forças de 2224 N são verticais e a força **P** é paralela ao eixo *z*. Sabendo que $\tau_{adm} = 55{,}2$ MPa, determine o menor diâmetro admissível para o eixo cheio *AE*.

8.20 Para o sistema de engrenagem e eixo e o carregamento do Problema 8.19, determine o menor diâmetro admissível para o eixo *AE*, sabendo que o eixo é vazado e tem um diâmetro interno que é 2/3 do diâmetro externo.

8.21 Utilizando a notação da Seção 8.3 e desprezando o efeito das tensões de cisalhamento provocadas pelas forças transversais, mostre que a tensão normal máxima em um eixo cilíndrico pode ser expressa como

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{c}{J}\left[(M_y^2 + M_z^2)^{\frac{1}{2}} + (M_y^2 + M_z^2 + T^2)^{\frac{1}{2}}\right]_{\text{máx}}$$

8.22 Foi definido na Seção 8.3 que as tensões de cisalhamento produzidas em um eixo pelas cargas transversais são geralmente muito menores que aquelas produzidas por torques. Nos problemas anteriores, seu efeito foi ignorado e considerou-se que a tensão de cisalhamento máxima em determinada seção ocorria em um ponto H (Fig. P8.22a) e era igual à expressão obtida na Equação (8.5), ou seja,

$$\tau_H = \frac{c}{J}\sqrt{M^2 + T^2}$$

Mostre que a tensão de cisalhamento máxima no ponto K (Fig. P8.22b), em que o efeito da força cortante V é maior, pode ser expressa como

$$\tau_K = \frac{c}{J}\sqrt{(M\cos\beta)^2 + \left(\tfrac{2}{3}cV + T\right)^2}$$

em que β é o ângulo entre os vetores **V** e **M**. Está claro que o efeito da força cortante V não pode ser ignorado quando $\tau_k \geq \tau_H$. (*Dica*: Somente a componente de **M** ao longo de **V** contribui para a tensão de cisalhamento em K.)

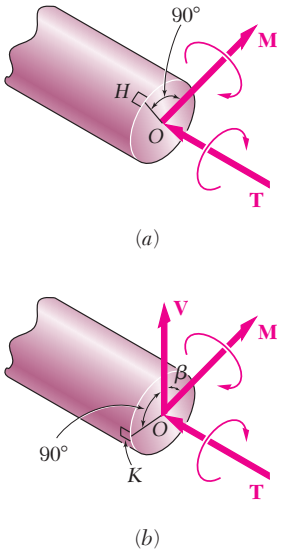


Fig. P8.22

8.23 Os eixos de seção transversal cheia ABC e DEF e as engrenagens mostradas são utilizados para transmitir 20 hp do motor M para uma máquina-ferramenta conectada ao eixo DEF. Sabendo que o motor gira a 240 rpm e que $\tau_{\text{adm}} = 51{,}7$ MPa, determine o menor diâmetro admissível para (*a*) o eixo ABC e (*b*) o eixo DEF.

8.24 Resolva o Problema 8.23 considerando que o motor gira a 360 rpm.

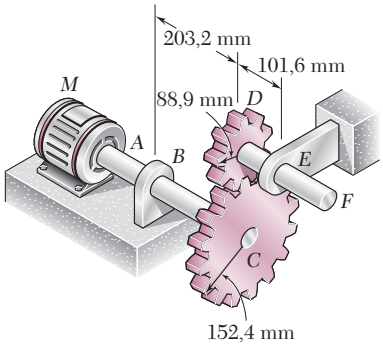


Fig. *P8.23*

8.25 O eixo de seção transversal cheia AB gira a 450 rpm e transmite 20 kW do motor M para as máquinas-ferramentas acopladas às engrenagens F e G. Sabendo que $\tau_{\text{adm}} = 55$ MPa e considerando que 8 kW são transferidos pela engrenagem F e 12 kW são transferidos pela engrenagem G, determine o menor diâmetro admissível para o eixo AB.

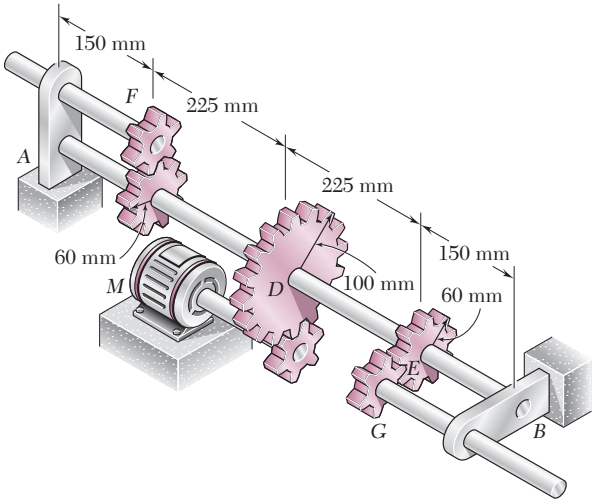


Fig. *P8.25*

8.26 Resolva o Problema 8.25 considerando que a totalidade dos 20 kW é transferida pela engrenagem G.

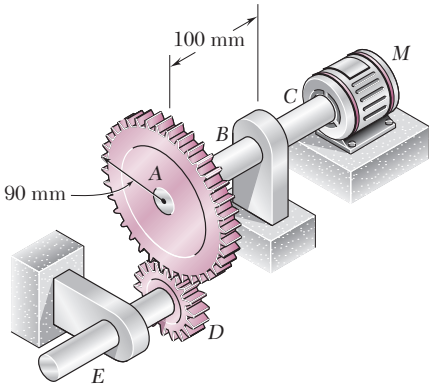


Fig. P8.27

8.27 O eixo de seção transversal cheia *ABC* e as engrenagens mostradas na figura transmitem 10 kW do motor *M* para uma máquina-ferramenta conectada à engrenagem *D*. Sabendo que o motor gira a 240 rpm e que $\tau_{adm} = 60$ MPa, determine o menor diâmetro admissível para o eixo *ABC*.

8.28 Considerando que o eixo *ABC* do Problema 8.27 é vazado e tem um diâmetro externo de 50 mm, determine o maior diâmetro interno admissível para o eixo.

8.29 O eixo cheio *AE* gira a 600 rpm e transmite 60 hp do motor *M* para as máquinas-ferramentas acopladas às engrenagens *G* e *H*. Sabendo que $\tau_{adm} = 55{,}2$ MPa e que 40 hp são transmitidos pela engrenagem *G* e 20 hp são transmitidos pela engrenagem *H*, determine o menor diâmetro admissível para o eixo *AE*.

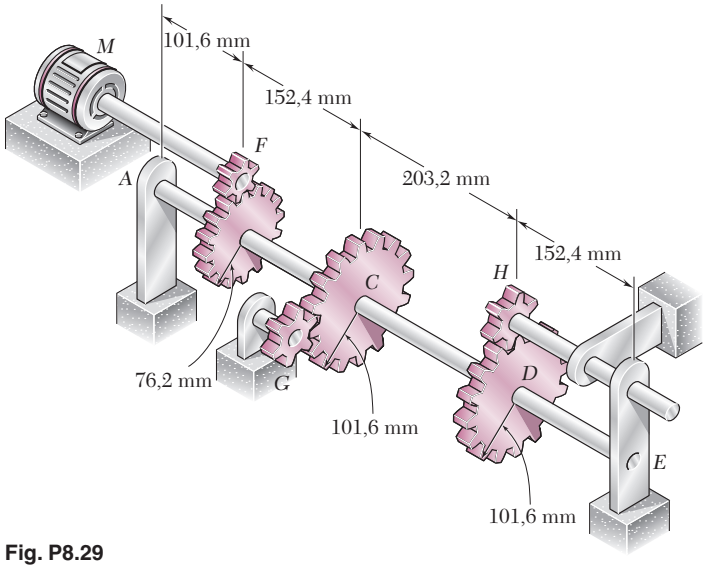


Fig. P8.29

8.30 Resolva o Problema 8.29 considerando que 30 hp são transmitidos pela engrenagem *G* e 30 hp são transmitidos pela engrenagem *H*.

*8.4. Tensões sob carregamentos combinados

Nos Capítulos 1 e 2, você aprendeu a determinar as tensões provocadas por uma força axial centrada. No Capítulo 3, analisou a distribuição de tensões em um componente cilíndrico submetido a momento torçor. No Capítulo 4, você determinou as tensões provocadas por momentos fletores e, nos Capítulos 5 e 6, as tensões produzidas por cargas transversais. Você verá agora que pode combinar esses carregamentos que aprendeu para determinar as tensões em membros estruturais delgados ou em componentes de máquina sob condições de carregamento razoavelmente gerais.

Considere, por exemplo, a barra curva *ABDE* de seção transversal circular que está submetida a várias forças (Fig. 8.15). Para determinarmos as tensões produzidas nos pontos *H* ou *K* provocadas pelas cargas dadas, primeiro cortamos a barra na seção que contém esses pontos e determinamos o sistema de forças e momentos no centroide *C* da seção que são necessários para manter o equilíbrio da parte *ABC*.† Esse sistema representa os esforços internos

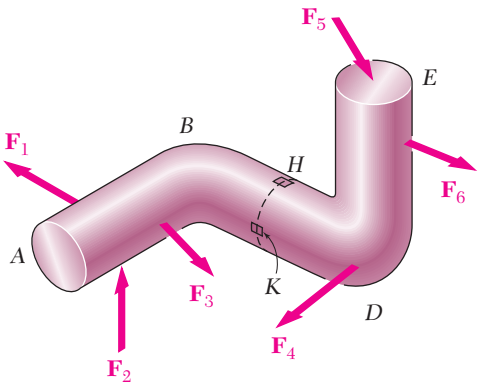


Fig. 8.15

†O sistema de forças e momentos em C também podem ser definidos como *equivalentes às forças que atuam na parte da barra localizada à direita da seção* (ver o Exemplo 8.1).

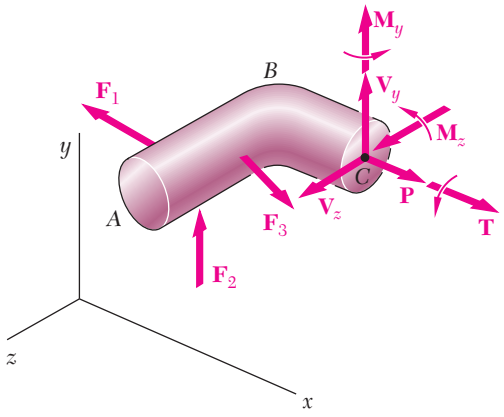


Fig. 8.16

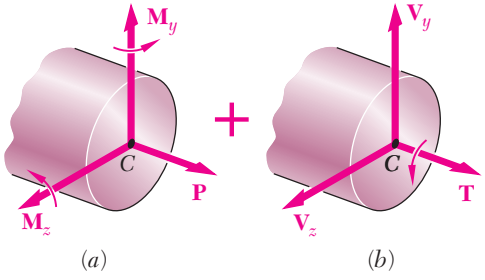


Fig. 8.17

na seção e, em geral, consiste em três componentes de força e três vetores momentos cuja direção é a mostrada na Fig. 8.16.

A força **P** é uma força axial centrada que produz tensões normais na seção. Os vetores momentos fletores $\mathbf{M}_y$ e $\mathbf{M}_z$ fazem a barra flexionar e também produzem tensões normais na seção. Eles foram, portanto, agrupados com a força **P** na parte *a* da Fig. 8.17, e as somas σ_x das tensões normais que eles produzem nos pontos *H* e *K* foram mostradas na parte *a* da Fig. 8.18. Essas tensões podem ser determinadas conforme mostra a Seção 4.14.

Em contrapartida, o momento torçor **T** e as forças cortantes $\mathbf{V}_y$ e $\mathbf{V}_z$ produzem tensões de cisalhamento na seção. As somas τ_{xy} e τ_{xz} das componentes de tensões de cisalhamento que eles produzem nos pontos *H* e *K* foram mostradas na parte *b* da Fig. 8.18 e podem ser determinadas conforme é indicado nas Seções 3.4 e 6.3.† As tensões normal e de cisalhamento mostradas nas partes *a* e *b* da Fig. 8.18 podem agora ser combinadas e mostradas nos pontos *H* e *K* na superfície da barra (Fig. 8.19).

As tensões principais e a orientação dos planos principais nos pontos *H* e *K* podem ser determinadas a partir dos valores de σ_x, τ_{xy} e τ_{xz} em cada um desses pontos, por um dos métodos apresentados no Capítulo 7 (Fig. 8.20). Os valores das tensões de cisalhamento máxima em cada um desses pontos e os planos correspondentes podem ser encontrados de modo similar.

Os resultados obtidos nessa seção são válidos somente dentro dos limites em que as condições de aplicabilidade do princípio de superposição (Seção 2.12) e do princípio de Saint-Venant (Seção 2.17) são válidos. Isso significa que as tensões envolvidas não devem exceder o limite de proporcionalidade do material, que as deformações provocadas por um dos carregamentos não devem afetar a determinação das tensões provocadas por outros carregamentos e que a seção utilizada em nossa análise não deve estar muito próxima dos pontos de aplicação das forças dadas. Fica claro, a partir da primeira dessas condições, que o método apresentado aqui não pode ser aplicado a deformações plásticas.

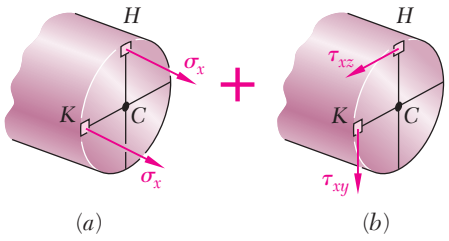


Fig. 8.18

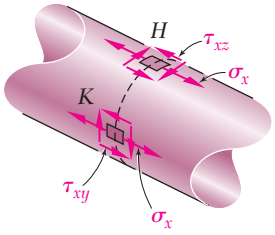


Fig. 8.19

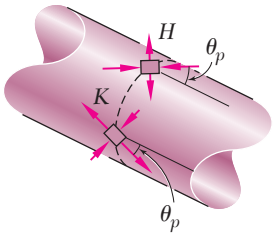


Fig. 8.20

†Note que o seu conhecimento atual lhe permite determinar o efeito do momento torçor **T** somente nos casos de eixos circulares, de barras com uma seção transversal retangular (Seção 3.12), ou de barras vazadas de paredes finas (Seção 3.13).

EXEMPLO 8.01

Duas forças $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$, de intensidade $P_1 = 15$ kN e $P_2 = 18$ kN, são aplicadas, como mostra a figura, à extremidade A da barra AB, que está soldada a um eixo cilíndrico BD de raio $c = 20$ mm (Fig. 8.21). Sabendo que a distância de A até o centro do eixo BD é $a = 50$ mm e considerando que todas as tensões permanecem abaixo do limite de proporcionalidade do material, determine (*a*) as tensões normal e de cisalhamento no ponto K da seção transversal do eixo BD localizado a uma distância $b = 60$ mm da extremidade B, (*b*) os eixos principais e as tensões principais em K e (*c*) a tensão de cisalhamento máxima em K.

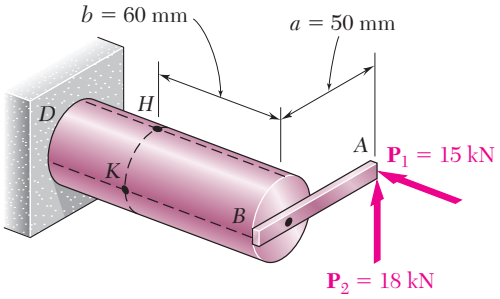


Fig. 8.21

Esforços internos em determinada seção. Primeiro substituímos as forças $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$ por um sistema equivalente de forças e momentos aplicados ao centro C da seção contendo o ponto K (Fig. 8.22). Esse sistema, que representa os esforços internos na seção, consiste nas seguintes forças e momentos:

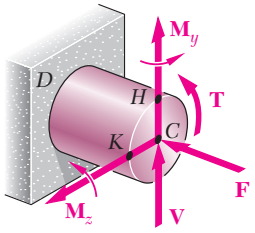


Fig. 8.22

1. Uma força axial centrada $\mathbf{F}$ igual à força $\mathbf{P}_1$, de intensidade
$$F = P_1 = 15 \text{ kN}$$
2. Uma força cortante $\mathbf{V}$ igual à força $\mathbf{P}_2$, de intensidade
$$V = P_2 = 18 \text{ kN}$$
3. O conjugado de torção $\mathbf{T}$ de torque T igual ao momento de $\mathbf{P}_2$ em relação ao centro do eixo BD
$$T = P_2 a = (18 \text{ kN})(50 \text{ mm}) = 900 \text{ N} \cdot \text{m}$$
4. O conjugado de flexão $\mathbf{M}_y$, de momento M_y igual ao momento de $\mathbf{P}_1$ em relação a um eixo vertical que passa por C:
$$M_y = P_1 a = (15 \text{ kN})(50 \text{ mm}) = 750 \text{ N} \cdot \text{m}$$
5. O conjugado de flexão $\mathbf{M}_z$, de momento M_z igual ao momento de $\mathbf{P}_2$ em relação a um eixo transversal horizontal que passa por C:
$$M_z = P_2 b = (18 \text{ kN})(60 \text{ mm}) = 1080 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Os resultados obtidos são mostrados na Fig. 8.23.

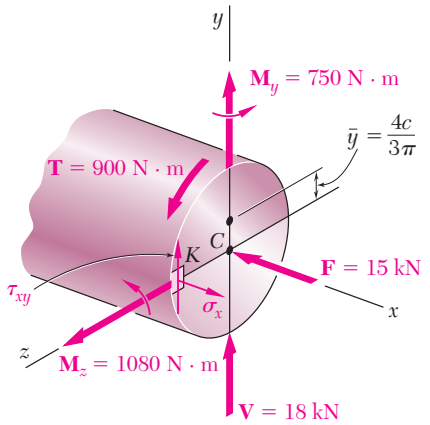


Fig. 8.23

a. Tensões normal e de cisalhamento no ponto K. Cada uma das forças e momentos mostrados na Fig. 8.23 pode produzir uma tensão normal ou de cisalhamento no ponto K. Nosso objetivo é calcular separadamente cada uma dessas tensões, depois somar as tensões normais e as de cisalhamento. Mas primeiro temos que determinar as propriedades geométricas da seção.

Propriedades geométricas da seção. Temos

$$A = \pi c^2 = \pi(0{,}020 \text{ m})^2 = 1{,}257 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$I_y = I_z = \tfrac{1}{4}\pi c^4 = \tfrac{1}{4}\pi(0{,}020 \text{ m})^4 = 125{,}7 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

$$J_C = \tfrac{1}{2}\pi c^4 = \tfrac{1}{2}\pi(0{,}020 \text{ m})^4 = 251{,}3 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

Determinamos também o momento estático Q e a largura t da área da seção transversal localizada acima do eixo z. Lembrando que $\bar{y} = 4c/3\pi$ para um semicírculo de raio c, temos

$$Q = A'\bar{y} = \left(\frac{1}{2}\pi c^2\right)\left(\frac{4c}{3\pi}\right) = \frac{2}{3}c^3 = \frac{2}{3}(0{,}020 \text{ m})^3$$
$$= 5{,}33 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

e

$$t = 2c = 2(0{,}020 \text{ m}) = 0{,}040 \text{ m}$$

Tensões normais. Observamos que as tensões normais são produzidas em K pela força centrada $\mathbf{F}$ e pelo momento fletor $\mathbf{M}_y$, porém o momento $\mathbf{M}_z$ não produz nenhuma tensão em K, pois K está localizado na linha neutra correspondente àquele momento. Determinando cada um dos sinais por meio da Fig. 8.23, temos

$$\sigma_x = -\frac{F}{A} + \frac{M_y c}{I_y} = -11{,}9 \text{ MPa} + \frac{(750 \text{ N} \cdot \text{m})(0{,}020 \text{ m})}{125{,}7 \times 10^{-9} \text{ m}^4}$$
$$= -11{,}9 \text{ MPa} + 119{,}3 \text{ MPa}$$
$$\sigma_x = +107{,}4 \text{ MPa}$$

Tensões de cisalhamento. Elas são compostas pela tensão de cisalhamento $(\tau_{xy})_V$ provocada pela força cortante vertical **V** e pela tensão de cisalhamento $(\tau_{xy})_{\text{torção}}$ provocada pelo torque **T**. Lembrando os valores obtidos para Q, t, I_z e J_C, temos

$$(\tau_{xy})_V = +\frac{VQ}{I_z t} = +\frac{(18 \times 10^3\ \text{N})(5{,}33 \times 10^{-6}\ \text{m}^3)}{(125{,}7 \times 10^{-9}\ \text{m}^4)(0{,}040\ \text{m})}$$
$$= +19{,}1\ \text{MPa}$$

$$(\tau_{xy})_{\text{torção}} = -\frac{Tc}{J_C} = -\frac{(900\ \text{N} \cdot \text{m})(0{,}020\ \text{m})}{251{,}3 \times 10^{-9}\ \text{m}^4} = -71{,}6\ \text{MPa}$$

Somando essas duas expressões, obtemos τ_{xy} no ponto K.

$$\tau_{xy} = (\tau_{xy})_V + (\tau_{xy})_{\text{torção}} = +19{,}1\ \text{MPa} - 71{,}6\ \text{MPa}$$
$$\tau_{xy} = -52{,}5\ \text{MPa}$$

Na Fig. 8.24, a tensão normal σ_x e as tensões de cisalhamento τ_{xy} atuam sobre um elemento quadrado localizado em K na superfície do eixo cilíndrico. Note que foram incluídas também as tensões de cisalhamento que atuam nos lados longitudinais do elemento.

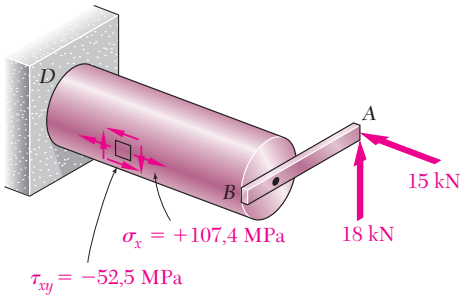


Fig. 8.24

b. Planos principais e tensões principais no ponto K. Podemos usar qualquer um dos dois métodos do Capítulo 7 para determinar os planos principais e as tensões principais em K. Selecionando o círculo de Mohr, representamos o ponto X de coordenadas $\sigma_x = +107{,}4$ MPa e $-\tau_{xy} = +52{,}5$ MPa e o ponto Y de coordenadas $\sigma_y = 0$ e $+\tau_{xy} = -52{,}5$ MPa e traçamos o círculo de diâmetro XY (Fig. 8.25). Observando que

$$OC = CD = \tfrac{1}{2}(107{,}4) = 53{,}7\ \text{MPa} \qquad DX = 52{,}5\ \text{MPa}$$

determinamos a orientação dos planos principais

$$\text{tg}\ 2\theta_p = \frac{DX}{CD} = \frac{52{,}5}{53{,}7} = 0{,}97765 \qquad 2\theta_p = 44{,}4^\circ \downarrow$$
$$\theta_p = 22{,}2^\circ \downarrow$$

Agora determinamos o raio do círculo

$$R = \sqrt{(53{,}7)^2 + (52{,}5)^2} = 75{,}1\ \text{MPa}$$

e as tensões principais

$$\sigma_{\text{máx}} = OC + R = 53{,}7 + 75{,}1 = 128{,}8\ \text{MPa}$$
$$\sigma_{\text{mín}} = OC - R = 53{,}7 - 75{,}1 = -21{,}4\ \text{MPa}$$

Os resultados obtidos são mostrados na Fig. 8.26.

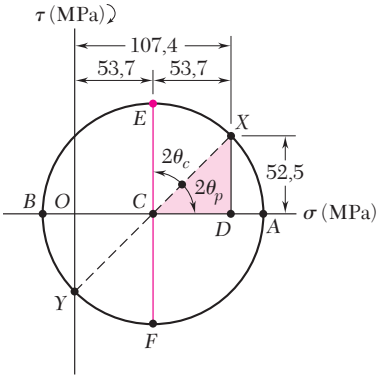


Fig. 8.25

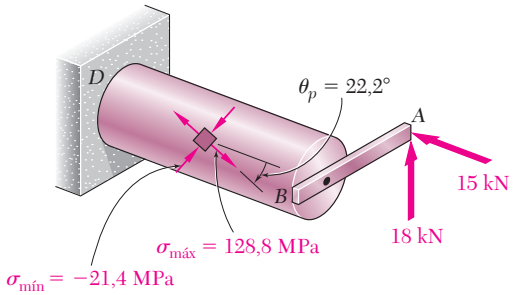


Fig. 8.26

Tensão de cisalhamento máxima no ponto K. Essa tensão corresponde aos pontos E e F na Fig. 8.25. Temos

$$\tau_{\text{máx}} = CE = R = 75{,}1\ \text{MPa}$$

Observando que $2\theta_c = 90^\circ - 2\theta_p = 90^\circ - 44{,}4^\circ = 45{,}6^\circ$, concluímos que os planos de tensão de cisalhamento máxima formam um ângulo $\theta_p = 22{,}8^\circ \curvearrowleft$ com a horizontal. O elemento correspondente é mostrado na Fig. 8.27. Note que as tensões normais que atuam nesse elemento são representadas por OC na Fig. 8.25 e são, portanto, iguais a $+53{,}7$ MPa.

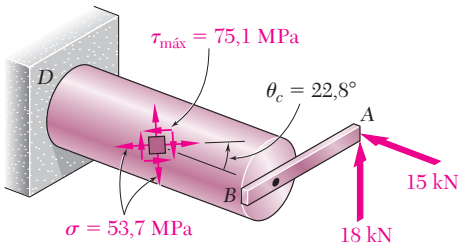
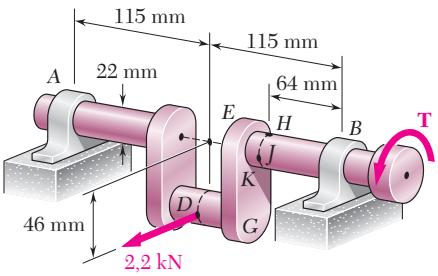


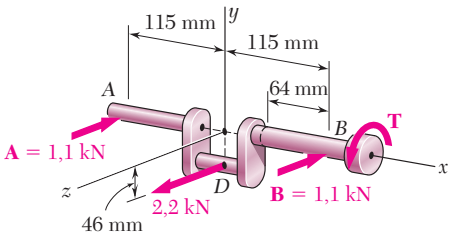
Fig. 8.27



PROBLEMA RESOLVIDO 8.4

Uma força horizontal de 2,2 kN atua no ponto *D* do eixo virabrequim *AB* que é mantido em equilíbrio estático por um momento torçor **T** e por reações em *A* e *B*. Sabendo que os mancais são oscilantes (alinham-se automaticamente) e não aplicam momentos no eixo, determine as tensões normal e de cisalhamento nos pontos *H*, *J*, *K* e *L* localizados nas extremidades dos diâmetros vertical e horizontal de uma seção transversal localizada 64 mm à esquerda do mancal *B*.

SOLUÇÃO

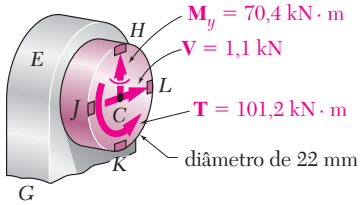


Corpo livre. Eixo virabrequim inteiro. $A = B = 1{,}1$ kN.

$$+\circlearrowleft \Sigma M_x = 0: \qquad -(2{,}2\text{ kN})(46\text{ mm}) + T = 0 \qquad T = 101{,}2\text{ kN}\cdot\text{mm}$$

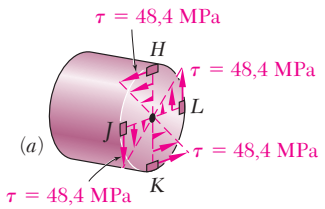
Esforços internos na seção transversal. Substituímos a reação **B** e o momento torçor **T** por um sistema equivalente de forças e momentos aplicados no centro *C* da seção transversal contendo *H*, *J*, *K* e *L*.

$$V = B = 1{,}1\text{ kN} \qquad T = 101{,}2\text{ kN}\cdot\text{mm}$$
$$M_y = (1{,}1\text{ kN})(64\text{ mm}) = 70{,}4\text{ kN}\cdot\text{mm}$$



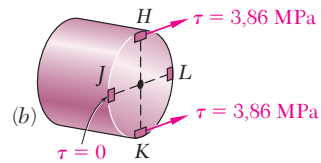
As propriedades geométricas da seção de diâmetro de 22 mm são

$$A = \pi(11\text{ mm})^2 = 380\text{ mm}^2 \qquad I = \tfrac{1}{4}\pi(11\text{ mm})^4 = 11499\text{ mm}^4$$
$$J = \tfrac{1}{2}\pi(11\text{ mm})^4 = 22998\text{ mm}^4$$



Tensões produzidas pelo momento torçor *T*. Utilizando a Equação (3.8), determinamos as tensões de cisalhamento nos pontos *H*, *J*, *K* e *L* e as mostramos na Fig. (*a*)

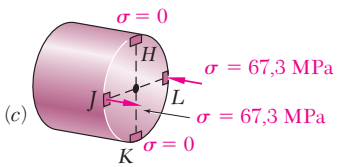
$$\tau = \frac{Tc}{J} = \frac{(101{,}2\times10^3\text{ N}\cdot\text{mm})(11\text{ mm})}{22998\text{ mm}^4} = 48{,}4\text{ MPa}$$



Tensões produzidas pela força cortante *V*. A força cortante **V** não produz tensões de cisalhamento nos pontos *J* e *L*. Nos pontos *H* e *K* calculamos primeiro *Q* para um semicírculo em relação ao diâmetro vertical e depois determinamos a tensão de cisalhamento produzida pela força cortante $V = 1{,}1$ kN. Essas tensões são mostradas na Fig. (*b*)

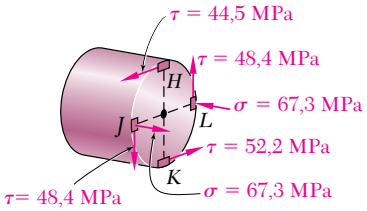
$$Q = \left(\frac{1}{2}\pi c^2\right)\left(\frac{4c}{3\pi}\right) = \frac{2}{3}c^3 = \frac{2}{3}(11\text{ mm})^3 = 887{,}3\text{ mm}^3$$

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{(1100\text{ N})(887{,}3\text{ mm}^3)}{(11499\text{ mm}^4)(22\text{ mm})} = 3{,}86\text{ MPa}$$

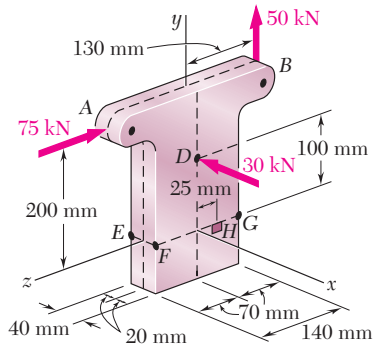


Tensões produzidas pelo momento fletor M_y. Como o momento fletor $\mathbf{M}_y$ atua em um plano horizontal, ele não produz tensões em *H* e *K*. Utilizando a Equação (4.15), determinamos as tensões normais nos pontos *J* e *L* e as mostramos na Fig. (*c*).

$$\sigma = \frac{|M_y|c}{I} = \frac{(70{,}4\times10^3\text{ N}\cdot\text{mm})(11\text{ mm})}{11499\text{ mm}^4} = 67{,}34\text{ MPa}$$



Resumo. Somamos as tensões mostradas e obtivemos as tensões totais normal e de cisalhamento nos pontos *H*, *J*, *K* e *L*.



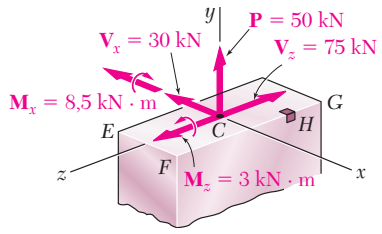
PROBLEMA RESOLVIDO 8.5

Três forças são aplicadas nos pontos *A*, *B* e *D* de um pequeno poste de aço, conforme mostra a figura. Sabendo que a seção transversal horizontal do poste é um retângulo de 40 mm × 140 mm, determine as tensões, os planos principais e a tensão de cisalhamento máxima no ponto *H*.

SOLUÇÃO

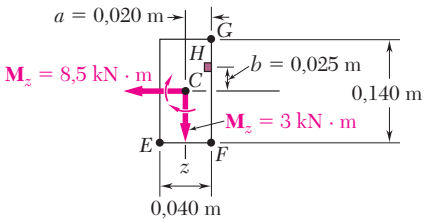
Esforços internos na seção *EFG*. Substituímos as três forças aplicadas por um sistema equivalente de forças e momentos no centro *C* da seção retangular *EFG*. Temos

$$V_x = -30\text{ kN} \quad P = 50\text{ kN} \quad V_z = -75\text{ kN}$$
$$M_x = (50\text{ kN})(0{,}130\text{ m}) - (75\text{ kN})(0{,}200\text{ m}) = -8{,}5\text{ kN}\cdot\text{m}$$
$$M_y = 0 \qquad M_z = (30\text{ kN})(0{,}100\text{ m}) = 3\text{ kN}\cdot\text{m}$$



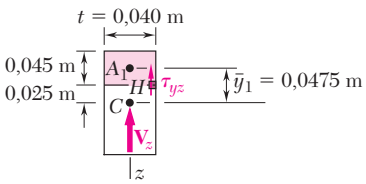
Notamos que não há momento torçor em torno do eixo *y*. As propriedades geométricas da seção retangular são

$$A = (0{,}040\text{ m})(0{,}140\text{ m}) = 5{,}6 \times 10^{-3}\text{ m}^2$$
$$I_x = \tfrac{1}{12}(0{,}040\text{ m})(0{,}140\text{ m})^3 = 9{,}15 \times 10^{-6}\text{ m}^4$$
$$I_z = \tfrac{1}{12}(0{,}140\text{ m})(0{,}040\text{ m})^3 = 0{,}747 \times 10^{-6}\text{ m}^4$$



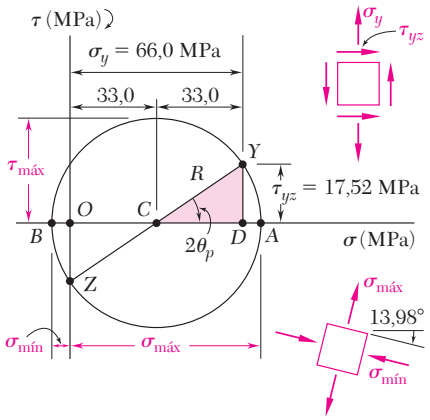
Tensões normais em *H*. Notamos que tensões normais σ_y são produzidas pela força centrada **P** e pelos momentos fletores $\mathbf{M}_x$ e $\mathbf{M}_z$. Determinamos o sinal de cada tensão examinando cuidadosamente o esboço do sistema de forças e momentos em *C*.

$$\sigma_y = +\frac{P}{A} + \frac{|M_z|a}{I_z} - \frac{|M_x|b}{I_x}$$
$$= \frac{50\text{ kN}}{5{,}6 \times 10^{-3}\text{ m}^2} + \frac{(3\text{ kN}\cdot\text{m})(0{,}020\text{ m})}{0{,}747 \times 10^{-6}\text{ m}^4} - \frac{(8{,}5\text{ kN}\cdot\text{m})(0{,}025\text{ m})}{9{,}15 \times 10^{-6}\text{ m}^4}$$
$$\sigma_y = 8{,}93\text{ MPa} + 80{,}3\text{ MPa} - 23{,}2\text{ MPa} \qquad \sigma_y = 66{,}0\text{ MPa} \triangleleft$$



Tensões de cisalhamento em *H*. Considerando primeiro a força cortante $\mathbf{V}_x$, notamos que $Q = 0$ em relação ao eixo *z*, pois *H* está na borda da seção transversal. Assim, $\mathbf{V}_x$ não produz tensão de cisalhamento em *H*. Já a força cortante $\mathbf{V}_z$ produz tensão de cisalhamento em *H* e temos

$$Q = A_1\bar{y}_1 = [(0{,}040\text{ m})(0{,}045\text{ m})](0{,}0475\text{ m}) = 85{,}5 \times 10^{-6}\text{ m}^3$$
$$\tau_{yz} = \frac{V_z Q}{I_x t} = \frac{(75\text{ kN})(85{,}5 \times 10^{-6}\text{ m}^3)}{(9{,}15 \times 10^{-6}\text{ m}^4)(0{,}040\text{ m})} \qquad \tau_{yz} = 17{,}52\text{ MPa} \triangleleft$$



Tensões principais, planos principais e tensão de cisalhamento máxima em *H*. Traçamos o círculo de Mohr para tensões no ponto *H*

$$\text{tg } 2\theta_p = \frac{17{,}52}{33{,}0} \qquad 2\theta_p = 27{,}96° \qquad \theta_p = 13{,}98° \blacktriangleleft$$

$$R = \sqrt{(33{,}0)^2 + (17{,}52)^2} = 37{,}4\text{ MPa} \qquad \tau_{máx} = 37{,}4\text{ MPa} \blacktriangleleft$$
$$\sigma_{máx} = OA = OC + R = 33{,}0 + 37{,}4 \qquad \sigma_{máx} = 70{,}4\text{ MPa} \blacktriangleleft$$
$$\sigma_{mín} = OB = OC - R = 33{,}0 - 37{,}4 \qquad \sigma_{mín} = -7{,}4\text{ MPa} \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

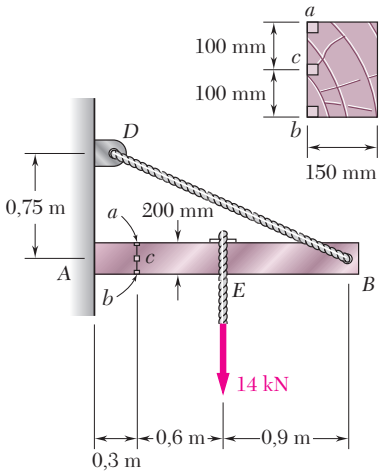


Fig. P8.31

8.31 A viga em balanço *AB* tem uma seção transversal retangular de 150 mm × 200 mm. Sabendo que a força de tração no cabo *BD* é de 10,40 kN e desprezando o peso da viga, determine as tensões normal e de cisalhamento nos três pontos indicados.

8.32 Duas forças de 5,34 kN são aplicadas a um elemento de máquina *AB* em forma de *L*, conforme mostra a figura. Determine as tensões normal e de cisalhamento (*a*) no ponto *a*, (*b*) no ponto *b* e (*c*) no ponto *c*.

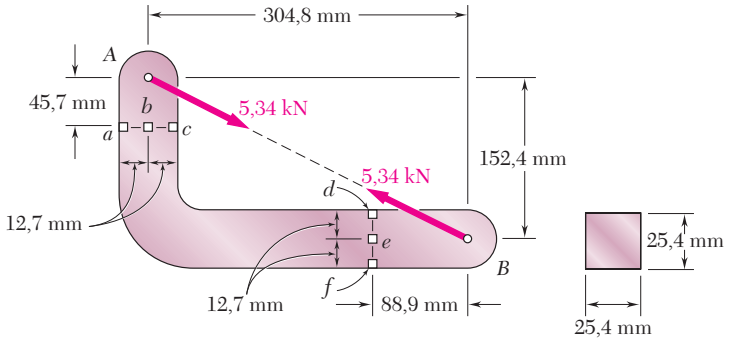


Fig. P8.32 e P8.33

8.33 Duas forças de 5,34 kN são aplicadas a um elemento de máquina *AB* em forma de *L*, conforme mostra a figura. Determine as tensões normal e de cisalhamento (*a*) no ponto *d*, (*b*) no ponto *e* e (*c*) no ponto *f*.

8.34* a *8.36 A componente *AB* tem uma seção transversal retangular uniforme de 10 mm × 24 mm. Para o carregamento mostrado, determine as tensões normal e de cisalhamento (*a*) no ponto *H* e (*b*) no ponto *K*.

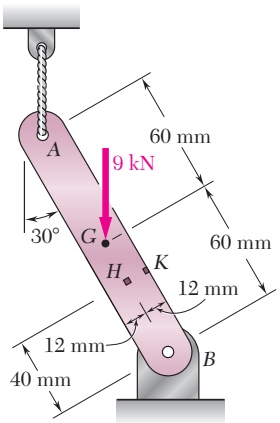


Fig. *P8.34*

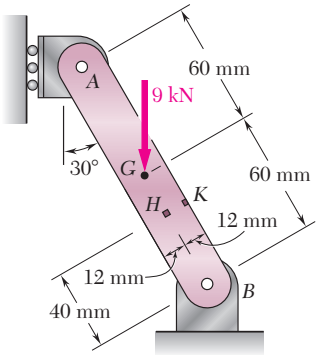


Fig. P8.35

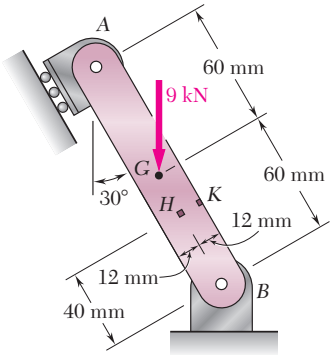


Fig. *P8.36*

8.37 O eixo de um pequeno caminhão está submetido às forças e aos momentos mostrados na figura. Sabendo que o diâmetro do eixo é de 36,1 mm, determine as tensões normais e de cisalhamento no ponto H localizado na superfície superior do eixo.

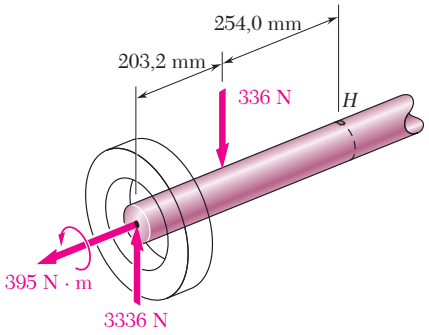


Fig. P8.37

8.38 Uma tira fina é enrolada em torno da barra de seção transversal cheia de raio $c = 20$ mm conforme é mostrado. Sabendo que $l = 100$ mm e $F = 5$ kN, determine as tensões, normal e de cisalhamento (*a*) no ponto H e (*b*) no ponto K.

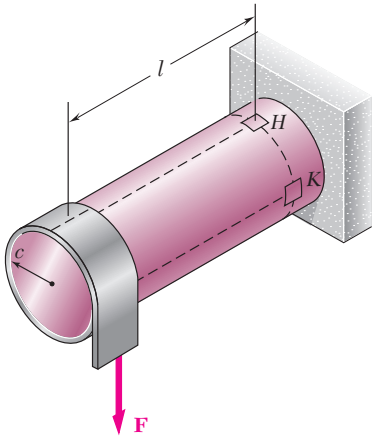


Fig. P8.38

8.39 Várias forças são aplicadas ao tubo montado conforme a figura. Sabendo que o tubo tem diâmetros interno e externo iguais a 40,9 mm e 48,3 mm, respectivamente, determine as tensões, normal e de cisalhamento, (*a*) no ponto H e (*b*) no ponto K.

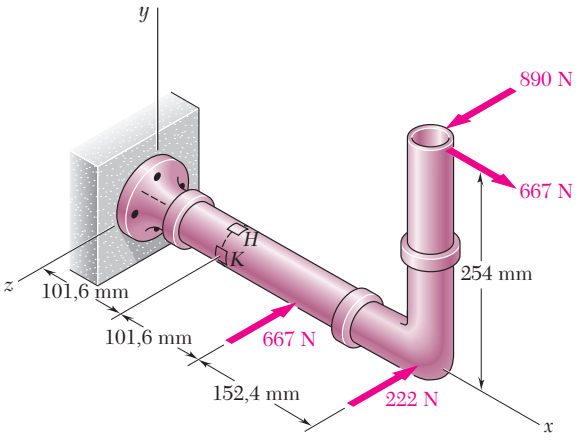


Fig. *P8.39*

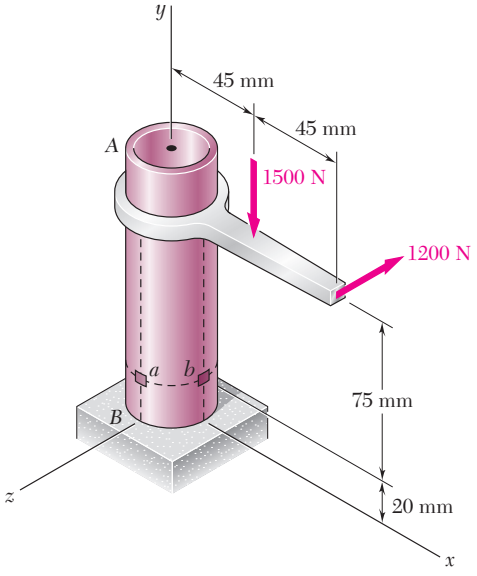


Fig. P8.40

8.40 Duas forças são aplicadas ao tubo AB, conforme mostra a figura. Sabendo que o tubo tem diâmetros interno e externo iguais a 35 mm e 42 mm, respectivamente, determine as tensões normal e de cisalhamento (*a*) no ponto *a* e (*b*) no ponto *b*.

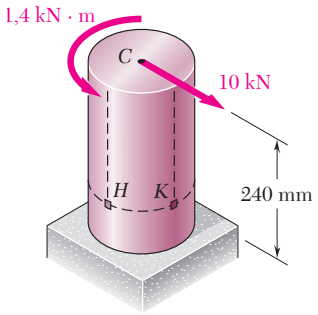


Fig. P8.41

8.41 Uma força de 10 kN e um momento de 1,4 kN · m são aplicados na extremidade livre de uma barra de ferro fundido de 65 mm de diâmetro, mostrada na figura. Determine as tensões normal e de cisalhamento (*a*) no ponto *H* e (*b*) no ponto *K*.

8.42 Três forças são aplicadas a uma placa com 101,6 mm de diâmetro que está fixada a um eixo cheio *AB* de 45,7 mm de diâmetro. No ponto *H*, determine (*a*) as tensões e os planos principais e (*b*) a tensão de cisalhamento máxima.

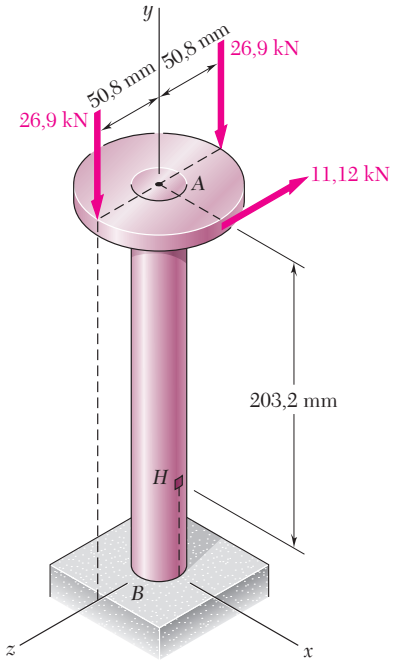


Fig. P8.42

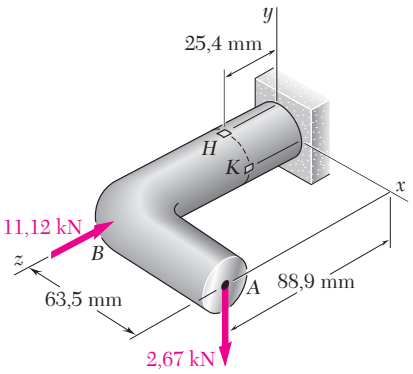


Fig. *P8.43*

8.43 Forças são aplicadas aos pontos *A* e *B* do suporte de ferro fundido mostrado. Sabendo que o suporte tem um diâmetro de 20,32 mm, determine as tensões principais e a máxima tensão de cisalhamento (*a*) no ponto *H* e (*b*) no ponto *K*.

8.44 O tubo de aço *AB* tem um diâmetro externo de 72 mm e uma parede de 5 mm de espessura. Sabendo que o braço *CDE* está fixado rigidamente ao tubo, determine as tensões principais, os planos principais e a tensão de cisalhamento máxima no ponto *H*.

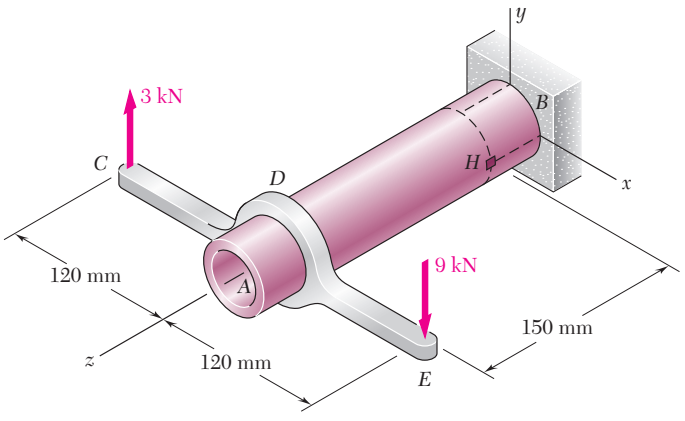


Fig. P8.44

8.45 Três forças são aplicadas à barra mostrada na figura. Determine as tensões normal e de cisalhamento (*a*) no ponto *a*, (*b*) no ponto *b* e (*c*) no ponto *c*.

8.46 Resolva o Problema 8.45 considerando que $h = 304{,}8$ mm.

8.47 Três forças são aplicadas à barra mostrada na figura. Determine as tensões normal e de cisalhamento (*a*) no ponto *a*, (*b*) no ponto *b* e (*c*) no ponto *c*.

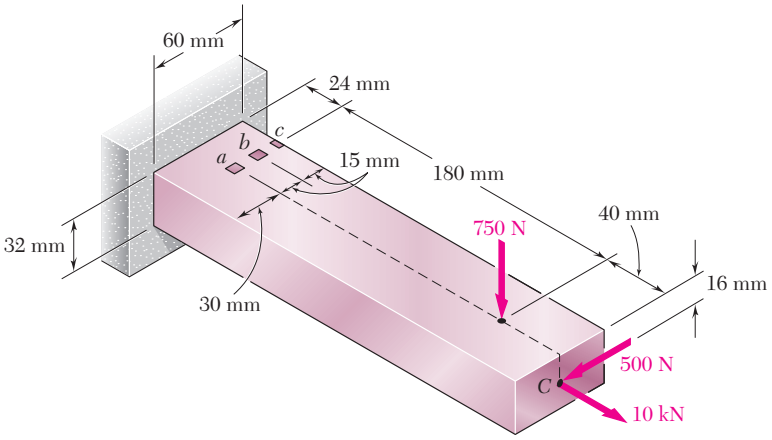


Fig. P8.47

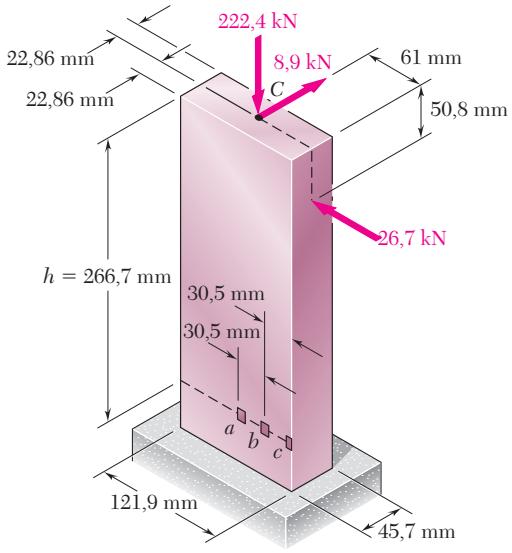


Fig. *P8.45*

8.48 Resolva o Problema 8.47 considerando que a força de 750 N está direcionada verticalmente para cima.

8.49 Três forças são aplicadas à componente de máquina *ABD* mostrado na figura. Sabendo que a seção transversal contendo o ponto *H* é um retângulo de 20 mm × 40 mm, determine as tensões principais e a tensão de cisalhamento máxima no ponto *H*.

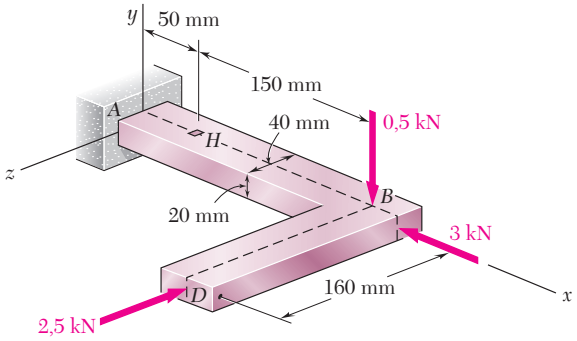


Fig. P8.49

8.50 Resolva o problema 8.49, considerando que a intensidade da força de 2,5 kN foi aumentada para 10 kN.

8.51 Três forças são aplicadas à viga em balanço mostrada. Determine as tensões principais e a máxima tensão de cisalhamento no ponto *H*.

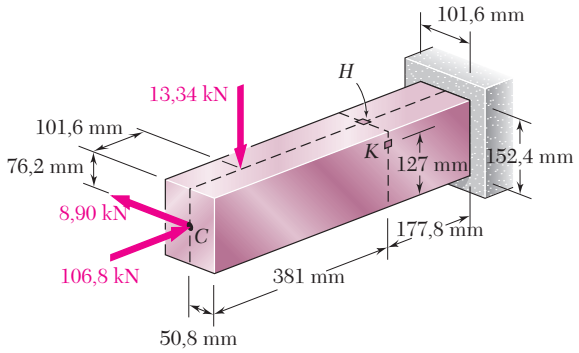


Fig. *P8.51*

8.52 Para a viga e o carregamento do Problema 8.51, determine as tensões principais e a máxima tensão de cisalhamento no ponto *K*.

8.53 Três placas de aço, cada uma com 13 mm de espessura, são soldadas para formar uma viga em balanço. Para o carregamento mostrado, determine as tensões normal e de cisalhamento nos pontos *a* e *b*.

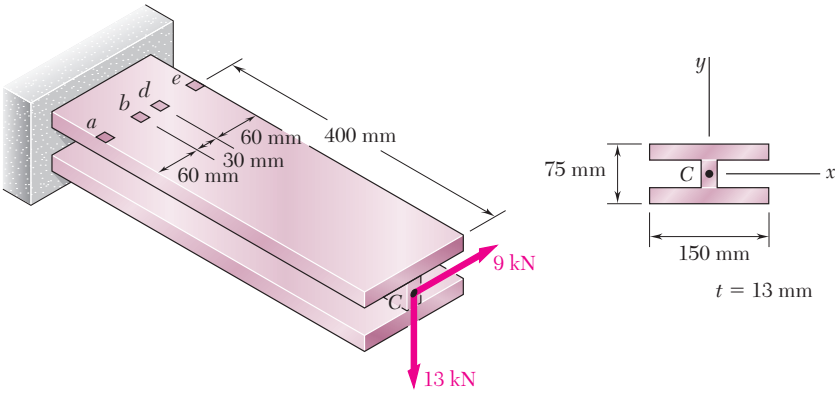


Fig. P8.53 e *P8.54*

8.54 Três placas de aço, cada uma com 13 mm de espessura, são soldadas para formar uma viga em balanço. Para o carregamento mostrado, determine as tensões normal e de cisalhamento nos pontos *d* e *e*.

8.55 Duas forças $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$ são aplicadas, como você pode ver na figura, em direções perpendiculares ao eixo longitudinal de uma viga W310 × 60. Sabendo que $\mathbf{P}_1 = 22{,}2$ kN e $\mathbf{P}_2 = 13{,}34$ kN, determine as tensões principais e a tensão de cisalhamento máxima no ponto *a*.

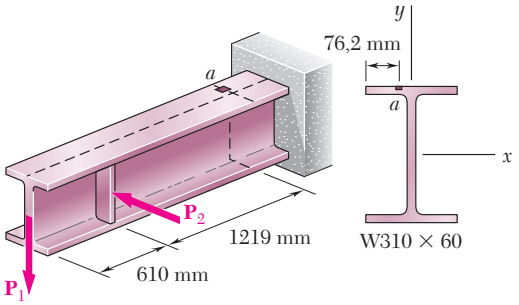


Fig. P8.55 e P8.56

8.56 Duas forças $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$ são aplicadas, como você pode ver na figura, em direções perpendiculares ao eixo longitudinal de uma viga W310 × 60. Sabendo que $\mathbf{P}_1 = 22{,}2$ kN e $\mathbf{P}_2 = 13{,}34$ kN, determine as tensões principais e a tensão de cisalhamento máxima no ponto *b*.

8.57 Quatro forças são aplicadas a um perfil de aço laminado W200 × 41,7, conforme mostra a figura. Determine as tensões principais e a tensão de cisalhamento máxima no ponto *a*.

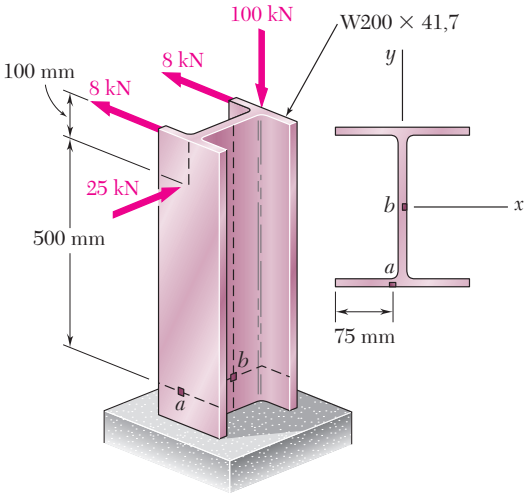


Fig. P8.57 e *P8.58*

8.58 Quatro forças são aplicadas a um perfil de aço laminado W200 × 41,7, conforme mostra a figura. Determine as tensões principais e a tensão de cisalhamento máxima no ponto *b*.

8.59 Uma força **P** é aplicada a uma viga em balanço por meio de um cabo preso a um parafuso localizado no centro da extremidade livre da viga. Sabendo que **P** atua em uma direção perpendicular ao eixo longitudinal da viga, determine (*a*) a tensão normal no ponto *a* em função de *P*, *b*, *h*, *l* e β e (*b*) os valores de β para os quais a tensão normal em *a* é zero.

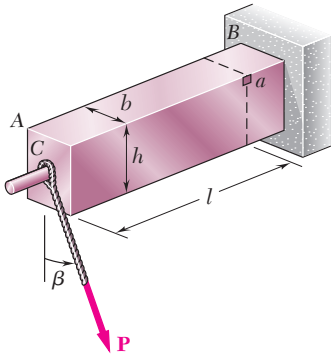


Fig. *P8.59*

8.60 Uma força vertical **P** é aplicada ao centro da extremidade livre da viga em balanço *AB*. (*a*) Se a viga for instalada com a alma vertical ($\beta = 0$) e com seu eixo longitudinal *AB* horizontal, determine a intensidade da força **P** para a qual a tensão normal no ponto *a* é +120 MPa. (*b*) Resolva a parte *a* considerando que a viga é instalada com $\beta = 3°$.

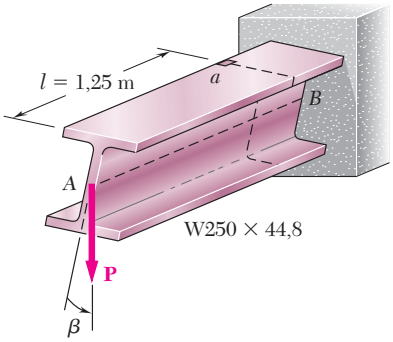


Fig. P8.60

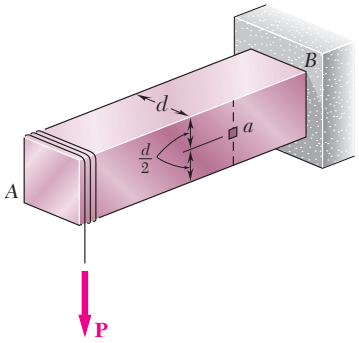


Fig. *P8.61*

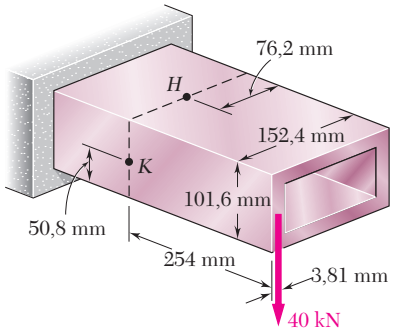


Fig. P8.62

***8.61** Uma força **P** de 5 kN é aplicada a um fio que está enrolado ao redor da barra *AB*, conforme mostra a figura. Sabendo que a seção transversal da barra é um quadrado de lado $d = 40$ mm, determine as tensões principais e a tensão de cisalhamento máxima no ponto *a*.

***8.62** Sabendo que o tubo estrutural mostrado na figura tem uma parede de espessura uniforme de 7,62 mm, determine as tensões e os planos principais, e a tensão de cisalhamento máxima (*a*) no ponto *H* e (*b*) no ponto *K*.

***8.63** O tubo estrutural mostrado na figura tem uma parede de espessura uniforme de 7,62 mm. Sabendo que a força de 66,7 kN é aplicada 3,8 mm acima da base do tubo, determine a tensão de cisalhamento (*a*) no ponto *a* e (*b*) no ponto *b*.

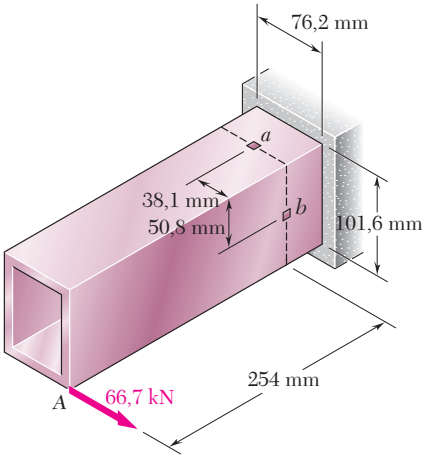


Fig. *P8.63*

***8.64** Para o tubo e o carregamento do Problema 8.63, determine as tensões principais e a tensão de cisalhamento máxima no ponto *b*.

REVISÃO E RESUMO DO CAPÍTULO 8

Esse capítulo foi dedicado à determinação das tensões principais em vigas, eixos de transmissão e corpos de forma arbitrária submetidos a carregamentos combinados.

Primeiro recordamos na Seção 8.2 as duas relações fundamentais deduzidas nos Capítulos 5 e 6 para a tensão normal σ_x e a tensão de cisalhamento τ_{xy} em um ponto de uma seção transversal de uma viga prismática.

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \qquad \tau_{xy} = -\frac{VQ}{It} \tag{8.1, 8.2}$$

em que V = força cortante na seção
M = momento fletor na seção
y = distância do ponto até a superfície neutra
I = momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo que passa pelo centroide
Q = momento estático em relação à linha neutra da parte da seção transversal localizada acima do ponto dado
t = largura da seção transversal em determinado ponto

Utilizando um dos métodos apresentados no Capítulo 7 para a transformação de tensões, conseguimos obter os planos principais e as tensões principais no ponto dado (Fig. 8.6).

Investigamos a distribuição das tensões principais em uma viga em balanço retangular delgada submetida a uma força concentrada **P** em sua extremidade livre e concluímos que, em determinada seção transversal, exceto próximo ao ponto de aplicação da força, a tensão principal máxima $\sigma_{máx}$ não ultrapassava a tensão normal máxima σ_m que ocorria na superfície da viga.

Embora essa conclusão permaneça válida para muitas vigas de seção transversal não retangular, ela pode não valer para vigas de perfis W ou perfis I, em que $\sigma_{máx}$ nas junções b e d da alma com as mesas da viga (Fig. 8.10) pode ultrapassar o valor σ_m que ocorre nos pontos a e e. Portanto, o projeto de uma viga de aço laminado deverá incluir o cálculo das tensões principais máximas nesses pontos. (Ver os Problemas Resolvidos 8.1 e 8.2.)

Planos principais e tensões principais em uma viga

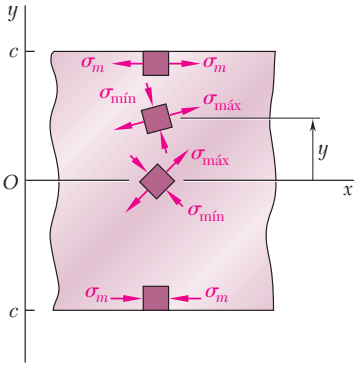


Fig. 8.6

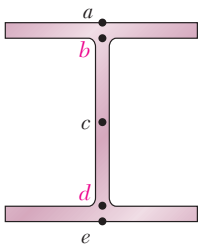


Fig. 8.10

Projeto de eixos de transmissão sob cargas transversais

Na Seção 8.3, consideramos o projeto de *eixos de transmissão* submetidos a *forças transversais*, bem como a torques. Levando em conta o efeito das tensões normais provocadas pelo momento fletor M e tensões de cisalhamento provocadas pelo torque T em qualquer seção transversal de um eixo cilíndrico (de seção cheia ou vazada), concluímos que o valor mínimo admissível da relação J/c para a seção transversal era

$$\frac{J}{c} = \frac{(\sqrt{M^2 + T^2})_{\text{máx}}}{\tau_{\text{adm}}} \tag{8.6}$$

Tensões sob condições gerais de carregamento

Em capítulos anteriores, você aprendeu a determinar as tensões em barras prismáticas provocadas por carregamentos axiais (Capítulos 1 e 2), por torção (Capítulo 3), por flexão (Capítulos 4) e por carregamentos transversais (Capítulos 5 e 6). Na segunda parte desse capítulo (Seção 8.4), combinamos esses carregamentos para determinar tensões sob condições de carregamento mais gerais.

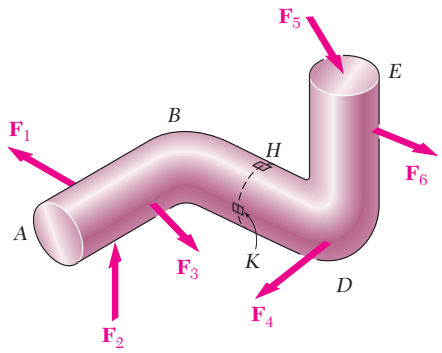


Fig. 8.15

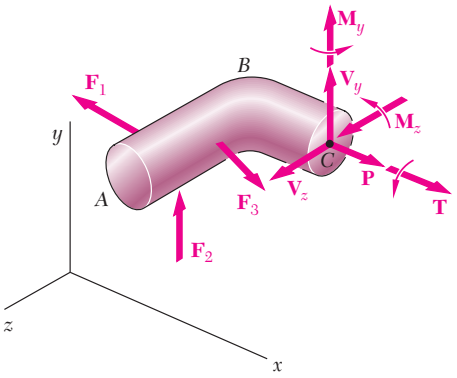


Fig. 8.16

Por exemplo, para determinarmos as tensões no ponto H ou K da barra curva mostrada na Fig. 8.15, cortamos a barra em uma seção que passa por esses pontos e substituímos as forças aplicadas por um sistema equivalente de forças e momentos no centroide C da seção (Fig. 8.16). As tensões normal e de cisalhamento, produzidas em H ou K para cada uma das forças e momentos aplicados em C, foram determinadas e então combinadas para obter a tensão normal resultante σ_x e as tensões de cisalhamento resultantes τ_{xy} e τ_{xz} em H ou K. Finalmente, foram determinadas as tensões principais, a orientação dos planos principais e a tensão de cisalhamento máxima no ponto H ou K, por um dos métodos apresentados no Capítulo 7, por meio de valores obtidos para σ_x, τ_{xy} e τ_{xz}.

PROBLEMAS DE REVISÃO

8.65 (*a*) Sabendo que $\sigma_{adm} = 165{,}5$ MPa e $\tau_{adm} = 100$ MPa, selecione o perfil de mesa larga mais econômico que deverá ser utilizado para suportar o carregamento mostrado. (*b*) Determine os valores a serem esperados para σ_m, τ_m e a tensão principal $\sigma_{máx}$ na junção de uma mesa com a alma do perfil selecionado.

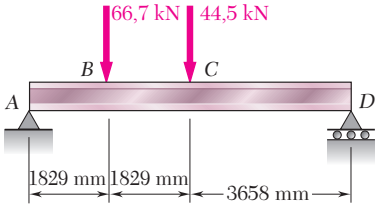


Fig. P8.65

8.66 A força vertical $\mathbf{P}_1$ e a força horizontal $\mathbf{P}_2$ são aplicadas, como mostra a figura, a discos soldados ao eixo de seção transversal cheia *AD*. Sabendo que o diâmetro do eixo é 40 mm e que $\tau_{adm} = 55$ MPa, determine a maior intensidade admissível da força $\mathbf{P}_2$.

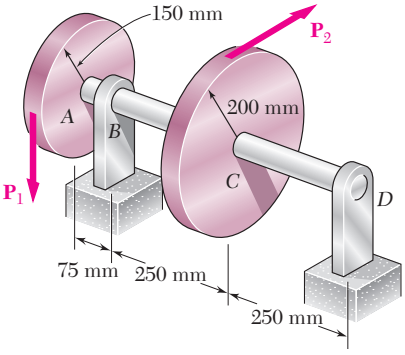


Fig. *P8.66*

8.67 Um eixo cheio *AB* gira a 360 rpm e transmite 20 kW do motor *M* para as máquinas-ferramentas acopladas às engrenagens *E* e *F*. Sabendo que $\tau_{adm} = 45$ MPa e considerando que são transmitidos 10 kW em cada engrenagem, determine o menor diâmetro admissível para o eixo *AB*.

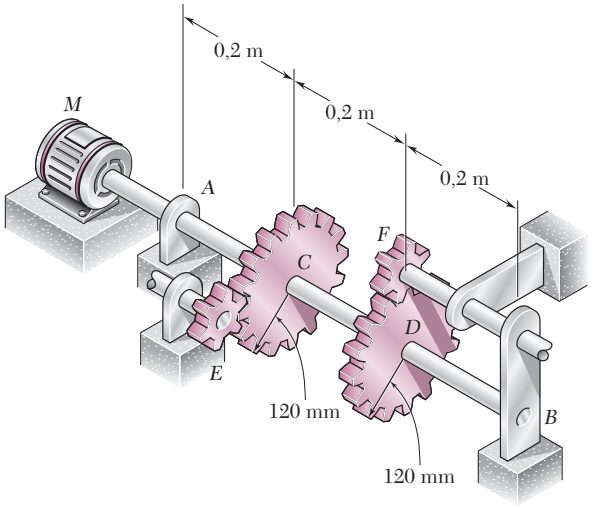


Fig. P8.67

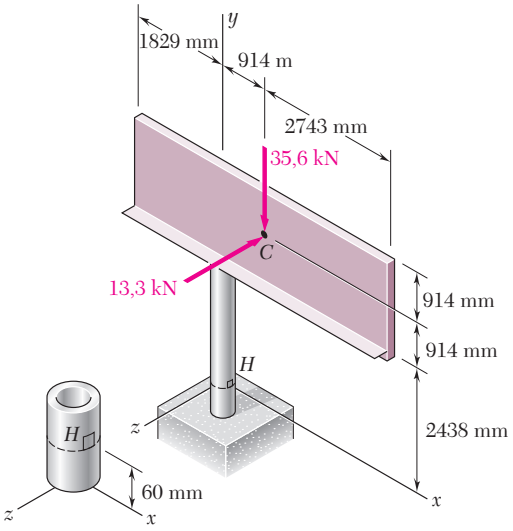


Fig. P8.69

8.68 Para a barra e o carregamento mostrados na figura, determine as tensões normal e de cisalhamento (*a*) no ponto *a* e (*b*) no ponto *b*.

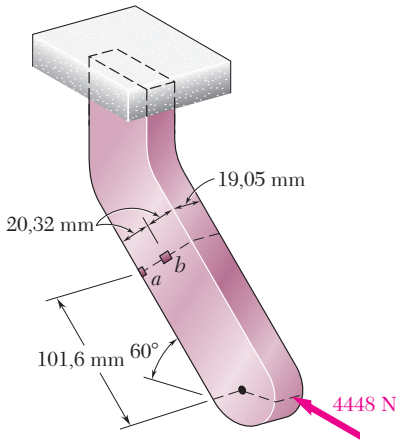


Fig. *P8.68*

8.69 O painel mostrado na figura pesa 35,6 kN e é sustentado por um tubo estrutural que tem um diâmetro externo de 381 mm e uma espessura de parede de 12,7 mm. No instante em que a resultante da pressão do vento for de 13,3 kN localizada no centro *C* do painel, determine as tensões normal e de cisalhamento no ponto *H*.

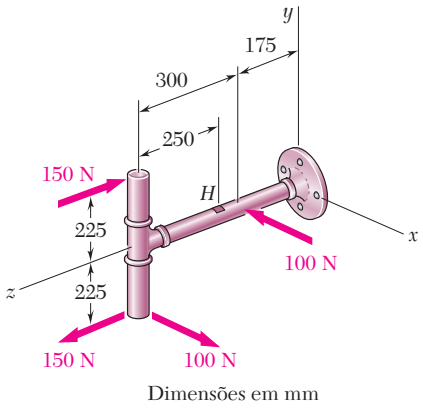


Fig. *P8.70*

8.70 Várias forças são aplicadas ao conjunto de tubos mostrado na figura. Sabendo que cada seção do tubo tem diâmetros interno e externo iguais a 36 mm e 42 mm, respectivamente, determine as tensões normal e de cisalhamento no ponto *H* localizado na superfície superior externa do tubo.

8.71 Uma mola helicoidal, com um raio de hélice igual a R, é feita com um arame circular de raio *r*. Determine a tensão de cisalhamento máxima produzida pelas duas forças iguais e opostas **P** e **P′**. (*Sugestão*: primeiro determine a força cortante **V** e o torque **T** em uma seção transversal.)

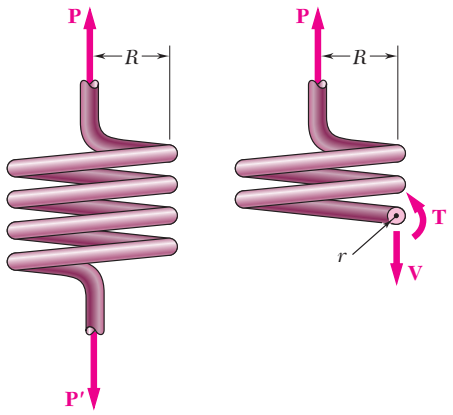


Fig. P8.71

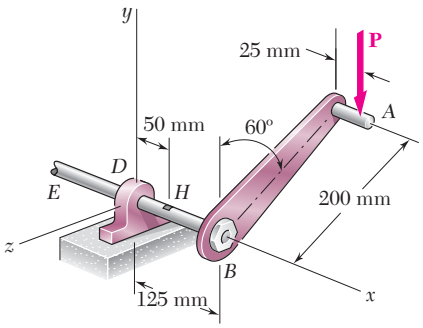


Fig. P8.72

8.72 Uma força vertical **P** de intensidade de 250 N é aplicada à manivela no ponto *A*. Sabendo que o eixo *BDE* tem um diâmetro de 18 mm, determine as tensões principais e a tensão de cisalhamento máxima no ponto *H* localizado na superfície superior do eixo, 50 mm à direita do mancal *D*.

8.73 Uma força de 12,45 kN é aplicada, conforme mostra a figura, a um poste de ferro fundido *ABD* de 61 mm de diâmetro. No ponto *H*, determine (*a*) as tensões e os planos principais e (*b*) a tensão de cisalhamento máxima.

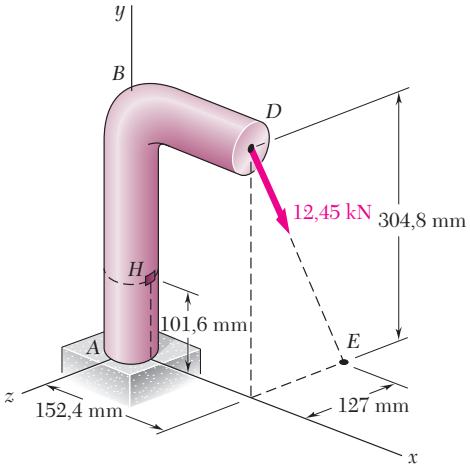


Fig. *P8.73*

8.74 Para o poste e o carregamento mostrados na figura, determine as tensões principais, os planos principais e a tensão de cisalhamento máxima no ponto *H*.

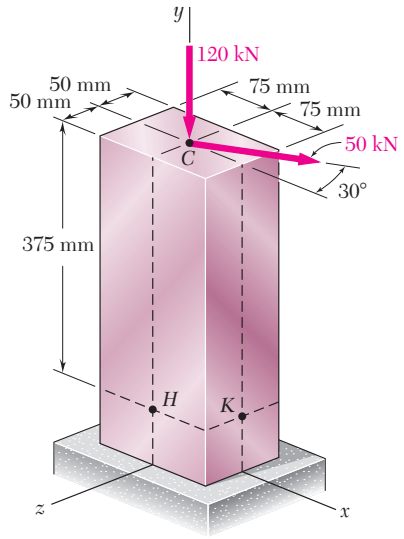


Fig. P8.74

8.75 Sabendo que o tubo estrutural mostrado tem parede de espessura constante de 6,35 mm, determine as tensões, normal e de cisalhamento, nos três pontos indicados.

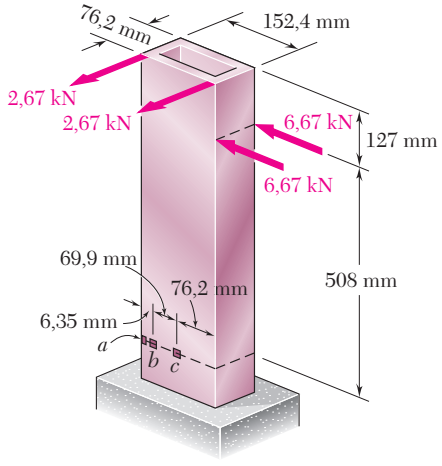


Fig. P8.75

8.76 A viga em balanço *AB* será instalada de modo que o lado de 60 mm forme um ângulo β entre 0 e 90° com a vertical. Sabendo que a força vertical de 600 N é aplicada no centro da extremidade livre da viga, determine a tensão normal no ponto *a* quando (*a*) $\beta = 0$ e (*b*) $\beta = 90°$. (*c*) Determine também o valor de β, para o qual a tensão normal no ponto *a* é máxima, e o valor correspondente daquela tensão.

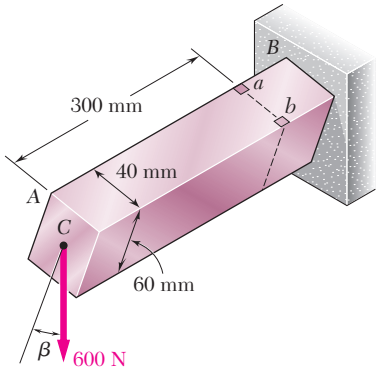


Fig. P8.76

PROBLEMAS PARA COMPUTADOR

Os problemas a seguir devem ser resolvidos com um computador.

8.C1 Vamos considerar que a força cortante V e o momento fletor M foram determinados em determinada seção de uma viga de aço laminado. Elabore um programa de computador para calcular naquela seção, com base nos dados disponíveis no Apêndice C, (a) a tensão normal máxima σ_m e (b) a tensão principal $\sigma_{máx}$ na junção de uma mesa com a alma. Utilize esse programa para resolver as partes *a* e *b* dos seguintes problemas:

(1) Problema 8.1 (Utilize $V = 200{,}2$ kN e $M = 50{,}8$ kN · m)

(2) Problema 8.2 (Utilize $V = 100$ kN e $M = 50{,}8$ kN · m)

(3) Problema 8.3 (Utilize $V = 700$ kN e $M = 1750$ kN · m)

(4) Problema 8.4 (Utilize $V = 850$ kN e $M = 1700$ kN · m)

8.C2 Uma viga em balanço AB com uma seção transversal retangular de largura b e altura $2c$ suporta uma única força concentrada **P** em sua extremidade A. Elabore um programa de computador para calcular, para qualquer valor de x/c e y/c, (a) as relações $\sigma_{máx}/\sigma_m$ e $\sigma_{mín}/\sigma_m$, em que $\sigma_{máx}$ e $\sigma_{mín}$ são as tensões principais no ponto $K(x,y)$ e σ_m é a tensão normal máxima na mesma seção transversal, e (b) o ângulo θ_p em que os planos principais em K formam com um plano transversal e um plano horizontal passando pelo ponto K. Utilize esse programa para verificar os valores mostrados na Fig. 8.8 e para verificar se $\sigma_{máx}$ excede σ_m se $x \leq 0{,}544c$, conforme está indicado na segunda nota de rodapé na página 499.

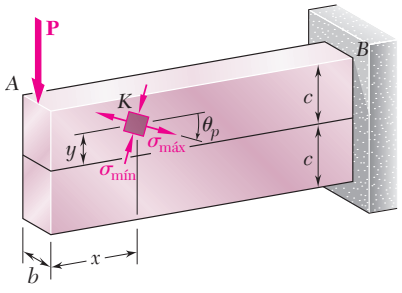


Fig. P8.C2

8.C3 Os discos D_1, D_2, ..., D_n estão fixados, como mostra a Fig. 8.C3, a um eixo cheio AB de comprimento L, diâmetro uniforme d e tensão de cisalhamento admissível τ_{adm}. Forças $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, ..., $\mathbf{P}_n$ de intensidades conhecidas (exceto uma delas) são aplicadas aos discos na parte superior ou inferior de seu diâmetro vertical, ou à esquerda ou direita de seu diâmetro horizontal. Chamando de r_i o raio do disco D_i e de c_i sua distância do suporte A, elabore um programa para calcular (a) a intensidade da força desconhecida $\mathbf{P}_i$ e (b) o menor valor admissível para o diâmetro d do eixo AB. Utilize esse programa para resolver o Problema 8.18.

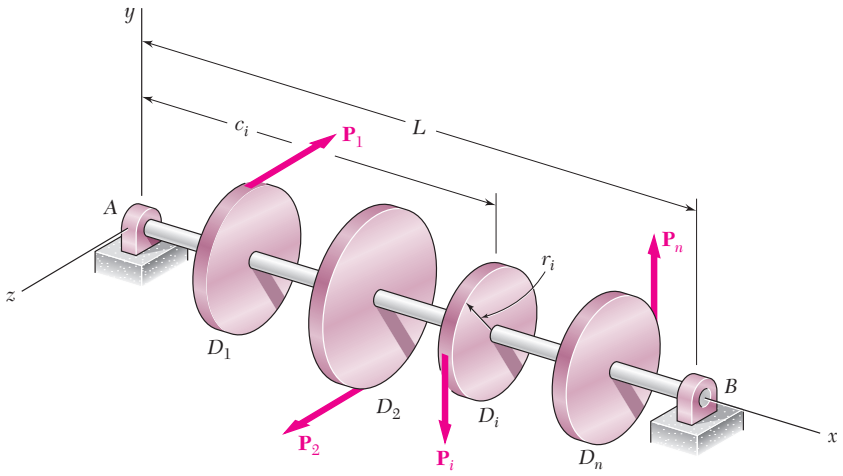


Fig. P8.C3

8.C4 O eixo cheio *AB* de comprimento *L*, diâmetro uniforme *d* e tensão de cisalhamento admissível τ_{adm} gira a determinada velocidade expressa em rpm (Fig. 8.C4). Engrenagens G_1, G_2, . . ., G_n são fixadas ao eixo e cada uma delas se acopla a outra engrenagem (não mostrada) na parte superior ou inferior de seu diâmetro vertical, ou na extremidade esquerda ou direita do diâmetro horizontal. Uma dessas engrenagens é conectada a um motor e o restante delas a várias máquinas-ferramentas. Chamando de r_i o raio da engrenagem G_i, de c_i sua distância do mancal *A*, e de P_i a potência transmitida para essa engrenagem (sinal +) ou tirada da engrenagem (sinal −), elabore um programa de computador para calcular o menor valor admissível do diâmetro *d* do eixo *AB*. Utilize esse programa para resolver os Problemas 8.27 e 8.68.

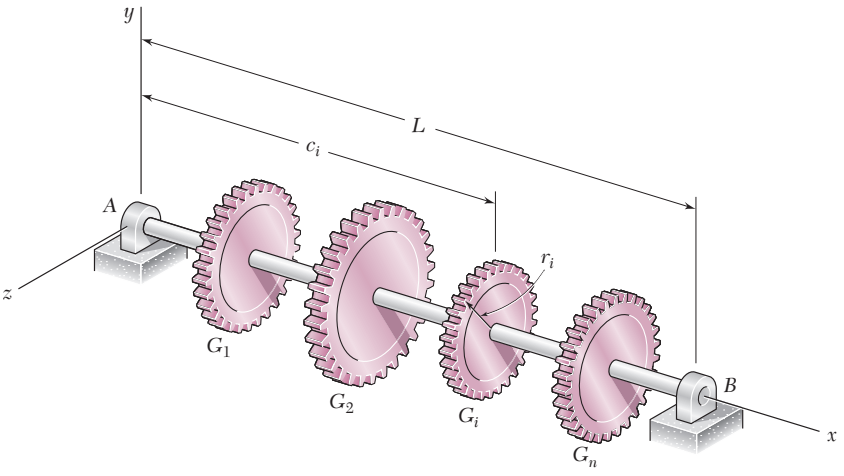


Fig. P8.C4

8.C5 Elabore um programa de computador que possa ser utilizado para calcular as tensões normal e de cisalhamento nos pontos de coordenadas y e z localizados na superfície de uma peça de máquina que tem uma seção retangular. Sabe-se que os esforços internos são equivalentes ao sistema de forças e momentos mostrados. Utilize esse programa para resolver (a) o Problema 8.45*b* e (b) o Problema 8.47*a*.

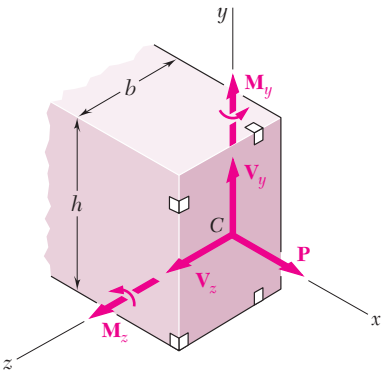


Fig. P8.C5

8.C6 A viga AB tem uma seção transversal retangular de 10 mm × 24 mm. Para o carregamento mostrado, elabore um programa de computador que possa ser utilizado para determinar as tensões normal e de cisalhamento nos pontos H e K para valores de d de 0 a 120 mm, utilizando incrementos de 15 mm. Utilize esse programa para resolver o Problema 8.35.

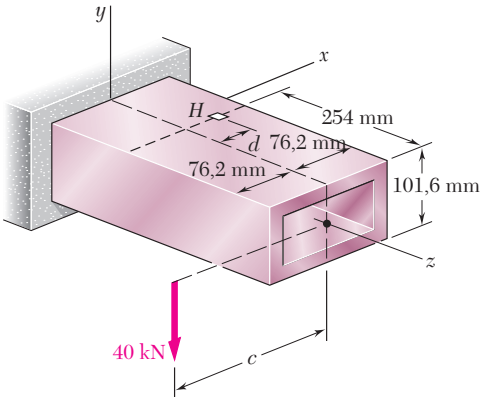


Fig. P8.C7

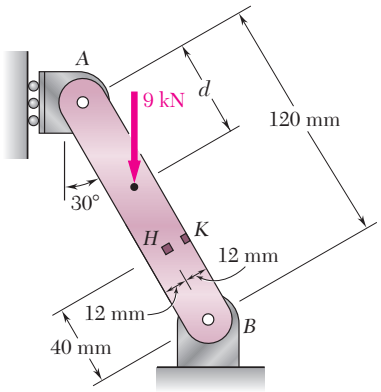


Fig. P8.C6

***8.C7** O tubo estrutural mostrado tem uma espessura de parede uniforme de 7,62 mm. Uma força de 40 kN é aplicada a uma barra (não mostrada) que está soldada à extremidade do tubo. Elabore um programa de computador que possa ser utilizado para determinar, para qualquer valor dado de c, as tensões e os planos principais e a tensão de cisalhamento máxima no ponto H para valores de d de $-76{,}2$ mm até $+76{,}2$ mm, utilizando incrementos de 25,4 mm. Utilize esse programa para resolver o Problema 8.62*a*.

C A P Í T U L O

9

Deflexão de vigas

A foto mostra uma ponte de múltiplas tramas durante a construção. O projeto das vigas da ponte baseia-se nas considerações de resistência e avaliação das deflexões.

9.1. Introdução

No capítulo anterior, aprendemos a projetar vigas considerando critérios de resistência. Neste capítulo vamos nos preocupar com outro aspecto do projeto de vigas: a determinação da *deflexão*. A *deflexão máxima* de uma viga sob um determinado carregamento tem importância especial, pois as especificações de projeto de uma viga geralmente incluem um valor máximo admissível para sua deflexão. Interessa também o fato de que o conhecimento das deflexões é necessário para analisar as *vigas indeterminadas*, que são as vigas nas quais o número de reações nos apoios excede o número de equações de equilíbrio disponíveis para determinar as incógnitas.

Vimos na Seção 4.4 que uma viga prismática submetida à flexão pura é flexionada em um arco de circunferência e que, dentro do regime elástico, a curvatura da superfície neutra pode ser expressa como

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \tag{4.21}$$

em que M é o momento fletor, E, o módulo de elasticidade, e I, o momento de inércia da seção transversal em relação à linha neutra.

Quando uma viga é submetida a um carregamento transversal, a Equação (4.21) permanece válida para qualquer seção transversal, desde que se aplique o princípio de Saint-Venant. No entanto, o momento fletor e a curvatura da superfície neutra variam de uma seção para outra. Chamando de x a distância da seção a partir da extremidade esquerda da viga, escrevemos

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EI} \tag{9.1}$$

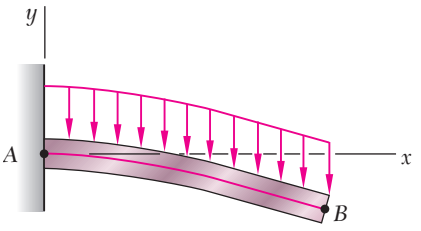
O conhecimento da curvatura em vários pontos de uma viga carregada nos permitirá tirar algumas conclusões gerais referentes à deformação dessa viga. (Seção 9.2).

Para determinarmos a inclinação e a deflexão transversal da viga em qualquer ponto, primeiro determinamos a equação diferencial linear de segunda ordem, dada a seguir, que governa a *linha elástica* e caracteriza a forma da viga deformada (Seção 9.3):

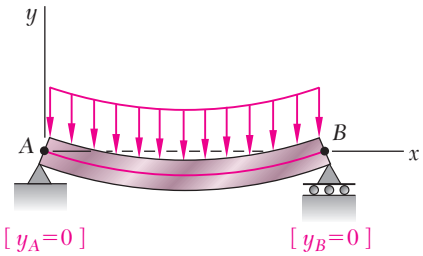
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

Se o momento fletor pode ser representado para todos os valores de x por uma função simples $M(x)$, como no caso das vigas e dos carregamentos mostrados na Fig. 9.1, a inclinação $\theta = dy/dx$ e a deflexão y em qualquer ponto da viga podem ser obtidas por meio de duas integrações sucessivas. As duas constantes de integração introduzidas no processo serão determinadas a partir das condições de contorno indicadas na figura.

No entanto, se forem necessárias funções analíticas diferentes para representar o momento fletor nas várias partes da viga, serão necessárias



(*a*) Viga em balanço



(*b*) Viga biapoiada

Fig. 9.1

também diferentes equações diferenciais, que nos levarão a diferentes funções definindo a linha elástica nas várias partes da viga. Por exemplo, no caso da viga e carregamento da Fig. 9.2, são necessárias duas equações diferenciais, uma para a parte AD da viga e outra para a parte DB. A primeira equação produz as funções θ_1 e y_1, e a segunda, as funções θ_2 e y_2. Ao todo, devem ser determinadas quatro constantes de integração; duas serão obtidas escrevendo-se que a deflexão é zero em A e B, e as outras duas expressando-se o fato de que as partes AD e BD da viga têm a mesma inclinação e a mesma deflexão em D.

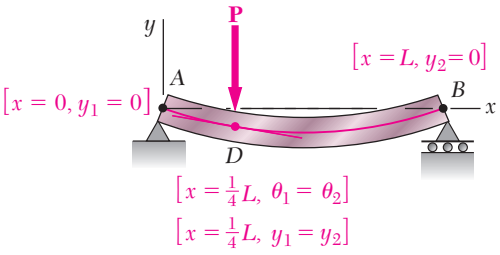


Fig. 9.2

Você observará na Seção 9.4 que, no caso de uma viga suportando uma força distribuída $w(x)$, a linha elástica pode ser obtida diretamente de $w(x)$ por meio de quatro integrações sucessivas. As constantes introduzidas nesse processo serão determinadas pelos valores de contorno de V, M, θ e y.

Na Seção 9.5, discutiremos as *vigas estaticamente indeterminadas*, em que as reações nos apoios envolvem quatro ou mais incógnitas. As três equações de equilíbrio devem ser complementadas com equações obtidas a partir das condições de contorno impostas pelos apoios.

O método descrito anteriormente para a determinação da linha elástica quando várias funções são necessárias para representar o momento fletor M pode ser muito trabalhoso, pois requer que se imponha a condição de que as inclinações e as deflexões em cada ponto de transição sejam iguais. Você verá na Seção 9.6 que o uso de *funções de singularidade* (já discutido na Seção 5.5) simplifica consideravelmente a determinação de θ e y em qualquer ponto da viga.

A próxima parte do capítulo (Seções 9.7 e 9.8) é dedicada ao *método da superposição*, que consiste em determinar separadamente e, em seguida, adicionar a inclinação e a deflexão provocadas pelas várias forças aplicadas a uma viga. Esse procedimento pode ser facilitado usando-se a tabela do Apêndice D, que fornece as inclinações e as deflexões de vigas para vários carregamentos e vários tipos de apoio.

Na Seção 9.9, serão usadas certas propriedades geométricas da linha elástica para determinar a deflexão e a inclinação de uma viga em determinado ponto. Em lugar de expressar o momento fletor como uma função $M(x)$ e integrar essa função analiticamente, será traçado o diagrama representando a variação de M/EI ao longo do comprimento da viga e serão deduzidos dois teoremas dos momentos de área. O *teorema do primeiro momento de área* nos permitirá calcular o ângulo entre as tangentes à viga em dois pontos; *o teorema do segundo momento de área* será usado para calcular a distância vertical de um ponto na viga a uma tangente no segundo ponto.

Os teoremas dos momentos de área serão usados na Seção 9.10 para determinar a inclinação e a deflexão em pontos selecionados das vigas em balanço e vigas com carregamentos simétricos. Na Seção 9.11 você verá que, em muitos casos, as áreas e os momentos de áreas definidos pelos diagramas M/EI podem ser mais facilmente determinados traçando-se o *diagrama de momento fletor por partes*. Quando você estudar o método dos momentos de área, observará que ele é particularmente eficaz no caso de *vigas com seção transversal variável*.

Na Seção 9.12, serão consideradas as vigas com carregamentos assimétricos e vigas biapoiadas com balanço. Uma vez que em um carregamento

assimétrico a deflexão máxima não ocorre no centro da viga, você aprenderá na Seção 9.13 a localizar o ponto em que a tangente é horizontal para determinar a *deflexão máxima*. A Seção 9.14 será dedicada à solução de problemas envolvendo *vigas estaticamente indeterminadas*.

9.2. Deformação de uma viga sob carregamento transversal

No início deste capítulo, recordamos a Equação (4.21) da Seção 4.4, que relaciona a curvatura da superfície neutra e o momento fletor em uma viga em flexão pura. Destacamos que essa equação permanece válida para qualquer seção transversal de uma viga submetida a carregamento transversal, desde que o princípio de Saint-Venant seja aplicável. No entanto, tanto o momento fletor quanto a curvatura da superfície neutra irão variar de uma seção para outra. Chamando de x a distância da seção a partir da extremidade esquerda da viga, escrevemos

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EI} \tag{9.1}$$

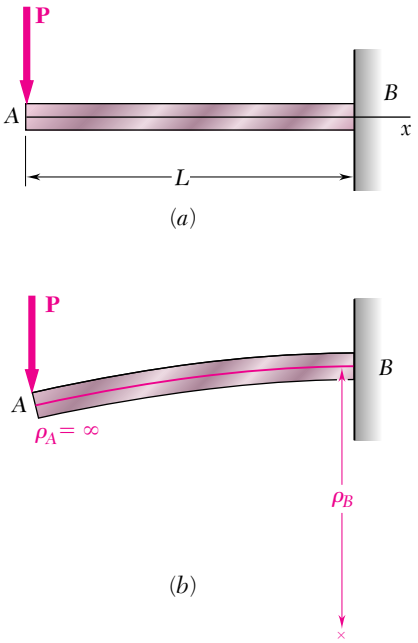


Fig. 9.3

Considere, por exemplo, uma viga em balanço AB de comprimento L submetida a uma força concentrada **P** em sua extremidade livre A (Fig. 9.3*a*). Temos $M(x) = -Px$ e, substituindo em (9.1),

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{Px}{EI}$$

que mostra que a curvatura da superfície neutra varia linearmente com x, desde zero em A, em que o próprio ρ_A é infinito, até $-PL/EI$ em B, em que $|\rho_B| = EI/PL$ (Fig. 9.3*b*).

Considere agora a viga biapoiada com um balanço AD da Fig. 9.4*a* que suporta duas forças concentradas conforme mostra a figura. No diagrama de corpo livre da viga (Fig. 9.4*b*), vemos que as reações nos apoios são $R_A = 1$ kN e $R_C = 5$ kN, respectivamente, e traçamos o diagrama do momento fletor correspondente (Fig. 9.5*a*). Notamos no diagrama que M e, portanto, a curvatura da viga são ambos zero nas extremidades da viga, assim como no ponto E localizado em $x = 4$ m. Entre A e E o momento fletor é positivo e a viga tem a concavidade voltada para cima; entre E e D

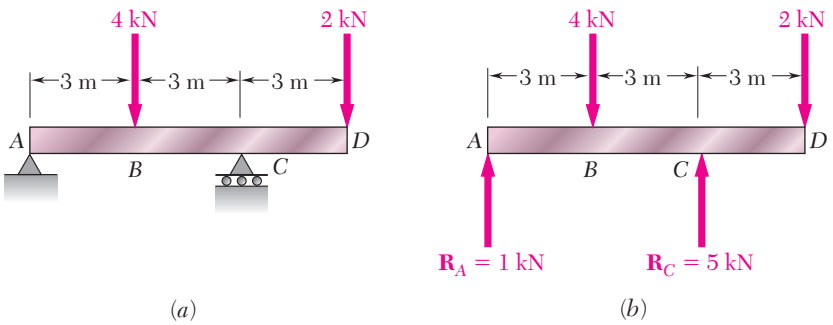


Fig. 9.4

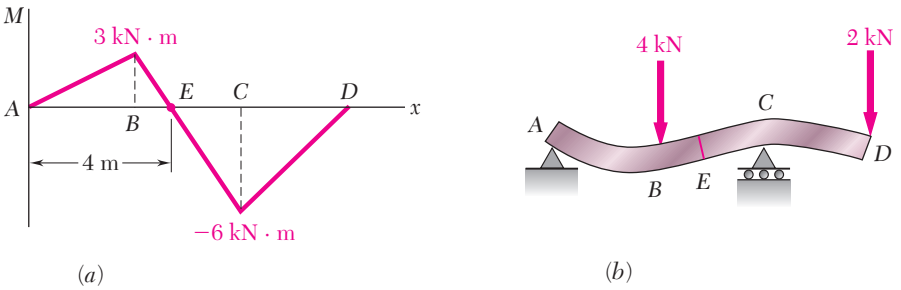


Fig. 9.5

o momento fletor é negativo e a viga tem a concavidade voltada para baixo (Fig. 9.5*b*). Notamos também que o maior valor da curvatura (isto é, o menor valor do raio da curvatura) ocorre no apoio *C*, em que $|M|$ é máximo.

Com base nas informações obtidas a respeito de sua curvatura, temos uma ideia razoavelmente boa sobre a forma da viga deformada. No entanto, a análise e o projeto de uma viga geralmente exigem informações mais precisas sobre a *deflexão* e a *inclinação* da viga em vários pontos. Particularmente importante é o conhecimento da *deflexão máxima* da viga. Na próxima seção, a Equação (9.1) será usada para obter uma relação entre a deflexão y medida em determinado ponto Q no eixo da viga e a distância x desse ponto em relação a alguma origem fixa (Fig. 9.6). A relação obtida será a equação da *linha elástica*, isto é, a equação da curva na qual o eixo da viga é transformado sob determinado carregamento (Fig. 9.6*b*).†

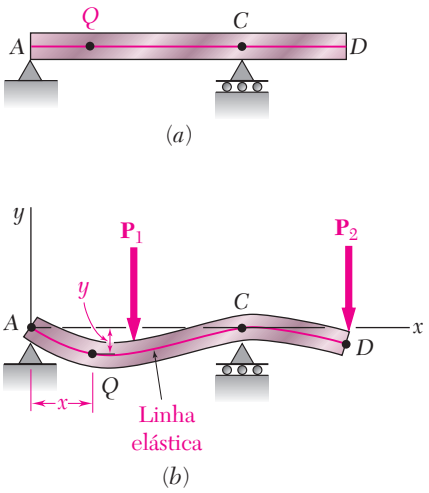


Fig. 9.6

9.3. Equação da linha elástica

Primeiro recordamos do cálculo elementar que a curvatura de uma curva plana em um ponto $Q(x,y)$ pode ser expressa como

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \tag{9.2}$$

em que dy/dx e d^2y/dx^2 são a primeira e a segunda derivadas da função $y(x)$ representada por essa curva. Mas, no caso da linha elástica de uma viga, a inclinação dy/dx é muito pequena, e seu quadrado é desprezível comparado com a unidade. Escrevemos então

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2} \tag{9.3}$$

Substituindo $1/\rho$ de (9.3) em (9.1), temos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \tag{9.4}$$

Uma equação diferencial linear de segunda ordem é obtida; ela é a equação diferencial que governa a linha elástica.

†Devemos notar que, neste capítulo, a letra y representa um deslocamento vertical, embora tenha sido usada em capítulos anteriores para representar a distância de um ponto em uma seção transversal a partir da linha neutra dessa seção.

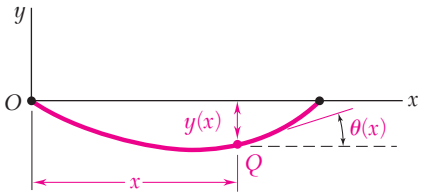


Fig. 9.7

O produto EI é conhecido como *rigidez à flexão* e, se ele varia ao longo da viga, como no caso de uma viga de altura variável, devemos expressá-lo como uma função de x antes de integrar a Equação (9.4). No entanto, no caso de uma viga prismática, que é o caso considerado aqui, a rigidez à flexão é constante. Podemos então multiplicar ambos os membros da Equação (9.4) por EI e integrar em x. Escrevemos

$$EI\frac{dy}{dx} = \int_0^x M(x)\,dx + C_1 \tag{9.5}$$

em que C_1 é uma constante de integração. Chamando de $\theta(x)$ o ângulo, medido em radianos, que a tangente com a linha elástica em Q forma com a horizontal (Fig. 9.7), e lembrando que esse ângulo é muito pequeno, temos

$$\frac{dy}{dx} = \text{tg}\,\theta \simeq \theta(x)$$

Assim, escrevemos a Equação (9.5) na forma alternativa

$$EI\,\theta(x) = \int_0^x M(x)\,dx + C_1 \tag{9.5′}$$

Integrando ambos os membros da Equação (9.5) em x, temos

$$EI\,y = \int_0^x \left[\int_0^x M(x)\,dx + C_1\right]dx + C_2$$

$$EI\,y = \int_0^x dx \int_0^x M(x)\,dx + C_1x + C_2 \tag{9.6}$$

em que C_2 é uma segunda constante de integração, e onde o primeiro termo no membro da direita representa a função de x obtida integrando-se duas vezes em x o momento fletor $M(x)$. Se não fosse pelo fato de que as constantes C_1 e C_2 estão ainda indeterminadas, a Equação (9.6) definiria a deflexão da viga em qualquer ponto Q, e a Equação (9.5) ou (9.5') definiria de modo semelhante a inclinação da viga em Q.

As constantes C_1 e C_2 são determinadas pelas *condições de contorno* ou, mais precisamente, pelas condições impostas à viga pelos seus apoios. Limitando nossa análise nessa seção a *vigas estaticamente determinadas*, isto é, a vigas vinculadas de uma forma que as reações nos apoios podem ser obtidas pelos métodos da estática, notamos que somente três tipos de vigas precisam ser considerados aqui (Fig. 9.8): (*a*) a *viga biapoiada*, (*b*) a *viga biapoiada com balanço* e (*c*) a *viga em balanço*.

Nos dois primeiros casos, os apoios consistem em um apoio fixo em A e um apoio móvel em B, e requerem que a deflexão seja zero em cada um desses pontos. Fazendo primeiro $x = x_A$, $y = y_A = 0$ na Equação (9.6), e depois $x = x_B$, $y = y_B = 0$ na mesma equação, obtemos duas equações que podem ser resolvidas para C_1 e C_2. No caso da viga em balanço (Fig. 9.8*c*), notamos que a deflexão e a inclinação em A devem ser zero. Fazendo $x = x_A$, $y = y_A = 0$ na Equação (9.6), e $x = x_A$, $\theta = \theta_A = 0$ na Equação (9.5′), obtemos novamente duas equações que podem ser resolvidas para C_1 e C_2.

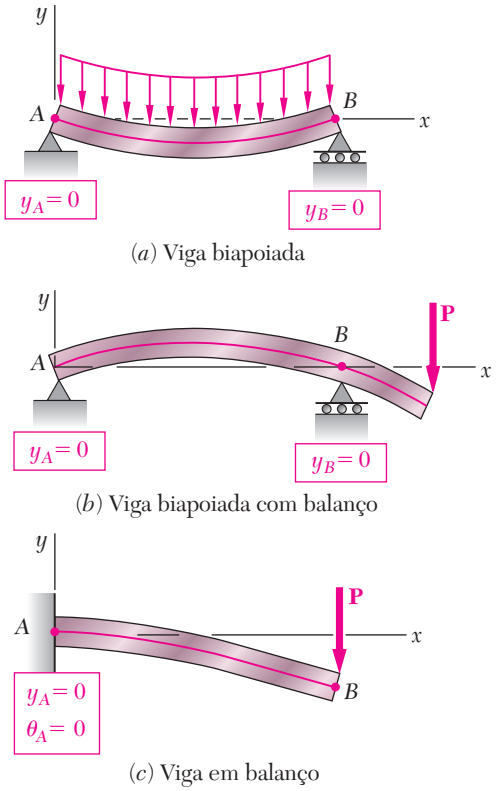


Fig. 9.8 Condições de contorno para vigas estaticamente determinadas.

EXEMPLO 9.1

A viga em balanço *AB* tem seção transversal uniforme e suporta uma força **P** na sua extremidade livre *A* (Fig. 9.9). Determine a equação da linha elástica, a deflexão e a inclinação em *A*.

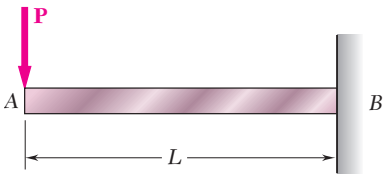


Fig. 9.9

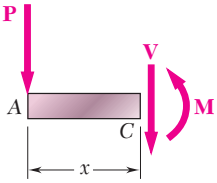


Fig. 9.10

Usando o diagrama de corpo livre da parte *AC* da viga (Fig. 9.10), em que *C* está localizado a uma distância *x* da extremidade *A*, encontramos

$$M = -Px \tag{9.7}$$

Substituindo *M* na Equação (9.4) e multiplicando ambos os membros pela constante *EI*, escrevemos

$$EI\,\frac{d^2y}{dx^2} = -Px$$

Integrando em *x*, obtemos

$$EI\,\frac{dy}{dx} = -\tfrac{1}{2}Px^2 + C_1 \tag{9.8}$$

Observamos agora que na extremidade engastada *B* temos $x = L$ e $\theta = dy/dx = 0$ (Fig. 9.11). Substituindo esses valores na Equação (9.8) e resolvendo para C_1, temos

$$C_1 = \tfrac{1}{2}PL^2$$

que usamos novamente na (9.8):

$$EI\,\frac{dy}{dx} = -\tfrac{1}{2}Px^2 + \tfrac{1}{2}PL^2 \tag{9.9}$$

Integrando ambos os membros da Equação (9.9), escrevemos

$$EI\,y = -\tfrac{1}{6}Px^3 + \tfrac{1}{2}PL^2x + C_2 \tag{9.10}$$

Mas em *B* temos $x = L$, $y = 0$. Substituindo na Equação (9.10), temos

$$0 = -\tfrac{1}{6}PL^3 + \tfrac{1}{2}PL^3 + C_2$$
$$C_2 = -\tfrac{1}{3}PL^3$$

Utilizando o valor de C_2 novamente na Equação (9.10), obtemos a equação da linha elástica:

$$EI\,y = -\tfrac{1}{6}Px^3 + \tfrac{1}{2}PL^2x - \tfrac{1}{3}PL^3$$

ou

$$y = \frac{P}{6EI}(-x^3 + 3L^2x - 2L^3) \tag{9.11}$$

A deflexão e a inclinação em *A* são obtidas fazendo $x = 0$ nas Equações (9.11) e (9.9). Encontramos

$$y_A = -\frac{PL^3}{3EI} \quad \text{e} \quad \theta_A = \left(\frac{dy}{dx}\right)_A = \frac{PL^2}{2EI}$$

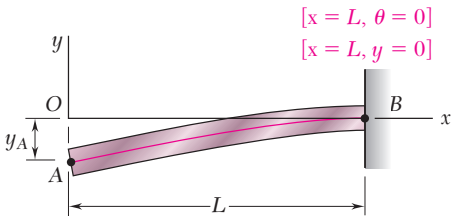


Fig. 9.11

EXEMPLO 9.2

A viga prismática biapoiada *AB* está submetida a uma força *w* uniformemente distribuída por unidade de comprimento (Fig. 9.12). Determine a equação da linha elástica e a deflexão máxima da viga.

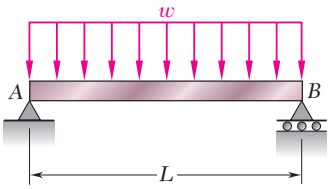


Fig. 9.12

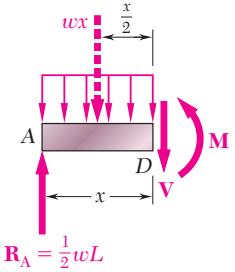


Fig. 9.13

Desenhando o diagrama de corpo livre da parte *AD* da viga (Fig. 9.13) e tomando os momentos em relação a *D*, vemos que

$$M = \tfrac{1}{2}wLx - \tfrac{1}{2}wx^2 \tag{9.12}$$

Substituindo *M* na Equação (9.4) e multiplicando ambos os membros desta equação pela constante *EI*, escrevemos

$$EI\,\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2}wx^2 + \frac{1}{2}wLx \tag{9.13}$$

Integrando duas vezes em *x*, temos

$$EI\,\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{6}wx^3 + \frac{1}{4}wLx^2 + C_1 \tag{9.14}$$

$$EI\,y = -\frac{1}{24}wx^4 + \frac{1}{12}wLx^3 + C_1x + C_2 \tag{9.15}$$

Observando que $y = 0$ em ambas as extremidades da viga (Fig. 9.14), calculamos primeiro $x = 0$ e $y = 0$ na Equação (9.15) e obtemos $C_2 = 0$. Depois calculamos $x = L$ e $y = 0$ na mesma equação e escrevemos

$$0 = -\tfrac{1}{24}wL^4 + \tfrac{1}{12}wL^4 + C_1L$$
$$C_1 = -\tfrac{1}{24}wL^3$$

Utilizando os valores de C_1 e C_2 na Equação (9.15), obtemos a equação da linha elástica:

$$EI\,y = -\tfrac{1}{24}wx^4 + \tfrac{1}{12}wLx^3 - \tfrac{1}{24}wL^3x$$

ou

$$y = \frac{w}{24EI}(-x^4 + 2Lx^3 - L^3x) \qquad (9.16)$$

Substituindo na Equação (9.14) o valor obtido para C_1, verificamos que a inclinação da viga é zero para $x = L/2$ e que a linha elástica tem um mínimo no ponto médio C da viga (Fig. 9.15). Usando $x = L/2$ na Equação (9.16), temos

$$y_C = \frac{w}{24EI}\left(-\frac{L^4}{16} + 2L\frac{L^3}{8} - L^3\frac{L}{2}\right) = -\frac{5wL^4}{384EI}$$

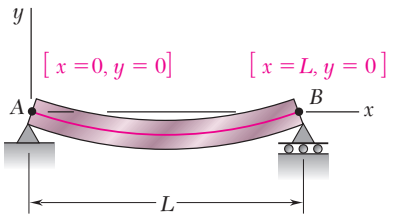


Fig. 9.14

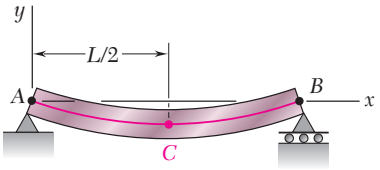


Fig. 9.15

A deflexão máxima ou, mais precisamente, o valor máximo absoluto da deflexão é então

$$|y|_{\text{máx}} = \frac{5wL^4}{384EI}$$

Fig. 9.16 Uma função diferente $M(x)$ é necessária em cada parte dos braços em balanço.

Em cada um dos dois exemplos considerados até agora, foi necessário somente um diagrama de corpo livre para determinar o momento fletor na viga. Consequentemente, foi usada uma única função de x para representar M ao longo da viga. Isso, no entanto, não é o que geralmente ocorre. Forças concentradas, reações nos apoios ou descontinuidades em uma força distribuída tornam necessárias a divisão da viga em várias partes e a representação do momento fletor por uma função $M(x)$ diferente em cada uma dessas partes da viga (Fig. 9.16). Cada uma das funções $M(x)$ levará então a uma expressão diferente para a inclinação $\theta(x)$ e para a deflexão $y(x)$. Como cada uma das expressões obtidas para a deflexão deve conter duas constantes de integração, teremos de determinar um grande número de constantes. Conforme você verá no próximo exemplo, as condições de contorno adicionais necessárias podem ser obtidas observando-se que, embora a força cortante e o momento fletor possam ser descontínuos em vários pontos em uma viga, a *deflexão* e a *inclinação* da viga *não podem ser descontínuas* em nenhum ponto.

EXEMPLO 9.3

Para a viga prismática e o carregamento mostrados (Fig. 9.17), determine a inclinação e a deflexão no ponto D.

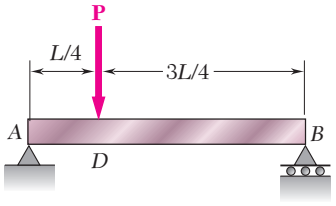


Fig. 9.17

Devemos dividir a viga em duas partes, AD e DB, e determinar a função $y(x)$ que define a linha elástica para cada uma dessas partes.

1. De A a D ($x < L/4$). Desenhamos o diagrama de corpo livre de uma parte AE da viga, de comprimento $x < L/4$ (Fig. 9.18). Tomando os momentos em relação a E, temos

$$M_1 = \frac{3P}{4}x \tag{9.17}$$

ou, usando a Equação (9.4),

$$EI\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{3}{4}Px \tag{9.18}$$

em que $y_1(x)$ é a função que define a linha elástica *para a parte AD da viga*. Integrando em x, temos

$$EI\,\theta_1 = EI\frac{dy_1}{dx} = \frac{3}{8}Px^2 + C_1 \tag{9.19}$$

$$EI\,y_1 = \frac{1}{8}Px^3 + C_1x + C_2 \tag{9.20}$$

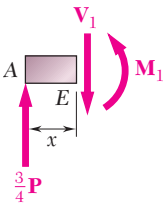


Fig. 9.18

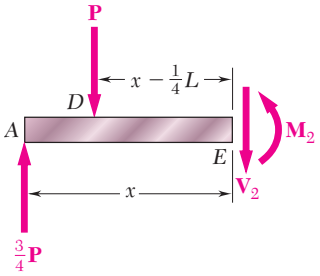


Fig. 9.19

2. De D a B ($x > L/4$). Desenhamos agora o diagrama de corpo livre de uma parte AE da viga de comprimento $x > L/4$ (Fig. 9.19) e escrevemos

$$M_2 = \frac{3P}{4}x - P\left(x - \frac{L}{4}\right) \tag{9.21}$$

ou, usando a Equação (9.4) e rearranjando os termos,

$$EI\frac{d^2y_2}{dx^2} = -\frac{1}{4}Px + \frac{1}{4}PL \tag{9.22}$$

em que $y_2(x)$ é a função que define a linha elástica *para a parte DB da viga*. Integrando em x, temos

$$EI\,\theta_2 = EI\frac{dy_2}{dx} = -\frac{1}{8}Px^2 + \frac{1}{4}PLx + C_3 \tag{9.23}$$

$$EI\,y_2 = -\frac{1}{24}Px^3 + \frac{1}{8}PLx^2 + C_3x + C_4 \tag{9.24}$$

Determinação das constantes de integração. As condições que devem ser satisfeitas pelas constantes de integração foram resumidas na Fig. 9.20. No apoio A, em que a deflexão é

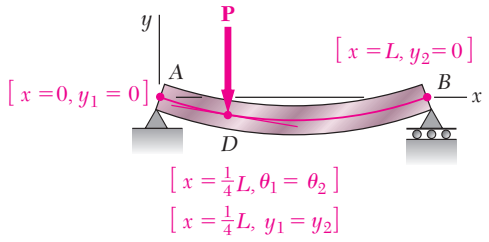


Fig. 9.20

definida pela Equação (9.20), devemos ter $x = 0$ e $y_1 = 0$. No apoio B, onde a deflexão é definida pela Equação (9.24), devemos ter $x = L$ e $y_2 = 0$. Além disso, o fato de que não deve haver nenhuma variação brusca na deflexão ou na inclinação no ponto D requer que $y_1 = y_2$ e $\theta_1 = \theta_2$ quando $x = L/4$. Temos portanto:

$$[x = 0, y_1 = 0], \text{ Equação (9.20)}: \qquad 0 = C_2 \tag{9.25}$$

$[x = L, y_2 = 0]$, Equação (9.24):

$$0 = \frac{1}{12}PL^3 + C_3L + C_4 \tag{9.26}$$

$[x = L/4, \theta_1 = \theta_2]$, Equações (9.19) e (9.23):

$$\frac{3}{128}PL^2 + C_1 = \frac{7}{128}PL^2 + C_3 \tag{9.27}$$

$[x = L/4, y_1 = y_2]$, Equações (9.20) e (9.24):

$$\frac{PL^3}{512} + C_1\frac{L}{4} = \frac{11PL^3}{1536} + C_3\frac{L}{4} + C_4 \tag{9.28}$$

Resolvendo essas equações simultaneamente, encontramos

$$C_1 = -\frac{7PL^2}{128},\ C_2 = 0,\ C_3 = -\frac{11PL^2}{128},\ C_4 = \frac{PL^3}{384}$$

Substituindo C_1 e C_2 nas Equações (9.19) e (9.20), escrevemos que para $x \le L/4$,

$$EI\,\theta_1 = \frac{3}{8}Px^2 - \frac{7PL^2}{128} \tag{9.29}$$

$$EI\,y_1 = \frac{1}{8}Px^3 - \frac{7PL^2}{128}x \tag{9.30}$$

Usando $x = L/4$ em cada uma dessas equações, vemos que a inclinação e a deflexão no ponto D são, respectivamente,

$$\theta_D = -\frac{PL^2}{32EI} \qquad \text{e} \qquad y_D = -\frac{3PL^3}{256EI}$$

Observamos que, como $\theta_D \neq 0$, a deflexão em D *não* é a deflexão máxima da viga.

*9.4. Determinação direta da linha elástica com base na força distribuída

Vimos na Seção 9.3 que a equação da linha elástica pode ser obtida integrando-se duas vezes a equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \tag{9.4}$$

em que $M(x)$ é o momento fletor na viga. Recordamos agora da Seção 5.3 que, quando uma viga suporta uma força distribuída $w(x)$, temos $dM/dx = V$ e $dV/dx = -w$ em qualquer ponto. Diferenciando ambos os membros da Equação (9.4) em relação a x e considerando que EI seja constante, temos então

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{EI}\frac{dM}{dx} = \frac{V(x)}{EI} \tag{9.31}$$

e, diferenciando novamente,

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{1}{EI}\frac{dV}{dx} = -\frac{w(x)}{EI}$$

Concluímos que quando uma viga prismática suporta uma força distribuída $w(x)$, sua linha elástica é governada pela equação diferencial linear de quarta ordem

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{w(x)}{EI} \tag{9.32}$$

Multiplicando ambos os membros da Equação (9.32) pela constante EI e integrando quatro vezes, escrevemos

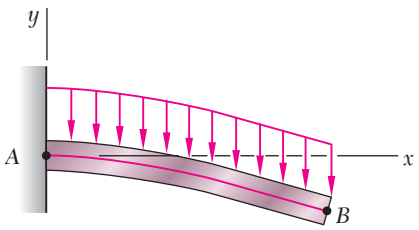
$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = -w(x)$$

$$EI\frac{d^3y}{dx^3} = V(x) = -\int w(x)\,dx + C_1$$

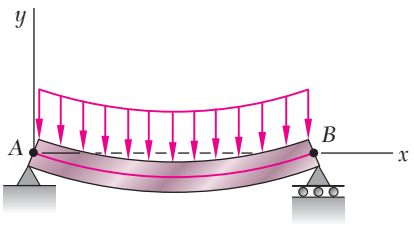
$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M(x) = -\int dx \int w(x)\,dx + C_1x + C_2 \tag{9.33}$$

$$EI\frac{dy}{dx} = EI\,\theta(x) = -\int dx \int dx \int w(x)\,dx + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3$$

$$EI\,y(x) = -\int dx \int dx \int dx \int w(x)\,dx + \frac{1}{6}C_1x^3 + \frac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4$$



(*a*) Viga em balanço



(*b*) Viga biapoiada

Fig. 9.21 Condições de contorno para vigas submetidas a uma força distribuída.

As quatro constantes de integração podem ser determinadas a partir das condições de contorno. Essas incluem (*a*) as condições impostas na deflexão ou na inclinação da viga por seus apoios (Seção 9.3) e (*b*) as condições de que V e M sejam zero na extremidade livre de uma viga em balanço, ou que M seja zero em ambas as extremidades de uma viga biapoiada (Seção 5.3). Isso foi ilustrado na Fig. 9.21.

O método apresentado aqui pode ser utilizado eficazmente com vigas em balanço ou biapoiadas submetidas a uma força distribuída. Porém, no caso de viga biapoiada com balanço, as reações nos apoios provocarão descontinuidades na força cortante, isto é, na terceira derivada de y, e seriam necessárias outras funções para definir a linha elástica sobre toda a viga.

EXEMPLO 9.4

A viga prismática biapoiada AB suporta uma força uniformemente distribuída w por unidade de comprimento (Fig. 9.22). Determine a equação da linha elástica e a deflexão máxima da viga. (Este é o mesmo caso resolvido no Exemplo 9.2.)

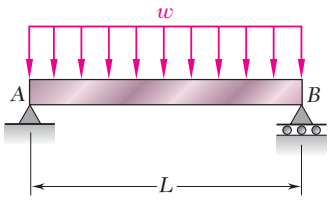


Fig. 9.22

Como w = constante, as primeiras três equações das Equações (9.33) resultam em

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = -w$$

$$EI\frac{d^3y}{dx^3} = V(x) = -wx + C_1$$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M(x) = -\frac{1}{2}wx^2 + C_1x + C_2 \qquad (9.34)$$

Observando que as condições de contorno requerem que $M = 0$ em ambas as extremidades da viga (Fig. 9.23), primeiro usamos $x = 0$ e $M = 0$ na Equação (9.34) e obtemos $C_2 = 0$. Depois usamos $x = L$ e $M = 0$ na mesma equação e obtemos $C_1 = \frac{1}{2}\,wL$.

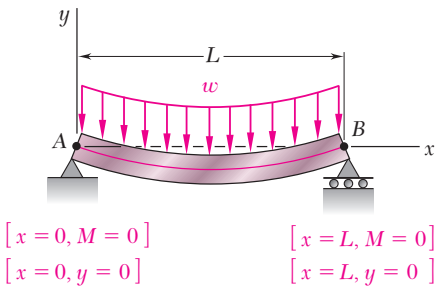


Fig. 9.23

Utilizando esses valores de C_1 e C_2 de volta na Equação (9.34), e integrando duas vezes, escrevemos

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2}wx^2 + \frac{1}{2}wLx$$

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{6}wx^3 + \frac{1}{4}wLx^2 + C_3$$

$$EI\,y = -\frac{1}{24}wx^4 + \frac{1}{12}wLx^3 + C_3x + C_4 \qquad (9.35)$$

Mas as condições de contorno também requerem $y = 0$ em ambas as extremidades da viga. Utilizando $x = 0$ e $y = 0$ na Equação (9.35), obtemos $C_4 = 0$; usando $x = L$ e $y = 0$ na mesma equação, escrevemos

$$0 = -\tfrac{1}{24}wL^4 + \tfrac{1}{12}wL^4 + C_3L$$

$$C_3 = -\tfrac{1}{24}wL^3$$

Utilizando os valores de C_3 e C_4 novamente na Equação (9.35) e dividindo ambos os membros por EI, obtemos a equação da linha elástica:

$$y = \frac{w}{24EI}(-x^4 + 2Lx^3 - L^3x) \qquad (9.36)$$

O valor da deflexão máxima é obtido calculando-se $x = L/2$ na Equação (9.36). Temos

$$|y|_{\text{máx}} = \frac{5wL^4}{384EI}$$

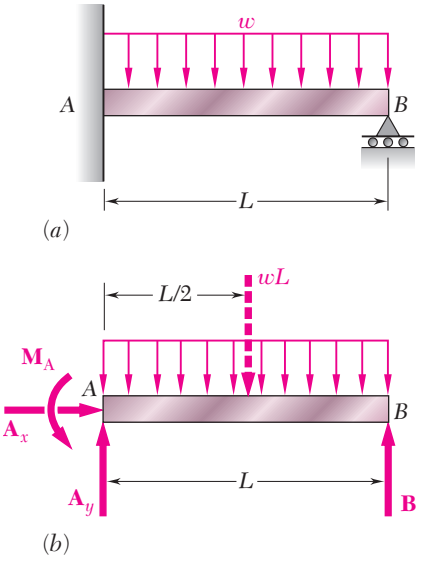


Fig. 9.24

9.5. Vigas estaticamente indeterminadas

Nas seções anteriores, nossa análise esteve limitada a vigas estaticamente determinadas. Considere agora a viga prismática AB (Fig. 9.24*a*), que tem uma extremidade engastada em A e a outra apoiada em B. Desenhando o diagrama de corpo livre da viga (Fig. 9.24*b*), notamos que as reações envolvem quatro incógnitas, embora tenhamos apenas três equações de equilíbrio, que são

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma M_A = 0 \tag{9.37}$$

Como somente A_x pode ser determinado por meio dessas equações, concluímos que a viga é *estaticamente indeterminada*.

Porém, recordamos, dos Capítulos 2 e 3, que, em um problema estaticamente indeterminado, as reações podem ser obtidas considerando-se as *deformações* da estrutura envolvida. Iremos, portanto, prosseguir com o cálculo da inclinação e da deflexão ao longo da viga. Seguindo o método utilizado na Seção 9.3, primeiro expressamos o momento fletor $M(x)$ em um ponto qualquer de AB em função da distância x de A, da força aplicada e das reações desconhecidas. Integrando em x, obtemos expressões para θ e y contendo duas incógnitas adicionais, que são as constantes de integração C_1 e C_2. Mas ao todo estão disponíveis seis equações para determinar as reações e as constantes C_1 e C_2; elas são as três equações de equilíbrio (9.37) e as três equações expressando que as condições de contorno estão satisfeitas, isto é, que a inclinação e a deflexão em A são zero e que a deflexão em B é zero (Fig. 9.25). Assim, podem ser determinadas as reações nos apoios e pode ser obtida a equação da linha elástica.

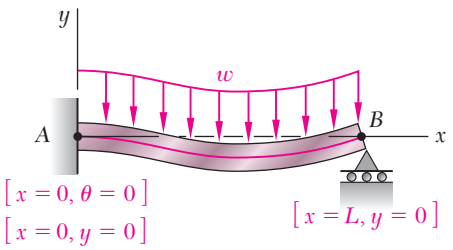


Fig. 9.25

EXEMPLO 9.5

Determine as reações nos apoios da viga prismática da Fig. 9.24*a*.

Equações de equilíbrio. Do diagrama de corpo livre da Fig. 9.24*b* escrevemos

$$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \qquad A_x = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad A_y + B - wL = 0 \tag{9.38}$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: \qquad M_A + BL - \tfrac{1}{2}wL^2 = 0$$

Equação da linha elástica. Desenhando o diagrama de corpo livre de uma parte da viga AC (Fig. 9.26), escrevemos

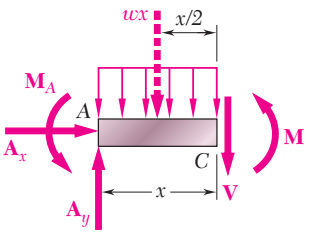


Fig. 9.26

$$+\circlearrowleft \Sigma M_C = 0: \qquad M + \tfrac{1}{2}wx^2 + M_A - A_y x = 0 \tag{9.39}$$

Resolvendo a Equação (9.39) para M e substituindo na Equação (9.4), escrevemos

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2}wx^2 + A_y x - M_A$$

Integrando em x, temos

$$EI\,\theta = EI\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{6}wx^3 + \frac{1}{2}A_y x^2 - M_A x + C_1 \qquad (9.40)$$

$$EI\,y = -\frac{1}{24}wx^4 + \frac{1}{6}A_y x^3 - \frac{1}{2}M_A x^2 + C_1 x + C_2 \qquad (9.41)$$

Utilizando, agora, as condições de contorno indicadas na Fig. 9.25, usamos $x = 0$, $\theta = 0$ na Equação (9.40), $x = 0$, $y = 0$ na Equação (9.41), e concluímos que $C_1 = C_2 = 0$. Assim, escrevemos a Equação (9.41) da seguinte forma:

$$EI\,y = -\tfrac{1}{24}wx^4 + \tfrac{1}{6}A_y x^3 - \tfrac{1}{2}M_A x^2 \qquad (9.42)$$

Mas a terceira condição de contorno requer $y = 0$ para $x = L$. Usando esses valores em (9.42), escrevemos

$$0 = -\tfrac{1}{24}wL^4 + \tfrac{1}{6}A_y L^3 - \tfrac{1}{2}M_A L^2$$

ou

$$3M_A - A_y L + \tfrac{1}{4}wL^2 = 0 \qquad (9.43)$$

Resolvendo essa equação simultaneamente com as três equações de equilíbrio (9.38), obtemos as reações nos apoios:

$$A_x = 0 \qquad A_y = \tfrac{5}{8}wL \qquad M_A = \tfrac{1}{8}wL^2 \qquad B = \tfrac{3}{8}wL$$

No exemplo que acabamos de considerar, havia uma reação redundante, isto é, havia uma reação a mais do que podia ser determinada por meio, somente, das equações de equilíbrio. Dizemos que a viga correspondente é *estaticamente indeterminada com um grau de indeterminação ou um grau de hiperasticidade.* Outro exemplo de uma viga indeterminada de um grau de indeterminação é o fornecido no Problema Resolvido 9.3. Se os apoios da viga são tais que duas reações são redundantes (Fig. 9.27*a*), dizemos que a viga é *indeterminada com dois graus de indeterminação*. Embora tenhamos agora cinco reações desconhecidas (Fig. 9.27*b*), descobrimos que quatro equações podem ser obtidas das condições de contorno (Fig. 9.27*c*). Assim, temos um total de sete equações disponíveis para determinar as cinco reações e as duas constantes de integração.

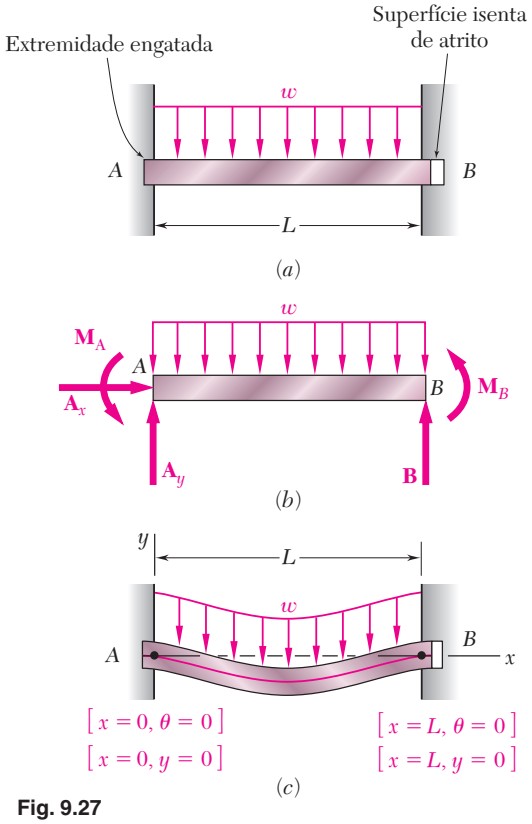
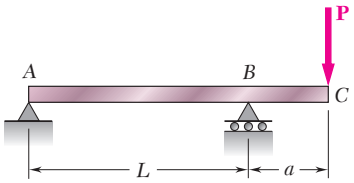


Fig. 9.27

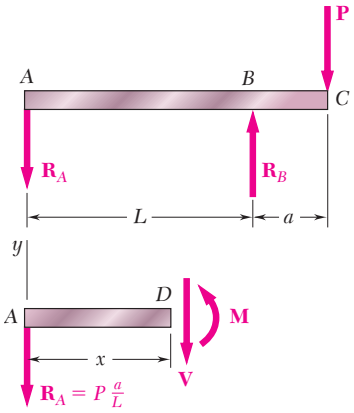


PROBLEMA RESOLVIDO 9.1

A viga de aço biapoiada com balanço *ABC* suporta uma força concentrada **P** na extremidade *C*. Para a parte *AB* da viga, (*a*) determine a equação da linha elástica, (*b*) determine a deflexão máxima e (*c*) avalie $y_{máx}$ para os seguintes dados:

W 360 × 101	$I = 302 \times 10^6$ mm^4	$E = 200$ GPa
$P = 220$ kN	$L = 4{,}5$ m	$a = 1{,}2$ m

SOLUÇÃO



Diagramas de corpo livre. Reações: $\mathbf{R}_A = Pa/L \downarrow$ e $\mathbf{R}_B = \mathrm{P}(1 + a/L) \uparrow$. Utilizando o diagrama de corpo livre da parte *AD* da viga, de comprimento *x*, encontramos

$$M = -P\frac{a}{L}x \qquad (0 < x < L)$$

Equação diferencial da linha elástica. Utilizando a Equação (9.4) e escrevemos

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -P\frac{a}{L}x$$

Considerando que a rigidez à flexão *EI* é constante, integramos duas vezes e encontramos

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}P\frac{a}{L}x^2 + C_1 \tag{1}$$

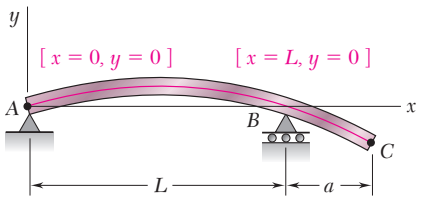
$$EI\,y = -\frac{1}{6}P\frac{a}{L}x^3 + C_1x + C_2 \tag{2}$$

Determinação das constantes. Para as condições de contorno mostradas, temos

$[x = 0, y = 0]$: Da Equação (2), encontramos $C_2 = 0$

$[x = L, y = 0]$: Utilizando novamente a Equação (2), escrevemos

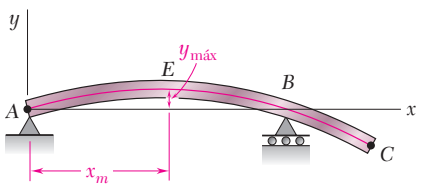
$$EI(0) = -\frac{1}{6}P\frac{a}{L}L^3 + C_1L \qquad C_1 = +\frac{1}{6}PaL$$



***a.* Equação da linha elástica.** Substituindo C_1 e C_2 nas Equações (1) e (2), temos

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}P\frac{a}{L}x^2 + \frac{1}{6}PaL \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{PaL}{6EI}\left[1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2\right] \tag{3}$$

$$EI\,y = -\frac{1}{6}P\frac{a}{L}x^3 + \frac{1}{6}PaLx \qquad y = \frac{PaL^2}{6EI}\left[\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L}\right)^3\right] \tag{4}$$ ◀



***b.* Deflexão máxima na parte *AB*.** A deflexão máxima $y_{máx}$ ocorre no ponto *E* em que a inclinação da linha elástica é zero. Utilizando $dy/dx = 0$ na Equação (3), determinamos a abscissa x_m do ponto *E*:

$$0 = \frac{PaL}{6EI}\left[1 - 3\left(\frac{x_m}{L}\right)^2\right] \qquad x_m = \frac{L}{\sqrt{3}} = 0{,}577L$$

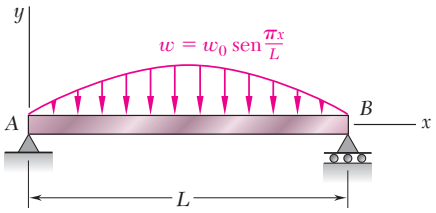
Substituímos $x_m/L = 0{,}577$ na Equação (4) e temos

$$y_{máx} = \frac{PaL^2}{6EI}[(0{,}577) - (0{,}577)^3] \qquad y_{máx} = 0{,}0642\frac{PaL^2}{EI}$$ ◀

***c.* Avaliação de $y_{máx}$.** Para os dados fornecidos, o valor de $y_{máx}$ é

$$y_{máx} = 0{,}0642\frac{(220 \times 10^3\ \mathrm{N})(1{,}2\ \mathrm{m})(4{,}5\ \mathrm{m})^2}{(200 \times 10^9\ \mathrm{N/m^2})(302 \times 10^{-6}\mathrm{m}^4)}$$

$$y_{máx} = 5{,}7 \times 10^{-3}\ \mathrm{m} = 5{,}7\ \mathrm{mm}$$ ◀



PROBLEMA RESOLVIDO 9.2

Para a viga e o carregamento mostrados, determine (*a*) a equação da linha elástica, (*b*) a inclinação na extremidade *A*, (*c*) a deflexão máxima.

SOLUÇÃO

Equação diferencial da linha elástica. Da Equação (9.32),

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = -w(x) = -w_0 \operatorname{sen}\frac{\pi x}{L} \tag{1}$$

Integrando a Equação (1) duas vezes:

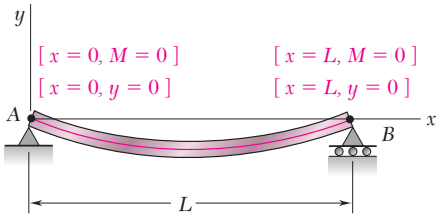
$$EI\frac{d^3y}{dx^3} = V = +w_0\frac{L}{\pi}\cos\frac{\pi x}{L} + C_1 \tag{2}$$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M = +w_0\frac{L^2}{\pi^2}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{L} + C_1x + C_2 \tag{3}$$

Condições de contorno:

$[x = 0, M = 0]$: Da Equação (3), encontramos $C_2 = 0$

$[x = L, M = 0]$: Utilizando novamente a Equação (3), escrevemos



$$0 = w_0\frac{L^2}{\pi^2}\operatorname{sen}\pi + C_1L \qquad C_1 = 0$$

Assim:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = +w_0\frac{L^2}{\pi^2}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{L} \tag{4}$$

Integrando a Equação (4) duas vezes:

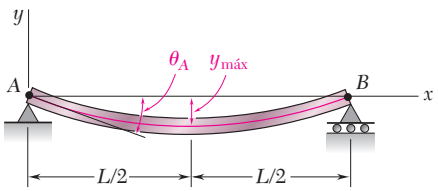
$$EI\frac{dy}{dx} = EI\,\theta = -w_0\frac{L^3}{\pi^3}\cos\frac{\pi x}{L} + C_3 \tag{5}$$

$$EI\,y = -w_0\frac{L^4}{\pi^4}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{L} + C_3x + C_4 \tag{6}$$

Condições de contorno:

$[x = 0, y = 0]$: Utilizando a Equação (6), encontramos $C_4 = 0$

$[x = L, y = 0]$: Utilizando novamente a Equação (6), encontramos $C_3 = 0$



***a.* Equação da linha elástica**

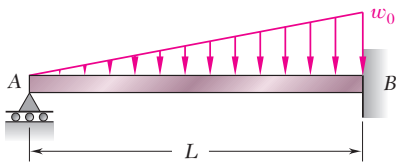
$$EIy = -w_0\frac{L^4}{\pi^4}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{L} \blacktriangleleft$$

***b.* Inclinação na extremidade *A*.** Para $x = 0$, temos

$$EI\,\theta_A = -w_0\frac{L^3}{\pi^3}\cos 0 \qquad \theta_A = \frac{w_0L^3}{\pi^3EI}\curvearrowright \blacktriangleleft$$

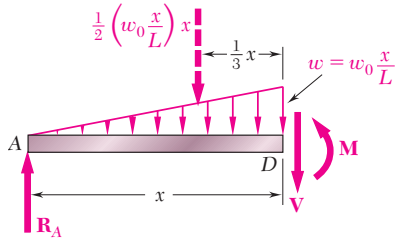
***c.* Deflexão máxima.** Para $x = \frac{1}{2}L$

$$ELy_{máx} = -w_0\frac{L^4}{\pi^4}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \qquad y_{máx} = \frac{w_0L^4}{\pi^4EI}\downarrow \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESOLVIDO 9.3

Para a viga uniforme AB, (a) determine a reação em A, (b) determine a equação da linha elástica e (c) determine a inclinação em A. (Note que a viga é estaticamente indeterminada com um grau de indeterminação.)



SOLUÇÃO

Momento fletor. Utilizando o diagrama de corpo livre mostrado, escrevemos

$$+\circlearrowleft \Sigma M_D = 0: \qquad R_A x - \frac{1}{2}\left(\frac{w_0 x^2}{L}\right)\frac{x}{3} - M = 0 \qquad M = R_A x - \frac{w_0 x^3}{6L}$$

Equação diferencial da linha elástica. Utilizando a Equação (9.4) e escrevemos

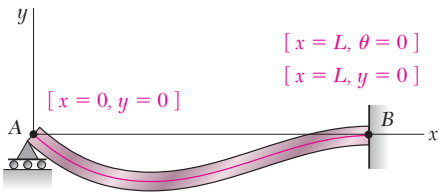
$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = R_A x - \frac{w_0 x^3}{6L}$$

Considerando que a rigidez à flexão EI é constante, integramos duas vezes e temos

$$EI\frac{dy}{dx} = EI\,\theta = \frac{1}{2}R_A x^2 - \frac{w_0 x^4}{24L} + C_1 \tag{1}$$

$$EI\,y = \frac{1}{6}R_A x^3 - \frac{w_0 x^5}{120L} + C_1 x + C_2 \tag{2}$$

Condições de contorno. As três condições de contorno que devem ser satisfeitas são mostradas no desenho



$$[x = 0, y = 0]: \qquad C_2 = 0 \tag{3}$$

$$[x = L, \theta = 0]: \qquad \frac{1}{2}R_A L^2 - \frac{w_0 L^3}{24} + C_1 = 0 \tag{4}$$

$$[x = L, y = 0]: \qquad \frac{1}{6}R_A L^3 - \frac{w_0 L^4}{120} + C_1 L + C_2 = 0 \tag{5}$$

***a.* Reação em *A*.** Multiplicando a Equação (4) por L, subtraindo a Equação (5) membro a membro da equação obtida e observando que $C_2 = 0$, temos

$$\tfrac{1}{3}R_A L^3 - \tfrac{1}{30}w_0 L^4 = 0 \qquad \mathbf{R}_A = \tfrac{1}{10}w_0 L \uparrow \blacktriangleleft$$

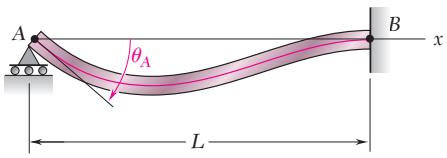
Notamos que a reação é independente de E e I. Substituindo $R_A = \frac{1}{10}w_0 L$ na Equação (4), temos

$$\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{10}w_0 L)L^2 - \tfrac{1}{24}w_0 L^3 + C_1 = 0 \qquad C_1 = -\tfrac{1}{120}w_0 L^3$$

***b.* Equação da linha elástica.** Substituindo R_A, C_1 e C_2 na Equação (2), temos

$$EI\,y = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{10}w_0 L\right)x^3 - \frac{w_0 x^5}{120L} - \left(\frac{1}{120}w_0 L^3\right)x$$

$$y = \frac{w_0}{120EIL}(-x^5 + 2L^2x^3 - L^4x) \blacktriangleleft$$



***c.* Inclinação em *A*.** Derivamos a equação acima em relação a x:

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{w_0}{120EIL}(-5x^4 + 6L^2x^2 - L^4)$$

Utilizando $x = 0$, temos $\qquad \theta_A = -\dfrac{w_0 L^3}{120EI} \qquad \theta_A = \dfrac{w_0 L^3}{120EI} \circlearrowright \blacktriangleleft$

PROBLEMAS

Nos problemas a seguir, considere que a rigidez à flexão EI de cada viga é constante.

9.1 até 9.4 Para o carregamento mostrados nas figuras, determine (*a*) a equação da linha elástica para a viga em balanço *AB*, (*b*) a deflexão da extremidade livre e (*c*) a inclinação na extremidade livre.

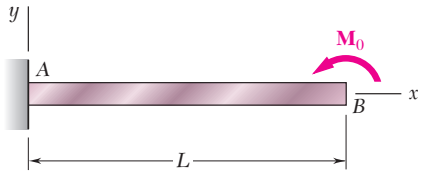


Fig. P9.1

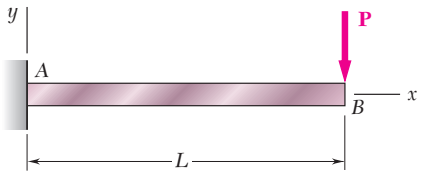


Fig. P9.2

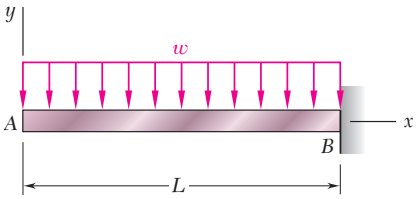


Fig. P9.3

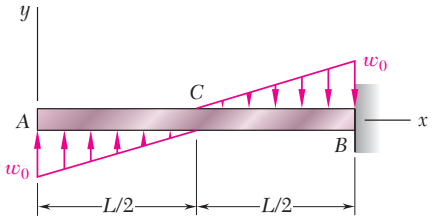


Fig. P9.4

9.5 e 9.6 Para a viga em balanço e o carregamento mostrados nas figuras, determine (*a*) a equação da linha elástica para a parte *AB* da viga, (*b*) a deflexão em *B* e (*c*) a inclinação em *B*.

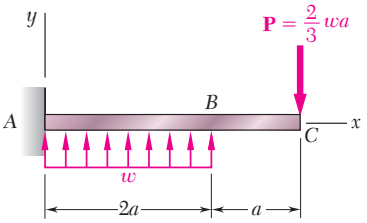


Fig. *P9.5*

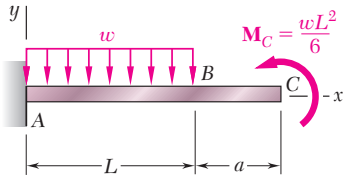


Fig. P9.6

9.7 Para a viga e o carregamento mostrados na figura, determine (*a*) a equação da linha elástica para a parte *BC* da viga, (*b*) a deflexão no meio do vão e (*c*) a inclinação em *B*.

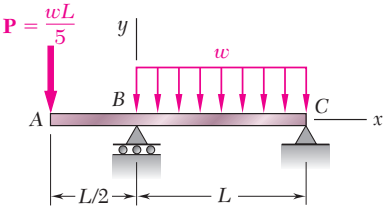


Fig. P9.7

9.8 Para a viga e o carregamento mostrados na figura, determine (*a*) a equação da linha elástica para a parte *AB* da viga, (*b*) a inclinação em *A* e (*c*) a inclinação em *B*.

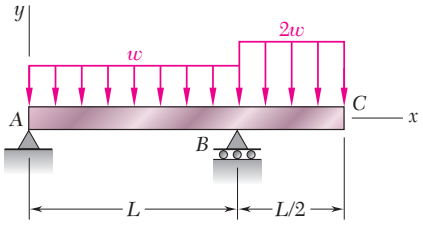


Fig. *P9.8*

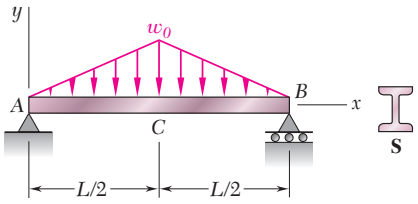


Fig. P9.9

9.9 Sabendo que a viga *AB* é um perfil de aço laminado I200 × 27,4 e que w_0 = 58,4 kN/m, L = 2743 mm e E = 200 GPa, determine (*a*) a inclinação em *A* e (*b*) a deflexão em *C*.

9.10 Sabendo que a viga *AB* é um perfil de aço laminado W130 × 23,8 e que P = 50 kN, L = 1,25 m e E = 200 GPa, determine (*a*) a inclinação em *A* e (*b*) a deflexão em *C*.

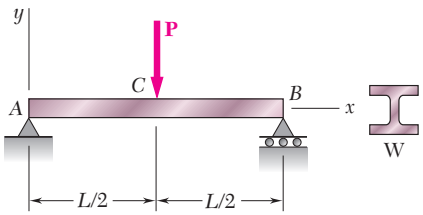


Fig. P9.10

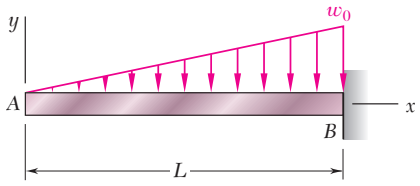


Fig. P9.11

9.11 Para a viga e o carregamento mostrados na figura, (*a*) expresse o valor e a localização da deflexão máxima em termos de w_0, L, E e I. (*b*) Calcule o valor da deflexão máxima, considerando que a viga *AB* é um perfil de aço laminado W460 × 74 e que w_0 = 60 kN/m, L = 6 m e E = 200 GPa.

9.12 (*a*) Determine a localização e o valor da deflexão máxima absoluta em *AB* entre *A* e o centro da viga. (*b*) Considerando que a viga *AB* seja um perfil W460 × 113, M_0 = 203 kN · m e E = 200 GPa, determine o comprimento L máximo admissível de modo que a deflexão máxima não ultrapasse 1,27 mm.

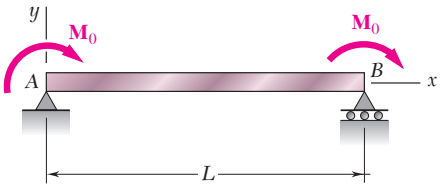


Fig. P9.12

9.13 Para a viga e o carregamento mostrados na figura, determine a deflexão no ponto *C*. Use E = 200 GPa.

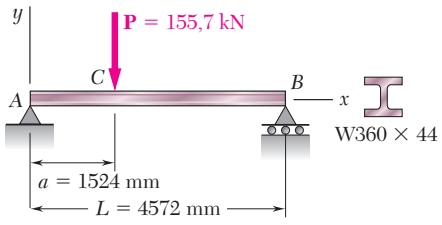


Fig. P9.13

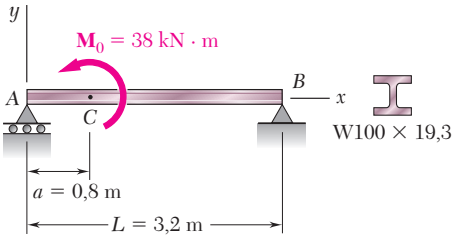


Fig. *P9.14*

9.14 Para a viga e o carregamento mostrados na figura, determine a deflexão do ponto *C*. Use E = 200 GPa.

9.15 Sabendo que a viga *AE* é um perfil de aço laminado W360 × 101 e que $M_0 = 310$ kN · m, $L = 2{,}4$ m, $a = 0{,}5$ m, e $E = 200$ GPa, determine (*a*) a equação da linha elástica para a parte *BD* e (*b*) a deflexão no ponto *C*.

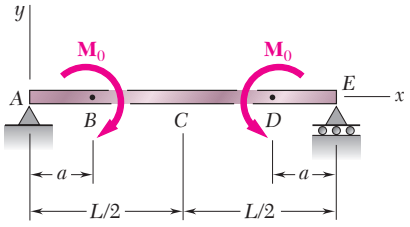


Fig. *P9.15*

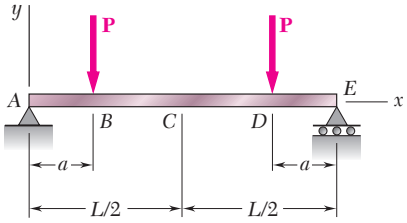


Fig. P9.16

9.16 Sabendo que a viga *AE* é um perfil de aço laminado I200 × 27,4 e que $P = 17{,}5$ kN, $L = 2{,}5$ m, $a = 0{,}8$ m e $E = 200$ GPa, determine (*a*) a equação da linha elástica para a parte *BD* e (*b*) a deflexão no centro *C* da viga.

9.17 Para a viga e o carregamento mostrados na figura, determine (*a*) a equação da linha elástica e (*b*) a deflexão na extremidade livre.

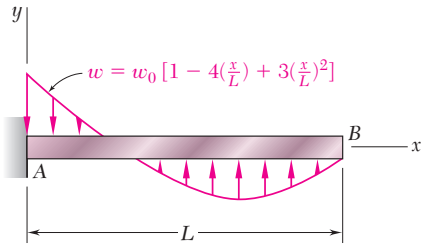


Fig. P9.17

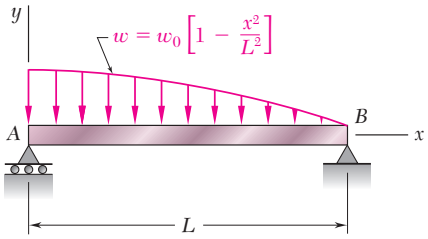


Fig. P9.18

9.18 Para a viga e o carregamento mostrados na figura, determine (*a*) a equação da linha elástica, (*b*) a inclinação na extremidade *A* e (*c*) a deflexão no ponto médio do vão.

9.19 até *9.22* Para a viga e o carregamento mostrados nas figuras, determine a reação no apoio móvel.

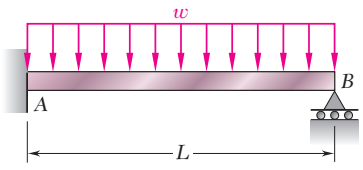


Fig. P9.19

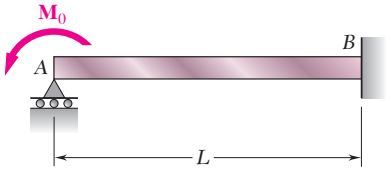


Fig. P9.20

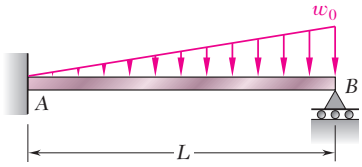


Fig. *P9.21*

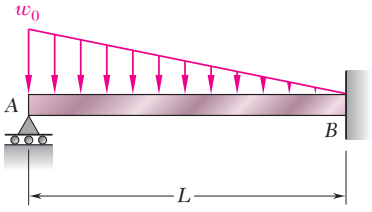


Fig. *P9.22*

9.23 Para a viga mostrada, determine a reação no apoio móvel quando $w_0 = 65$ kN/m.

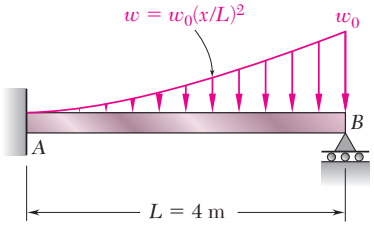


Fig. P9.23

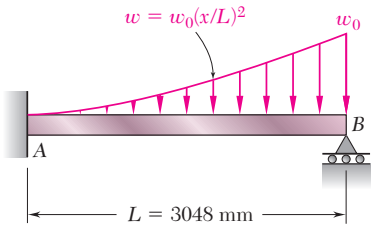


Fig. P9.24

9.24 Para a viga mostrada, determine a reação no apoio móvel quando $w_0 = 20{,}4$ kN/m.

9.25 até 9.28 Determine a reação no apoio móvel e desenhe o diagrama do momento fletor para a viga e o carregamento mostrados nas figuras.

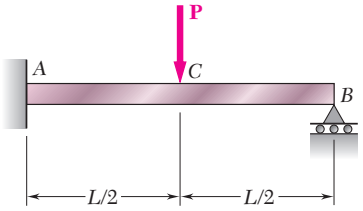


Fig. P9.25

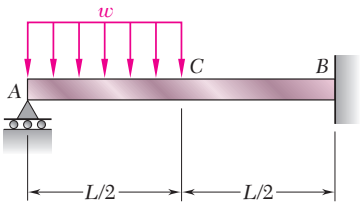


Fig. P9.26

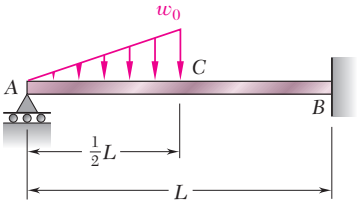


Fig. P9.27

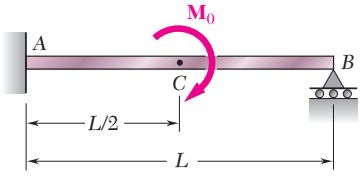


Fig. P9.28

9.29 e *9.30* Determine a reação no apoio móvel e a deflexão no ponto C.

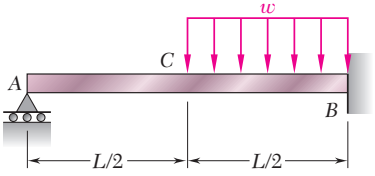


Fig. P9.29

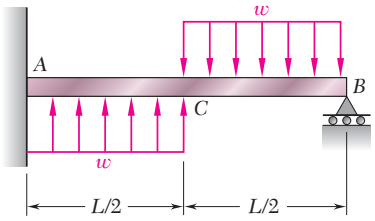


Fig. *P9.30*

***9.31* e 9.32** Determine a reação no apoio móvel e a deflexão no ponto D se a for igual a $L/3$.

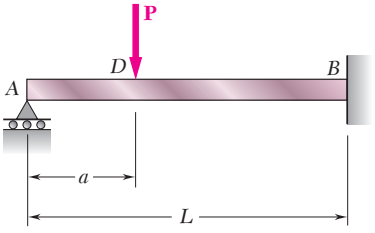


Fig. *P9.31*

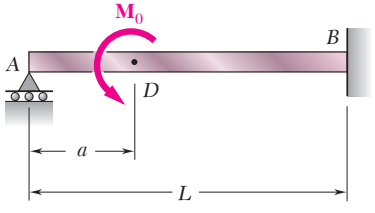


Fig. P9.32

9.33 e 9.34 Determine a reação em A e desenhe o diagrama do momento fletor para a viga e o carregamento mostrados nas figuras.

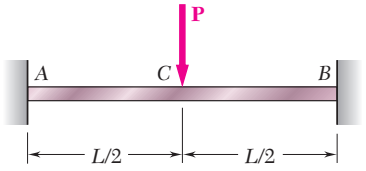


Fig. P9.33

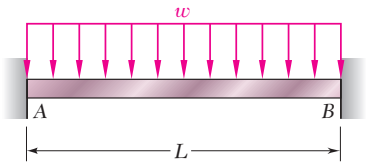


Fig. P9.34

*9.6. Utilizando funções de singularidade para determinar a inclinação e a deflexão de uma viga

Revendo o trabalho feito até aqui neste capítulo, observamos que o método de integração proporciona uma maneira conveniente e eficaz para determinar a inclinação e a deflexão em qualquer ponto de uma viga prismática, *desde que o momento fletor possa ser representado por uma função analítica simples M(x)*. No entanto, quando o carregamento na viga torna necessário duas equações diferentes para representar o momento fletor para todo seu comprimento, como no Exemplo 9.3 (Fig. 9.17), são necessárias quatro constantes de integração e um igual número de equações, e expressando a condição de continuidade no ponto D e também as condições de contorno nos apoios A e B para determinar as constantes. Se fossem necessárias três ou mais funções para representar o momento fletor, seriam necessárias constantes adicionais e um número correspondente de equações adicionais, resultando em cálculos muito demorados. Este seria o caso da viga mostrada na Fig. 9.28. Nesta seção, esses cálculos serão simplificados por meio das funções de singularidade discutidas na Seção 5.5.

Fig. 9.28 Nesta estrutura de cobertura, cada uma das travessas aplica uma força concentrada à viga que a suporta.

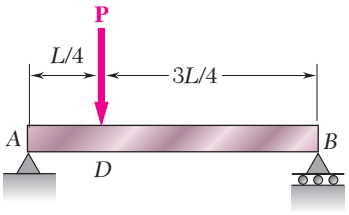


Fig. 9.17 (repetida)

Vamos considerar novamente a viga e o carregamento do Exemplo 9.3 (Fig. 9.17) e desenhar o seu diagrama de corpo livre (Fig. 9.29). Utilizando a

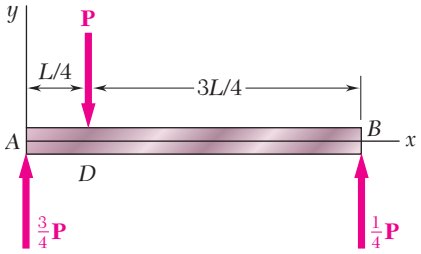


Fig. 9.29

função de singularidade apropriada, conforme explicado na Seção 5.5, para representar a contribuição para a força cortante da força concentrada **P**, escrevemos

$$V(x) = \frac{3P}{4} - P\langle x - \tfrac{1}{4}L\rangle^0$$

Integrando em x e recordando da Seção 5.5 que, na ausência de qualquer momento concentrado, a expressão obtida para o momento fletor não conterá nenhum termo constante, temos

$$M(x) = \frac{3P}{4}x - P\langle x - \tfrac{1}{4}L\rangle \tag{9.44}$$

Substituindo o valor de $M(x)$, dado pela Equação (9.44), na Equação (9.4), escrevemos

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3P}{4}x - P\langle x - \tfrac{1}{4}L\rangle \tag{9.45}$$

e, integrando em x,

$$EI\,\theta = EI\frac{dy}{dx} = \frac{3}{8}Px^2 - \frac{1}{2}P\langle x - \tfrac{1}{4}L\rangle^2 + C_1 \tag{9.46}$$

$$EI\,y = \frac{1}{8}Px^3 - \frac{1}{6}P\langle x - \tfrac{1}{4}L\rangle^3 + C_1x + C_2 \tag{9.47}\dagger$$

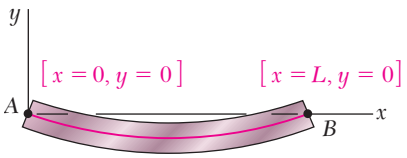


Fig. 9.30

As constantes C_1 e C_2 podem ser determinadas com base nas condições de contorno mostradas na Fig. 9.30. Usando $x = 0$, $y = 0$ na Equação (9.47), temos

$$0 = 0 - \frac{1}{6}P\langle 0 - \tfrac{1}{4}L\rangle^3 + 0 + C_2$$

que se reduz a $C_2 = 0$, pois qualquer colchete contendo uma quantidade negativa é igual a zero. Fazendo agora $x = L$, $y = 0$ e $C_2 = 0$ na Equação (9.47), escrevemos

$$0 = \frac{1}{8}PL^3 - \frac{1}{6}P\langle \tfrac{3}{4}L\rangle^3 + C_1L$$

†As condições de continuidade para a inclinação e a deflexão em D estão "embutidas" nas Equações (9.46) e (9.47). Sem dúvida, a diferença entre as expressões para a inclinação θ_1 em AD e a inclinação θ_2 em DB é representada pelo termo $-\frac{1}{2}P\langle x - \frac{1}{4}L\rangle^2$ na Equação (9.46), e esse termo é igual a zero em D. Analogamente, a diferença entre as expressões para a deflexão y_1 em AD e a deflexão y_2 em DB é representada pelo termo $-\frac{1}{6}P\langle x - \frac{1}{4}L\rangle^3$ na Equação (9.47), e esse termo também é igual a zero em D.

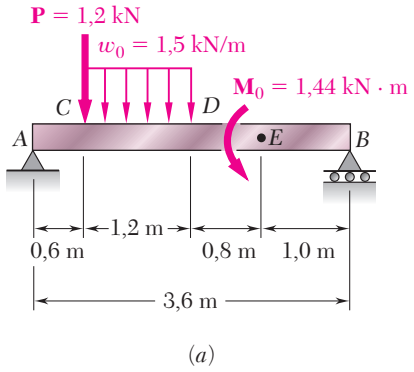
Como a quantidade entre colchetes é positiva, eles podem ser substituídos por parênteses comuns. Resolvendo para C_1, temos

$$C_1 = -\frac{7PL^2}{128}$$

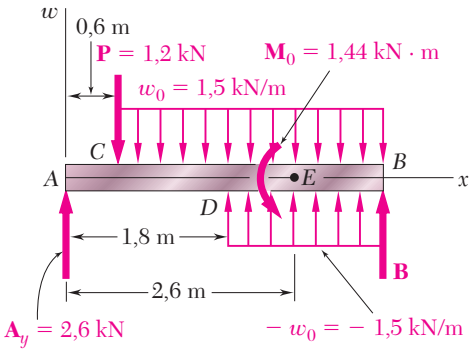
Observamos que as expressões obtidas para as constantes C_1 e C_2 são as mesmas que foram encontradas anteriormente na Seção 9.3. Mas a necessidade de constantes adicionais C_3 e C_4 agora foi eliminada, e não precisamos impor as condições de que a inclinação e a deflexão sejam contínuas no ponto D.

EXEMPLO 9.6

Para a viga e o carregamento mostrados na Fig. 9.31*a* e utilizando funções de singularidade, (*a*) expresse a inclinação e a deflexão em funções da distância x do apoio em A, (*b*) determine a deflexão no ponto médio D. Use $E = 200$ GPa e $I = 6{,}87 \times 10^{-6}$ m^4.



(*a*)



(*b*)

Fig. 9.31

(*a*) Observamos que a viga está carregada e vinculada da mesma maneira que a viga do Exemplo 5.5. Voltando àquele exemplo, recordamos que a força distribuída mencionada foi substituída por duas forças de extremidade aberta equivalentes mostradas na Fig. 9.31*b*, e que foram obtidas as expressões a seguir para a força cortante e o momento fletor:

$$V(x) = -1{,}5\langle x - 0{,}6\rangle^1 + 1{,}5\langle x - 1{,}8\rangle^1 + 2{,}6 - 1{,}2\langle x - 0{,}6\rangle^0$$

$$M(x) = -0{,}75\langle x - 0{,}6\rangle^2 + 0{,}75\langle x - 1{,}8\rangle^2 + 2{,}6x - 1{,}2\langle x - 0{,}6\rangle^1 - 1{,}44\langle x - 2{,}6\rangle^0$$

Integrando a última expressão duas vezes, obtemos

$$EI\theta = -0{,}25\langle x - 0{,}6\rangle^3 + 0{,}25\langle x - 1{,}8\rangle^3 + 1{,}3x^2 - 0{,}6\langle x - 0{,}6\rangle^2 - 1{,}44\langle x - 2{,}6\rangle^1 + C_1 \qquad (9.48)$$

$$EIy = -0{,}0625\langle x - 0{,}6\rangle^4 + 0{,}0625\langle x - 1{,}8\rangle^4 + 0{,}4333x^3 - 0{,}2\langle x - 0{,}6\rangle^3 - 0{,}72\langle x - 2{,}6\rangle^2 + C_1x + C_2 \qquad (9.49)$$

As constantes C_1 e C_2 podem ser determinadas com base nas condições de contorno mostradas na Fig. 9.32. Fazendo $x = 0$, $y = 0$ na Equação (9.49) e observando que todos os colchetes

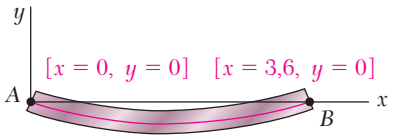


Fig. 9.32

contêm valores negativos e, portanto, são iguais a zero, concluímos que $C_2 = 0$. Fazendo agora $x = 3{,}6$, $y = 0$ e $C_2 = 0$ na Equação (9.49), escrevemos

$$0 = -0{,}0625\langle 3{,}0\rangle^4 + 0{,}0625\langle 1{,}8\rangle^4 + 0{,}4333(3{,}6)^3 - 0{,}2\langle 3{,}0\rangle^3 - 0{,}72\langle 1{,}0\rangle^2 + C_1(3{,}6) + 0$$

Como todos os valores entre colchetes são positivos, eles podem ser substituídos por parênteses comuns. Resolvendo para C_1, encontramos $C_1 = -2{,}692$.

(*b*) Substituindo C_1 e C_2 na Equação (9.49) e fazendo $x = x_D = 1{,}8$ m, vemos que a deflexão no ponto D é definida pela relação

$$EIy_D = -0{,}0625\langle 1{,}2\rangle^4 + 0{,}0625\langle 0\rangle^4 + 0{,}4333(1{,}8)^3 - 0{,}2\langle 1{,}2\rangle^3 - 0{,}72\langle -0{,}8\rangle^2 - 2{,}692(1{,}8)$$

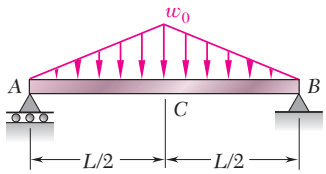
O último colchete contém um valor negativo e, portanto, é igual a zero. Todos os outros colchetes contêm quantidades positivas e podem ser substituídos por parênteses comuns. Temos

$$EIy_D = -0{,}0625(1{,}2)^4 + 0{,}0625(0)^4 + 0{,}4333(1{,}8)^3 - 0{,}2(1{,}2)^3 - 0 - 2{,}692(1{,}8) = -2{,}794$$

Utilizando os valores numéricos fornecidos de E e I, escrevemos

$$(200 \text{ GPa})(6{,}87 \times 10^{-6} \text{ m}^4)y_D = -2{,}794 \text{ kN} \cdot \text{m}^3$$

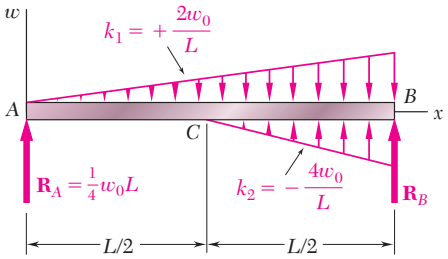
$$y_D = -13{,}64 \times 10^{-3} \text{ m} = -2{,}03 \text{ mm}$$



PROBLEMA RESOLVIDO 9.4

Para a viga prismática e o carregamento mostrados na figura, determine (*a*) a equação da linha elástica, (*b*) a inclinação em *A* e (*c*) a deflexão máxima.

SOLUÇÃO



Momento fletor. A equação que define o momento fletor da viga foi obtida no Problema Resolvido 5.9. Utilizando o diagrama de carregamento modificado mostrado na figura, tínhamos [Equação (3)]:

$$M(x) = -\frac{w_0}{3L}x^3 + \frac{2w_0}{3L}\langle x - \tfrac{1}{2}L\rangle^3 + \tfrac{1}{4}w_0Lx$$

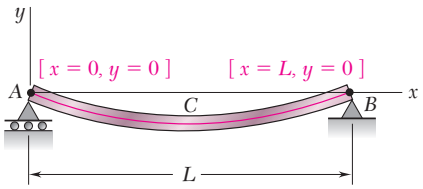
***a.* Equação da linha elástica.** Usando a Equação (9.4), escrevemos

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{w_0}{3L}x^3 + \frac{2w_0}{3L}\langle x - \tfrac{1}{2}L\rangle^3 + \tfrac{1}{4}w_0Lx \tag{1}$$

e integrando duas vezes em relação a x,

$$EI\,\theta = -\frac{w_0}{12L}x^4 + \frac{w_0}{6L}\langle x - \tfrac{1}{2}L\rangle^4 + \frac{w_0L}{8}x^2 + C_1 \tag{2}$$

$$EI\,y = -\frac{w_0}{60L}x^5 + \frac{w_0}{30L}\langle x - \tfrac{1}{2}L\rangle^5 + \frac{w_0L}{24}x^3 + C_1x + C_2 \tag{3}$$



Condições de contorno

$[x = 0, y = 0]$: Utilizando a Equação (3) e observando que cada colchete $\langle\ \rangle$ contém um valor negativo e, portanto, é igual a zero, encontramos $C_2 = 0$.

$[x = L, y = 0]$: Novamente, utilizando a Equação (3), escrevemos

$$0 = -\frac{w_0L^4}{60} + \frac{w_0}{30L}\left(\frac{L}{2}\right)^5 + \frac{w_0L^4}{24} + C_1L \qquad C_1 = -\frac{5}{192}w_0L^3$$

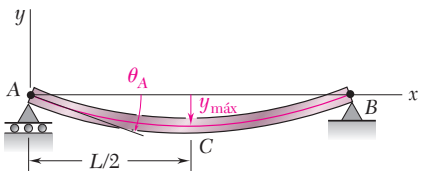
Substituindo C_1 e C_2 nas Equações (2) e (3), temos

$$EI\,\theta = -\frac{w_0}{12L}x^4 + \frac{w_0}{6L}\langle x - \tfrac{1}{2}L\rangle^4 + \frac{w_0L}{8}x^2 - \frac{5}{192}w_0L^3 \tag{4}$$

$$EI\,y = -\frac{w_0}{60L}x^5 + \frac{w_0}{30L}\langle x - \tfrac{1}{2}L\rangle^5 + \frac{w_0L}{24}x^3 - \frac{5}{192}w_0L^3x \tag{5}$$ ◀

***b.* Inclinação em *A*.** Substituindo $x = 0$ na Equação (4), encontramos

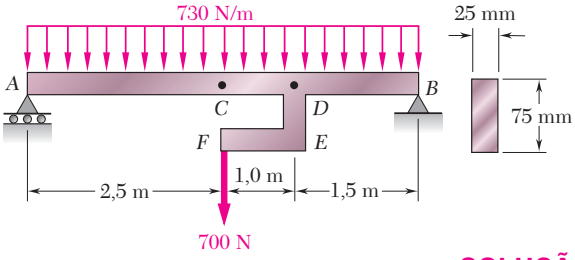
$$EI\,\theta_A = -\frac{5}{192}w_0L^3 \qquad \theta_A = \frac{5w_0L^3}{192EI}\curvearrowright$$ ◀



***c.* Deflexão máxima.** Devido à simetria dos apoios e do carregamento, a deflexão máxima ocorre no ponto C, em que $x = \frac{1}{2}L$. Substituindo na Equação (5), obtemos

$$EI\,y_{máx} = w_0L^4\left[-\frac{1}{60(32)} + 0 + \frac{1}{24(8)} - \frac{5}{192(2)}\right] = -\frac{w_0L^4}{120}$$

$$y_{máx} = \frac{w_0L^4}{120EI}\downarrow$$ ◀



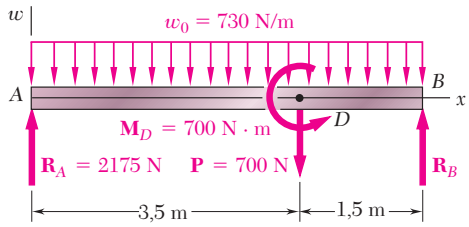
PROBLEMA RESOLVIDO 9.5

A barra rígida *DEF* é soldada no ponto *D* à viga de aço uniforme *AB*. Para o carregamento mostrado na figura, determine (*a*) a equação da linha elástica da viga e (*b*) a deflexão no ponto médio *C* da viga. Use $E = 200$ GPa.

SOLUÇÃO

Momento fletor. A equação que define o momento fletor da viga foi obtida no Problema Resolvido 5.10. Utilizando o diagrama de carregamento modificado e expressando x, tínhamos [Equação (3)]:

$$M(x) = -365x^2 + 2175x - 700\langle x - 3{,}5\rangle^1 - 700\langle x - 3{,}5\rangle^0 \quad \text{N} \cdot \text{m}$$



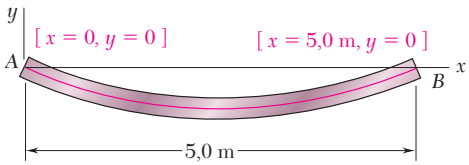
***a.* Equação da linha elástica.** Utilizando a Equação (8.4), escrevemos

$$EI(d^2y/dx^2) = -365x^2 + 2175x - 700\langle x - 3{,}5\rangle^1 - 700\langle x - 3{,}5\rangle^0 \quad \text{N} \cdot \text{m} \qquad (1)$$

e integrando duas vezes em relação a x,

$$EI\,\theta = -121{,}7x^3 + 1087{,}5x^2 - 350\langle x - 3{,}5\rangle^2 - 700\langle x - 3{,}5\rangle^1 + C_1 \quad \text{N} \cdot \text{m}^2 \qquad (2)$$

$$EI\,y = -30{,}43x^4 + 362{,}5x^3 - 116{,}7\langle x - 3{,}5\rangle^3 - 350\langle x - 3{,}5\rangle^2 + C_1x + C_2 \quad \text{N} \cdot \text{m}^3 \qquad (3)$$



Condições de contorno

$[x = 0, y = 0]$: Utilizando a Equação (3) e observando que cada colchete $\langle\ \rangle$ contém um valor negativo e, portanto, igual a zero, encontramos $C_2 = 0$.

$[x = 5{,}0\text{ m}, y = 0]$: Novamente, usando a Equação (3) e observando que cada colchete contém um valor positivo e, portanto, pode ser substituído por um parêntese, escrevemos

$$0 = -30{,}43(5)^4 + 362{,}5(5)^3 - 116{,}7(1{,}5)^3 - 350(1{,}5)^2 + C_1(5)$$
$$C_1 = -5022$$

Substituindo os valores encontrados para C_1 e C_2 na Equação (3), temos

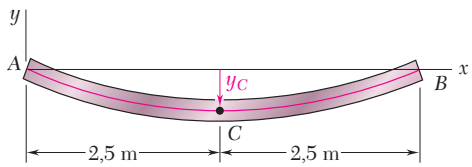
$$EI\,y = -30{,}43x^4 + 362{,}5x^3 - 116{,}7\langle x - 3{,}5\rangle^3 - 350\langle x - 3{,}5\rangle^2 - 5022x \quad \text{N} \cdot \text{m}^3 \qquad (3') \blacktriangleleft$$

Para determinar EI, recordamos que $E = 200 \times 10^9\ \text{N/m}^2$ e calculamos

$$I = \tfrac{1}{12}bh^3 = \tfrac{1}{12}(0{,}025\text{ m})(0{,}075\text{ m})^3 = 8{,}79 \times 10^{-7}\ \text{m}^4$$
$$EI = (200 \times 10^9\ \text{N/m}^2)(8{,}79 \times 10^{-7}\ \text{m}^4) = 175800\ \text{N} \cdot \text{m}^2$$

***b.* Deflexão no ponto médio *C*.** Fazendo $x = 2{,}5$ m na Equação (3′), escrevemos

$$EI\,y_C = -30{,}43(2{,}5)^4 + 362{,}5(2{,}5)^3 - 116{,}7\langle -1\rangle^3 - 350\langle -1\rangle^2 - 5022(2{,}5)$$



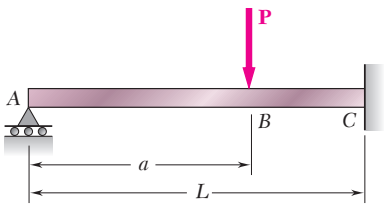
Observando que cada colchete é igual a zero e substituindo EI pelo seu valor numérico, temos

$$(175800\ \text{N} \cdot \text{m}^2)y_C = -8079{,}6\ \text{N} \cdot \text{m}^3$$

e, resolvendo para y_C:

$$y_C = -0{,}046\text{ m} \qquad y_C = -46\text{ mm} \blacktriangleleft$$

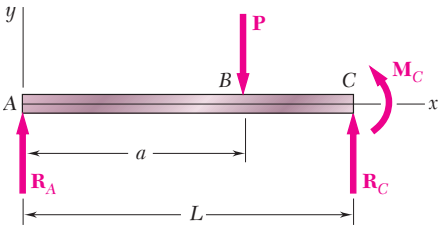
Observe que a deflexão obtida *não é* a máxima.



PROBLEMA RESOLVIDO 9.6

Para a viga uniforme ABC, (a) expresse a reação em B em termos de P, L, a, E e I, (b) determine a reação em A e a deflexão no ponto de aplicação da força quando $a = L/2$.

SOLUÇÃO



Reações. Para a força vertical **P** dada, as reações são aquelas mostradas na figura. Observamos que elas são estaticamente indeterminadas.

Força cortante e momento fletor. Utilizando uma função-degrau para representar a contribuição de **P** para a força cortante, escrevemos

$$V(x) = R_A - P\langle x - a\rangle^0$$

Integrando em x, obtemos o momento fletor:

$$M(x) = R_A x - P\langle x - a\rangle^1$$

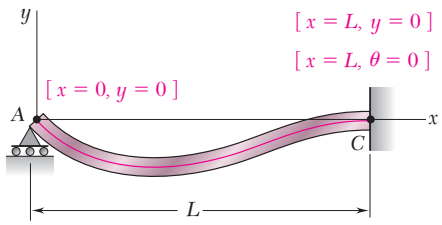
Equação da linha elástica. Utilizando a Equação (9.4), escrevemos

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = R_A x - P\langle x - a\rangle^1$$

Integrando duas vezes em x,

$$EI\frac{dy}{dx} = EI\,\theta = \frac{1}{2}R_A x^2 - \frac{1}{2}P\langle x - a\rangle^2 + C_1$$

$$EI\,y = \frac{1}{6}R_A x^3 - \frac{1}{6}P\langle x - a\rangle^3 + C_1 x + C_2$$



Condições de contorno. Observando que o colchete $\langle x - a\rangle$ é igual a zero para $x = 0$ e igual a $(L - a)$ para $x = L$, escrevemos

$$[x = 0, y = 0]: \qquad C_2 = 0 \tag{1}$$

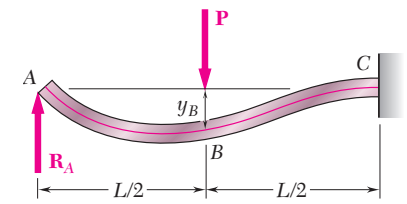
$$[x = L, \theta = 0]: \qquad \tfrac{1}{2}R_A L^2 - \tfrac{1}{2}P(L - a)^2 + C_1 = 0 \tag{2}$$

$$[x = L, y = 0]: \qquad \tfrac{1}{6}R_A L^3 - \tfrac{1}{6}P(L - a)^3 + C_1 L + C_2 = 0 \tag{3}$$

***a.* Reação em *A*.** Multiplicando a Equação (2) por L, subtraindo a Equação (3) membro a membro da equação obtida e observando que $C_2 = 0$, temos

$$\frac{1}{3}R_A L^3 - \frac{1}{6}P(L - a)^2[3L - (L - a)] = 0$$

$$\mathbf{R}_A = P\left(1 - \frac{a}{L}\right)^2\left(1 + \frac{a}{2L}\right)\uparrow \blacktriangleleft$$



Notamos que a reação é independente de E e I.

***b.* Reação em *A* e deflexão em *B* quando $a = \frac{1}{2}L$.** Fazendo $a = \frac{1}{2}L$ na expressão obtida para R_A, temos

$$R_A = P(1 - \tfrac{1}{2})^2(1 + \tfrac{1}{4}) = 5P/16 \qquad \mathbf{R}_A = \tfrac{5}{16}P\uparrow \blacktriangleleft$$

Substituindo $a = L/2$ e $R_A = 5P/16$ na Equação (2) e resolvendo para C_1, encontramos $C_1 = -PL^2/32$. Utilizando $x = L/2$, $C_1 = -PL^2/32$, e $C_2 = 0$ na expressão obtida para y, temos

$$y_B = -\frac{7PL^3}{768EI} \qquad y_B = \frac{7PL^3}{768EI}\downarrow \blacktriangleleft$$

Observe que a deflexão obtida *não é* a máxima.

PROBLEMAS

Utilize as funções de singularidade para resolver os problemas a seguir e considere a rigidez de flexão EI de cada viga constante.

9.35 e 9.36 Para a viga e o carregamento mostrados nas figuras, determine (*a*) a equação da linha elástica, (*b*) a inclinação na extremidade *A* e (c) a deflexão do ponto *C*.

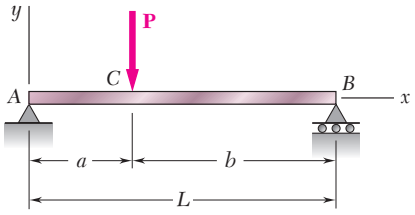


Fig. P9.35

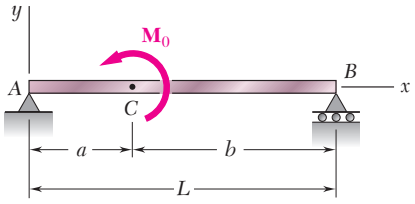


Fig. P9.36

9.37 e *9.38* Para a viga e o carregamento mostrados nas figuras, determine as deflexões no (*a*) ponto *B*, (*b*) ponto *C* e no (*c*) ponto *D*.

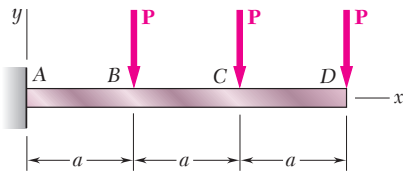


Fig. P9.37

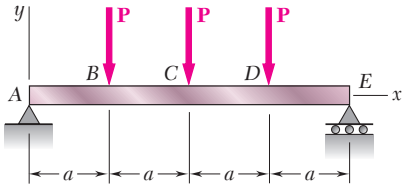


Fig. *P9.38*

9.39 e *9.40* Para a viga e o carregamento mostrados nas figuras, determine (*a*) a inclinação na extremidade *A*, (*b*) a deflexão no ponto *B* e (*c*) a deflexão na extremidade *D*.

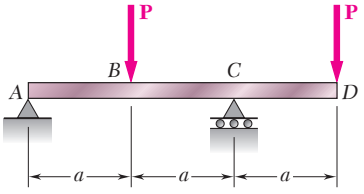


Fig. P9.39

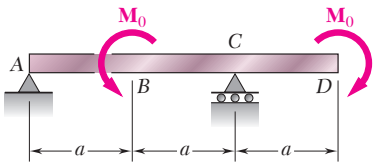


Fig. *P9.40*

9.41 Para a viga e o carregamento mostrados na figura, determine (*a*) a equação da linha elástica, (*b*) a deflexão no ponto *B* e (*c*) a deflexão no ponto *C*.

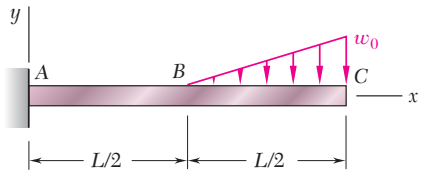


Fig. P9.41

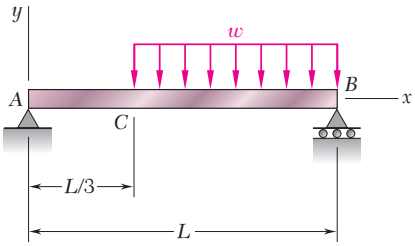


Fig. P9.42

9.42 Para a viga e o carregamento mostrados na figura, determine (*a*) a equação da linha elástica, (*b*) a inclinação no ponto *A* e (*c*) a deflexão no ponto *C*.

9.43 Para a viga e o carregamento mostrados na figura, determine (*a*) a equação da linha elástica (*b*) a deflexão no ponto *B* e (*c*) a deflexão no ponto *D*.

9.44 Para a viga e o carregamento mostrados na figura, determine (*a*) a equação da linha elástica e (*b*) a deflexão no ponto médio *C*.

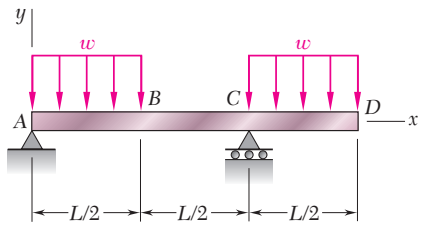


Fig. *P9.43*

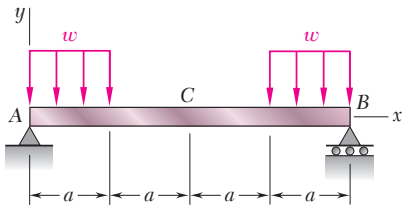


Fig. P9.44

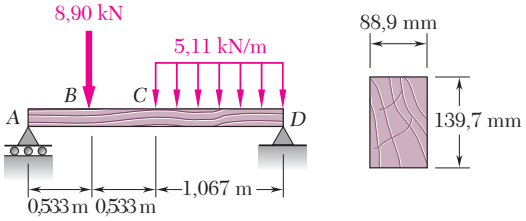


Fig. P9.45

9.45 Para a viga de madeira e o carregamento mostrados na figura, determine (*a*) a inclinação na extremidade *A* e (*b*) a deflexão no ponto médio *C*. Use $E = 11$ GPa.

9.46 Para a viga e o carregamento mostrados na figura, determine (*a*) a inclinação na extremidade *A* e (*b*) a deflexão no ponto *B*. Use $E = 200$ GPa.

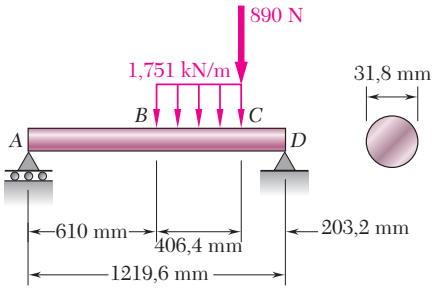


Fig. *P9.46*

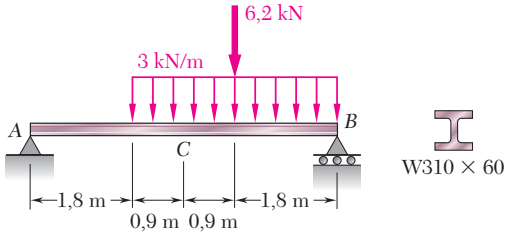


Fig. P9.47

9.47 Para a viga e o carregamento mostrados na figura, determine (*a*) a inclinação na extremidade *A* e (*b*) a deflexão no ponto médio *C*. Use $E = 200$ GPa.

9.48 Para a viga e o carregamento mostrados na figura, determine (*a*) a inclinação na extremidade *A* e (*b*) a deflexão no ponto médio *C*. Use $E = 200$ GPa.

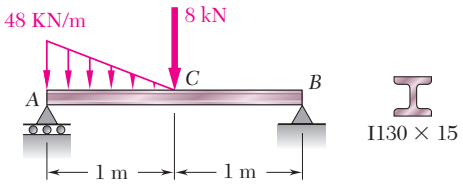


Fig. P9.48

9.49 e 9.50 Para a viga e o carregamento mostrados nas figuras, determine (*a*) a reação no apoio móvel e (*b*) a deflexão no ponto *C*.

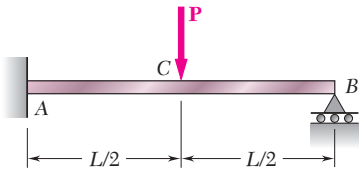


Fig. P9.49

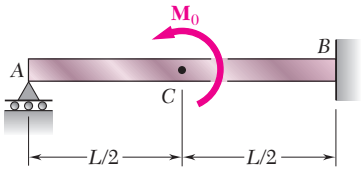


Fig. P9.50

9.51 e *9.52* Para a viga e o carregamento mostrados nas figuras, determine (*a*) a reação no apoio móvel e (*b*) a deflexão no ponto *B*.

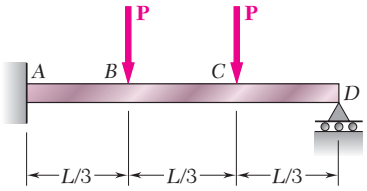


Fig. P9.51

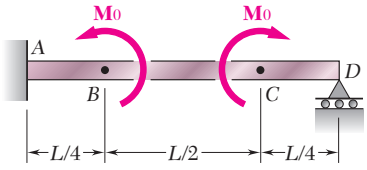


Fig. *P9.52*

9.53 Para a viga e o carregamento mostrados na figura, determine (*a*) a reação no ponto *C* e (*b*) a deflexão no ponto *B*. Use $E = 200$ GPa.

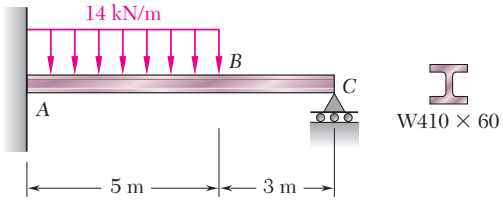


Fig. P9.53

9.54 Para a viga e o carregamento mostrados na figura, determine (*a*) a reação no ponto *A* e (*b*) a deflexão no ponto *B*. Use $E = 200$ GPa.

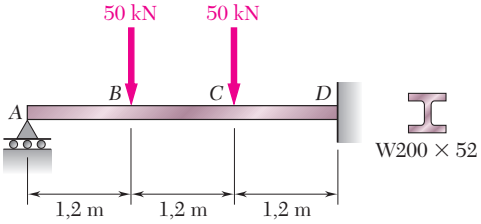


Fig. P9.54

***9.55* e 9.56** Para a viga e o carregamento mostrados nas figuras, determine (*a*) a reação no ponto *A* e (*b*) a deflexão no ponto *C*. Use $E = 200$ GPa.

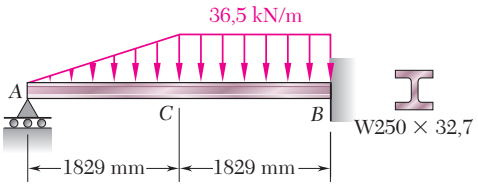


Fig. *P9.55*

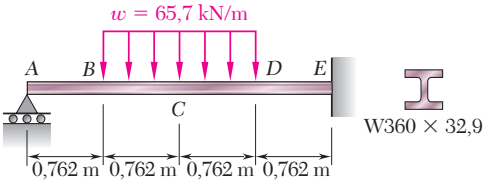


Fig. P9.56

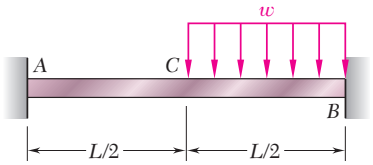


Fig. P9.57

9.57 e 9.58 Para a viga e o carregamento mostrados na figura, determine (*a*) a reação no ponto *A* e (*b*) a deflexão no ponto médio *C*.

9.59 até 9.62 Para a viga e o carregamento indicados, determine o valor e localização da maior deflexão para baixo.

9.59 Viga e carregamento do Problema 9.45.

9.60 Viga e carregamento do Problema 9.46.

9.61 Viga e carregamento do Problema 9.47.

9.62 Viga e carregamento do Problema 9.48.

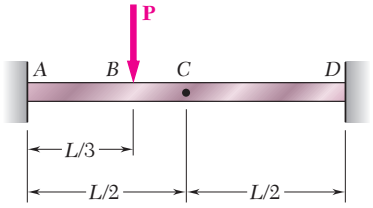


Fig. P9.58

9.63 A barra rígida *BDE* é soldada no ponto *B* à viga de aço laminado *AC*. Para o carregamento mostrado na figura, determine (*a*) a inclinação no ponto *A* e (*b*) a deflexão no ponto médio *B* da viga. Use $E = 200$ GPa.

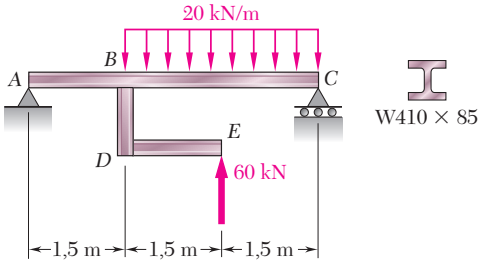


Fig. *P9.63*

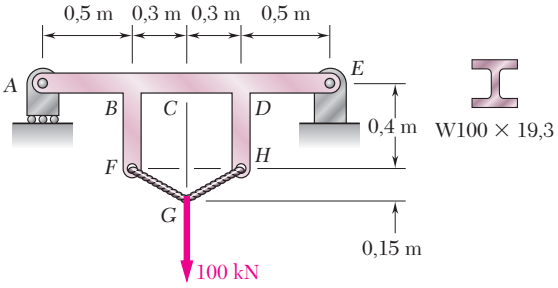


Fig. *P9.64*

9.64 As barras rígidas *BF* e *DH* são soldadas no perfil laminado *AE* como mostra a figura. Determine, para o carregamento mostrado na figura, (*a*) a deflexão no ponto *B* e (*b*) a deflexão no ponto médio *C* da viga. Use $E = 200$ GPa.

9.7. Método da superposição

Quando uma viga está submetida a várias forças concentradas ou distribuídas, em geral é conveniente calcular separadamente a inclinação e a deflexão provocadas por cada uma das forças. A inclinação e a deflexão provocadas pelas forças combinadas são então obtidas aplicando-se o princípio da superposição (Seção 2.12), ou seja, somando-se os valores da inclinação ou deflexão correspondentes às várias forças.

EXEMPLO 9.7

Determine a inclinação e a deflexão em D para a viga e o carregamento mostrados na Fig. 9.33, sabendo que a rigidez à flexão da viga é $EI = 100 \text{ MN} \cdot \text{m}^2$.

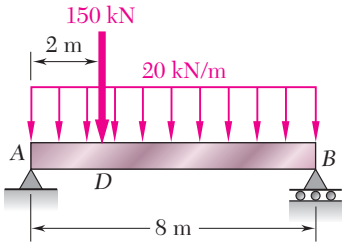


Fig. 9.33

A inclinação e a deflexão em qualquer ponto da viga podem ser obtidas superpondo-se as inclinações e as deflexões provocadas, respectivamente, pela força concentrada e pela força distribuída (Fig. 9.34).

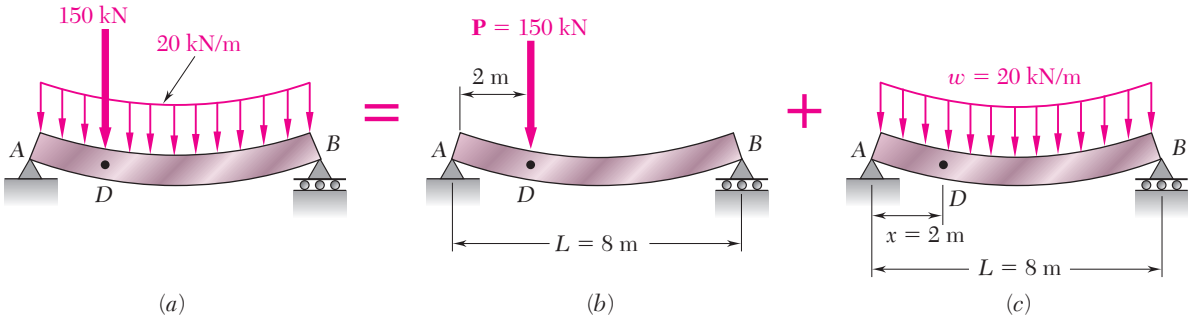


Fig. 9.34

Como a força concentrada na Fig. 9.34*b* é aplicada a um quarto do vão, podemos usar os resultados obtidos para a viga e o carregamento do Exemplo 9.3 e escrever

$$(\theta_D)_P = -\frac{PL^2}{32EI} = -\frac{(150 \times 10^3)(8)^2}{32(100 \times 10^6)} = -3 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$(y_D)_P = -\frac{3PL^3}{256EI} = -\frac{3(150 \times 10^3)(8)^3}{256(100 \times 10^6)} = -9 \times 10^{-3} \text{ m} = -9 \text{ mm}$$

Entretanto, recordando a equação da linha elástica obtida para uma força uniformemente distribuída no Exemplo 9.2, expressamos a deflexão na Fig. 9.34*c* como

$$y = \frac{w}{24EI}(-x^4 + 2Lx^3 - L^3x) \tag{9.50}$$

e, derivando em relação a x,

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{w}{24EI}(-4x^3 + 6Lx^2 - L^3) \tag{9.51}$$

Utilizando $w = 20$ kN/m, $x = 2$ m, e $L = 8$ m nas Equações (9.51) e (9.50), obtemos

$$(\theta_D)_w = \frac{20 \times 10^3}{24(100 \times 10^6)}(-352) = -2{,}93 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$(y_D)_w = \frac{20 \times 10^3}{24(100 \times 10^6)}(-912) = -7{,}60 \times 10^{-3} \text{ m} = -7{,}60 \text{ mm}$$

Combinando as inclinações e as deflexões produzidas pelas forças concentradas e distribuídas, temos

$$\theta_D = (\theta_D)_P + (\theta_D)_w = -3 \times 10^{-3} - 2{,}93 \times 10^{-3} = -5{,}93 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$y_D = (y_D)_P + (y_D)_w = -9 \text{ mm} - 7{,}60 \text{ mm} = -16{,}60 \text{ mm}$$

Para facilitar o trabalho dos engenheiros na prática, muitos manuais de estruturas e de engenharia mecânica fornecem tabelas com as deflexões e as inclinações de vigas para vários carregamentos e tipos de apoio. No Apêndice *D* há uma tabela desse tipo. Notamos que a inclinação e a deflexão da viga da Fig. 9.33 poderiam ter sido determinadas a partir dessa tabela. É claro que, utilizando as informações dadas nos casos 5 e 6, poderíamos ter expressado a deflexão da viga para qualquer valor $x \leq L/4$. Considerando a derivada da expressão obtida dessa maneira, teríamos alcançado a inclinação da viga sobre o mesmo intervalo. Notamos também que a inclinação

em ambas as extremidades da viga pode ser obtida simplesmente somando os valores correspondentes nessa tabela. No entanto, a deflexão máxima da viga da Fig. 9.33 *não pode* ser obtida somando-se as deflexões máximas dos casos 5 e 6, pois essas deflexões ocorrem em diferentes pontos da viga.†

9.8. Aplicação da superposição para vigas estaticamente indeterminadas

Fig. 9.35 As vigas contínuas que suportam este viaduto têm três apoios e são, portanto, indeterminadas.

Frequentemente, achamos mais conveniente usar o método da superposição para determinar as reações nos apoios de uma viga estaticamente indeterminada. Considerando primeiro o caso de uma viga indeterminada com um grau de indeterminação (Seção 9.5), como a viga da Fig. 9.35, seguimos a abordagem descrita na Seção 2.9. Escolhemos uma das reações como redundante e eliminamos ou modificamos de modo conveniente o apoio correspondente. A reação redundante é tratada então como uma força desconhecida que, juntamente com as outras, deve produzir deformações compatíveis com os apoios originais. A inclinação ou a deflexão no ponto em que o apoio foi modificado ou eliminado é obtida calculando-se separadamente as deformações provocadas pelas forças dadas e pela reação redundante, e superpondo os resultados obtidos. Uma vez determinadas as reações nos apoios, a inclinação e a deflexão podem ser estabelecidas de maneira usual em qualquer outro ponto da viga.

†Um valor aproximado para a deflexão máxima da viga pode ser obtido criando-se um gráfico dos valores de y correspondentes a vários valores de x. Para a determinação da localização exata e valor da deflexão máxima, seria necessário compor a expressão para um resultado igual a zero obtida para a inclinação da viga e resolver essa equação para x.

EXEMPLO 9.8

Para a viga prismática e o carregamento mostrados na Fig. 9.36, determine as reações de apoio. (Essa é a mesma viga e o carregamento do Exemplo 9.5 da Seção 9.5.)

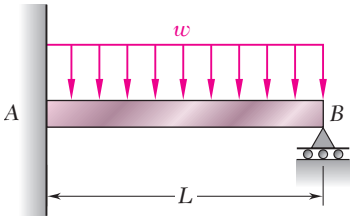


Fig. 9.36

Consideramos a reação em B como redundante e liberamos a viga do apoio. A reação $\mathbf{R}_B$ é agora considerada uma força desconhecida (Fig. 9.37a) e será determinada com base na condição de que a deflexão da viga em B deve ser zero.

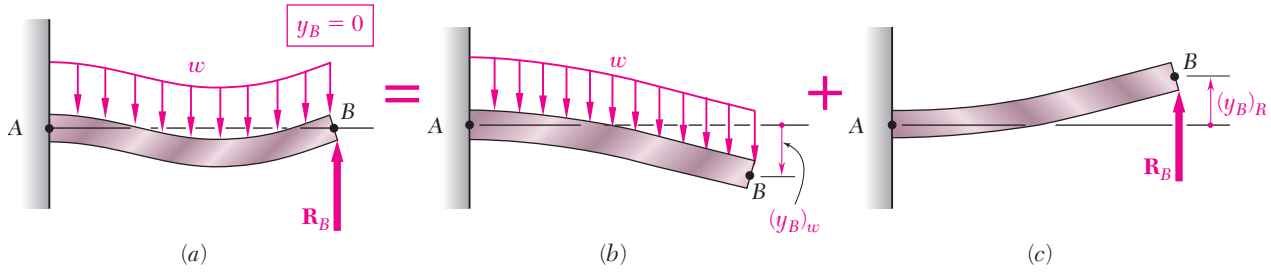


Fig. 9.37

A solução é obtida considerando-se separadamente a deflexão $(y_B)_w$ originada em B pela força w uniformemente distribuída (Fig. 9.37b) e a deflexão $(y_B)_R$ produzida no mesmo ponto pela reação redundante $\mathbf{R}_B$ (Fig. 9.37c).

Da tabela do Apêndice D (casos 2 e 1), concluímos que

$$(y_B)_w = -\frac{wL^4}{8EI} \qquad (y_B)_R = +\frac{R_B L^3}{3EI}$$

Considerando que a deflexão em B é a soma desses dois valores e que ela deve ser igual a zero, temos

$$y_B = (y_B)_w + (y_B)_R = 0$$

$$y_B = -\frac{wL^4}{8EI} + \frac{R_B L^3}{3EI} = 0$$

e, resolvendo para R_B $\quad R_B = \frac{3}{8}wL \quad \mathbf{R}_B = \frac{3}{8}wL \uparrow$

Desenhando o diagrama de corpo livre da viga (Fig. 9.38) e escrevendo as equações de equilíbrio correspondentes, temos

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad R_A + R_B - wL = 0 \tag{9.52}$$

$$R_A = wL - R_B = wL - \tfrac{3}{8}wL = \tfrac{5}{8}wL$$

$$\mathbf{R}_A = \tfrac{5}{8}wL \uparrow$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: \quad M_A + R_B L - (wL)(\tfrac{1}{2}L) = 0 \tag{9.53}$$

$$M_A = \tfrac{1}{2}wL^2 - R_B L = \tfrac{1}{2}wL^2 - \tfrac{3}{8}wL^2 = \tfrac{1}{8}wL^2$$

$$\mathbf{M}_A = \tfrac{1}{8}wL^2 \circlearrowleft$$

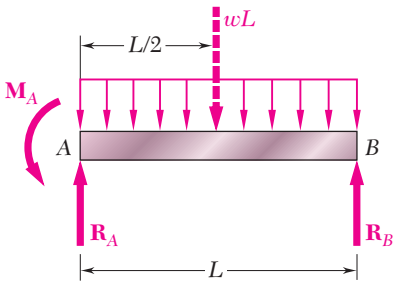


Fig. 9.38

Solução alternativa. Podemos considerar o momento, aplicado à extremidade engastada A, como redundante e substituí-la por um apoio fixo. O momento $\mathbf{M}_A$ é considerado agora a reação desconhecida (Fig. 9.39*a*) e será determinado pela condição de que a inclinação da viga em A deve

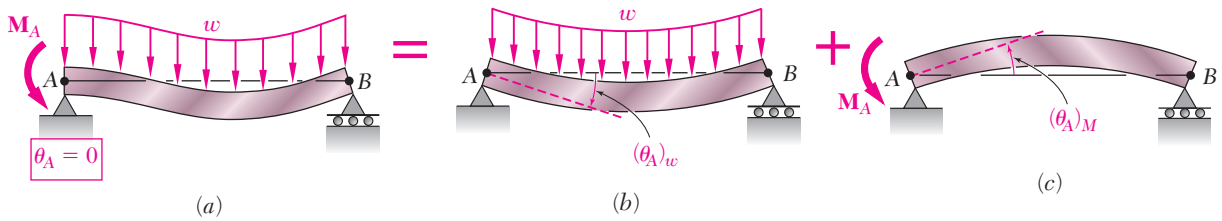


Fig. 9.39

ser zero. A solução é obtida considerando-se separadamente a inclinação $(\theta_A)_w$ provocada em A pela força w uniformemente distribuída (Fig. 9.39*b*) e a inclinação $(\theta_A)_M$ produzida no mesmo ponto pelo momento desconhecido $\mathbf{M}_A$ (Fig. 9.39*c*).

Utilizando a tabela do Apêndice D (casos 6 e 7) e observando que, no caso 7, A e B devem ser intercambiados, vemos que

$$(\theta_A)_w = -\frac{wL^3}{24EI} \qquad (\theta_A)_M = \frac{M_A L}{3EI}$$

Considerando que a inclinação em A é a soma desses dois valores e que ela deve ser zero, temos

$$\theta_A = (\theta_A)_w + (\theta_A)_M = 0$$

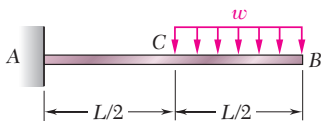
$$\theta_A = -\frac{wL^3}{25EI} + \frac{M_A L}{3EI} = 0$$

e, resolvendo para M_A,

$$M_A = \tfrac{1}{8}wL^2 \qquad \mathbf{M}_A = \tfrac{1}{8}wL^2 \circlearrowleft$$

Os valores de R_A e R_B podem então ser determinados pelas equações de equilíbrio (9.52) e (9.53).

A viga considerada no exemplo anterior é indeterminada de primeiro grau. No caso de uma viga indeterminada de segundo grau (Seção 9.5), duas reações devem ser consideradas redundantes e os apoios correspondentes devem ser eliminados ou modificados de maneira adequada. As reações redundantes são então tratadas como cargas desconhecidas às quais, simultaneamente e junto com as demais cargas, devem produzir deformações compatíveis com os apoios originais. (Ver o problema resolvido 9.9.)

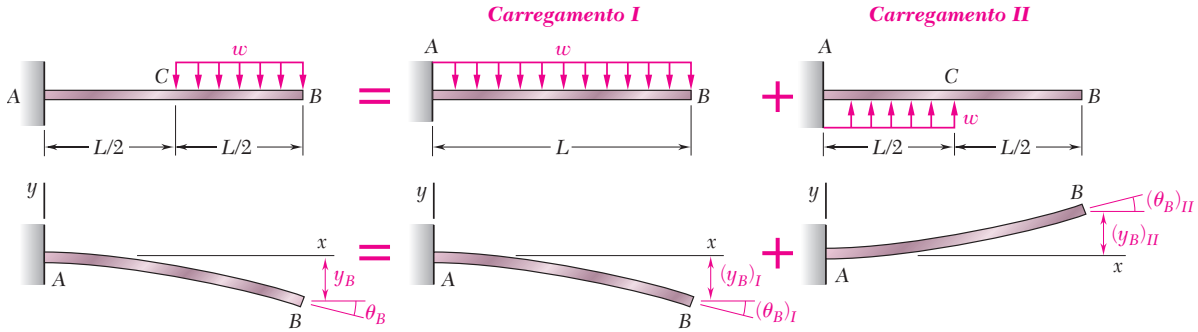


PROBLEMA RESOLVIDO 9.7

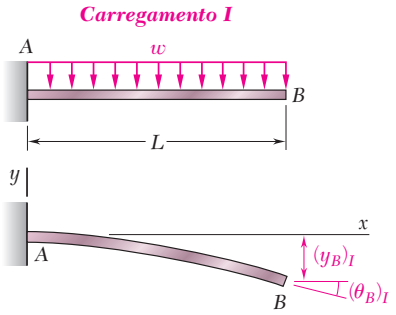
Para a viga e o carregamento mostrados na figura, determine a inclinação e a deflexão no ponto *B*.

SOLUÇÃO

Princípio da superposição. O carregamento dado pode ser obtido pela superposição dos carregamentos mostrados na figura a seguir. A viga *AB*, naturalmente, é a mesma em cada parte da figura.

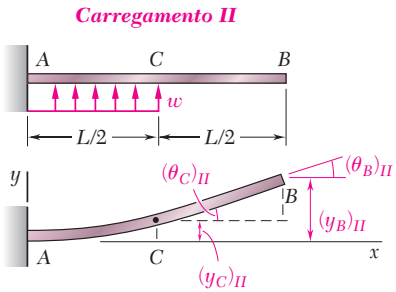


Para cada um dos carregamentos I e II, determinamos agora a inclinação e a deflexão em *B* usando a tabela de *Deflexões e Inclinações de Vigas* do Apêndice D.



Carregamento I

$$(\theta_B)_{\text{I}} = -\frac{wL^3}{6EI} \qquad (y_B)_{\text{I}} = -\frac{wL^4}{8EI}$$



Carregamento II

$$(\theta_C)_{\text{II}} = +\frac{w(L/2)^3}{6EI} = +\frac{wL^3}{48EI} \qquad (y_C)_{\text{II}} = +\frac{w(L/2)^4}{8EI} = +\frac{wL^4}{128EI}$$

Na parte *CB*, o momento fletor para o carregamento II é zero e, portanto, a linha elástica é uma linha reta.

$$(\theta_B)_{\text{II}} = (\theta_C)_{\text{II}} = +\frac{wL^3}{48EI} \qquad (y_B)_{\text{II}} = (y_C)_{\text{II}} + (\theta_C)_{\text{II}}\left(\frac{L}{2}\right)$$

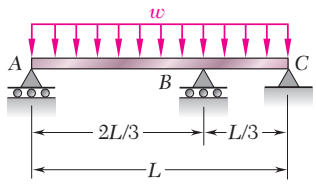
$$= \frac{wL^4}{128EI} + \frac{wL^3}{48EI}\left(\frac{L}{2}\right) = +\frac{7wL^4}{384EI}$$

Inclinação no ponto *B*

$$\theta_B = (\theta_B)_{\text{I}} + (\theta_B)_{\text{II}} = -\frac{wL^3}{6EI} + \frac{wL^3}{48EI} = -\frac{7wL^3}{48EI} \qquad \theta_B = \frac{7wL^3}{48EI} \curvearrowleft \blacktriangleleft$$

Deflexão em *B*

$$y_B = (y_B)_{\text{I}} + (y_B)_{\text{II}} = -\frac{wL^4}{8EI} + \frac{7wL^4}{384EI} = -\frac{41wL^4}{384EI} \qquad y_B = \frac{41wL^4}{384EI} \downarrow \blacktriangleleft$$

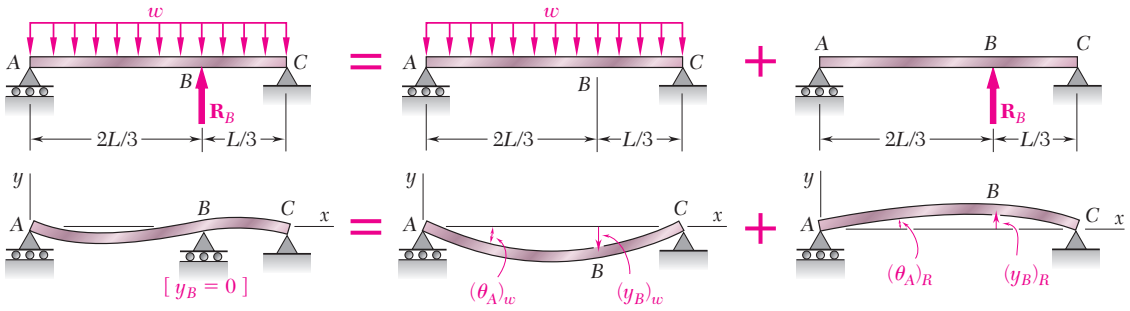


PROBLEMA RESOLVIDO 9.8

Para a viga uniforme e o carregamento mostrados na figura, determine (*a*) a reação em cada apoio e (*b*) a inclinação na extremidade *A*.

SOLUÇÃO

Princípio da superposição. A reação $\mathbf{R}_B$ é escolhida como redundante e considerada uma força desconhecida. As deflexões provocadas pela força distribuída e pela reação $\mathbf{R}_B$ são consideradas separadamente como é mostrado abaixo.



Para cada carregamento, a deflexão no ponto *B* é determinada usando-se a tabela de *Deflexões e Inclinações de Vigas* no Apêndice D.

Carregamento distribuído. Usamos o caso 6, Apêndice D

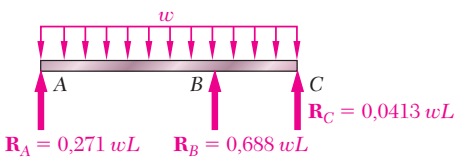
$$y = -\frac{w}{24EI}(x^4 - 2Lx^3 + L^3x)$$

No ponto *B*, $x = \frac{2}{3}L$:

$$(y_B)_w = -\frac{w}{24EI}\left[\left(\frac{2}{3}L\right)^4 - 2L\left(\frac{2}{3}L\right)^3 + L^3\left(\frac{2}{3}L\right)\right] = -0{,}01132\frac{wL^4}{EI}$$

Carregamento da reação redundante. Do caso 5, Apêndice D, com $a = \frac{2}{3}L$ e $b = \frac{1}{3}L$, temos

$$(y_B)_R = -\frac{Pa^2b^2}{3EIL} = +\frac{R_B}{3EIL}\left(\frac{2}{3}L\right)^2\left(\frac{L}{3}\right)^2 = 0{,}01646\frac{R_BL^3}{EI}$$



***a.* Reações nos apoios.** Lembrando que $y_B = 0$, escrevemos

$$y_B = (y_B)_w + (y_B)_R$$

$$0 = -0{,}01132\frac{wL^4}{EI} + 0{,}01646\frac{R_BL^3}{EI} \qquad \mathbf{R}_B = 0{,}688wL\uparrow \blacktriangleleft$$

Como a reação R_B agora é conhecida, podemos usar os métodos da estática para determinar as outras reações: $\mathbf{R}_A = 0{,}271wL\uparrow$ $\mathbf{R}_C = 0{,}0413wL\uparrow \blacktriangleleft$

***b.* Inclinação na extremidade *A*.** Consultando novamente o Apêndice D, temos

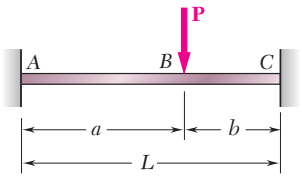
Carregamento distribuído. $(\theta_A)_w = -\frac{wL^3}{24EI} = -0{,}04167\frac{wL^3}{EI}$

Carregamento da reação redundante. Para $P = -R_B = -0{,}688wL$ e $b = \frac{1}{3}L$

$$(\theta_A)_R = -\frac{Pb(L^2 - b^2)}{6EIL} = +\frac{0{,}688wL}{6EIL}\left(\frac{L}{3}\right)\left[L^2 - \left(\frac{L}{3}\right)^2\right] \qquad (\theta_A)_R = 0{,}03398\frac{wL^3}{EI}$$

Finalmente, $\theta_A = (\theta_A)_w + (\theta_A)_R$

$$\theta_A = -0{,}04167\frac{wL^3}{EI} + 0{,}03398\frac{wL^3}{EI} = -0{,}00769\frac{wL^3}{EI} \qquad \theta_A = 0{,}00769\frac{wL^3}{EI}\curvearrowleft \blacktriangleleft$$

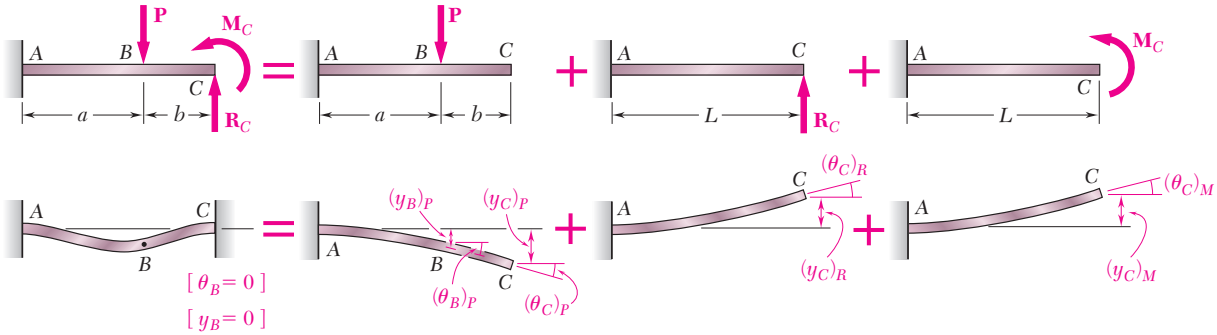


PROBLEMA RESOLVIDO 9.9

Para a viga e o carregamento mostrados na figura, determine as reações no engastamento fixo *C*.

SOLUÇÃO

Princípio da superposição. Considerando que a força axial na viga é zero, a viga *ABC* é indeterminada com dois graus de indeterminação e apresenta duas componentes de reação como redundantes, ou seja, a força vertical $\mathbf{R}_C$ e o momento $\mathbf{M}_C$. As deformações provocadas pela força **P**, a força $\mathbf{R}_C$ e o momento $\mathbf{M}_C$ serão consideradas separadamente conforme mostra a figura.



Para cada carga, serão determinadas a inclinação e a deflexão no ponto *C*, utilizando a tabela *Deflexões e Inclinações de Vigas* do Apêndice D.

***Força* P.** Observamos que, para esse carregamento, a parte *BC* da viga é reta

$$(\theta_C)_P = (\theta_B)_P = -\frac{Pa^2}{2EI} \qquad (y_C)_P = (y_B)_P + (\theta_B)_P b$$

$$= -\frac{Pa^3}{3EI} - \frac{Pa^2}{2EI}b = -\frac{Pa^2}{6EI}(2a + 3b)$$

***Força* R_C** $\qquad (\theta_C)_R = +\dfrac{R_C L^2}{2EI} \qquad (y_C)_R = +\dfrac{R_C L^3}{3EI}$

***Momento* M_C** $\qquad (\theta_C)_M = +\dfrac{M_C L}{EI} \qquad (y_C)_M = +\dfrac{M_C L^2}{2EI}$

Condições de contorno. Na extremidade *C*, a inclinação e a deflexão devem ser zero:

$[x = L, \theta_C = 0]$:

$$\theta_C = (\theta_C)_P + (\theta_C)_R + (\theta_C)_M$$

$$0 = -\frac{Pa^2}{2EI} + \frac{R_C L^2}{2EI} + \frac{M_C L}{EI} \qquad (1)$$

$[x = L, y_C = 0]$:

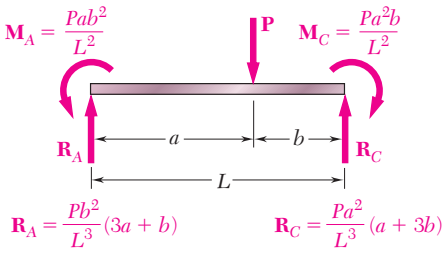
$$y_C = (y_C)_P + (y_C)_R + (y_C)_M$$

$$0 = -\frac{Pa^2}{6EI}(2a + 3b) + \frac{R_C L^3}{3EI} + \frac{M_C L^2}{2EI} \qquad (2)$$

Componentes de reação em *C*. Resolvendo simultaneamente as Equações (1) e (2), encontramos, após as simplificações

$$R_C = +\frac{Pa^2}{L^3}(a + 3b) \qquad \mathbf{R}_C = \frac{Pa^2}{L^3}(a + 3b)\uparrow \blacktriangleleft$$

$$M_C = -\frac{Pa^2 b}{L^2} \qquad \mathbf{M}_C = \frac{Pa^2 b}{L^2}\circlearrowleft \blacktriangleleft$$



Utilizando os métodos da estática, podemos agora determinar as reações em *A*.

PROBLEMAS

Utilize o método da superposição para resolver os problemas a seguir, considerando que a rigidez à flexão EI de cada viga é constante.

9.65 até 9.68 Para a viga e o carregamento mostrados nas figuras, determine (*a*) a deflexão em *C* e (*b*) a inclinação na extremidade *A*.

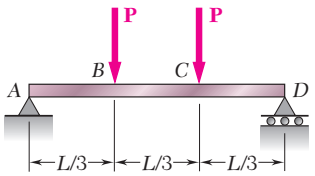


Fig. P9.65

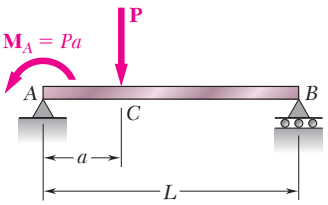


Fig. P9.66

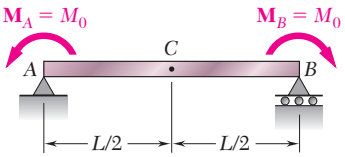


Fig. P9.67

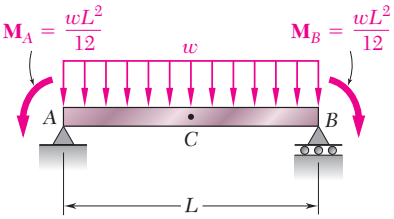


Fig. P9.68

9.69* e *9.70 Para a viga em balanço e o carregamento mostrados nas figuras, determine a inclinação e a deflexão na extremidade livre.

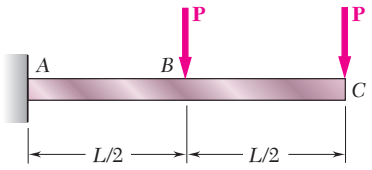


Fig. *P9.69*

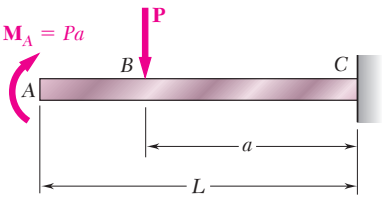


Fig. *P9.70*

9.71 e 9.72 Para a viga em balanço e o carregamento mostrados nas figuras, determine a inclinação e a deflexão no ponto *B*.

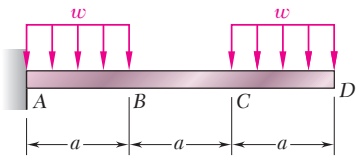


Fig. P9.71

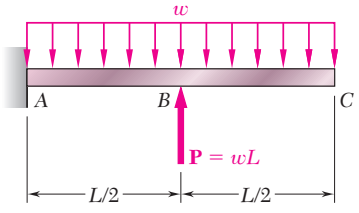


Fig. P9.72

9.73 Para a viga em balanço e o carregamento mostrados na figura, determine a inclinação e a deflexão na extremidade C. Use $E = 200$ GPa.

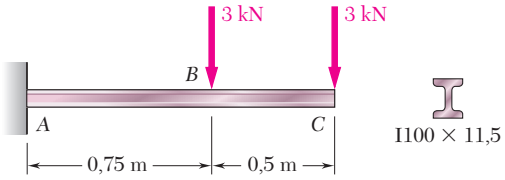


Fig. P9.73 e *P9.74*

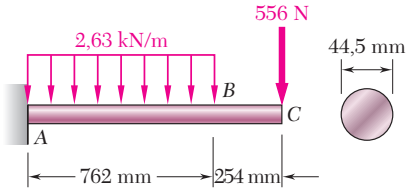


Fig. P9.75 e P9.76

9.74 Para a viga em balanço e o carregamento mostrados na figura, determine a inclinação e a deflexão no ponto B. Use $E = 200$ GPa.

9.75 Para a viga em balanço e o carregamento mostrados na figura, determine a inclinação e a deflexão na extremidade C. Use $E = 200$ GPa.

9.76 Para a viga em balanço e o carregamento mostrados na figura, determine a inclinação e a deflexão no ponto B. Use $E = 200$ GPa.

9.77 e *9.78* Para a viga e o carregamento mostrados nas figuras, determine (a) a inclinação na extremidade A e (b) a deflexão no ponto C. Use $E = 200$ GPa.

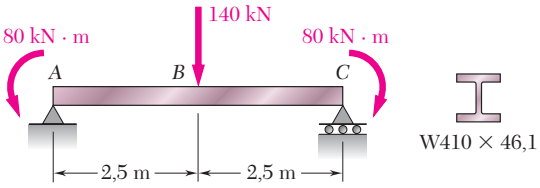


Fig. P9.77

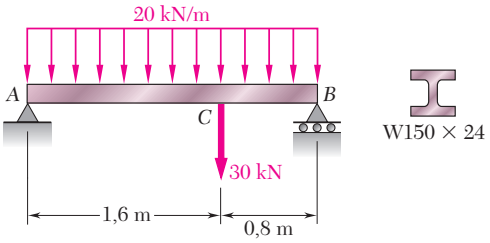


Fig. *P9.78*

9.79 e 9.80 Para a viga uniforme mostrada, determine (a) a reação em A e (b) a reação em B.

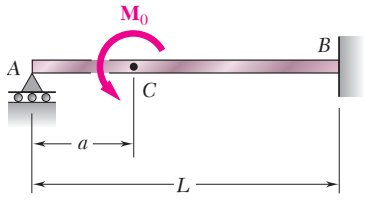


Fig. P9.79

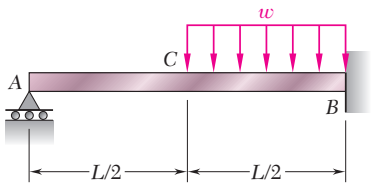


Fig. P9.80

9.81 e *9.82* Para a viga uniforme mostrada, determine a reação em cada um dos três apoios.

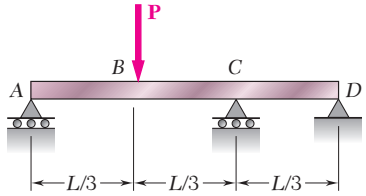


Fig. P9.81

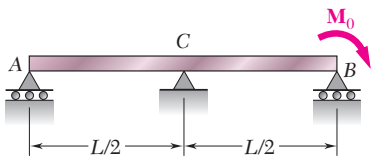


Fig. *P9.82*

9.83 e *9.84* Para a viga mostrada, determine a reação em B.

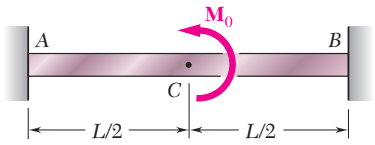


Fig. P9.83

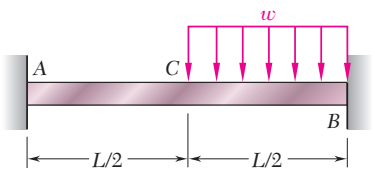


Fig. *P9.84*

9.85 A viga DE está apoiada sobre a viga em balanço AC, conforme mostra a figura. Sabendo que é utilizada uma barra quadrada com 10 mm de lado para cada viga, determine a deflexão na extremidade C se lhe for aplicado um momento de 25 N · m (a) à extremidade E da viga DE, (b) à extremidade C da viga AC. Use $E = 200$ GPa.

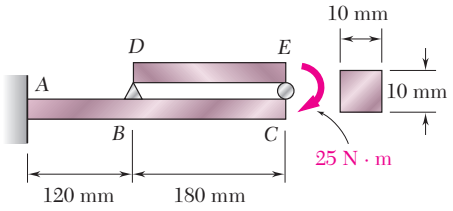


Fig. P9.85

9.86 A viga BD está apoiada sobre a viga em balanço AE, como mostra a figura. Sabendo que é utilizada uma barra quadrada com 19,05 mm de lado para cada viga, determine para o carregamento mostrado (a) a deflexão no ponto C e (b) a deflexão no ponto E. Use $E = 200$ GPa.

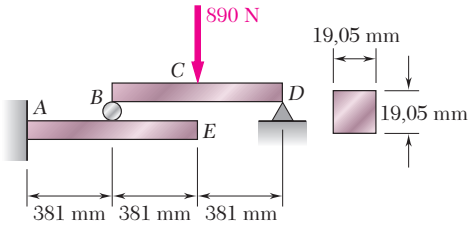


Fig. P9.86

9.87 As duas vigas mostradas têm a mesma seção transversal e estão unidas por uma articulação em C. Para o carregamento mostrado na figura, determine (a) a inclinação no ponto A e (b) a deflexão no ponto B. Use $E = 200$ GPa.

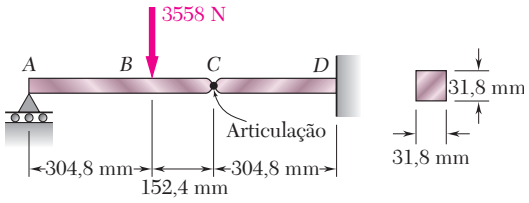


Fig. P9.87

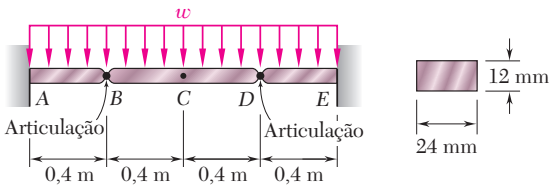


Fig. P9.88

9.88 Uma viga central BD é presa por articulações a duas vigas em balanço AB e DE. Todas as vigas têm a seção transversal mostrada. Para o carregamento mostrado na figura, determine o maior valor de w de maneira que a deflexão em C não exceda 3 mm. Use $E = 200$ GPa.

9.89 Antes de ser aplicada a força uniformemente distribuída w, existe uma folga $\delta_0 = 1{,}2$ mm entre as extremidades das vigas em balanço AB e CD. Sabendo que $E = 105$ GPa e $w = 30$ kN/m, determine (a) a reação em A e (b) a reação em D.

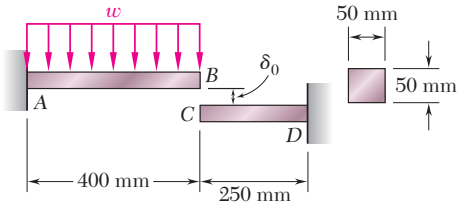


Fig. P9.89

9.90 Antes de ser aplicado o carregamento de 29,2 kN/m, havia uma folga $\delta_0 = 20{,}3$ mm entre a viga W410 × 60 e o apoio em *C*. Sabendo que $E = 200$ GPa, determine a reação em cada apoio depois de ser aplicado a força uniformante distribuida.

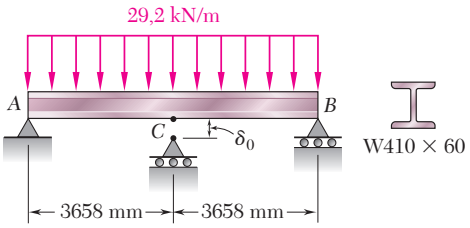


Fig. *P9.90*

9.91 Para o carregamento mostrado na figura, e sabendo que as vigas *AB* e *DE* têm a mesma rigidez à flexão, determine a reação (*a*) em *B*, (*b*) em *E*.

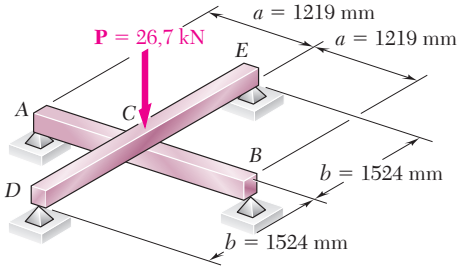


Fig. *P9.91*

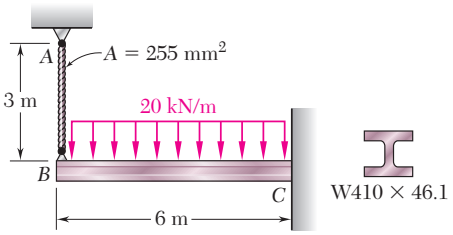


Fig. P9.92

9.92 A viga em balanço *BC* está presa ao cabo de aço *AB*, conforme mostra a figura. Sabendo que o cabo está inicialmente esticado, determine a força de tração no cabo provocada pela força mostrada distribuída na figura. Use $E = 200$ GPa.

9.93 Uma barra *BC* de 22,2 mm de diâmetro é presa à alavanca *AB* e ao suporte fixo em *C*. A alavanca *AB* tem uma seção transversal uniforme com 9,5 mm de espessura e 25,4 mm de altura. Para o carregamento mostrado na figura, determine a deflexão no ponto *A*. Use $E = 200$ GPa e $G = 77{,}2$ MPa.

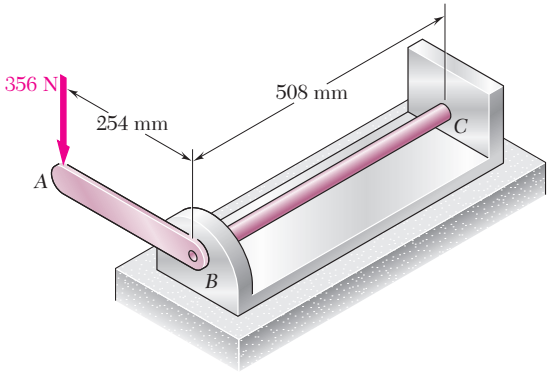


Fig. P9.93

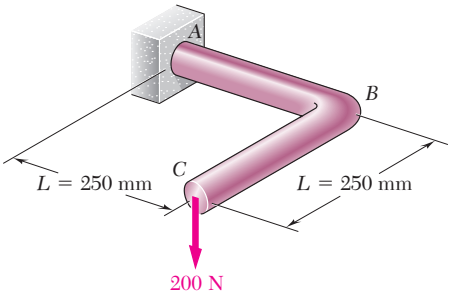


Fig. P9.94

9.94 Uma barra de 16 mm de diâmetro foi moldada assumindo a forma mostrada. Determine a deflexão da extremidade *C* após lhe ser aplicada uma carga de 200 N. Use $E = 200$ GPa e $G = 80$ GPa.

*9.9. Teoremas do momento de área

Nas Seções 9.2 até 9.6, usamos um método matemático com base na integração de uma equação diferencial para determinar a deflexão e a inclinação de uma viga em um determinado ponto qualquer. O momento fletor era expresso como uma função $M(x)$ da distância x medida ao longo da viga, e duas integrações sucessivas nos conduziam às funções $\theta(x)$ e $y(x)$ representando, respectivamente, a inclinação e a deflexão em qualquer ponto da viga. Nesta seção você verá como as propriedades geométricas da linha elástica podem ser usadas para determinar a deflexão e a inclinação de uma viga em um ponto específico (Fig. 9.40).

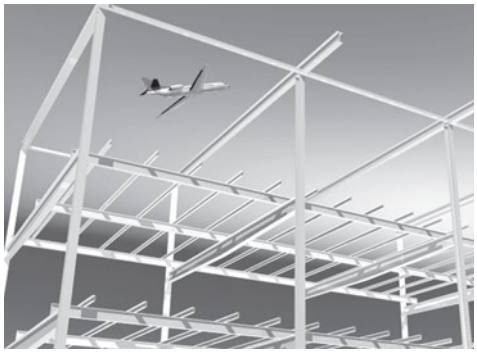


Fig. 9.40 As deflexões das vigas que suportam os pavimentos de uma construção devem ser levadas em conta no projeto.

Considere a viga AB submetida a um carregamento arbitrário (Fig. 9.41a). Traçamos o diagrama representando a variação ao longo da viga da grandeza M/EI obtida dividindo-se o momento fletor M pela rigidez à flexão EI (Fig. 9.41b). Observamos que, exceto por uma diferença nas escalas de ordenadas, esse diagrama será igual ao diagrama do momento fletor se a rigidez à flexão da viga for constante.

Lembrando a Equação (9.4) da Seção 9.3 e o fato de que $dy/dx = \theta$, escrevemos

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

ou

$$d\theta = \frac{M}{EI}\,dx \tag{9.54}\dagger$$

Considerando dois pontos arbitrários C e D na viga e integrando ambos os membros da Equação (9.54) de C a D, escrevemos

$$\int_{\theta_C}^{\theta_D} d\theta = \int_{x_C}^{x_D} \frac{M}{EI}\,dx$$

ou

$$\theta_D - \theta_C = \int_{x_C}^{x_D} \frac{M}{EI}\,dx \tag{9.55}$$

em que θ_C e θ_D representam a inclinação em C e D, respectivamente (Fig. 9.41c). Mas o membro direito da Equação (9.55) representa a área sob o diagrama (M/EI) entre C e D, e o membro esquerdo, o ângulo entre as tangentes à linha elástica em C e D (Fig. 9.41d). Chamando esse ângulo de $\theta_{D/C}$, temos

$$\theta_{D/C} = \text{área sob o diagrama } M/EI \text{ entre os pontos } C \text{ e } D \tag{9.56}$$

Este é o *teorema do primeiro momento de área*.

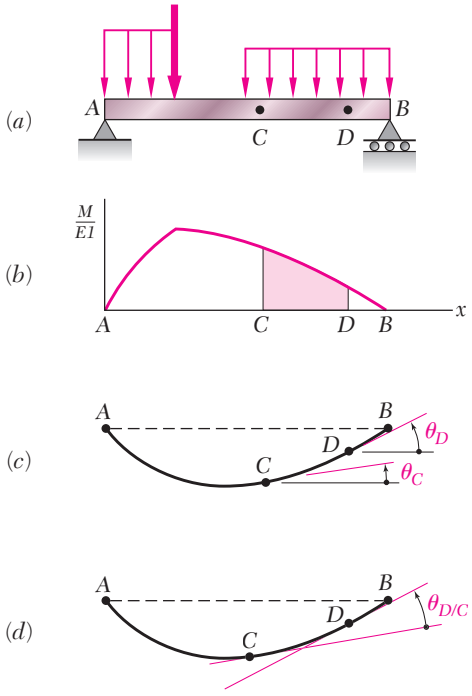


Fig. 9.41

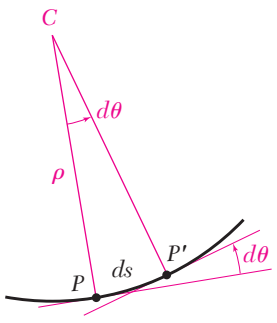


Fig. 9.42

†Essa relação também pode ser deduzida sem se referir aos resultados obtidos na Seção 9.3, observando-se que o ângulo $d\theta$ formado pelas tangentes à linha elástica em P e P' é também o ângulo formado pelas normais correspondentes a essa linha (Fig. 9.42). Temos então $d\theta = ds/\rho$, em que ds é o comprimento do arco PP' e ρ é o raio de curvatura em P. Substituindo $1/\rho$ da Equação (4.21) e observando que, como a inclinação em P é muito pequena, em uma primeira aproximação ds é igual à distância horizontal dx entre P e P', escrevemos

$$d\theta = \frac{M}{EI}dx \tag{9.54}$$

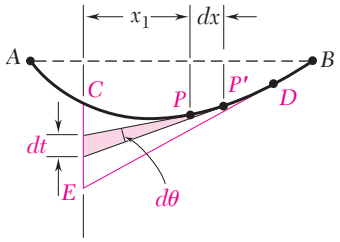


Fig. 9.43

Observamos que o ângulo $\theta_{D/C}$ e a área sob o diagrama (M/EI) têm o mesmo sinal. Em outras palavras, uma área positiva (isto é, uma área localizada acima do eixo x) corresponde a uma rotação no sentido anti-horário da tangente à linha elástica à medida que nos movemos de C para D, e uma área negativa corresponde a uma rotação no sentido horário.

Vamos considerar dois pontos P e P' localizados entre C e D e a uma distância dx um do outro (Fig. 9.43). As tangentes à linha elástica traçadas em P e P' interceptam um segmento de comprimento dt em uma reta vertical que passa pelo ponto C. Como a inclinação θ em P e o ângulo $d\theta$ formado pelas tangentes em P e P' são ambos grandezas muito pequenas, podemos supor que dt é igual ao arco de círculo de raio x_1 que subentende o ângulo $d\theta$. Temos, portanto,

$$dt = x_1\, d\theta$$

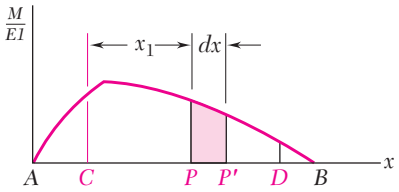


Fig. 9.44

ou, substituindo $d\theta$ da Equação (9.54),

$$dt = x_1 \frac{M}{EI}\, dx \tag{9.57}$$

Agora integramos a Equação (9.57) de C a D. Observamos que, à medida que o ponto P caminha pela linha elástica de C a D, a tangente em P percorre a linha vertical que passa pelo ponto C, de C a E. A integral do membro esquerdo é igual à distância vertical de C à tangente em D. Essa distância é representada por $t_{C/D}$ e é chamada de *desvio tangencial de C em relação a D*. Temos, portanto,

$$t_{C/D} = \int_{x_C}^{x_D} x_1 \frac{M}{EI}\, dx \tag{9.58}$$

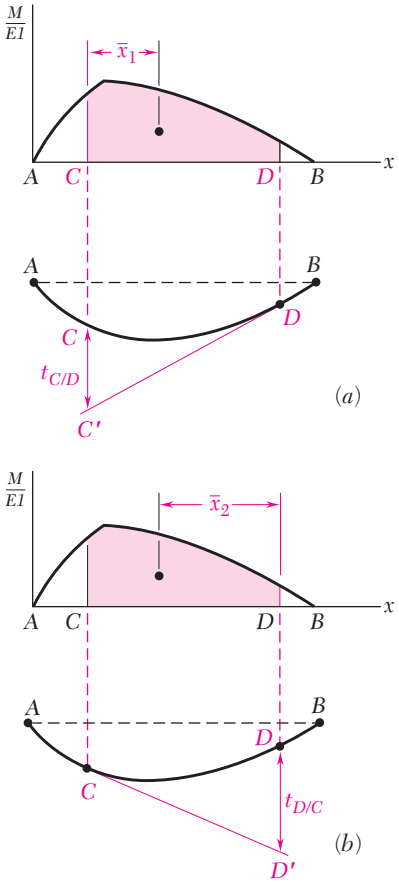


Fig. 9.45

Observamos agora que $(M/EI)\, dx$ representa um elemento de área sob o diagrama (M/EI), e $x_1\ (M/EI)\, dx$, o primeiro momento desse elemento em relação a um eixo vertical que passa pelo ponto C (Fig. 9.44). O membro direito na Equação (9.58), portanto, representa o primeiro momento em relação a esse eixo, da área localizada sob o diagrama (M/EI) entre C e D.

Podemos enunciar o *teorema do segundo momento de área* da seguinte maneira: *O desvio tangencial $t_{C/D}$ de C em relação a D é igual ao primeiro momento em relação a um eixo vertical que passa pelo ponto C da área sob o diagrama (M/EI) entre C e D.*

Lembrando que o primeiro momento de uma área em relação a um eixo é igual ao produto da área pela distância de seu centroide até esse eixo, podemos também expressar o teorema do segundo momento de área da seguinte forma:

$$t_{C/D} = (\text{área entre } C \text{ e } D)\, \bar{x}_1 \tag{9.59}$$

em que a área se refere à área sob o diagrama (M/EI) e em que $\bar{x}_1$ é a distância do centroide da área até o eixo vertical que passa pelo ponto C (Fig. 9.45*a*).

Deve-se tomar cuidado para distinguir entre o desvio tangencial de C em relação a D, representado por $t_{C/D}$, e o desvio tangencial de D em relação a C, representado por $t_{D/C}$. O desvio tangencial $t_{D/C}$ representa a distância vertical de D até a tangente à linha elástica em C, e é obtido multiplicando-se a área sob o diagrama (M/EI) pela distância $\bar{x}_2$ de seu centroide até o eixo vertical que passa pelo ponto D (Fig. 9.45*b*).

$$t_{D/C} = (\text{área entre } C \text{ e } D)\,\bar{x}_2 \tag{9.60}$$

Observamos que, se uma área sob o diagrama (M/EI) está localizada acima do eixo x, seu primeiro momento em relação a um eixo vertical será positivo; se ela estiver localizada abaixo do eixo x, seu primeiro momento será negativo. Constatamos pela Fig. 9.45 que um ponto com um desvio tangencial *positivo* está localizado *acima* da tangente correspondente, enquanto um ponto com um desvio tangencial *negativo* estaria localizado *abaixo* da tangente.

*9.10. Aplicação em vigas em balanço e em vigas com carregamentos simétricos

Recordamos que o teorema do primeiro momento de área deduzido na seção anterior define o ângulo $\theta_{D/C}$ *entre* as tangentes em dois pontos C e D da linha elástica. Assim, o ângulo θ_D que a tangente em D forma com a horizontal, isto é, a inclinação em D, pode ser obtido somente se a inclinação em C for conhecida. Da mesma forma, o teorema do segundo momento de área define a distância vertical de um ponto da linha elástica desde a tangente até outro ponto. O desvio tangencial $t_{D/C}$ nos ajudará a localizar o ponto D somente se a tangente em C for conhecida. Concluímos que os dois teoremas do momento de área podem ser aplicados efetivamente na determinação das inclinações e das deflexões somente se uma certa *tangente de referência* à linha elástica tiver sido primeiro determinada.

No caso de uma *viga em balanço* (Fig. 9.46), a tangente à linha elástica na extremidade engastada A é conhecida e pode ser usada como a tangente de referência. Como $\theta_A = 0$, a inclinação da viga em qualquer ponto D é $\theta_D = \theta_{D/A}$ e pode ser obtida pelo teorema do primeiro momento de área. No entanto, a deflexão y_D do ponto D é igual ao desvio tangencial $t_{D/A}$ medido a partir da tangente de referência em A e pode ser obtida pelo teorema do segundo momento de área.

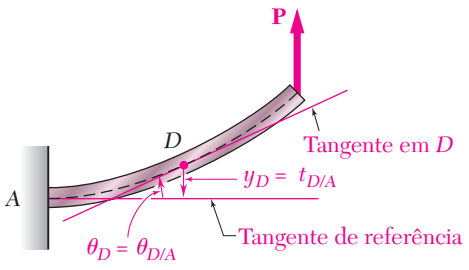


Fig. 9.46

No caso de uma viga biapoiada AB com um *carregamento simétrico* (Fig. 9.47*a*) ou no caso de uma viga simétrica biapoiada com balanço sob um carregamento simétrico (ver o Problema Resolvido 9.11), a tangente no centro C da viga deve ser horizontal por razões de simetria e pode ser usada como a tangente de referência (Fig. 9.47*b*). Como $\theta_C = 0$, a inclinação no apoio B é $\theta_B = \theta_{B/C}$ e pode ser obtida pelo teorema do primeiro momento de área. Observamos também que $|y|_{\text{máx}}$ é igual ao desvio tangencial $t_{B/C}$ e pode, portanto, ser obtido pelo teorema do segundo momento de área. A inclinação em qualquer outro ponto D da viga (Fig. 9.47*c*) é encontrada de uma forma similar, e a deflexão em D pode ser expressa como $y_D = t_{D/C} - t_{B/C}$.

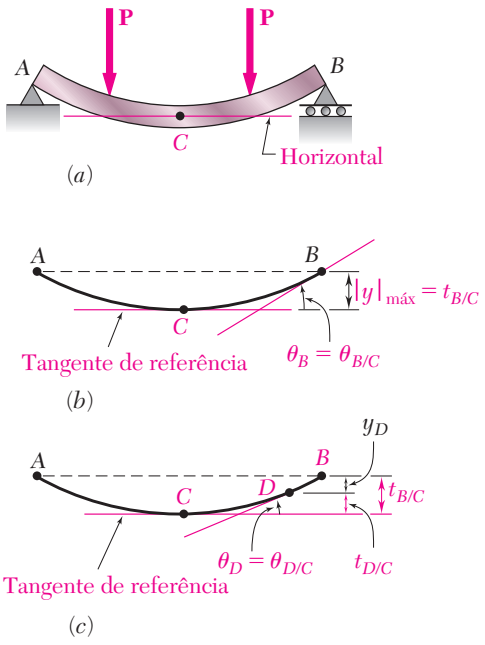


Fig. 9.47

EXEMPLO 9.9

Determine a inclinação e a deflexão na extremidade B da viga prismática em balanço AB quando ela for carregada conforme mostra a Fig. 9.48, sabendo que a rigidez à flexão da viga é $EI = 10\ \text{MN} \cdot \text{m}^2$.

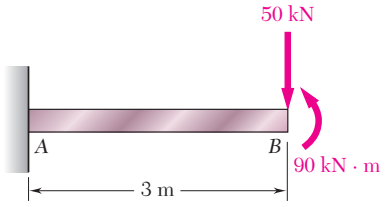


Fig. 9.48

Primeiro desenhamos o diagrama de corpo livre da viga (Fig. 9.49*a*). Somando as componentes verticais e momentos em relação a A, concluímos que as reações na extremidade engastada A consistem em uma força vertical para cima $\mathbf{R}_A$ de 50 kN e um momento $\mathbf{M}_A$ no sentido anti-horário de 60 kN · m. Em seguida, desenhamos o diagrama de momento fletor (Fig. 9.49*b*) e determinamos pelas semelhanças de triângulos a distância x_D da extremidade A até o ponto D da viga em que $M = 0$:

$$\frac{x_D}{60} = \frac{3 - x_D}{90} = \frac{3}{150} \qquad x_D = 1{,}2\ \text{m}$$

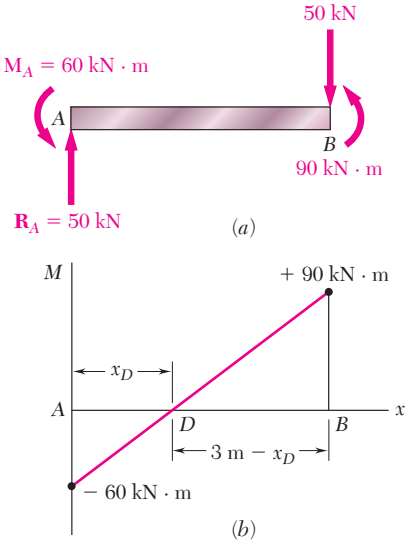


Fig. 9.49

Dividindo pela rigidez à flexão EI os valores obtidos para M, desenhamos o diagrama (M/EI) (Fig. 9.50) e calculamos as áreas correspondentes, respectivamente, aos segmentos AD e DB, considerando um sinal positivo para a área localizada acima do eixo x e um sinal negativo à área localizada abaixo desse eixo. Usando o teorema do primeiro momento de área, escrevemos

$$\begin{aligned}\theta_{B/A} = \theta_B - \theta_A &= \text{área de } A \text{ à } B = A_1 + A_2 \\ &= -\tfrac{1}{2}(1{,}2\ \text{m})(6 \times 10^{-3}\ \text{m}^{-1}) \\ &\qquad + \tfrac{1}{2}(1{,}8\ \text{m})(9 \times 10^{-3}\ \text{m}^{-1}) \\ &= -3{,}6 \times 10^{-3} + 8{,}1 \times 10^{-3} \\ &= +4{,}5 \times 10^{-3}\ \text{rad}\end{aligned}$$

e, como $\theta_A = 0$,

$$\theta_B = +4{,}5 \times 10^{-3}\ \text{rad}$$

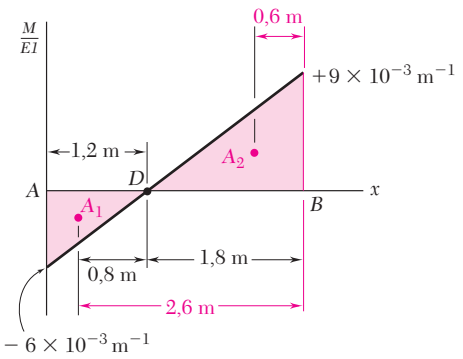


Fig. 9.50

Utilizando agora o teorema do segundo momento de área, escrevemos que o desvio tangencial $t_{B/A}$ é igual ao primeiro momento em relação a um eixo vertical que passa pelo ponto B da área total entre A e B. Expressando o momento de cada área parcial como produto daquela área pela distância de seu centroide até o eixo que passa por B, temos

$$\begin{aligned}t_{B/A} &= A_1(2{,}6\ \text{m}) + A_2(0{,}6\ \text{m}) \\ &= (-3{,}6 \times 10^{-3})(2{,}6\ \text{m}) + (8{,}1 \times 10^{-3})(0{,}6\ \text{m}) \\ &= -9{,}36\ \text{mm} + 4{,}86\ \text{mm} = -4{,}50\ \text{mm}\end{aligned}$$

Como a tangente de referência em A é horizontal, a deflexão em B é igual a $t_{B/A}$ e temos

$$y_B = t_{B/A} = -4{,}50\ \text{mm}$$

A barra deformada está desenhada na Fig. 9.51.

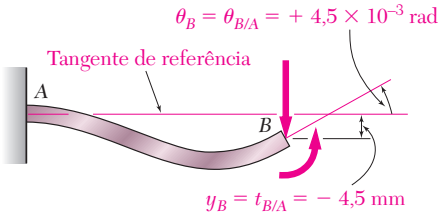


Fig. 9.51

*9.11. Diagramas de momento fletor por partes

Em muitas aplicações, a determinação do ângulo $\theta_{D/C}$ e do desvio tangencial $t_{D/C}$ é simplificada quando o efeito de cada carregamento é avaliado independentemente. Um diagrama separado (M/EI) é desenhado para cada carregamento, e o ângulo $\theta_{D/C}$ é obtido somando algebricamente as áreas sob os vários diagramas. Semelhantemente, o desvio tangencial $t_{D/C}$ é obtido somando os primeiros momentos dessas áreas em relação ao eixo vertical que passa pelo ponto D. Dizemos que um diagrama de momento fletor ou diagrama (M/EI) desenhado dessa maneira é *desenhado por partes*.

Quando um diagrama de momento fletor ou diagrama (M/EI) é desenhado por partes, as várias áreas definidas pelo diagrama consistem em formas geométricas simples, como retângulos, triângulos e triângulos com hipotenusa parabólica. Por conveniência, as áreas e os centroides dessas várias formas foram indicados na Fig. 9.52.

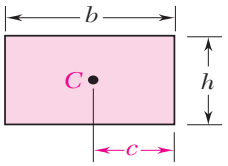
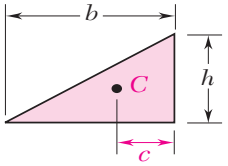
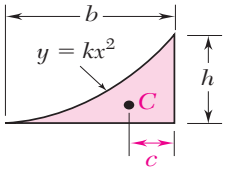
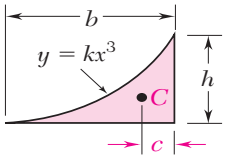
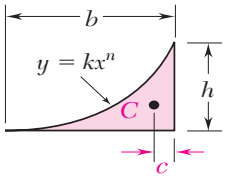
Forma		Área	c
Retângulo		bh	$\frac{b}{2}$
Triângulo		$\frac{bh}{2}$	$\frac{b}{3}$
Triângulo com hipotenusa parabólica		$\frac{bh}{3}$	$\frac{b}{4}$
Triângulo com hipotenusa cúbica		$\frac{bh}{4}$	$\frac{b}{5}$
Triângulo com hipotenusa geral		$\frac{bh}{n+1}$	$\frac{b}{n+2}$

Fig. 9.52 Áreas e centroides de formas comuns.

EXEMPLO 9.10

Determine a inclinação e a deflexão na extremidade B da viga prismática do Exemplo 9.9, desenhando o diagrama do momento fletor por partes.

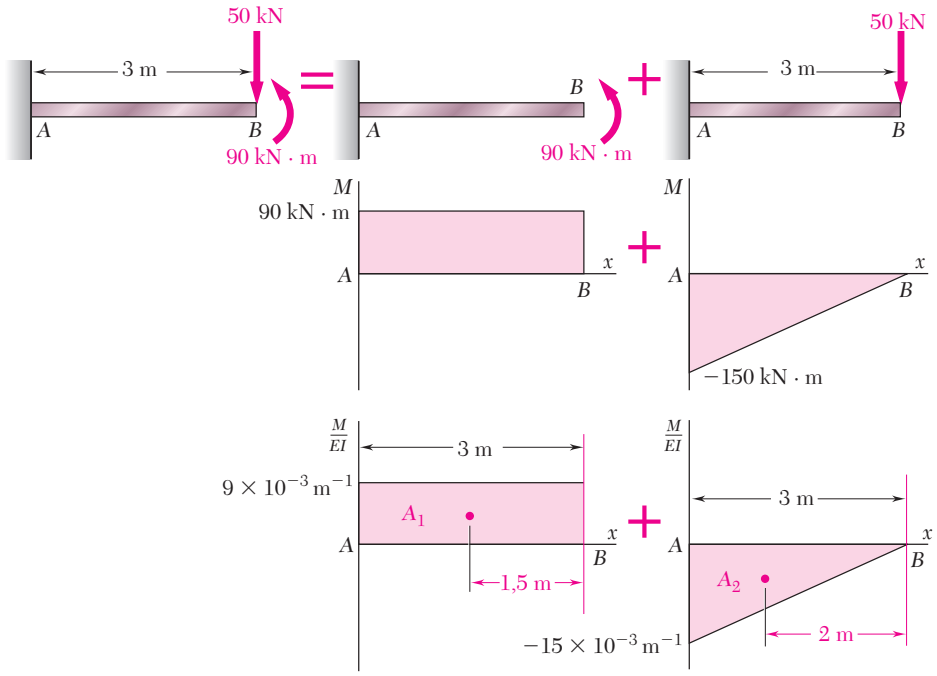


Fig. 9.53

Substituímos o carregamento dado pelos dois carregamentos equivalentes mostrados na Fig. 9.53 e desenhamos os diagramas correspondentes do momento fletor, (M/EI) da direita para a esquerda, começando pela extremidade livre B.

Aplicando o teorema do primeiro momento de área, e lembrando que $\theta_A = 0$, escrevemos

$$\begin{aligned}\theta_B &= \theta_{B/A} = A_1 + A_2\\ &= (9 \times 10^{-3}\ \text{m}^{-1})(3\ \text{m}) - \tfrac{1}{2}(15 \times 10^{-3}\ \text{m}^{-1})(3\ \text{m})\\ &= 27 \times 10^{-3} - 22{,}5 \times 10^{-3} = 4{,}5 \times 10^{-3}\ \text{rad}\end{aligned}$$

Aplicando o teorema do segundo momento de área, calculamos o primeiro momento de cada área em relação ao eixo vertical que passa por B e escrevemos

$$\begin{aligned}y_B &= t_{B/A} = A_1(1{,}5\ \text{m}) + A_2(2\ \text{m})\\ &= (27 \times 10^{-3})(1{,}5\ \text{m}) - (22{,}5 \times 10^{-3})(2\ \text{m})\\ &= 40{,}5\ \text{mm} - 45\ \text{mm} = -4{,}5\ \text{mm}\end{aligned}$$

É conveniente, na prática, agrupar em um só desenho as duas partes do diagrama (M/EI) (Fig. 9.54).

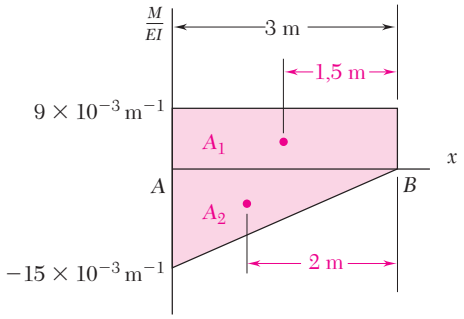


Fig. 9.54

EXEMPLO 9.11

Para a viga prismática AB e o carregamento mostrados na Fig. 9.55, determine a inclinação em um apoio e a deflexão máxima.

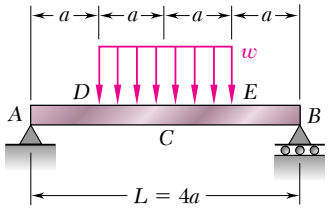


Fig. 9.55

Primeiro desenhamos a viga deformada (Fig. 9.56). Como a tangente no centro C da viga é horizontal, ela será usada como tangente de referência, e teremos $|y|_{\text{máx}} = t_{A/C}$. Entretanto, como $\theta_C = 0$, escrevemos

$$\theta_{C/A} = \theta_C - \theta_A = -\theta_A \qquad \text{ou} \qquad \theta_A = -\theta_{C/A}$$

Pelo diagrama de corpo livre da viga (Fig. 9.57), vemos que

$$R_A = R_B = wa$$

Em seguida, desenhamos os diagramas de força cortante e momento fletor para a parte AC da viga. Desenhamos esses diagramas por partes, considerando separadamente os efeitos da reação $\mathbf{R}_A$ e da carga distribuída. No entanto, por conveniência, as duas partes de cada diagrama foram desenhadas juntas (Fig. 9.58). Recordamos da Seção 5.3 que, sendo uniforme a força distribuída, as partes correspondentes dos diagramas da força cortante e de momento fletor serão, respectivamente, linear e parabólica. A área e o centroide do triângulo e do triângulo com hipotenusa parabólica podem ser obtidos na Fig. 9.52. As áreas do triângulo e do triângulo com hipotenusa parabólica foram determinadas, respectivamente, como,

$$A_1 = \frac{1}{2}(2a)\left(\frac{2wa^2}{EI}\right) = \frac{2wa^3}{EI}$$

e

$$A_2 = -\frac{1}{3}(a)\left(\frac{wa^2}{2EI}\right) = -\frac{wa^3}{6EI}$$

Aplicando o teorema do primeiro momento de área, escrevemos

$$\theta_{C/A} = A_1 + A_2 = \frac{2wa^3}{EI} - \frac{wa^3}{6EI} = \frac{11wa^3}{6EI}$$

Recordando das Figuras 9.55 e 9.56 que $a = \frac{1}{4}L$ e $\theta_A = -\theta_{C/A}$, temos

$$\theta_A = -\frac{11wa^3}{6EI} = -\frac{11wL^3}{384EI}$$

Aplicando agora o teorema do segundo momento de área, escrevemos

$$t_{A/C} = A_1\frac{4a}{3} + A_2\frac{7a}{4} = \left(\frac{2wa^3}{EI}\right)\frac{4a}{3} + \left(-\frac{wa^3}{6EI}\right)\frac{7a}{4} = \frac{19wa^4}{8EI}$$

e

$$|y|_{\text{máx}} = t_{A/C} = \frac{19wa^4}{8EI} = \frac{19wL^4}{2048EI}$$

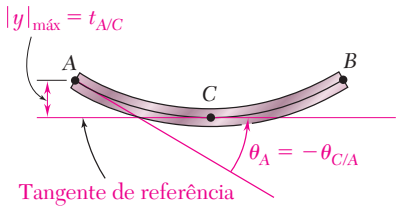


Fig. 9.56

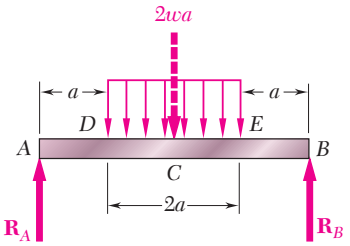


Fig. 9.57

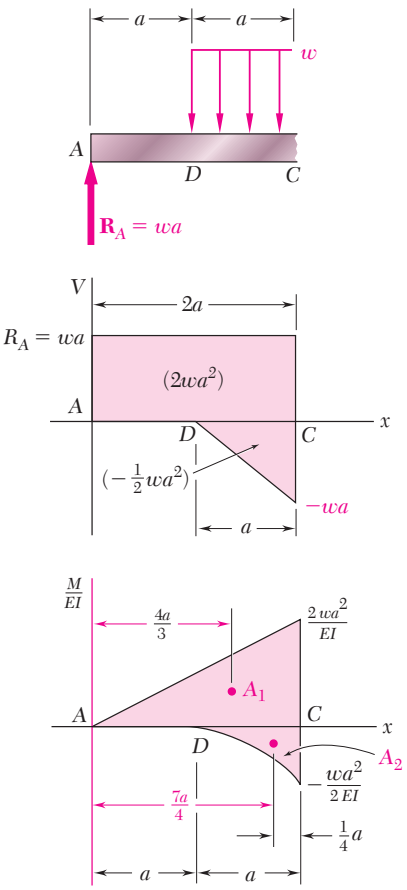
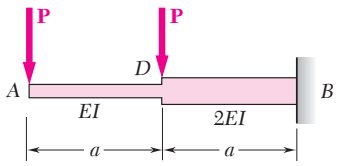
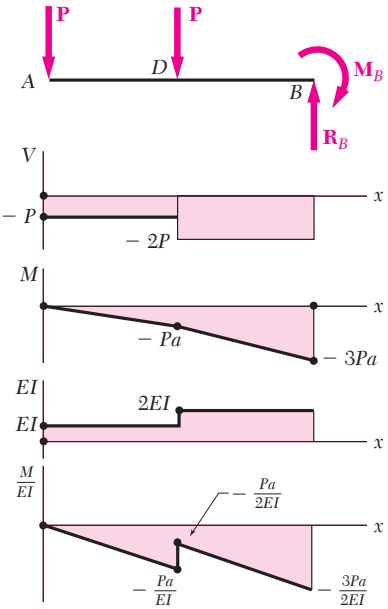


Fig. 9.58



PROBLEMA RESOLVIDO 9.10

As barras prismáticas *AD* e *DB* são soldadas para formar a viga em balanço *ADB*. Sabendo que a rigidez à flexão é *EI* na parte *AD* da viga e $2EI$ na parte *DB*, determine, para o carregamento mostrado na figura, a inclinação e deflexão na extremidade *A*.

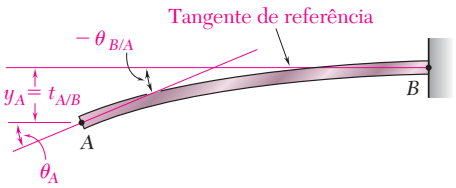


SOLUÇÃO

Diagrama *(M/EI)*. Primeiro desenhamos o diagrama do momento fletor para a viga e depois obtemos o diagrama (M/EI) dividindo o valor de M em cada ponto da viga pelo valor correspondente da rigidez à flexão.

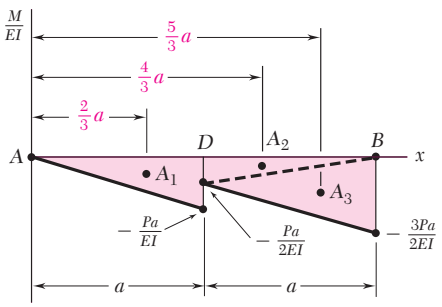
Tangente de referência. Escolhemos a tangente horizontal na extremidade engastada *B* como tangente de referência. Como $\theta_B = 0$ e $y_B = 0$, observamos que

$$\theta_A = -\theta_{B/A} \qquad y_A = t_{A/B}$$



Inclinação em *A*. Dividindo o diagrama (M/EI) nas três partes triangulares mostradas, escrevemos

$$A_1 = -\frac{1}{2}\frac{Pa}{EI}a = -\frac{Pa^2}{2EI}$$
$$A_2 = -\frac{1}{2}\frac{Pa}{2EI}a = -\frac{Pa^2}{4EI}$$
$$A_3 = -\frac{1}{2}\frac{3Pa}{2EI}a = -\frac{3Pa^2}{4EI}$$



Utilizando o teorema do primeiro momento de área, temos

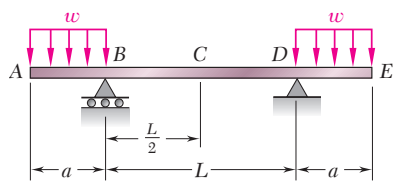
$$\theta_{B/A} = A_1 + A_2 + A_3 = -\frac{Pa^2}{2EI} - \frac{Pa^2}{4EI} - \frac{3Pa^2}{4EI} = -\frac{3Pa^2}{2EI}$$

$$\theta_A = -\theta_{B/A} = +\frac{3Pa^2}{2EI} \qquad \theta_A = \frac{3Pa^2}{2EI}\measuredangle \blacktriangleleft$$

Deflexão em *A*. Utilizando o teorema do segundo momento de área, temos

$$y_A = t_{A/B} = A_1\left(\frac{2}{3}a\right) + A_2\left(\frac{4}{3}a\right) + A_3\left(\frac{5}{3}a\right)$$
$$= \left(-\frac{Pa^2}{2EI}\right)\frac{2a}{3} + \left(-\frac{Pa^2}{4EI}\right)\frac{4a}{3} + \left(-\frac{3Pa^2}{4EI}\right)\frac{5a}{3}$$

$$y_A = -\frac{23Pa^3}{12EI} \qquad y_A = \frac{23Pa^3}{12EI}\downarrow \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESOLVIDO 9.11

Para a viga prismática e o carregamento mostrados na figura, determine a inclinação e a deflexão na extremidade E.

SOLUÇÃO

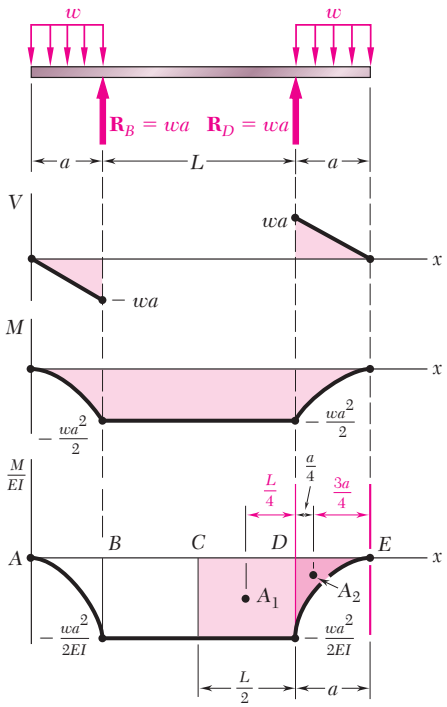


Diagrama *(M/EI)*. Com base no diagrama de corpo livre da viga, determinamos as reações e então desenhamos os diagramas de força cortante e momento fletor. Como a rigidez à flexão da viga é constante, dividimos cada valor de M por EI e obtemos o diagrama (M/EI) mostrado.

Tangente de referência. Como a viga e seu carregamento são simétricos em relação ao ponto médio C, a tangente em C é horizontal e é utilizada como tangente de referência. Examinando o desenho, notamos que, como $\theta_C = 0$,

$$\theta_E = \theta_C + \theta_{E/C} = \theta_{E/C} \tag{1}$$

$$y_E = t_{E/C} - t_{D/C} \tag{2}$$

Inclinação em *E*. Consultando o diagrama (M/EI) e utilizando o teorema do primeiro momento de área, escrevemos

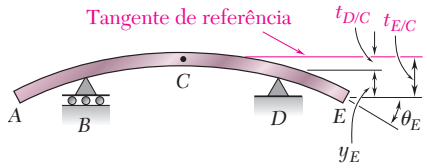
$$A_1 = -\frac{wa^2}{2EI}\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{wa^2L}{4EI}$$

$$A_2 = -\frac{1}{3}\left(\frac{wa^2}{2EI}\right)(a) = -\frac{wa^3}{6EI}$$

Utilizando a Equação (1), temos

$$\theta_E = \theta_{E/C} = A_1 + A_2 = -\frac{wa^2L}{4EI} - \frac{wa^3}{6EI}$$

$$\theta_E = -\frac{wa^2}{12EI}(3L + 2a) \qquad \theta_E = \frac{wa^2}{12EI}(3L + 2a)\curvearrowright \blacktriangleleft$$



Deflexão em *E*. Utilizando o teorema do segundo momento de área, escrevemos

$$t_{D/C} = A_1\frac{L}{4} = \left(-\frac{wa^2L}{4EI}\right)\frac{L}{4} = -\frac{wa^2L^2}{16EI}$$

$$t_{E/C} = A_1\left(a + \frac{L}{4}\right) + A_2\left(\frac{3a}{4}\right)$$

$$= \left(-\frac{wa^2L}{4EI}\right)\left(a + \frac{L}{4}\right) + \left(-\frac{wa^3}{6EI}\right)\left(\frac{3a}{4}\right)$$

$$= -\frac{wa^3L}{4EI} - \frac{wa^2L^2}{16EI} - \frac{wa^4}{8EI}$$

Utilizando a Equação (2), temos

$$y_E = t_{E/C} - t_{D/C} = -\frac{wa^3L}{4EI} - \frac{wa^4}{8EI}$$

$$y_E = -\frac{wa^3}{8EI}(2L + a) \qquad y_E = \frac{wa^3}{8EI}(2L + a)\downarrow \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

Utilize o método do momento de área para resolver os problemas a seguir.

9.95 até *9.98* Para a viga uniforme em balanço e o carregamento mostrados nas figuras, determine (*a*) a inclinação e (*b*) a deflexão na extremidade livre.

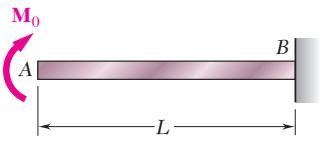


Fig. P9.95

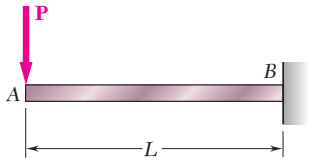


Fig. P9.96

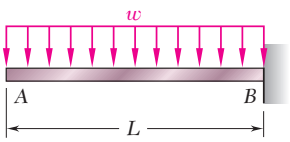


Fig. P9.97

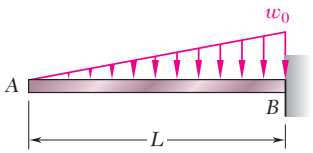


Fig. *P9.98*

***9.99* e 9.100** Para a viga uniforme em balanço e o carregamento mostrados nas figuras, determine a inclinação e a deflexão no (*a*) ponto *B* e no (*b*) ponto *C*.

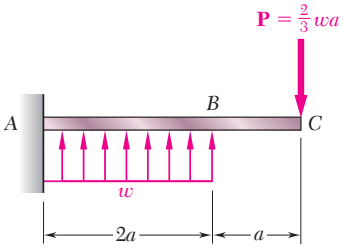


Fig. *P9.99*

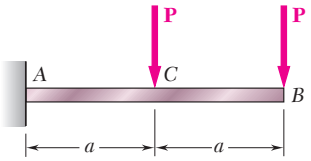


Fig. P9.100

9.101 Para a viga em balanço e o carregamento mostrados na figura, determine (*a*) a inclinação e (*b*) a deflexão no ponto *B*. Use $E = 200$ GPa.

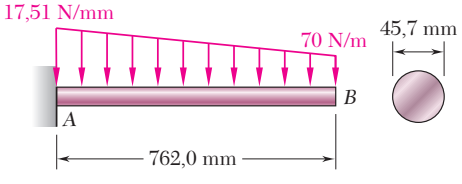


Fig. P9.101

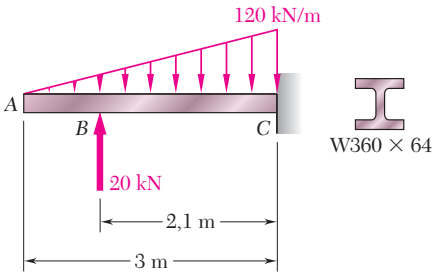


Fig. P9.102

9.102 Para a viga em balanço e o carregamento mostrados na figura, determine (*a*) a inclinação e (*b*) a deflexão no ponto *A*. Use $E = 200$ GPa.

9.103 Para a viga em balanço e o carregamento mostrados na figura, determine a inclinação e a deflexão (*a*) na extremidade *A* e (*b*) no ponto *B*. Use $E = 200$ GPa.

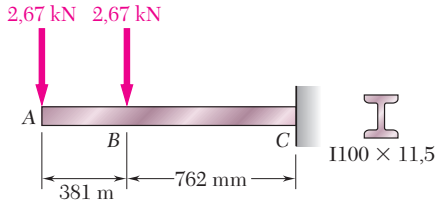


Fig. P9.103

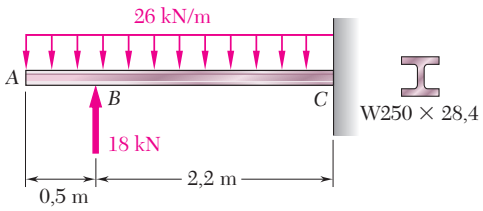


Fig. P9.104

9.104 Para a viga em balanço e o carregamento mostrados na figura, determine (*a*) a inclinação e (*b*) a deflexão no ponto *A*. Use $E = 200$ GPa.

9.105 Para a viga em balanço e o carregamento mostrados na figura, determine a deflexão e a inclinação na extremidade *A* provocadas pelo momento $\mathbf{M}_0$.

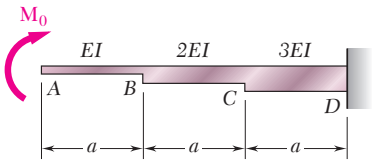


Fig. *P9.105*

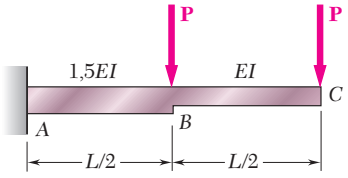


Fig. P9.106

9.106 Para a viga em balanço e o carregamento mostrados na figura, determine (*a*) a inclinação e (*b*) a deflexão no ponto *C*.

9.107 Duas chapas de reforço são soldadas à viga de aço laminado mostrada. Usando $E = 200$ GPa, determine (*a*) a inclinação e (*b*) a deflexão na extremidade *A*.

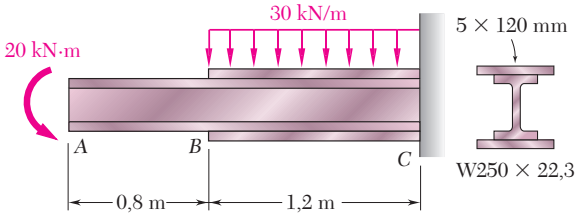


Fig. P9.107

9.108 Duas chapas de reforço são soldadas à viga de aço laminado mostrada. Usando $E = 200$ GPa, determine a inclinação e a deflexão na extremidade *C*.

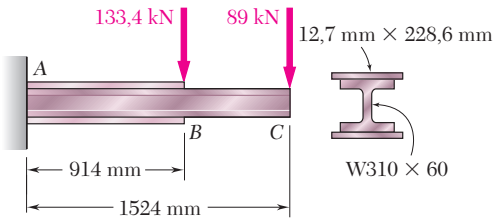


Fig. *P9.108*

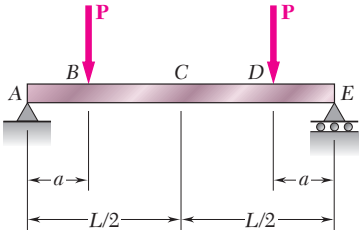


Fig. P9.109

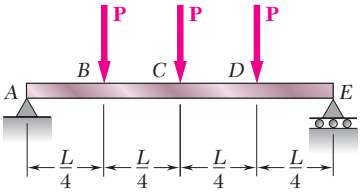


Fig. P9.111

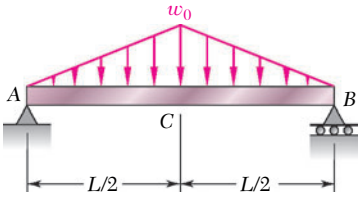


Fig. *P9.113*

9.109 até 9.114 Para a viga prismática e o carregamento mostrados nas figuras, determine (*a*) a inclinação na extremidade *A* e (*b*) a deflexão no centro *C* da viga.

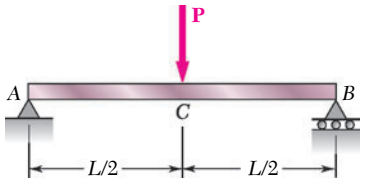


Fig. P9.110

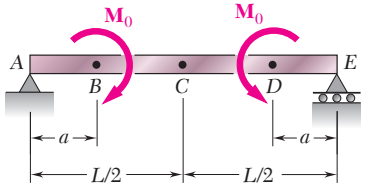


Fig. P9.112

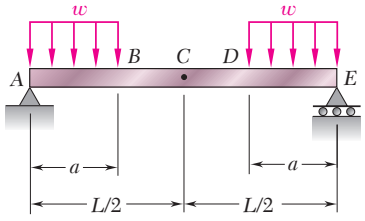


Fig. P9.114

9.115 e *9.116* Para a viga e o carregamento mostrados nas figuras, determine (*a*) a inclinação na extremidade *A* e (*b*) a deflexão no centro *C* da viga.

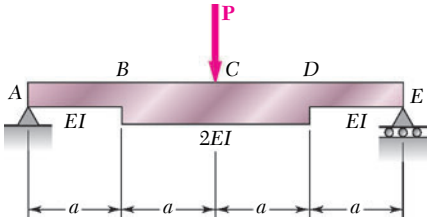


Fig. P9.115

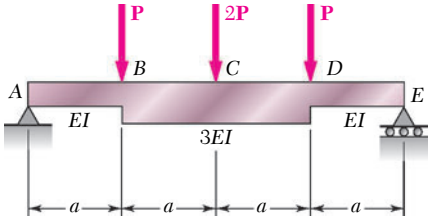


Fig. *P9.116*

9.117 Sabendo que a intensidade da força **P** é de 31,1 kN, determine (*a*) a inclinação na extremidade *A* (*b*) a deflexão na extremidade *A* e (*c*) a deflexão no ponto médio *C* da viga. Use $E = 200$ GPa.

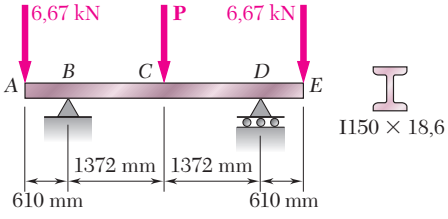


Fig. *P9.117*

9.118 e 9.119 Para a viga e o carregamento mostrados nas figuras, determine (*a*) a inclinação na extremidade *A* e (*b*) a deflexão no ponto médio da viga. Use $E = 200$ GPa.

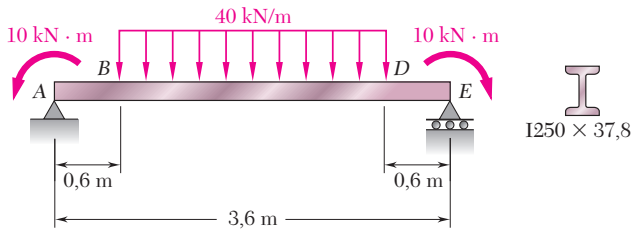


Fig. P9.118

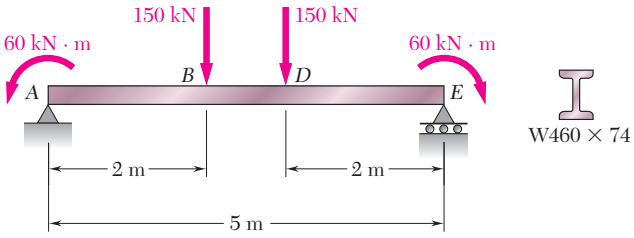


Fig. P9.119

9.120 Para a viga e o carregamento do Problema 9.117, determine (*a*) a força **P** para a qual a deflexão é zero no ponto médio *C* da viga e (*b*) a deflexão correspondente na extremidade *A*. Use $E = 200$ GPa.

9.121 Para a viga e o carregamento mostrados na figura, e sabendo que $w = 8$ kN/m, determine (*a*) a inclinação na extremidade *A* e (*b*) a deflexão no ponto médio *C*. Use $E = 200$ GPa.

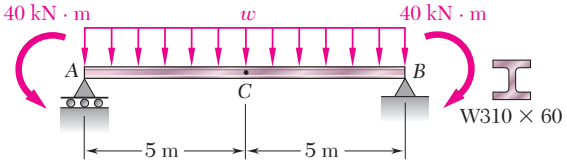


Fig. P9.121 e P9.122

9.122 Para a viga e o carregamento mostrados, determine o valor de w para o qual a deflexão é zero no ponto médio *C* da viga. Use $E = 200$ GPa.

***9.123** Uma barra uniforme *AE* deve ser apoiada em dois pontos *B* e *D*. Determine a distância *a* para a qual a inclinação nas extremidades *A* e *E* seja zero.

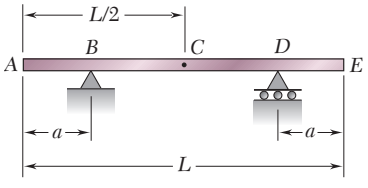


Fig. P9.123 e P9.124

***9.124** Uma barra uniforme *AE* deve ser apoiada em dois pontos *B* e *D*. Determine a distância *a* das extremidades da barra até os pontos de apoio, se as deflexões para baixo nos pontos *A*, *C* e *E* devem ser iguais.

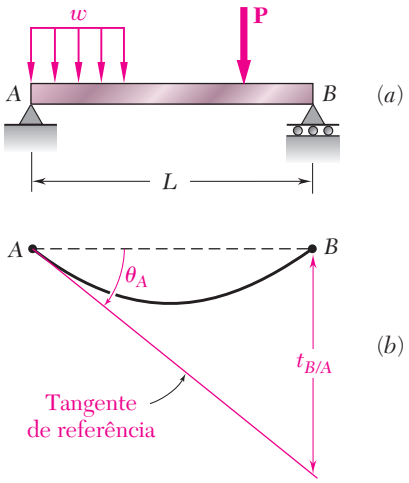


Fig. 9.59

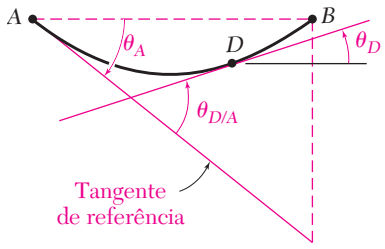


Fig. 9.60

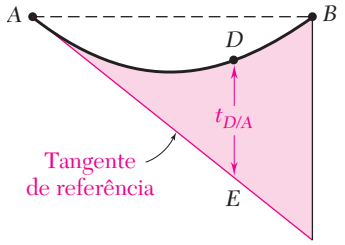


Fig. 9.61

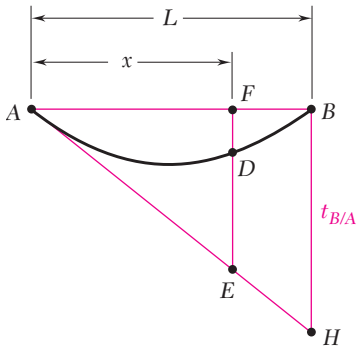


Fig. 9.63

*9.12. Aplicação dos teoremas do momento de área às vigas com carregamentos assimétricos

Vimos na Seção 9.10 que, quando uma viga biapoiada ou biapoiada com balanço suporta um carregamento simétrico, a tangente no centro *C* da viga é horizontal e pode ser usada como a tangente de referência. Quando uma viga biapoiada ou biapoiada com balanço suporta um carregamento assimétrico, geralmente não é possível determinar por inspeção o ponto da viga em que a tangente é horizontal. Deve-se procurar outros meios para localizar uma tangente de referência, isto é, uma tangente de inclinação conhecida para ser utilizada na aplicação de um dos dois teoremas do momento de área.

Geralmente é mais conveniente selecionar a tangente de referência em um dos apoios da viga. Considerando, por exemplo, a tangente no apoio *A* da viga biapoiada *AB* (Fig. 9.59*a*), determinamos essa inclinação calculando o desvio tangencial $t_{B/A}$ do apoio *B* em relação a *A*, e dividindo $t_{B/A}$ pela distância *L* entre os apoios. Lembrando que o desvio tangencial de um ponto localizado acima da tangente é positivo, escrevemos

$$\theta_A = -\frac{t_{B/A}}{L} \tag{9.61}$$

Uma vez encontrada a inclinação da tangente de referência, a inclinação θ_D da viga em qualquer ponto *D* (Fig. 9.60) pode ser determinada utilizando-se o teorema do primeiro momento de área para obter $\theta_{D/A}$, e escrevendo então

$$\theta_D = \theta_A + \theta_{D/A} \tag{9.62}$$

O desvio tangencial $t_{D/A}$ de *D* em relação ao apoio *A* pode ser obtido do teorema do segundo momento de área. Notamos que $t_{D/A}$ é igual ao segmento *ED* (Fig. 9.61) e representa a distância vertical de *D até a tangente de referência*. No entanto, a deflexão y_D do ponto *D* representa a distância vertical de *D até a linha horizontal AB* (Fig. 9.62). Como y_D é igual em grandeza ao segmento *FD*, ele pode ser expresso como a diferença entre

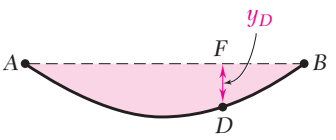


Fig. 9.62

EF e *ED* (Fig. 9.63). Observando que os triângulos *AFE* e *ABH* são semelhantes, tem-se

$$\frac{EF}{x} = \frac{HB}{L} \qquad \text{ou} \qquad EF = \frac{x}{L}t_{B/A}$$

e lembrando a convenção de sinais usada para deflexões e desvios tangenciais, escrevemos

$$y_D = ED - EF = t_{D/A} - \frac{x}{L}t_{B/A} \tag{9.63}$$

EXEMPLO 9.12

Para a viga prismática e o carregamento mostrados na Fig. 9.64, determine a inclinação e a deflexão no ponto D.

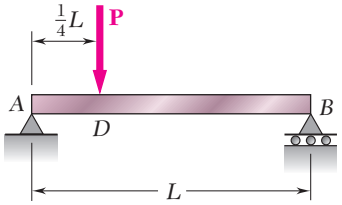


Fig. 9.64

Tangente de referência no apoio A. Calculamos as reações nos apoios e desenhamos o diagrama (M/EI) (Fig. 9.65). Determinamos o desvio tangencial $t_{B/A}$ do apoio B em relação ao apoio A aplicando o teorema do segundo momento de área e calculando os momentos em relação a um eixo vertical que passa por B das áreas A_1 e A_2. Temos

$$A_1 = \frac{1}{2}\frac{L}{4}\frac{3PL}{16EI} = \frac{3PL^2}{128EI} \qquad A_2 = \frac{1}{2}\frac{3L}{4}\frac{3PL}{16EI} = \frac{9PL^2}{128EI}$$

$$t_{B/A} = A_1\left(\frac{L}{12} + \frac{3L}{4}\right) + A_2\left(\frac{L}{2}\right)$$

$$= \frac{3PL^2}{128EI}\frac{10L}{12} + \frac{9PL^2}{128EI}\frac{L}{2} = \frac{7PL^3}{128EI}$$

A inclinação da tangente de referência em A (Fig. 9.66) é

$$\theta_A = -\frac{t_{B/A}}{L} = -\frac{7PL^2}{128EI}$$

Inclinação em D. Aplicando o teorema do primeiro momento de área de A a D, escrevemos

$$\theta_{D/A} = A_1 = \frac{3PL^2}{128EI}$$

Assim, a inclinação em D é

$$\theta_D = \theta_A + \theta_{D/A} = -\frac{7PL^2}{128EI} + \frac{3PL^2}{128EI} = -\frac{PL^2}{32EI}$$

Deflexão em D. Primeiro determinamos o desvio tangencial $DE = t_{D/A}$ calculando o momento da área A_1 em relação a um eixo vertical que passa por D:

$$DE = t_{D/A} = A_1\left(\frac{L}{12}\right) = \frac{3PL^2}{128EI}\frac{L}{12} = \frac{PL^3}{512EI}$$

A deflexão em D é igual à diferença entre os segmentos DE e EF (Fig. 9.66). Temos

$$y_D = DE - EF = t_{D/A} - \tfrac{1}{4}t_{B/A}$$

$$= \frac{PL^3}{512EI} - \frac{1}{4}\frac{7PL^3}{128EI}$$

$$y_D = -\frac{3PL^3}{256EI} = -0{,}01172PL^3/EI$$

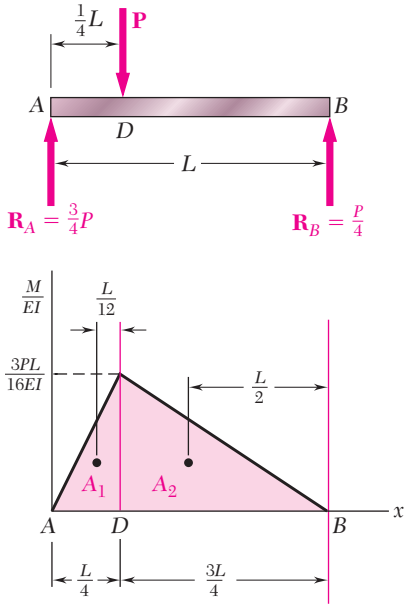


Fig. 9.65

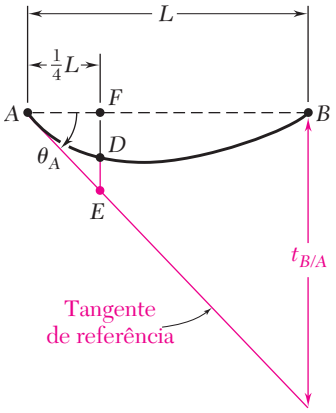


Fig. 9.66

*9.13. Deflexão máxima

Quando uma viga biapoiada ou biapoiada com balanço suporta uma carga assimétrica, a deflexão máxima geralmente não ocorre no centro da viga. Esse é o caso das vigas utilizadas na ponte da Fig. 9.67, sobre a qual passa um caminhão.

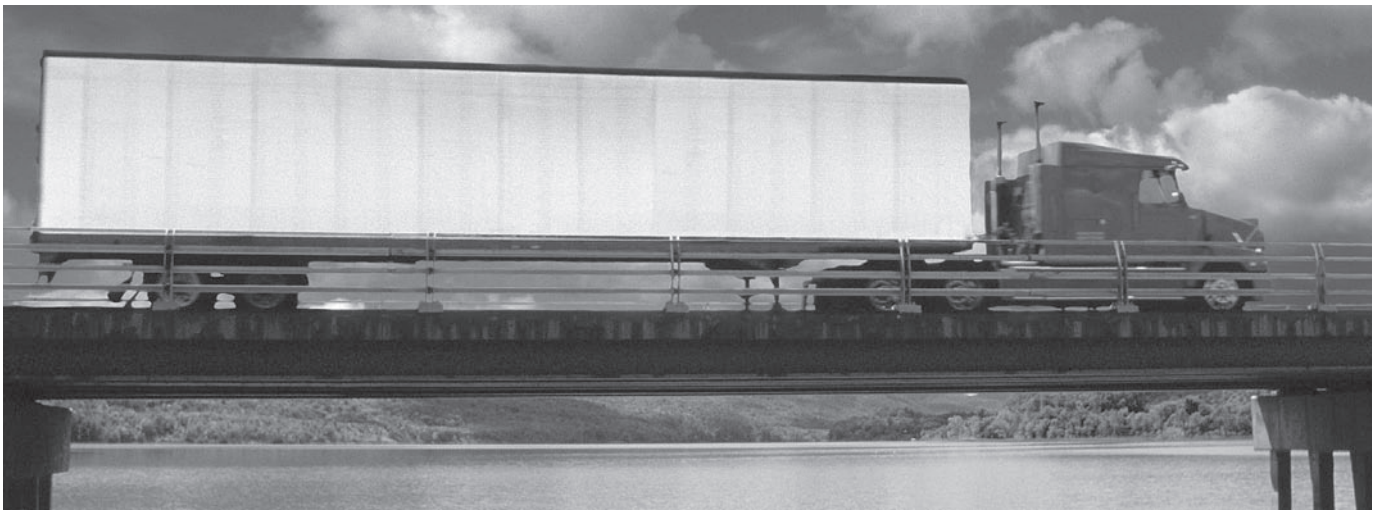
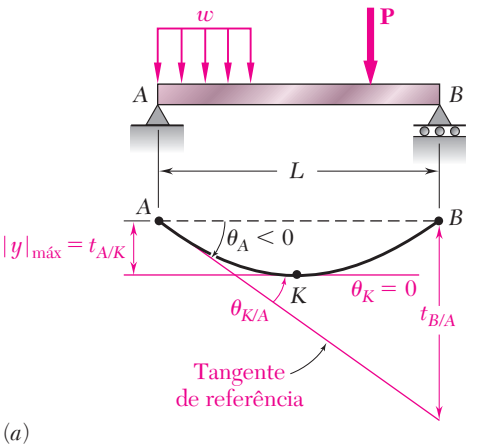
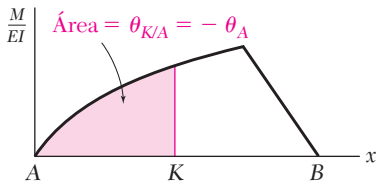


Fig. 9.67 As deflexões das vigas utilizadas nesta ponte devem ser examinadas para diferentes posições possíveis de carga.



(*a*)



(*b*)

Fig. 9.68

Para determinarmos a deflexão máxima de uma dessas vigas, devemos localizar o ponto K em que a tangente é horizontal e calcular a deflexão naquele ponto.

Nossa análise deve começar com a determinação de uma tangente de referência em um dos apoios. Se for selecionado o apoio A, a inclinação θ_A da tangente em A será obtida pelo método indicado na seção anterior, isto é, calculando o desvio tangencial $t_{B/A}$ do apoio B em relação a A e dividindo-se aquele valor pela distância L entre os dois apoios.

Como a inclinação θ_K no ponto K é zero (Fig. 9.68*a*), devemos ter

$$\theta_{K/A} = \theta_K - \theta_A = 0 - \theta_A = -\theta_A$$

Lembrando o teorema do primeiro momento de área, concluímos que o ponto K pode ser determinado medindo-se no diagrama (M/EI) uma área igual a $\theta_{K/A} = -\theta_A$ (Fig. 9.68*b*).

Observando que a deflexão máxima $|y|_{máx}$ é igual ao desvio tangencial $t_{A/K}$ do apoio A em relação a K (Fig. 9.68*a*), podemos obter $|y|_{máx}$ calculando-se o primeiro momento em relação ao eixo vertical que passa por A da área entre A e K (Fig. 9.68*b*).

EXEMPLO 9.13

Determine a deflexão máxima da viga do Exemplo 9.12.

Determinação do ponto K em que a inclinação é zero. Recordamos do Exemplo 9.12 que a inclinação no ponto D, em que a força é aplicada, é negativa. Consequentemente, o ponto K, em que a inclinação é zero, está localizado entre D e o apoio B (Fig. 9.69). Nossos cálculos, portanto, ficarão simplificados se relacionarmos a inclinação em K com a inclinação em B, em vez da inclinação em A.

Como a inclinação em A já foi determinada no Exemplo 9.12, a inclinação em B será obtida escrevendo-se

$$\theta_B = \theta_A + \theta_{B/A} = \theta_A + A_1 + A_2$$

$$\theta_B = -\frac{7PL^2}{128EI} + \frac{3PL^2}{128EI} + \frac{9PL^2}{128EI} = \frac{5PL^2}{128EI}$$

Observando que o momento fletor a uma distância u da extremidade B é $M = \frac{1}{4}Pu$ (Fig. 9.70*a*), expressamos a área A' localizada entre K e B sob o diagrama (M/EI) (Fig. 9.70*b*) como

$$A' = \frac{1}{2}\frac{Pu}{4EI}u = \frac{Pu^2}{8EI}$$

Pelo teorema do primeiro momento de área, temos

$$\theta_{B/K} = \theta_B - \theta_K = A'$$

e, como $\theta_K = 0$, $\qquad \theta_B = A'$

Substituindo os valores obtidos para θ_B e A', escrevemos

$$\frac{5PL^2}{128EI} = \frac{Pu^2}{8EI}$$

e, resolvendo para u,

$$u = \frac{\sqrt{5}}{4}L = 0{,}559L$$

Assim, a distância do apoio A ao ponto K é

$$AK = L - 0{,}559L = 0{,}441L$$

Deflexão máxima. A deflexão máxima $|y|_{máx}$ é igual ao desvio tangencial $t_{B/K}$ e, portanto, ao primeiro momento da área A' em relação a um eixo vertical que passa por B (Fig. 9.70*b*). Escrevemos

$$|y|_{máx} = t_{B/K} = A'\left(\frac{2u}{3}\right) = \frac{Pu^2}{8EI}\left(\frac{2u}{3}\right) = \frac{Pu^3}{12EI}$$

Substituindo o valor obtido para u, temos

$$|y|_{máx} = \frac{P}{12EI}\left(\frac{\sqrt{5}}{4}L\right)^3 = 0{,}01456PL^3/EI$$

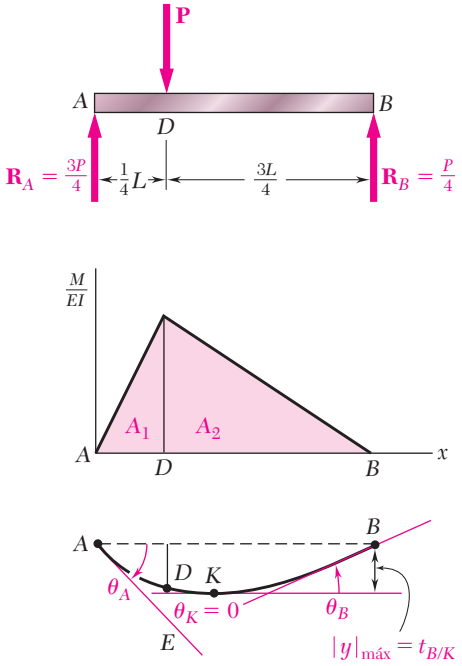


Fig. 9.69

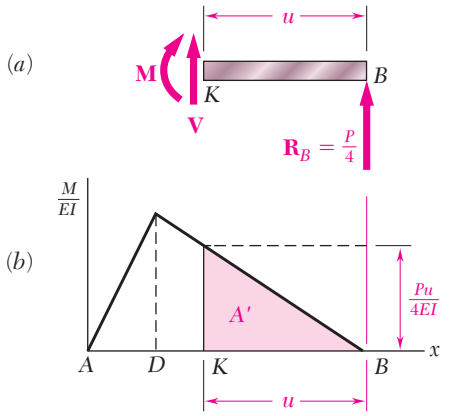


Fig. 9.70

*9.14. Aplicação dos teoremas de momento de área em vigas estaticamente indeterminadas

As reações nos apoios de uma viga estaticamente indeterminada podem ser determinadas pelo método do momento de área de maneira muito semelhante àquela descrita na Seção 9.8. Por exemplo, no caso de uma viga indeterminada com um grau de indeterminação, escolhemos uma das reações como redundante e eliminamos ou modificamos adequadamente o apoio correspondente. A reação redundante é então tratada como uma força desconhecida que, juntamente com outras forças, deve produzir deformações compatíveis com os apoios originais. A condição de compatibilidade geralmente é expressa escrevendo-se que o desvio tangencial de um apoio em relação a outro é zero ou tem um valor predeterminado.

São desenhados dois diagramas de corpo livre separados. Um mostra as *forças fornecidas e as reações correspondentes* nos apoios que não foram eliminados; o outro mostra *a reação redundante e as reações correspondentes* nos mesmos apoios (ver o Exemplo 9.14). É desenhado então um diagrama M/EI para cada um dos dois carregamentos, e são obtidos os desvios tangenciais desejados pelo teorema do segundo momento de área. Superpondo os resultados obtidos, expressamos a condição de compatibilidade exigida e determinamos a reação redundante. As outras reações são obtidas por meio do diagrama de corpo livre da viga, utilizando as equações da estática.

Uma vez determinadas as reações nos apoios, a inclinação e a deflexão podem ser obtidas pelo método do momento de área em qualquer outro ponto da viga.

EXEMPLO 9.14

Determine a reação nos apoios para a viga prismática e o carregamento mostrados na Fig. 9.71.

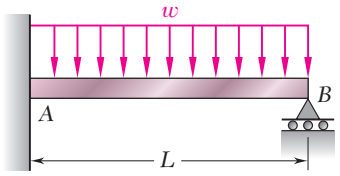


Fig. 9.71

Consideramos o momento aplicado na extremidade engastada A como redundante e substituímos a extremidade engastada por um apoio fixo. O momento $\mathbf{M}_A$ é considerado agora um carregamento desconhecido (Fig. 9.72*a*) e será determinado com base na condição de que a tangente à viga em A deve ser horizontal. Conclui-se que essa tangente deve passar pelo apoio B e, portanto, que o desvio tangencial $t_{B/A}$ de B com relação a A deve ser zero. A solução é encontrada calculando-se separadamente o desvio tangencial $(t_{B/A})_w$ provocado pela força uniformemente distribuída w (Fig. 9.72*b*) e o desvio tangencial $(t_{B/A})_M$ produzido pelo momento desconhecido $\mathbf{M}_A$ (Fig. 9.72*c*).

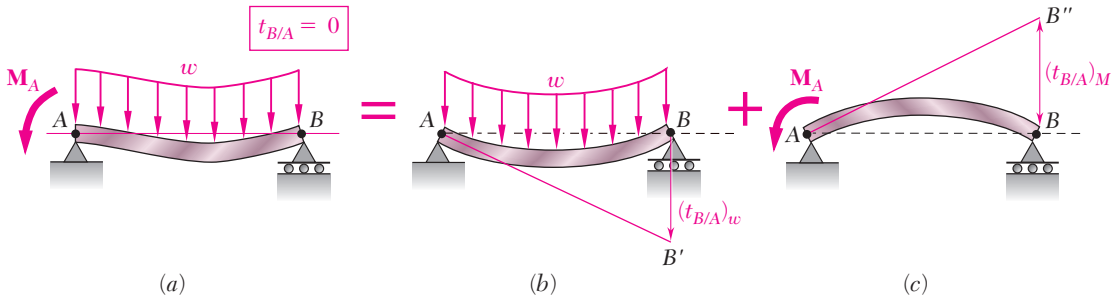


Fig. 9.72

Considerando primeiro o diagrama de corpo livre da viga submetida à força distribuída w que é conhecida (Fig. 9.73*a*), determinamos as reações correspondentes nos apoios A e B. Temos

$$(\mathbf{R}_A)_1 = (\mathbf{R}_B)_1 = \tfrac{1}{2}wL\uparrow \tag{9.64}$$

Podemos agora desenhar os diagramas correspondentes de força cortante e (M/EI) (Figs. 9.73*b* e *c*). Observando que M/EI é representado por um arco de parábola, e lembrando a fórmula, $A = \frac{2}{3}bh$ para a área sob uma parábola, calculamos o primeiro momento dessa área em relação a um eixo vertical que passa por B e escrevemos

$$(t_{B/A})_w = A_1\left(\frac{L}{2}\right) = \left(\frac{2}{3}L\frac{wL^2}{8EI}\right)\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{wL^4}{24EI} \tag{9.65}$$

Considerando em seguida o diagrama de corpo livre da viga quando ela está submetida a um momento desconhecido $\mathbf{M}_A$ (Fig. 9.74*a*), determinamos as reações correspondentes em A e B:

$$(\mathbf{R}_A)_2 = \frac{M_A}{L}\uparrow \qquad (\mathbf{R}_B)_2 = \frac{M_A}{L}\downarrow \tag{9.66}$$

Desenhando o diagrama (M/EI) correspondente (Fig. 9.74*b*), aplicamos novamente o teorema do segundo momento de área e escrevemos

$$(t_{B/A})_M = A_2\left(\frac{2L}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}L\frac{M_A}{EI}\right)\left(\frac{2L}{3}\right) = -\frac{M_AL^2}{3EI} \tag{9.67}$$

Combinando os resultados obtidos em (9.65) e (9.67), e considerando que o desvio tangencial resultante $t_{B/A}$ deve ser zero (Fig. 9.72), temos

$$t_{B/A} = (t_{B/A})_w + (t_{B/A})_M = 0$$
$$\frac{wL^4}{24EI} - \frac{M_AL^2}{3EI} = 0$$

e, resolvendo para M_A,

$$M_A = +\tfrac{1}{8}wL^2 \qquad \mathbf{M}_A = \tfrac{1}{8}wL^2\circlearrowleft$$

Substituindo o valor de M_A em (9.66) e usando (9.64), obtemos os valores de R_A e R_B:

$$R_A = (R_A)_1 + (R_A)_2 = \tfrac{1}{2}wL + \tfrac{1}{8}wL = \tfrac{5}{8}wL$$
$$R_B = (R_B)_1 + (R_B)_2 = \tfrac{1}{2}wL - \tfrac{1}{8}wL = \tfrac{3}{8}wL$$

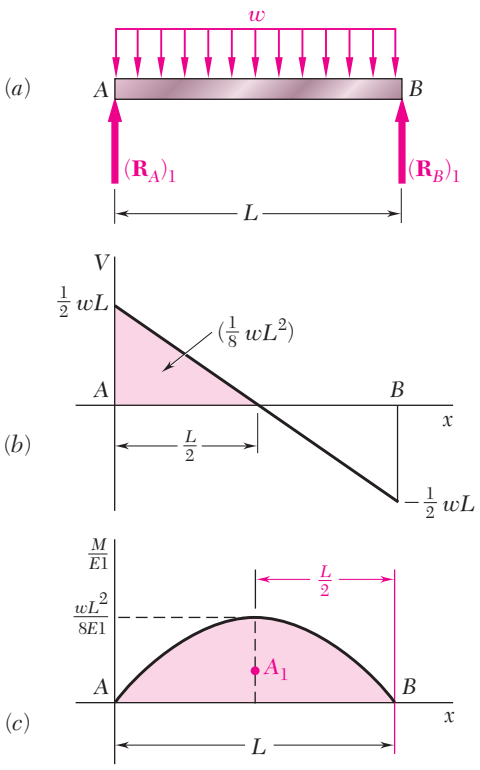


Fig. 9.73

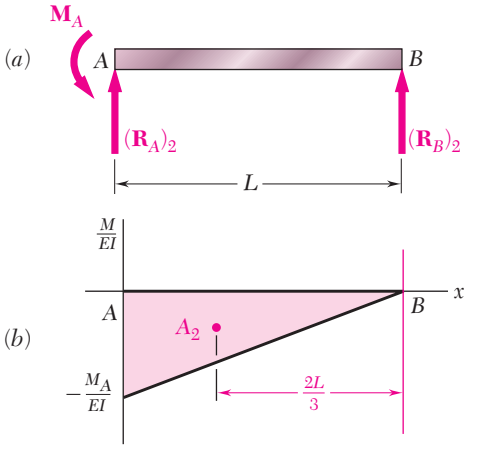
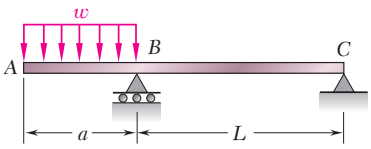


Fig. 9.74

No exemplo que acabamos de considerar, havia uma única reação redundante, isto é, a viga era *estaticamente indeterminada com um grau de indeterminação*. Os *teoremas dos momentos de área* também podem ser utilizados quando há reações redundantes adicionais. Conforme discutimos na Seção 9.5, é necessário então escrever equações adicionais. Assim, para uma viga *estaticamente indeterminada com dois graus de indeterminação*, seria necessário selecionar duas reações redundantes e escrever duas equações considerando as *deformações* da estrutura envolvida.

PROBLEMA RESOLVIDO 9.12



Para a viga e o carregamento mostrados na figura, (*a*) determine a deflexão na extremidade *A* e (*b*) avalie y_A para os seguintes dados:

$W250 \times 49{,}1$: $I = 70{,}6 \times 10^6$ mm^4 $\qquad E = 200$ GPa
$a = 0{,}9$ m $\qquad L = 1{,}7$ m
$w = 200$ kN/m

SOLUÇÃO

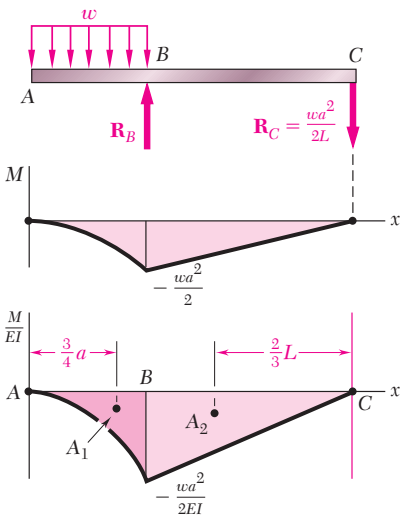
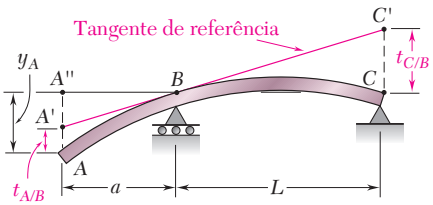


Diagrama *(M/EI)*. Primeiro desenhamos o diagrama de momento fletor. Como a rigidez à flexão *EI* é constante, obtemos o diagrama (*M*/*EI*) mostrado, que consiste em um triângulo com hipotenusa parabólica de área A_1 e um triângulo de área A_2.

$$A_1 = \frac{1}{3}\left(-\frac{wa^2}{2EI}\right)a = -\frac{wa^3}{6EI}$$
$$A_2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{wa^2}{2EI}\right)L = -\frac{wa^2L}{4EI}$$

Tangente de referência em *B*. A tangente de referência é desenhada no ponto *B* conforme mostra a figura. Utilizando o teorema do segundo momento de área, determinamos o desvio tangencial de *C* em relação a *B*:

$$t_{C/B} = A_2\frac{2L}{3} = \left(-\frac{wa^2L}{4EI}\right)\frac{2L}{3} = -\frac{wa^2L^2}{6EI}$$



Os triângulos $A''A'B$ e $CC'B$ são semelhantes. Assim, encontramos

$$A''A' = t_{C/B}\left(\frac{a}{L}\right) = -\frac{wa^2L^2}{6EI}\left(\frac{a}{L}\right) = -\frac{wa^3L}{6EI}$$

Utilizando novamente o teorema do segundo momento de área, escrevemos

$$t_{A/B} = A_1\frac{3a}{4} = \left(-\frac{wa^3}{6EI}\right)\frac{3a}{4} = -\frac{wa^4}{8EI}$$

a*. Deflexão na extremidade *A

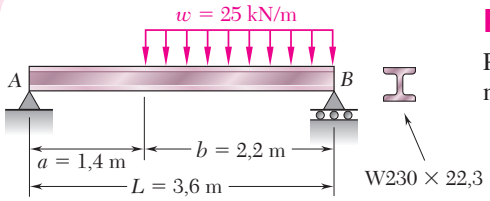
$$y_A = A''A' + t_{A/B} = -\frac{wa^3L}{6EI} - \frac{wa^4}{8EI} = -\frac{wa^4}{8EI}\left(\frac{4}{3}\frac{L}{a} + 1\right)$$

$$y_A = \frac{wa^4}{8EI}\left(1 + \frac{4}{3}\frac{L}{a}\right)\downarrow \blacktriangleleft$$

***b*. Avaliação de y_A.** Substituindo os dados fornecidos, escrevemos

$$y_A = \frac{(200 \times 10^3\ \text{N/m})(0{,}9\ \text{m})^4}{8(200 \times 10^9\ \text{N/m}^2)(70{,}6 \times 10^{-6}\ \text{m}^4)}\left(1 + \frac{4}{3}\frac{1{,}7\ \text{m}}{0{,}9\ \text{m}}\right)$$

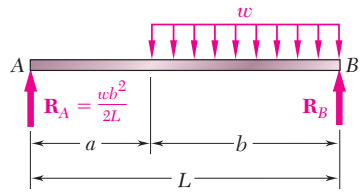
$$y_A = 4{,}1 \times 10^{-3}\ \text{m}\downarrow \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESOLVIDO 9.13

Para a viga e o carregamento mostrados na figura, determine o valor e a localização da maior deflexão. Use $E = 200$ GPa.

SOLUÇÃO



Reações. Utilizando o diagrama de corpo livre da viga inteira, encontramos

$$\mathbf{R}_A = 16{,}81 \text{ kN} \uparrow \qquad \mathbf{R}_B = 38{,}2 \text{ kN} \uparrow$$

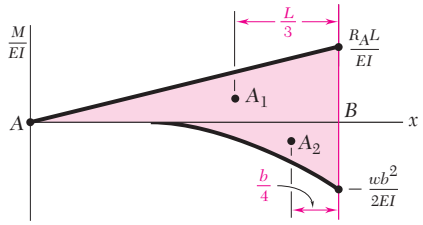
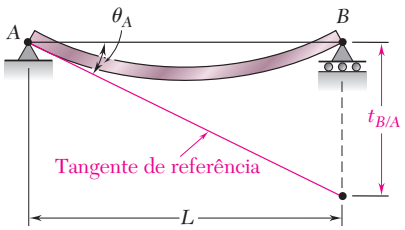


Diagrama *(M/EI)*. Desenhamos o diagrama (M/EI) por partes considerando separadamente os efeitos da reação R_A e da força distribuída. As áreas do triângulo e do triângulo com hipotenusa parabólica são

$$A_1 = \frac{1}{2}\frac{R_A L}{EI} L = \frac{R_A L^2}{2EI} \qquad A_2 = \frac{1}{3}\left(-\frac{wb^2}{2EI}\right) b = -\frac{wb^3}{6EI}$$

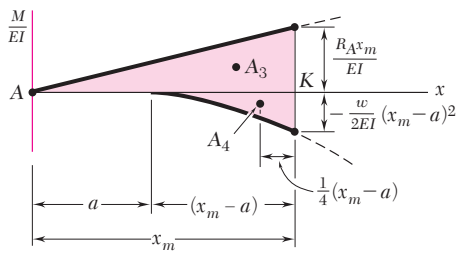


Tangente de referência. A tangente à viga no apoio A é escolhida como tangente de referência. Utilizando o teorema do segundo momento de área, determinamos o desvio tangencial $t_{B/A}$ do apoio B em relação ao apoio A:

$$t_{B/A} = A_1 \frac{L}{3} + A_2 \frac{b}{4} = \left(\frac{R_A L^2}{2EI}\right)\frac{L}{3} + \left(-\frac{wb^3}{6EI}\right)\frac{b}{4} = \frac{R_A L^3}{6EI} - \frac{wb^4}{24EI}$$

Inclinação em *A*

$$\theta_A = -\frac{t_{B/A}}{L} = -\left(\frac{R_A L^2}{6EI} - \frac{wb^4}{24EIL}\right) \tag{1}$$



Maior deflexão. A maior deflexão ocorre no ponto K, em que a inclinação da viga é zero. Escrevemos portanto

$$\theta_K = \theta_A + \theta_{K/A} = 0 \tag{2}$$

Mas

$$\theta_{K/A} = A_3 + A_4 = \frac{R_A x_m^2}{2EI} - \frac{w}{6EI}(x_m - a)^3 \tag{3}$$

Substituímos θ_A e $\theta_{K/A}$ das Equações (1) e (3) na Equação (2):

$$-\left(\frac{R_A L^2}{6EI} - \frac{wb^4}{24EIL}\right) + \left[\frac{R_A x_m^2}{2EI} - \frac{w}{6EI}(x_m - a)^3\right] = 0$$

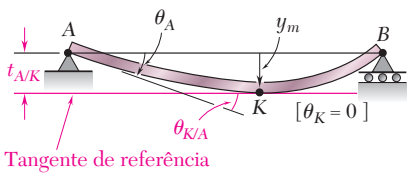
Substituindo os dados numéricos, temos

$$-29{,}53\frac{10^3}{EI} + 8{,}405 x_m^2 \frac{10^3}{EI} - 4{,}167(x_m - 1{,}4)^3 \frac{10^3}{EI} = 0$$

Resolvendo por tentativa e erro para x_m, encontramos $x_m = 1{,}890$ m ◀

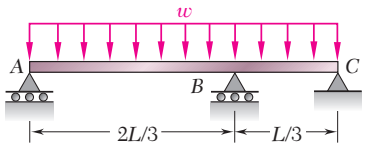
Calculando os momentos de A_3 e A_4 em relação a um eixo vertical que passa por A, temos

$$|y|_m = t_{A/K} = A_3 \frac{2x_m}{3} + A_4\left[a + \frac{3}{4}(x_m - a)\right]$$
$$= \frac{R_A x_m^3}{3EI} - \frac{wa}{6EI}(x_m - a)^3 - \frac{w}{8EI}(x_m - a)^4$$



Utilizando os dados fornecidos, $R_A = 16{,}81$ kN, e $I = 28{,}9 \times 10^{-6}$ m^4, encontramos

$y_m = 6{,}39$ mm ↓ ◀

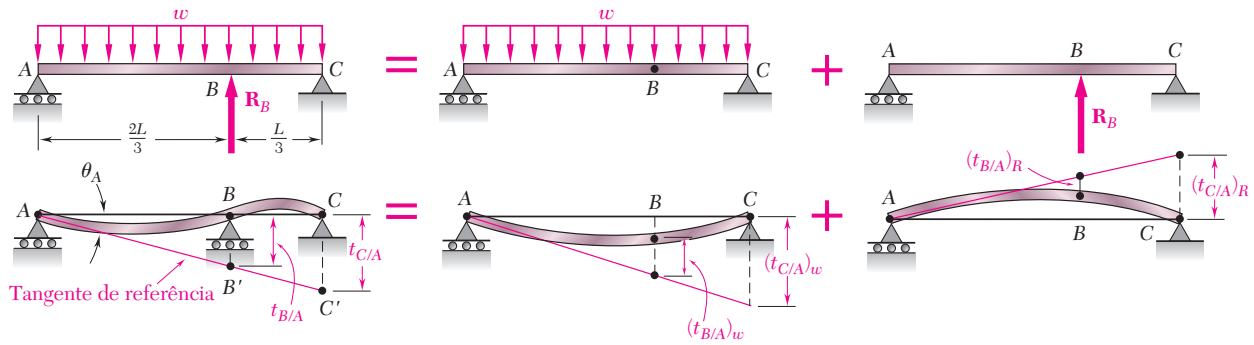


PROBLEMA RESOLVIDO 9.14

Para a viga uniforme e o carregamento mostrados na figura, determine a reação em B.

SOLUÇÃO

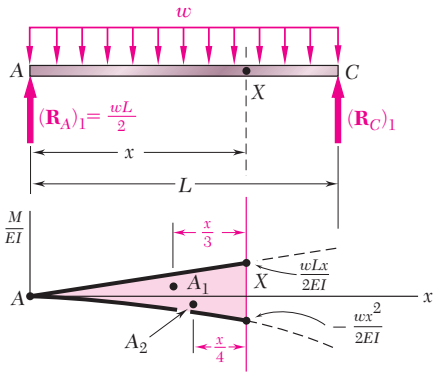
A viga é indeterminada com um grau de indeterminação. Escolhemos a reação $\mathbf{R}_B$ como redundante e consideramos separadamente o carregamento distribuído e a reação redundante. Em seguida selecionamos a tangente em A como tangente de referência. Das semelhanças dos triângulos ABB' e ACC', verificamos que



$$\frac{t_{C/A}}{L} = \frac{t_{B/A}}{\frac{2}{3}L} \qquad t_{C/A} = \frac{3}{2}t_{B/A} \tag{1}$$

Para cada carregamento, desenhamos o diagrama (M/EI) e então determinamos os desvios tangenciais de B e C em relação a A.

Carregamento distribuído. Considerando o diagrama (M/EI) desde a extremidade A até um ponto arbitrário X, escrevemos

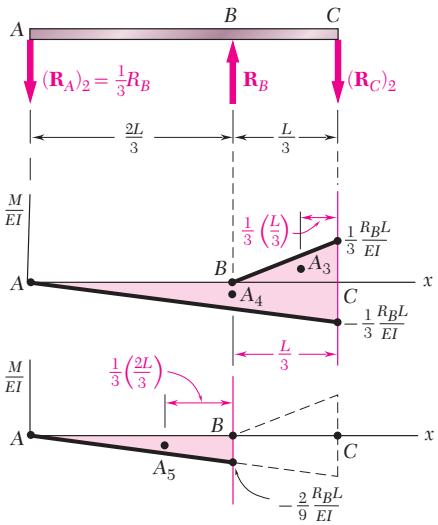


$$(t_{X/A})_w = A_1\frac{x}{3} + A_2\frac{x}{4} = \left(\frac{1}{2}\frac{wLx}{2EI}\,x\right)\frac{x}{3} + \left(-\frac{1}{3}\frac{wx^2}{2EI}\,x\right)\frac{x}{4} = \frac{wx^3}{24EI}\,(2L - x)$$

Fazendo sucessivamente $x = L$ e $x = \frac{2}{3}L$ temos

$$(t_{C/A})_w = \frac{wL^4}{24EI} \qquad (t_{B/A})_w = \frac{4}{243}\frac{wL^4}{EI}$$

Reação redundante.



$$(t_{C/A})_R = A_3\frac{L}{9} + A_4\frac{L}{3} = \left(\frac{1}{2}\frac{R_BL}{3EI}\frac{L}{3}\right)\frac{L}{9} + \left(-\frac{1}{2}\frac{R_BL}{3EI}L\right)\frac{L}{3} = -\frac{4}{81}\frac{R_BL^3}{EI}$$

$$(t_{B/A})_R = A_5\frac{2L}{9} = \left[-\frac{1}{2}\frac{2R_BL}{9EI}\left(\frac{2L}{3}\right)\right]\frac{2L}{9} = -\frac{4}{243}\frac{R_BL^3}{EI}$$

Carregamento combinado. Somando os resultados obtidos, escrevemos

$$t_{C/A} = \frac{wL^4}{24EI} - \frac{4}{81}\frac{R_BL^3}{EI} \qquad t_{B/A} = \frac{4}{243}\frac{(wL^4 - R_BL^3)}{EI}$$

Reação em B. Substituindo $t_{C/A}$ e $t_{B/A}$ na Equação (1), temos

$$\left(\frac{wL^4}{24EI} - \frac{4}{81}\frac{R_BL^3}{EI}\right) = \frac{3}{2}\left[\frac{4}{243}\frac{(wL^4 - R_BL^3)}{EI}\right]$$

$$R_B = 0{,}6875wL \qquad \boldsymbol{R_B = 0{,}688wL\uparrow} \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

Utilize o método dos momentos de área para resolver os problemas seguintes.

9.125 até *9.128* Para a viga prismática e o carregamento mostrados nas figuras, determine (*a*) a deflexão no ponto *D* e (*b*) a inclinação na extremidade *A*.

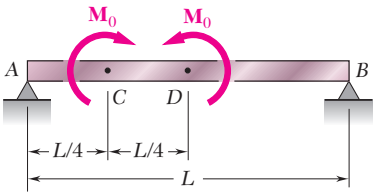


Fig. P9.125

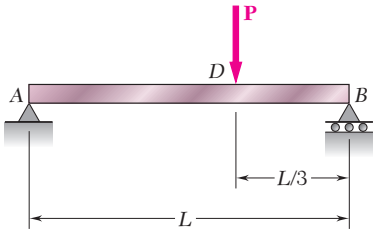


Fig. P9.126

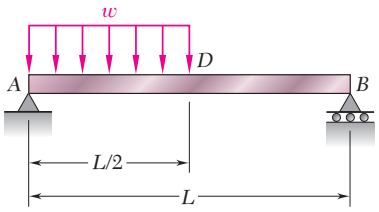


Fig. P9.127

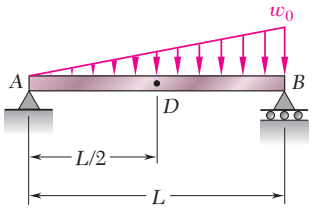


Fig. *P9.128*

9.129 Para a viga e o carregamento mostrados na figura, determine (*a*) a inclinação no ponto *A* e (*b*) a deflexão no ponto *D*. Use $E = 200$ GPa.

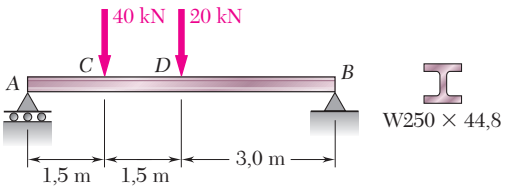


Fig. P9.129

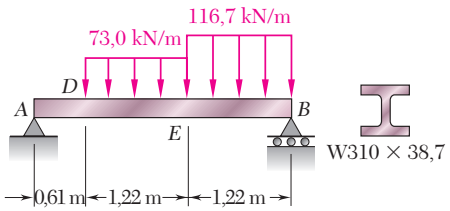


Fig. P9.130

9.130 Para a viga e o carregamento mostrados na figura, determine (*a*) a inclinação na extremidade *A* e (*b*) a deflexão no ponto *D*. Use $E = 200$ GPa.

9.131 Para a viga de madeira e o carregamento mostrados na figura, determine (*a*) a inclinação no ponto *A* e (*b*) a deflexão no ponto *D*. Use $E = 11{,}72$ GPa.

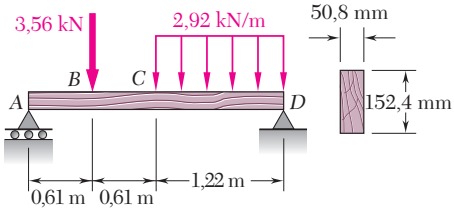


Fig. *P9.131*

9.132 Para a viga e o carregamento mostrados na figura, determine (*a*) a inclinação no ponto *A* e (*b*) a deflexão no ponto *D*. Use $E = 200$ GPa.

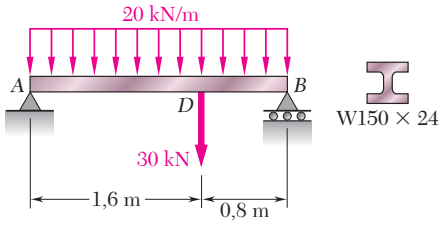


Fig. P9.132

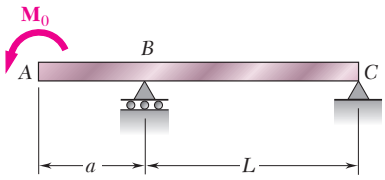


Fig. *P9.133*

9.133 Para a viga e o carregamento mostrados na figura, determine (*a*) a inclinação no ponto *A* e (*b*) a deflexão no ponto *A*.

9.134 Para a viga e o carregamento mostrados na figura, determine (*a*) a inclinação no ponto *C* e (*b*) a deflexão no ponto *C*.

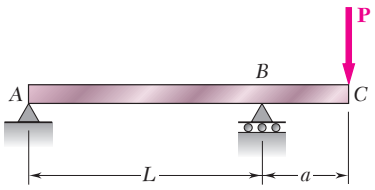


Fig. P9.134

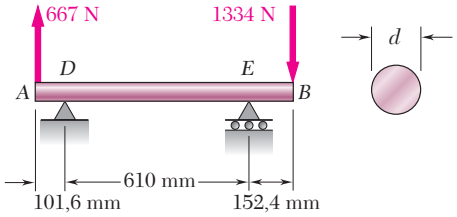


Fig. P9.135

9.135 Sabendo que a viga *AB* é feita de uma barra de aço cheia, de diâmetro $d = 19{,}05$ mm, determine para o carregamento mostrado na figura (*a*) a inclinação no ponto *D* e (*b*) a deflexão no ponto *A*. Use $E = 200$ GPa.

9.136 Sabendo que a viga *AD* é feita de uma barra de aço com seção transversal cheia, determine (*a*) a inclinação no ponto *B* e (*c*) a deflexão no ponto *A*. Use $E = 200$ GPa.

9.137 Para a viga e o carregamento mostrados na figura, determine (*a*) a inclinação no ponto *C* e (*b*) a deflexão no ponto *D*. Use $E = 200$ GPa.

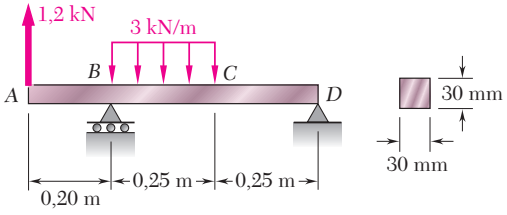


Fig. P9.136

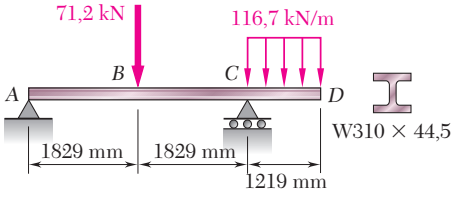


Fig. P9.137

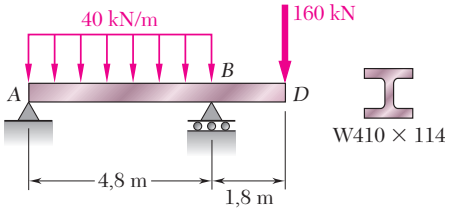


Fig. *P9.138*

9.138 Para a viga e o carregamento mostrados na figura, determine (*a*) a inclinação no ponto *B* e (*b*) a deflexão no ponto *D*. Use $E = 200$ GPa.

9.139 Para a viga e o carregamento mostrados na figura, determine (*a*) a inclinação na extremidade *A*, (*b*) a inclinação na extremidade *B* e (*c*) a deflexão no ponto médio *C*.

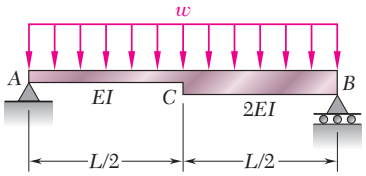


Fig. P9.139

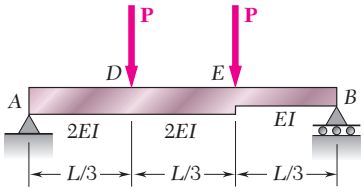


Fig. P9.140

9.140 Para a viga e o carregamento mostrados na figura, determine a deflexão (*a*) no ponto *D* e (*b*) no ponto *E*.

9.141 até 9.144 Para a viga e o carregamento mostrados na figura, determine a intensidade e localização da maior deflexão para baixo.

9.141 Viga e carregamento do Problema 9.126.

9.142 Viga e carregamento do Problema 9.128.

9.143 Viga e carregamento do Problema 9.129.

9.144 Viga e carregamento do Problema 9.130.

9.145 Para a viga e o carregamento do Problema 9.135, determine a maior deflexão para cima no vão *DE*.

9.146 Para a viga e o carregamento do Problema 9.138, determine a maior deflexão para cima no vão *AB*.

9.147 até 9.150 Para a viga e o carregamento mostrados na figura, determine a reação no apoio móvel.

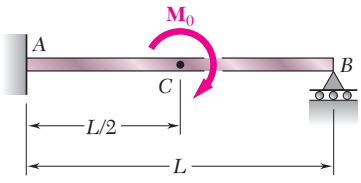


Fig. P9.147

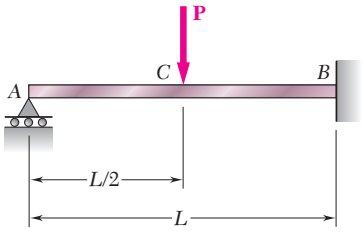


Fig. P9.148

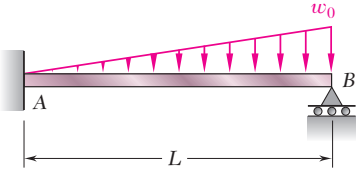


Fig. *P9.149*

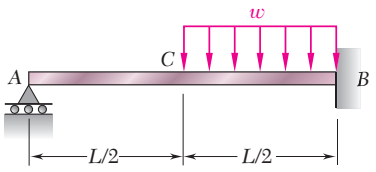


Fig. P9.150

***9.151* e 9.152** Para a viga e o carregamento mostrados na figura, determine a reação em cada apoio.

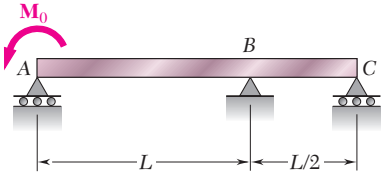


Fig. *P9.151*

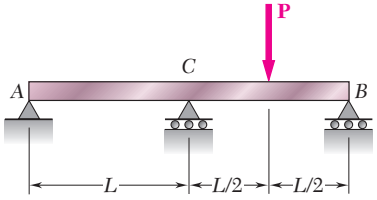


Fig. P9.152

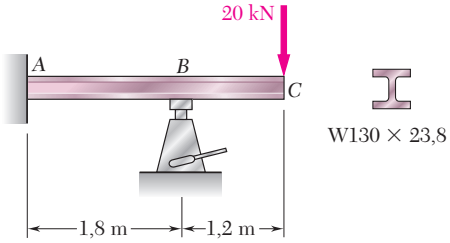


Fig. P9.153

9.153 Um macaco hidráulico pode ser utilizado para elevar o ponto B da viga em balanço ABC. A viga era originalmente reta, horizontal e sem força aplicada. Foi aplicada então uma força de 20 kN no ponto C, fazendo esse ponto se mover para baixo. Determine (*a*) quanto o ponto B deve ser levantado para que o ponto C retorne à sua posição original e (*b*) o valor final da reação em B. Use $E = 200$ GPa.

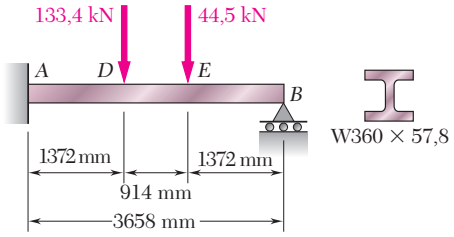


Fig. P9.154

9.154 Determine a reação no apoio móvel e trace o diagrama do momento fletor para a viga e o carregamento mostrados na figura.

9.155 Para a viga e o carregamento mostrados na figura, determine a constante k da mola para a qual a força na mola é igual a um terço da força total na viga.

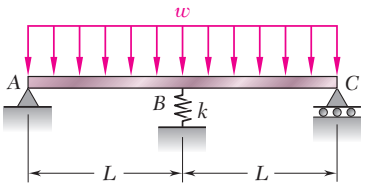


Fig. P9.155 e P9.156

9.156 Para a viga e o carregamento mostrados na figura, determine a constante k da mola para a qual o momento fletor em B é $M_B = -wL^2/10$.

REVISÃO E RESUMO DO CAPÍTULO 9

Este capítulo foi dedicado à determinação de inclinações e deflexões de vigas sob carregamentos transversais. Foram utilizadas duas abordagens. Primeiro utilizamos um método matemático com base no conceito da integração de uma equação diferencial para obter as inclinações e as deflexões em qualquer ponto ao longo da viga. Utilizamos então o *método dos momentos de área* para determinar as inclinações e as deflexões em um ponto ao longo da viga. Foi dada ênfase particular ao cálculo da deflexão máxima de uma viga sob um carregamento. Aplicamos também esses métodos para determinar deflexões na análise das *vigas indeterminadas*, aquelas nas quais o número de reações nos apoios excede o número de equações de equilíbrio disponíveis para determinar as incógnitas.

Observamos na Seção 9.2 que a Equação (4.21) da Seção 4.4, que relaciona a curvatura $1/\rho$ da superfície neutra com o momento fletor M em uma viga prismática em flexão pura, pode ser aplicada a uma viga sob um carregamento transversal, mas que M e $1/\rho$ irão variar de uma seção para outra. Chamando de x a distância a partir da extremidade esquerda da viga, escrevemos

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EI} \tag{9.1}$$

Essa equação nos possibilitou determinar o raio de curvatura da superfície neutra para qualquer valor de x e tirar algumas conclusões gerais referentes à forma da viga deformada.

Na Seção 9.3, discutimos como obter uma relação entre a deflexão y de uma viga, medida em determinado ponto Q, e a distância x desse ponto a partir de alguma origem fixada (Fig. 9.6*b*). Uma relação assim define a *linha elástica* de uma viga. Expressando a curvatura $1/\rho$ em termos das derivadas da função $y(x)$ e substituindo em (9.1), obtivemos a seguinte equação diferencial linear de segunda ordem:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \tag{9.4}$$

Integrando essa equação duas vezes, obtivemos as expressões a seguir que definem a inclinação $\theta(x) = dy/dx$ e a deflexão $y(x)$, respectivamente:

$$EI\frac{dy}{dx} = \int_0^x M(x)\,dx + C_1 \tag{9.5}$$

$$EI\,y = \int_0^x dx \int_0^x M(x)\,dx + C_1x + C_2 \tag{9.6}$$

O produto EI é conhecido como *rigidez à flexão* da viga; C_1 e C_2 são duas constantes de integração que podem ser determinadas com base nas *condições de contorno* impostas na viga pelos seus apoios (Fig. 9.8) [Exemplo 9.1]. A deflexão máxima pode então ser obtida determinando-se o valor de x para o qual a inclinação é zero e o valor correspondente de y [Exemplo 9.2, Problema Resolvido 9.1].

Deformação de uma viga sob carregamento transversal

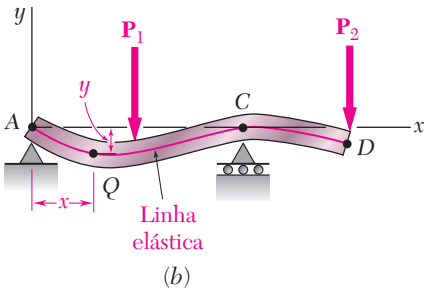


Fig. 9.6*b*

Condições de contorno

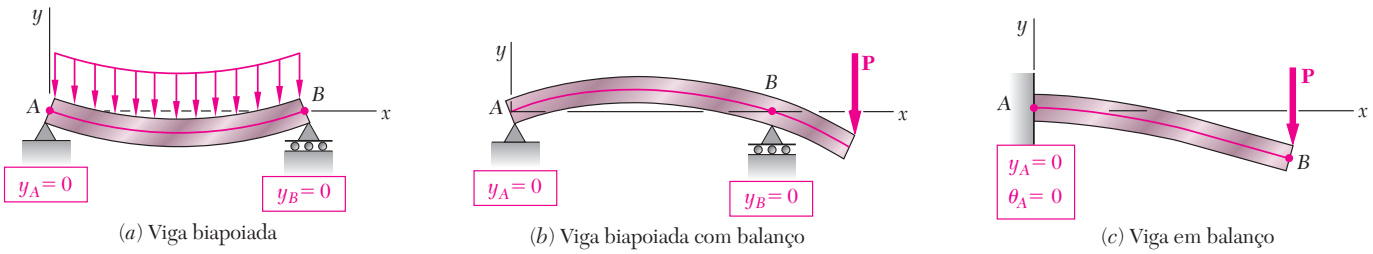


Fig. 9.8 Condições de contorno para vigas estaticamente determinadas.

Linha elástica definida por diferentes funções

Quando o carregamento é tal que são necessárias diferentes funções analíticas para representar o momento fletor em várias partes da viga, então são necessárias também diferentes equações diferenciais, resultando em diferentes funções representando a inclinação $\theta(x)$ e a deflexão $y(x)$ nas várias partes da viga. No caso da viga e o carregamento considerado no Exemplo 9.3 (Fig. 9.20), foram necessárias duas equações diferenciais, uma para a parte AD da viga e a outra para a parte DB. A primeira equação resultou nas funções θ_1 e y_1, e a segunda, nas funções θ_2 e y_2. Em conjunto, quatro constantes de integração tiveram de ser determinadas; duas foram obtidas considerando que as deflexões em A e B eram zero, e as outras duas, expressando que as partes AD e DB da viga tinham a mesma inclinação e a mesma deflexão em D.

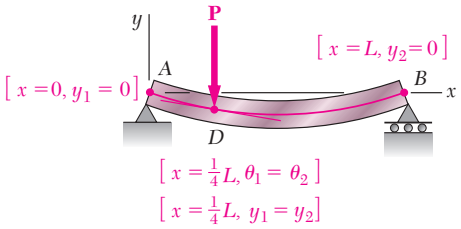


Fig. 9.20

Observamos na Seção 9.4 que, no caso de uma viga suportando uma força distribuída $w(x)$, a linha elástica pode ser determinada diretamente de $w(x)$ por meio de quatro integrações sucessivas resultando em V, M, θ e y nessa ordem. Para a viga em balanço da Fig. 9.21a e a viga biapoiada da Fig. 9.21b, as quatro constantes de integração resultantes podem ser determinadas por meio de quatro condições de contorno indicadas em cada parte da figura [Exemplo 9.4, Problema Resolvido 9.2].

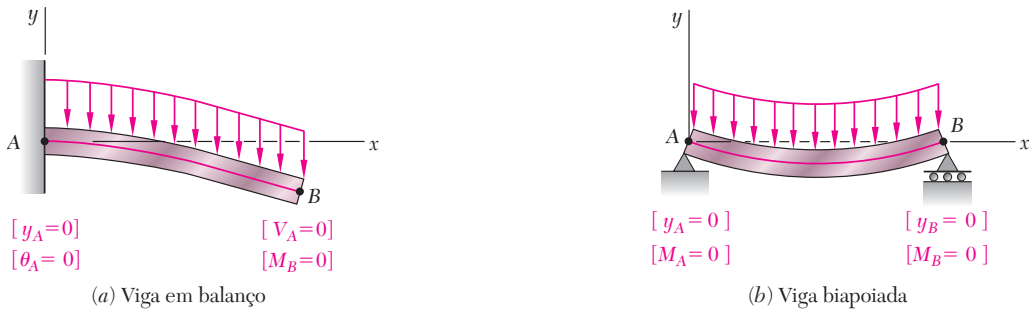


Fig. 9.21 Condições de contorno para vigas suportando uma força distribuída.

Vigas estaticamente indeterminadas

Na Seção 9.5, discutimos as *vigas estaticamente indeterminadas*, isto é, vigas vinculadas de modo que as reações nos apoios envolviam quatro ou mais incógnitas. Como há apenas três equações de equilíbrio disponíveis para determinar essas incógnitas, essas equações de equilíbrio tinham de ser complementadas por equações obtidas pelas condições de contorno impostas pelos apoios. No caso da viga da Fig. 9.24, notamos que as reações nos apoios envolviam quatro incógnitas, a saber, M_A, A_x, A_y e B. Dizemos que essa viga é *indeterminada com um grau de indeterminação*. (Se fossem

Fig. 9.24

envolvidas cinco incógnitas, a viga seria indeterminada *com dois graus de indeterminação*.) Expressando o momento fletor $M(x)$ em função das quatro incógnitas e integrando duas vezes [Exemplo 9.5], determinamos a inclinação $\theta(x)$ e a deflexão $y(x)$ em função das mesmas incógnitas e as constantes de integração C_1 e C_2. As seis incógnitas envolvidas neste cálculo foram obtidas resolvendo simultaneamente as três equações de equilíbrio para o corpo livre da Fig. 9.24*b* e as três equações expressando que $\theta = 0$, $y = 0$ para $x = 0$, e que $y = 0$ para $x = L$ (Fig. 9.25) [Ver também o Problema Resolvido 9.3].

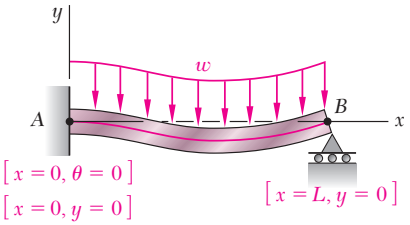


Fig. 9.25

O método de integração proporciona uma maneira eficaz para determinar a inclinação e a deflexão em qualquer ponto de uma viga prismática, desde que o momento fletor M possa ser representado por uma função analítica simples. No entanto, quando são necessárias várias funções para representar M sobre todo o comprimento da viga, esse método pode se tornar muito trabalhoso, pois requer o ajuste de inclinações e deflexões em todos os pontos de transição. Vimos na Seção 9.6 que o uso das *funções de singularidade* (apresentadas anteriormente na Seção 5.5) simplifica consideravelmente a determinação de θ e y em qualquer ponto da viga. Considerando

Uso das funções de singularidade

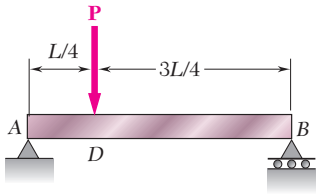


Fig. 9.17

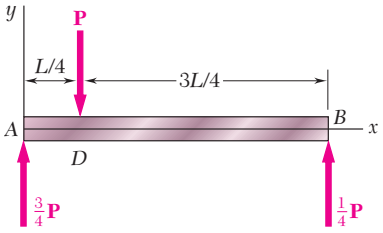


Fig. 9.29

novamente a viga do Exemplo 9.3 (Fig. 9.17) e desenhando o diagrama de corpo livre (Fig. 9.29), expressamos a força cortante em qualquer ponto da viga como

$$V(x) = \frac{3P}{4} - P\langle x - \tfrac{1}{4}L\rangle^0$$

em que a função-degrau $\langle x - \frac{1}{4}L\rangle^0$ é igual a zero quando o valor dentro dos colchetes $\langle\ \ \rangle$ é negativo, e igual a um nos outros casos. Integrando três vezes, obtemos sucessivamente

$$M(x) = \frac{3P}{4}x - P\langle x - \tfrac{1}{4}L\rangle \qquad (9.44)$$

$$EI\,\theta = EI\frac{dy}{dx} = \tfrac{3}{8}Px^2 - \tfrac{1}{2}P\langle x - \tfrac{1}{4}L\rangle^2 + C_1 \qquad (9.46)$$

$$EI\,y = \tfrac{1}{8}Px^3 - \tfrac{1}{6}P\langle x - \tfrac{1}{4}L\rangle^3 + C_1x + C_2 \qquad (9.47)$$

em que os colchetes $\langle\ \ \rangle$ deverão ser substituídos por zero quando o valor dentro deles for negativo, e por parênteses comuns em caso contrário. As constantes C_1 e C_2 foram determinadas por meio das condições de contorno mostradas na Fig. 9.30 [Exemplo 9.6; Problemas Resolvidos 9.4, 9.5 e 9.6].

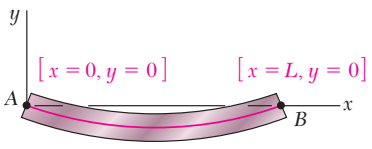


Fig. 9.30

Método da superposição

A seção seguinte foi dedicada ao *método da superposição,* que consiste em determinar separadamente, e depois somar, a inclinação e a deflexão provocadas pelas várias forças aplicadas a uma viga [Seção 9.7]. Esse procedimento foi facilitado pelo uso da tabela do Apêndice *D*, que fornece as inclinações e as deflexões de vigas para vários carregamentos e tipos de apoios [Exemplo 9.7, Problema Resolvido 9.7].

Vigas estaticamente indeterminadas por superposição

O método da superposição pode ser utilizado eficientemente com as *vigas estaticamente indeterminadas* [Seção 9.8]. No caso da viga do Exemplo 9.8 (Fig. 9.36), que envolve quatro reações desconhecidas e é portanto indeterminada *com um grau de indeterminação*, a reação em *B* foi considerada *redundante* e a viga liberada desse apoio. Tratando a reação $\mathbf{R}_B$ como uma força desconhecida e considerando separadamente as deflexões provocadas em *B* pela força distribuída e por $\mathbf{R}_B$, expressamos que a soma dessas deflexões era zero (Fig. 9.37). A equação obtida foi resolvida para R_B [ver também o Problema Resolvido 9.8]. No caso de uma viga indeterminada *com dois graus de indeterminação*, isto é, com reações nos apoios envolvendo cinco incógnitas, duas reações devem ser escolhidas como redundantes, e os apoios correspondentes devem ser eliminados ou modificados adequadamente [Problema Resolvido 9.9].

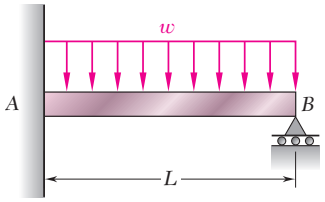


Fig. 9.36

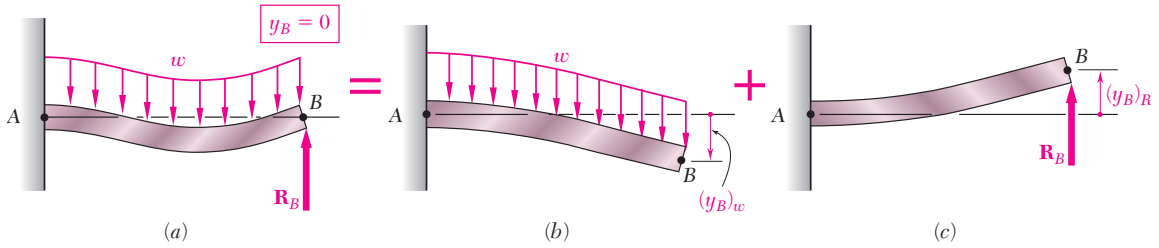


Fig. 9.37

Teorema do primeiro momento de área

Em seguida estudamos a determinação das deflexões e inclinações de vigas utilizando o *método dos momentos de área*. Para determinarmos os *teoremas dos momentos de área* [Seção 9.9], primeiro desenhamos um diagrama representando a variação ao longo da viga, do valor M/EI obtido dividindo-se o momento fletor *M* pela rigidez à flexão *EI* (Fig. 9.41). Depois determinamos o *teorema do primeiro momento de área*, que pode ser enunciado da seguinte forma: *a área sob o diagrama (M/EI) entre dois pontos é igual ao ângulo entre as tangentes à linha elástica traçadas nesses pontos*. Considerando as tangentes em *C* e *D*, escrevemos

$$\theta_{D/C} = \text{área sob o diagrama } (M/EI) \text{ entre } C \text{ e } D \tag{9.56}$$

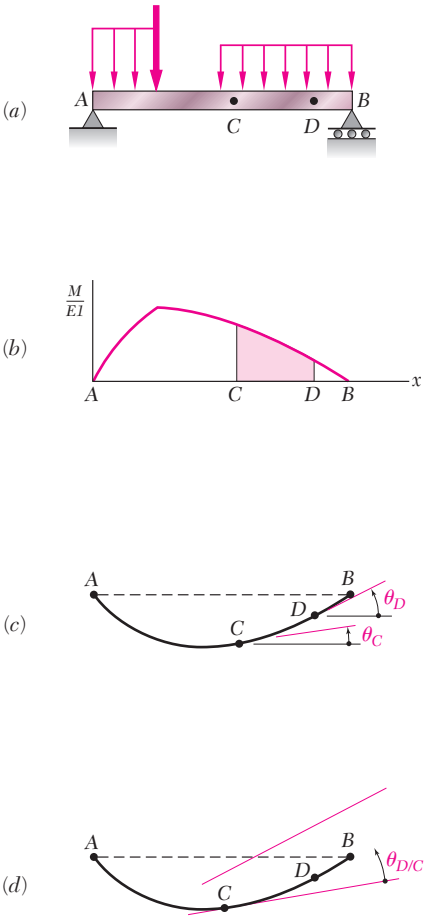


Fig. 9.41 Teorema do primeiro momento de área.

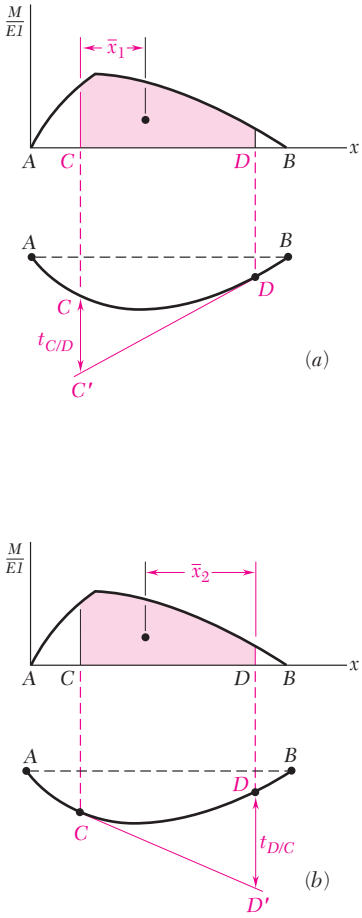


Fig. 9.45 Teorema do segundo momento de área.

Segundo teorema do momento de área

Novamente, utilizando o diagrama (M/EI) e um esboço da viga deformada (Fig. 9.45), traçamos uma tangente no ponto D e consideramos a distância vertical $t_{C/D}$, chamada de desvio tangencial de C em relação a D. Deduzimos então o teorema do segundo momento de área, que pode ser enunciado da seguinte forma: *o desvio tangencial $t_{C/D}$ de C em relação a D é igual ao primeiro momento em relação ao eixo vertical que passa pelo ponto C da área sob o diagrama (M/EI) entre C e D.* Tivemos cuidado ao distinguir entre o desvio tangencial de C em relação a D (Fig. 9.45*a*),

$$t_{C/D} = (\text{área entre } C \text{ e } D)\,\bar{x}_1 \tag{9.59}$$

e o desvio tangencial de D em relação a C (Fig. 9.45*b*):

$$t_{D/C} = (\text{área entre } C \text{ e } D)\,\bar{x}_2 \tag{9.60}$$

Vigas em balanço

Vigas com carregamentos simétricos

Na Seção 9.10, aprendemos a determinar a inclinação e a deflexão nos pontos de vigas *em balanço* e vigas com *carregamentos simétricos*. Para vigas em balanço, a tangente no engastamento é horizontal (Fig. 9.46); para vigas carregadas simetricamente, a tangente é horizontal no ponto médio *C* da viga (Fig. 9.47). Utilizando a tangente horizontal como uma *tangente de referência*, pudemos determinar as inclinações e as deflexões usando, respectivamente, os teoremas do primeiro e o segundo momento de área [Exemplo 9.9, Problemas Resolvidos 9.10 e 9.11]. Notamos que, para encontrar uma deflexão que não fosse um desvio tangencial (Fig. 9.47*c*), era necessário primeiro determinar quais os desvios tangenciais que poderiam ser combinados para se obter a deflexão desejada.

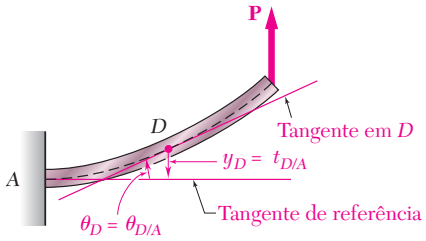


Fig. 9.46

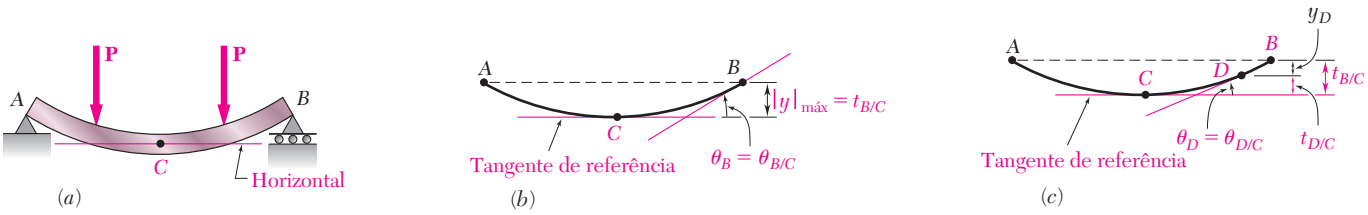


Fig. 9.47

Diagramas de momento fletor por partes

Em muitos casos a aplicação dos teoremas dos momentos de área é simplificada se considerarmos o efeito de cada força separadamente [Seção 9.11]. Para fazer isso traçamos o *diagrama* (M/EI) *por partes* desenhando um diagrama (M/EI) separado para cada força. As áreas e os momentos das áreas sob os vários diagramas puderam então ser somados para determinar as inclinações e os desvios tangenciais para a viga original e o carregamento [Exemplos 9.10 e 9.11].

Vigas com carregamentos assimétricos

Na Seção 9.12, expandimos o uso do método dos momentos de área para envolver vigas com *carregamentos assimétricos*. Observando que geralmente não é possível localizar uma tangente horizontal, selecionamos uma tangente de referência em um dos apoios da viga, pois a inclinação daquela tangente pode ser determinada facilmente. Por exemplo, para a viga e

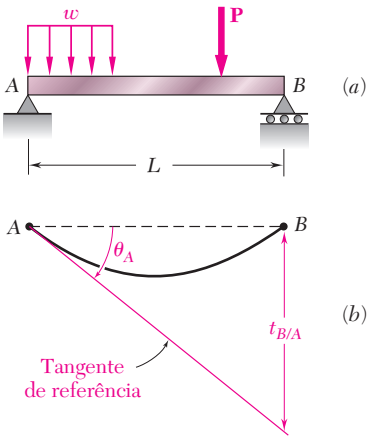


Fig. 9.59

o carregamento mostrados na Fig. 9.59, a inclinação da tangente em A pode ser obtida calculando-se o desvio tangencial $t_{B/A}$ e dividindo-a pela distância L entre os apoios A e B. Depois, usando os teoremas dos momentos de área e geometria simples, pudemos determinar a inclinação e a deflexão em qualquer ponto da viga [Exemplo 9.12, Problema Resolvido 9.12].

A *deflexão máxima* de uma viga carregada assimetricamente geralmente não ocorre no meio do vão. A abordagem indicada no parágrafo anterior

Deflexão máxima

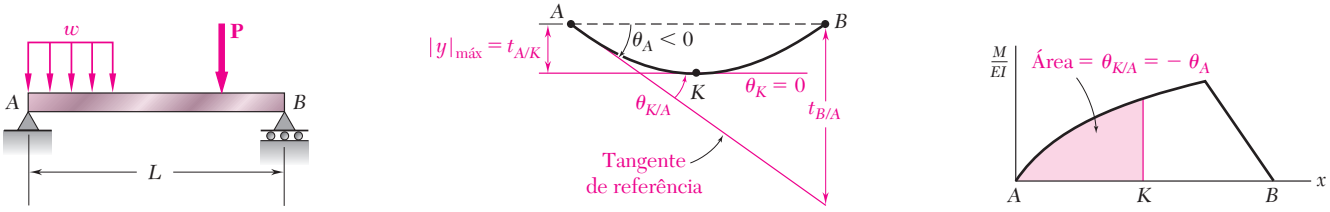


Fig. 9.68

foi utilizada para determinar o ponto K em que ocorre a deflexão máxima e a intensidade daquela deflexão [Seção 9.13]. Observando que a inclinação em K é zero (Fig. 9.68) concluímos que $\theta_{K/A} = -\theta_A$. Recordando o teorema do primeiro momento de área, determinamos a localização do ponto K medindo sob o diagrama (M/EI) uma área igual a $\theta_{K/A}$. A deflexão máxima foi então obtida calculando-se o desvio tangencial $t_{A/K}$ [Problemas Resolvidos 9.12 e 9.13].

Na última seção do capítulo [Seção 9.14], aplicamos o método dos momentos de área à análise de *vigas estaticamente indeterminadas*. Como as reações para a viga e o carregamento mostrados na Fig. 9.71 não podiam ser determinadas apenas pela estática, escolhemos uma das reações da viga como redundante ($\mathbf{M}_A$ na Fig. 9.72*a*) e consideramos a reação redundante uma força desconhecida. O desvio tangencial de B em relação a A foi considerado separadamente para a força distribuída (Fig. 9.72*b*) e para a reação redundante (Fig. 9.72*c*). Expressando que, sob a ação combinada da força distribuída e do momento M_A, o desvio tangencial de B em relação a A deveria ser zero, escrevemos

$$t_{B/A} = (t_{B/A})_w + (t_{B/A})_M = 0$$

Com base nessa expressão, determinamos o valor da reação redundante $\mathbf{M}_A$ [Exemplo 9.14, Problema Resolvido 9.14].

Vigas estaticamente indeterminadas

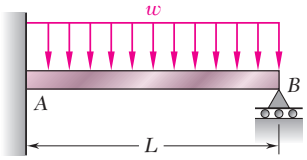


Fig. 9.71

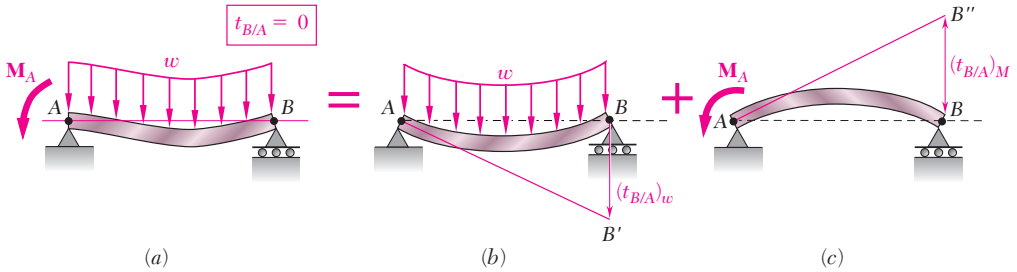


Fig. 9.72

PROBLEMAS DE REVISÃO

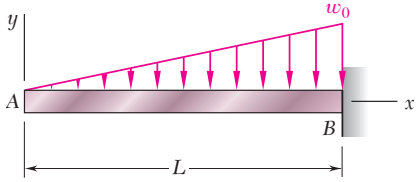


Fig. P9.157

9.157 Para o carregamento mostrado, determine (*a*) a equação da linha elástica para a viga em balanço *AB*, (*b*) a deflexão na extremidade livre e (*c*) a inclinação na extremidade livre.

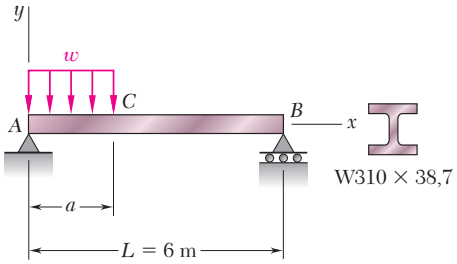


Fig. *P9.158*

9.158 Para a viga e o carregamento mostrados, sabendo que $a = 2$ m, $w = 50$ kN/m e $E = 200$ GPa, determine (*a*) a inclinação sobre o apoio *A* e (*b*) a deflexão no ponto *C*.

9.159 Para a viga e o carregamento mostrados na figura, determine (*a*) a equação da linha elástica, (*b*) a inclinação na extremidade *A* e (*c*) a deflexão no ponto médio do vão livre.

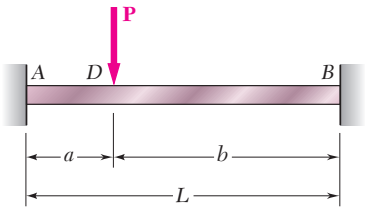


Fig. P9.160

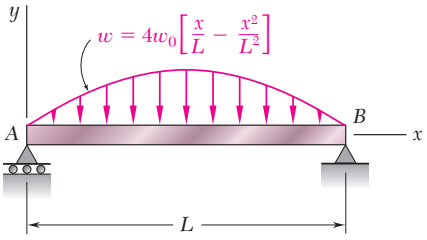


Fig. P9.159

9.160 Determine a reação em *A* e desenhe o diagrama de momento fletor para a viga e o carregamento mostrados na figura.

9.161 Para a viga de madeira e o carregamento mostrados na figura, determine (*a*) a inclinação na extremidade *A* e (*b*) a deflexão no ponto médio *C*. Use $E = 12$ GPa.

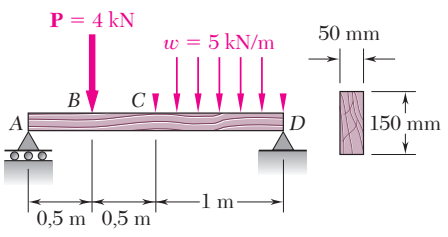


Fig. P9.161

9.162 A barra rígida *DEF* está soldada no ponto *D* à viga *AB* de aço laminado. Para o carregamento mostrado na figura, determine (*a*) a inclinação no ponto *A* e (*b*) a deflexão no ponto médio *C* da viga. Use $E = 200$ GPa.

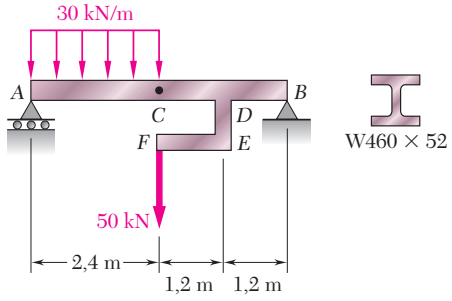


Fig. *P9.162*

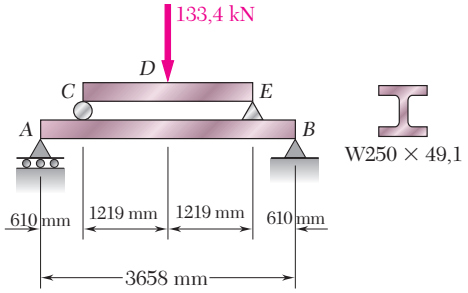


Fig. P9.163

9.163 A viga *CE* está apoiada sobre a viga *AB*, como mostra a figura. Sabendo que as vigas são feitas com um perfil de aço laminado W250 × 49,1, determine para o carregamento mostrado na figura, a deflexão no ponto *D*. Use $E = 200$ GPa.

9.164 Para o carregamento mostrado na figura, sabendo que as vigas *AC* e *BD* têm a mesma rigidez à flexão, determine a reação em *B*.

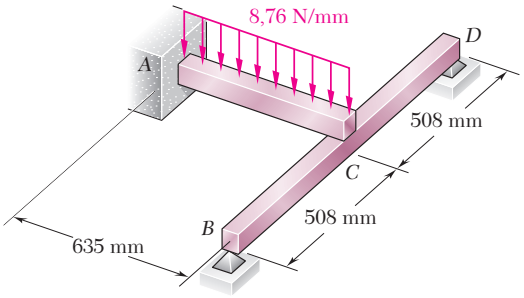


Fig. *P9.164*

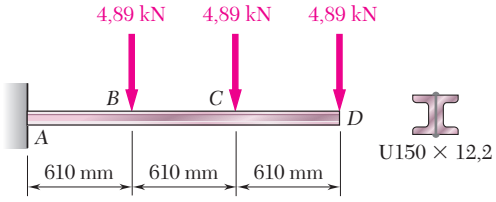


Fig. P9.165

9.165 Dois perfis U150 × 12,2 são soldados pelas costas e submetidos a um carregamento conforme mostra a figura. Sabendo que $E = 200$ GPa, determine (*a*) a inclinação no ponto *D* e (*b*) a deflexão no ponto *D*.

9.166 Para a viga prismática e o carregamento mostrados, determine (*a*) a inclinação na extremidade *A* e (*b*) a deflexão no centro *C* da viga.

9.167 Para a viga e o carregamento mostrados, determine a intensidade e a localização da máxima deflexão vertical para baixo.

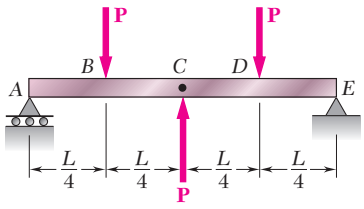


Fig. *P9.166*

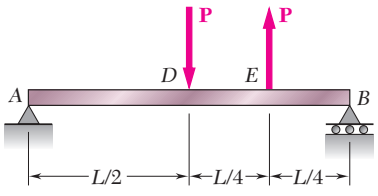


Fig. P9.167

9.168 Determine a reação no apoio móvel e desenhe o diagrama de momento fletor para a viga e o carregamento mostrados na figura.

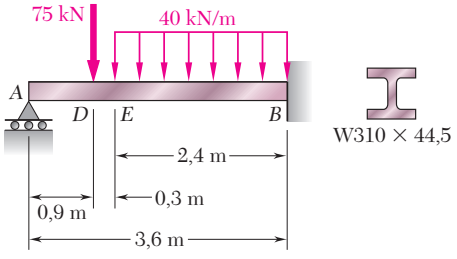


Fig. P9.168

PROBLEMAS PARA COMPUTADOR

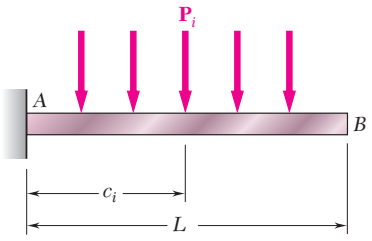


Fig. P9.C1

Os problemas a seguir devem ser resolvidos com um computador.

9.C1 Várias forças concentradas podem ser aplicadas à viga em balanço *AB*. Elabore um programa de computador para calcular a inclinação e a deflexão da viga *AB* de $x = 0$ a $x = L$ usando incrementos Δx dados. Aplique esse programa com incrementos $\Delta x = 50$ mm à viga e ao carregamento dos Problemas 9.73 e 9.74.

9.C2 A viga *AB* de 6,71 m consiste em um perfil de aço laminado W530 × 92 e suporta uma força distribuída de 51,1 kN/m conforme mostra a figura. Elabore um programa de computador e use-o para calcular, para valores de *a* desde 0 até 6705,6 mm usando incrementos de 304,8 mm, (*a*) a inclinação e a deflexão em *D*, (*b*) a localização e o valor da deflexão máxima. Use $E = 200$ GPa.

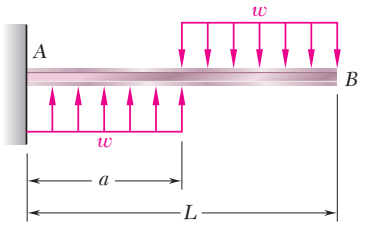


Fig. P9.C3

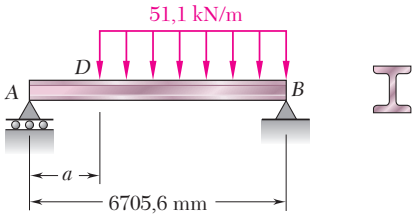


Fig. P9.C2

9.C3 A viga em balanço *AB* suporta as forças distribuídas mostradas na figura. Elabore um programa de computador para calcular a inclinação e a deflexão da viga *AB* desde $x = 0$ até $x = L$ usando incrementos Δx dados. Aplique esse programa com incrementos $\Delta x = 100$ mm, supondo que $L = 2{,}4$ m, $w = 36$ kN/m, e (*a*) $a = 0{,}6$ m, (*b*) $a = 1{,}2$ m, (*c*) $a = 1{,}8$ m. Use $E = 200$ GPa.

9.C4 A viga simples *AB* tem rigidez à flexão *EI* constante e suporta várias forças concentradas conforme mostra a figura. Usando o *Método da Integração*, elabore um programa de computador que possa ser utilizado para calcular a inclinação e a deflexão nos pontos ao longo da viga desde $x = 0$ até $x = L$ usando os incrementos Δx dados. Aplique esse programa à viga e ao carregamento do (*a*) Problema 9.13 com $\Delta x = 0{,}3$ m, (*b*) Problema 9.16 com $\Delta x = 0{,}05$ m e (*c*) Problema 9.129 com $\Delta x = 0{,}25$ m.

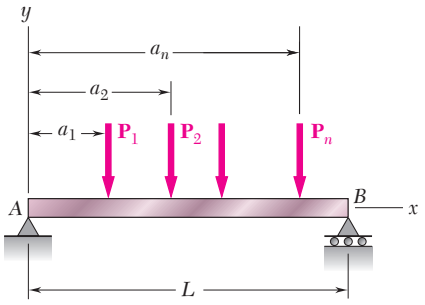


Fig. P9.C4

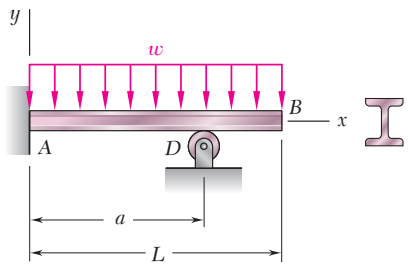


Fig. P9.C5

9.C5 Os apoios da viga *AB* consistem em um engastamento fixo na extremidade *A* e um apoio móvel localizado no ponto *D*. Elabore um programa de computador que possa ser utilizado para calcular a inclinação e a deflexão na extremidade livre da viga para valores de a de 0 a L usando os incrementos Δa dados. Aplique esse programa para calcular a inclinação e a deflexão no ponto *B* para cada um dos seguintes casos:

	L	Δa	w	E	Forma
(*a*)	3657,6 mm	152,4 mm	23,3 kN/m	200 GPa	W410 × 85
(b)	3 m	0,2 m	18 kN/m	200 GPa	W460 × 113

9.C6 Para a viga e o carregamento mostrados na figura, use o *Método dos Momentos de Área* para elaborar um programa de computador para calcular a inclinação e a deflexão em pontos ao longo da viga de $x = 0$ a $x = L$ usando os incrementos Δx dados. Aplique esse programa para calcular a inclinação e a deflexão para cada posição da força concentrada para a viga (*a*) do Problema 9.77 com $\Delta x = 0{,}5$ m e (*b*) do Problema 9.119 com $\Delta x = 0{,}5$ m.

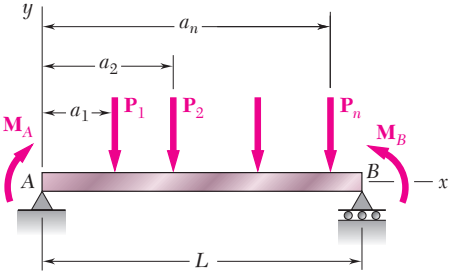


Fig. P9.C6

9.C7 Duas forças de 52 kN são mantidas afastadas de 2,5 m enquanto movem-se lentamente pela viga *AB*. Elabore um programa de computador para calcular a deflexão no ponto médio *C* da viga para valores de x desde 0 até 9 m, usando incrementos de 0,5 m. Use $E = 200$ GPa.

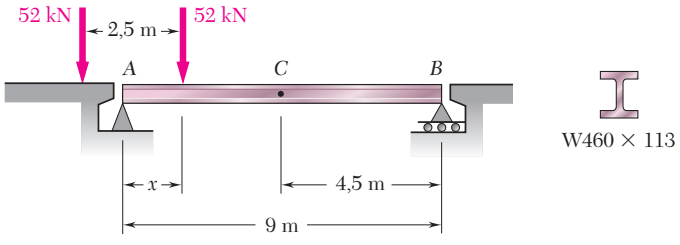


Fig. P9.C7

9.C8 Uma força uniformemente distribuída w e várias forças concentradas P_i podem ser aplicadas à viga em balanço *AB*. Elabore um programa de computador para determinar a reação no apoio móvel e aplique-o à viga e ao carregamento (*a*) do Problema 9.53*a* e (*b*) do Problema 9.154.

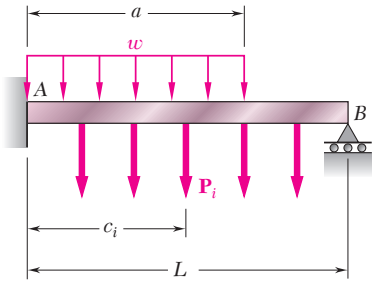
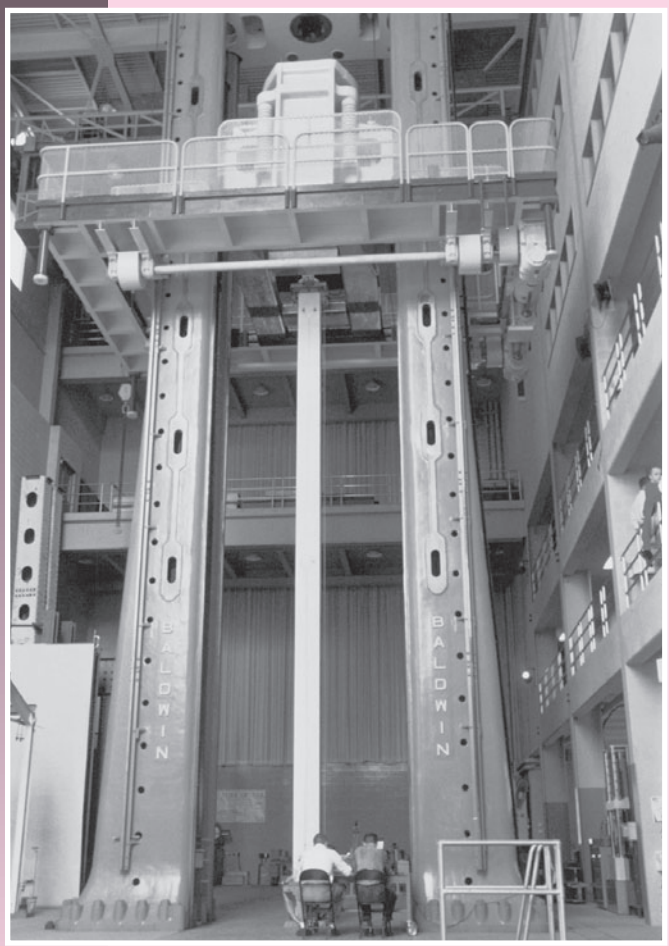


Fig. P9.C8

CAPÍTULO

10 Colunas



Uma coluna de aço laminado de mesa larga está em teste na máquina de ensaio universal com capacidade de 22 milhões de newtons na Lehigh University, Bethlehem, Pensilvânia. Neste capítulo, serão discutidos a análise e o projeto de barras que suportam forças axiais de compressão.

10.1. Introdução

Nos capítulos anteriores, tínhamos dois interesses principais: (1) a resistência da estrutura, isto é, sua capacidade para suportar determinado carregamento sem que se verificassem tensões excessivas; e (2) a capacidade da estrutura para suportar determinado carregamento sem sofrer deformações inaceitáveis. Neste capítulo, nosso interesse estará voltado para a estabilidade da estrutura, isto é, para sua capacidade de suportar determinado carregamento sem sofrer uma mudança abrupta em sua configuração. Nossa discussão estará relacionada principalmente com colunas, isto é, com a análise e o projeto de elementos prismáticos verticais suportando forças axiais.

Na Seção 10.2, consideraremos primeiro a estabilidade de um modelo simplificado de coluna, consistindo em duas barras rígidas conectadas por um pino e uma mola e suportando uma carga **P**. Você observará que, se seu equilíbrio for perturbado, esse sistema voltará à sua posição de equilíbrio inicial desde que P não exceda um certo valor P_{cr}, chamado de *carga crítica*. No entanto, se $P > P_{cr}$, o sistema se afastará de sua posição original e se estabilizará em uma nova posição de equilíbrio. No primeiro caso, dizemos que o sistema é *estável*, e no segundo caso, dizemos que ele é *instável*.

Na Seção 10.3, você iniciará o estudo da *estabilidade de colunas elásticas* considerando uma coluna biarticulada submetida a uma força axial centrada. Será deduzida a *fórmula de Euler* para a carga crítica da coluna e, por meio dessa fórmula, será determinada a tensão normal crítica correspondente da coluna. Aplicando um coeficiente de segurança à carga crítica, você será capaz de determinar a força admissível que pode ser aplicada a uma coluna biarticulada.

Na Seção 10.4, será considerada a análise da estabilidade de colunas com diferentes condições de extremidade. Você simplificará essas análises aprendendo a determinar o *comprimento de flambagem* de uma coluna, isto é, o comprimento de uma coluna biarticulada equivalente que tem a mesma carga crítica.

Na Seção 10.5, você considerará colunas suportando forças axiais excêntricas; essas colunas têm deslocamentos transversais para qualquer valor de carga. Será deduzida uma expressão para o deslocamento máximo sob determinada carga, e essa expressão será usada para determinar a tensão normal máxima na coluna. Finalmente, será desenvolvida a *fórmula da secante* que relaciona as tensões média e máxima em uma coluna.

Nas primeiras seções do capítulo, cada coluna é inicialmente considerada um prisma reto homogêneo. Na última parte do capítulo, você considerará colunas reais, projetadas e analisadas usando fórmulas empíricas preparadas por organizações profissionais. Na Seção 10.6, serão apresentadas fórmulas para a tensão admissível em colunas feitas de aço, alumínio ou madeira e submetidas a uma carga axial centrada. Na última seção do capítulo (Seção 10.7), será considerado o projeto de colunas sob uma força axial excêntrica.

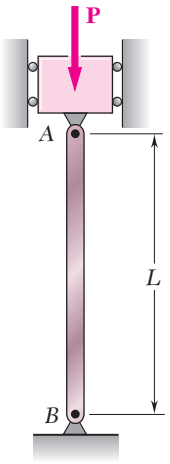


Fig. 10.1

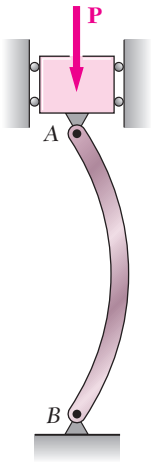


Fig. 10.2

10.2. Estabilidade de estruturas

Suponha que tenhamos de projetar uma coluna AB de comprimento L para suportar uma dada força **P** (Fig. 10.1). A coluna será articulada em ambas as extremidades e consideremos que **P** seja uma força axial centrada. Se a área da seção transversal A da coluna é selecionada de maneira que o valor $\sigma = P/A$ da tensão em uma seção transversal seja menor do que a tensão admissível σ_{adm} para o material usado, e se a deformação $\delta = PL/AE$ estiver dentro das especificações dadas, podemos concluir que a coluna foi projetada corretamente. No entanto, pode ocorrer que na medida em que o carregamento é aplicado, a coluna se flamba; em vez de permanecer reta, ela subitamente se curvará de maneira acentuada (Fig. 10.2). A Figura 10.3 mostra uma coluna similar àquela da foto da primeira página deste capítulo depois de ter sido carregada, de modo que ela não é mais reta; a coluna flambou. Está claro que uma coluna que sofreu flambagem sob a ação de uma força que ela deveria suportar não foi projetada corretamente.

Fig. 10.3 Coluna flambada.

Antes de passarmos para a discussão real da estabilidade de colunas elásticas, vamos adquirir alguns conhecimentos básicos sobre o problema, considerando um modelo simplificado de duas barras rígidas AC e BC conectadas em C por um pino e uma mola de torção de constante K (Fig. 10.4).

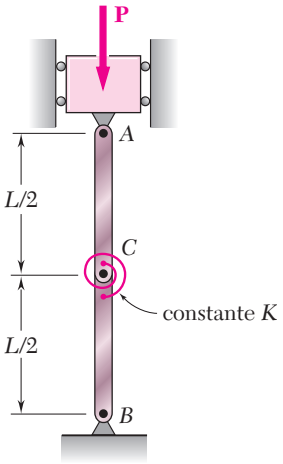


Fig. 10.4

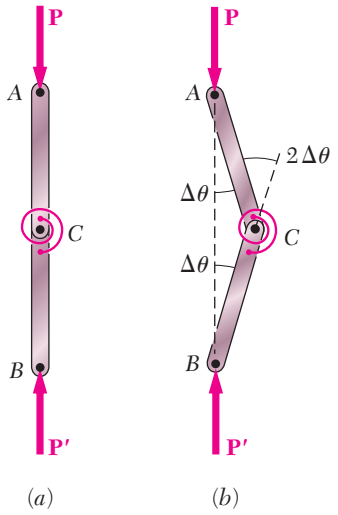


Fig. 10.5

Se as duas barras e as duas forças **P** e **P**′ estiverem perfeitamente alinhadas, o sistema permanecerá na posição de equilíbrio mostrada na Fig. 10.5*a* enquanto não for perturbado. Mas suponha que movamos *C* ligeiramente para a direita, de maneira que cada barra forme agora um pequeno ângulo $\Delta\theta$ com a vertical (Fig. 10.5*b*). O sistema retornará à sua posição de equilíbrio original, ou ele se afastará ainda mais daquela posição? No primeiro caso, dizemos que o sistema é *estável* e, no segundo, que ele é *instável*.

Para determinar se o sistema constituído de duas barras é estável ou instável, consideramos os esforços que atuam na barra *AC* (Fig. 10.6). Esses esforços consistem em dois momentos, que são o formado por **P** e **P**′ de momento $P(L/2)$ sen $\Delta\theta$, que tende a afastar a barra da linha vertical, e o momento **M** exercido pela mola, que tende a trazer a barra de volta para sua posição vertical original. Como o ângulo de deflexão da mola é $2\,\Delta\theta$, o momento **M** é $M = K(2\,\Delta\theta)$. Se o segundo momento for maior do que o primeiro, o sistema tende a retornar à sua posição original de equilíbrio; o sistema neste caso é estável. Se o primeiro momento for maior do que o do segundo, o sistema tende a se afastar de sua posição de equilíbrio original; o sistema neste caso é instável. O valor da carga para o qual os dois momentos se equilibram é chamado de *carga crítica* e é representado por P_{cr}. Temos

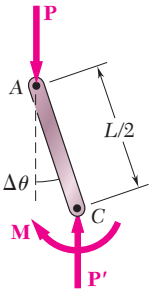


Fig. 10.6

$$P_{cr}(L/2)\ \text{sen}\ \Delta\theta = K(2\,\Delta\theta) \tag{10.1}$$

ou, como sen $\Delta\theta \approx \Delta\theta$,

$$P_{cr} = 4K/L \tag{10.2}$$

Está claro que o sistema é estável para $P < P_{cr}$, ou seja, para valores da força menores do que o valor crítico, e instável para $P > P_{cr}$.

Vamos supor que a força $P > P_{cr}$ foi aplicada às duas barras da Fig. 10.4 e que o sistema foi perturbado. Como $P > P_{cr}$, o sistema se afastará da vertical e, após algumas oscilações, estabilizará em uma nova posição de equilíbrio

(Fig. 10.7*a*). Considerando o equilíbrio do corpo livre *AC* (Fig. 10.7*b*), obtemos uma equação similar à (10.1), mas envolvendo o ângulo finito θ, ou seja,

$$P(L/2)\,\text{sen}\,\theta = K(2\theta)$$

ou

$$\frac{PL}{4K} = \frac{\theta}{\text{sen}\,\theta} \tag{10.3}$$

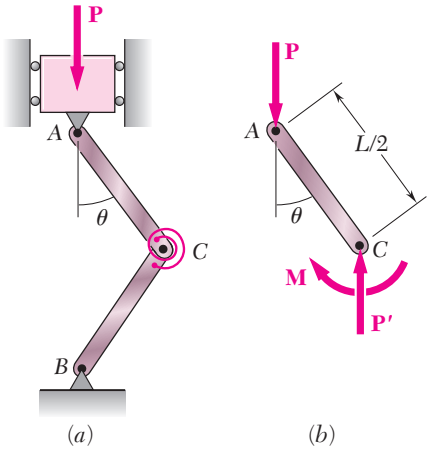


Fig. 10.7

O valor de θ correspondente à posição de equilíbrio representada na Fig. 10.7 é obtido resolvendo a Equação (10.3) por tentativa e erro. Mas observamos que, para qualquer valor positivo de θ, temos sen $\theta < \theta$. Assim, a Equação (10.3) resulta em um valor de θ diferente de zero somente quando o membro esquerdo da equação for maior do que um. Lembrando da Equação (10.2), notamos que, sem dúvida, esse é o caso tratado aqui, pois assumimos que $P > P_{cr}$. Mas, se tivéssemos considerado que $P < P_{cr}$, a segunda posição de equilíbrio mostrada na Fig. 10.7 não existiria e a única posição de equilíbrio possível seria a correspondente a $\theta = 0$. Verificamos então que, para $P < P_{cr}$, a posição $\theta = 0$ deve ser estável.

Essa observação se aplica a estruturas e sistemas mecânicos em geral, e será usada na próxima seção, em que discutiremos a estabilidade das colunas elásticas.

10.3. Fórmula de Euler para colunas biarticuladas

Retornando à coluna *AB* considerada na seção anterior (Fig. 10.1), propomos determinar o valor crítico da força **P**, isto é, o valor P_{cr} da força para o qual a posição mostrada na Fig. 10.1 deixa de ser estável. Se $P > P_{cr}$, o menor desalinhamento ou perturbação fará a coluna flambar, isto é, a coluna assumirá outra configuração de equilíbrio como esta mostrada na Fig. 10.2.

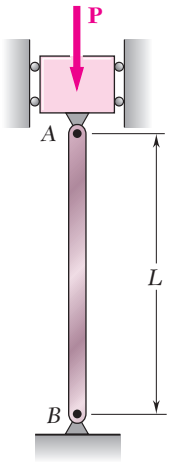


Fig. 10.1
(repetida)

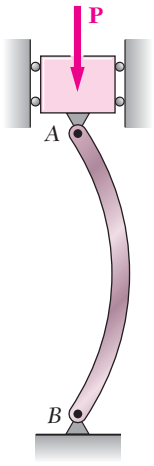


Fig. 10.2
(repetida)

Nossa abordagem tentará determinar as condições sob as quais a configuração da Fig. 10.2 é possível. Como a coluna pode ser considerada uma barra colocada em uma posição vertical e submetida a uma força axial, procederemos conforme o Capítulo 9 e chamaremos de x a distância da extremidade A da coluna até um dado ponto Q de sua linha elástica, e por y a deflexão desse ponto (Fig. 10.8*a*). Consequentemente, o eixo x será vertical e orientado para baixo, e o eixo y horizontal e orientado para a direita. Considerando o equilíbrio do corpo livre AQ (Fig. 10.8*b*), concluímos que o momento fletor em Q é $M = -Py$. Substituindo esse valor de M na Equação (9.4) da Seção 9.3, escrevemos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI}y \tag{10.4}$$

ou, transpondo o último termo,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI}y = 0 \tag{10.5}$$

Essa é uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes. Fazendo

$$p^2 = \frac{P}{EI} \tag{10.6}$$

escrevemos a Equação (10.5) na forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p^2y = 0 \tag{10.7}$$

que é a mesma equação diferencial para movimento harmônico simples exceto, naturalmente, que a variável independente agora é a distância x e não o tempo t. A solução geral da Equação (10.7) é

$$y = A \operatorname{sen} px + B \cos px \tag{10.8}$$

como podemos facilmente verificar calculando d^2y/dx^2 e substituindo os valores de y e d^2y/dx^2 na Equação (10.7).

Lembrando as condições de contorno que devem ser satisfeitas nas extremidades A e B da coluna (Fig. 10.8*a*), primeiro fazemos $x = 0$, $y = 0$ na Equação (10.8) e constatamos que $B = 0$. Substituindo em seguida $x = L$, $y = 0$, obtemos

$$A \operatorname{sen} pL = 0 \tag{10.9}$$

Essa equação é satisfeita se $A = 0$, ou se sen $pL = 0$. Se a primeira dessas condições é satisfeita, a Equação (10.8) se reduz a $y = 0$ e a coluna estará reta (Fig. 10.1). Para que a segunda condição seja satisfeita, devemos ter $pL = n\pi$, ou substituindo p de (10.6) e resolvendo para P,

$$P = \frac{n^2\pi^2EI}{L^2} \tag{10.10}$$

O menor dos valores de P definido pela Equação (10.10) é aquele correspondente a $n = 1$. Temos portanto

$$P_{cr} = \frac{\pi^2EI}{L^2} \tag{10.11}$$

A expressão obtida é conhecida como *fórmula de Euler*, em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783). Substituindo essa expres-

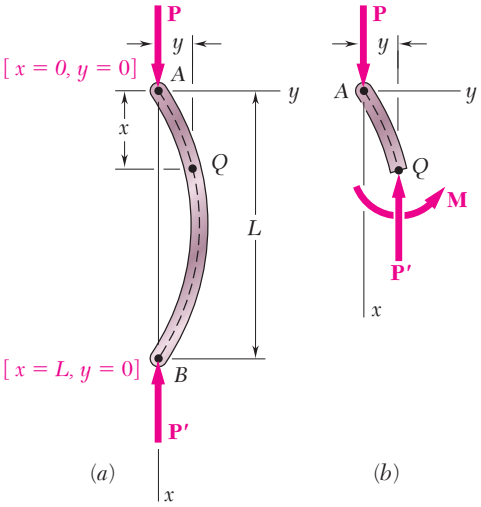


Fig. 10.8

são para P na Equação (10.6) e o valor obtido para p na Equação (10.8), e lembrando que $B = 0$, escrevemos

$$y = A \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} \tag{10.12}$$

que é a equação da linha elástica depois que a coluna flambou (Fig. 10.2). Notamos que o valor da deflexão máxima, $y_m = A$, é indeterminado. Isso se deve ao fato de que a equação diferencial (10.5) é uma aproximação linearizada da verdadeira equação diferencial que governa a linha elástica.†

Se $P < P_{cr}$, a condição sen $pL = 0$ não pode ser satisfeita, e a solução dada pela Equação (10.12) não existe. Devemos ter então $A = 0$, e a única configuração possível para a coluna é a reta. Assim, para $P < P_{cr}$, a configuração reta da Fig. 10.1 é estável.

No caso de uma coluna com seção transversal circular ou quadrada, o momento de inércia I da seção transversal em relação a qualquer eixo que passa pelo centroide será o mesmo, e a coluna poderá então flambar em qualquer um dos planos, exceto pelas restrições que poderão ser impostas pelos vínculos nas extremidades. Para outras formas de seção transversal, a força crítica deve ser calculada fazendo $I = I_{mín}$ na Equação (10.11); se ocorrer a flambagem, ela será em um plano perpendicular ao eixo principal de inércia correspondente.

O valor da tensão correspondente à força crítica é chamado de *tensão crítica* e é representado por σ_{cr}. Lembrando da Equação (10.11) e fazendo $I = Ar^2$, em que A é a área da seção transversal e r o seu raio de giração, temos

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EAr^2}{AL^2}$$

ou

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} \tag{10.13}$$

A relação L/r é chamada de *índice de esbeltez* da coluna. Em vista das observações do parágrafo anterior, está claro que o valor mínimo do raio de giração r deverá ser usado no cálculo do índice de esbeltez e da tensão crítica em uma coluna.

A Equação (10.13) mostra que a tensão crítica é proporcional ao módulo de elasticidade do material e inversamente proporcional ao quadrado do índice de esbeltez da coluna. O gráfico de σ_{cr} em função de L/r é mostrado na Fig. 10.9 para o aço estrutural, considerando $E = 200$ GPa e $\sigma_E = 250$ MPa. Devemos ter em mente que não foi usado coeficiente de segurança no gráfico de σ_{cr}. Notamos também que, se o valor obtido para σ_{cr}, da Equação (10.13) ou da curva da Fig. 10.9, é maior do que a tensão de escoamento σ_E, esse valor não tem utilidade para nós, pois a coluna escoará em compressão e deixará de ser elástica antes que a flambagem ocorra.

†Lembramos que a equação $d^2y/dx^2 = M/EI$ foi obtida na Seção 9.3 considerando que a inclinação dy/dx da viga poderia ser desprezada e que a expressão exata dada na Equação (9.3) para a curvatura da viga poderia ser substituída por $1/\rho = d^2y/dx^2$.

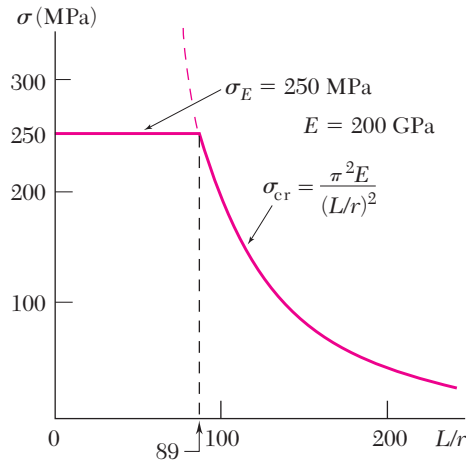


Fig. 10.9

Nossa análise do comportamento de uma coluna se baseou até agora na suposição de uma força centrada perfeitamente alinhada. Na prática, raramente isso acontece, e na Seção 10.5 o efeito da excentricidade do carregamento é levado em consideração. Essa abordagem conduzirá a uma transição mais suave entre a falha por flambagem de colunas longas e delgadas até a falha em compressão de colunas curtas e grossas. Ela também nos proporcionará uma visão mais realística da relação entre o índice de esbeltez de uma coluna e a carga que a faz falhar.

Exemplo 10.1

Uma coluna biarticulada de 2 m de comprimento de seção transversal quadrada deve ser feita de madeira. Considerando que $E = 13$ GPa, $\sigma_{adm} = 12$ MPa, e usando um coeficiente de segurança de 2,5 ao calcular a força crítica de Euler para a flambagem, determine a dimensão da seção transversal se a coluna deve suportar com segurança (*a*) uma força de 100 kN e (*b*) uma força de 200 kN.

(a) Para a força de 100 kN. Usando o coeficiente de segurança dado, temos

$$P_{cr} = 2{,}5(100\text{ kN}) = 250\text{ kN} \qquad L = 2\text{ m} \qquad E = 13\text{ GPa}$$

na fórmula de Euler (10.11) e resolvemos para I. Temos

$$I = \frac{P_{cr}L^2}{\pi^2 E} = \frac{(250 \times 10^3\text{ N})(2\text{ m})^2}{\pi^2(13 \times 10^9\text{ Pa})} = 7{,}794 \times 10^{-6}\text{ m}^4$$

Lembrando que, para um quadrado de lado a, temos $I = a^4/12$, escrevemos

$$\frac{a^4}{12} = 7{,}794 \times 10^{-6}\text{ m}^4 \qquad a = 98{,}3\text{ mm} \approx 100\text{ mm}$$

Verificamos o valor da tensão normal na coluna:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{100\text{ kN}}{(0{,}100\text{ m})^2} = 10\text{ MPa}$$

Como σ é menor do que a *tensão* admissível, uma seção transversal 100 mm × 100 mm é aceitável.

(b) Para a força de 200 kN. Resolvendo novamente a Equação (10.11) para I, mas fazendo agora $P_{cr} = 2{,}5(200) = 500$ kN, temos

$$I = 15{,}588 \times 10^{-6}\text{ m}^4$$

$$\frac{a^4}{12} = 15{,}588 \times 10^{-6} \qquad a = 116{,}95\text{ mm}$$

O valor da tensão normal é

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{200\text{ kN}}{(0{,}11695\text{ m})^2} = 14{,}62\text{ MPa}$$

Como esse valor é maior do que a tensão admissível, a dimensão obtida não é aceitável, e devemos selecionar a seção transversal com base em sua resistência à compressão. Escrevemos

$$A = \frac{P}{\sigma_{adm}} = \frac{200\text{ kN}}{12\text{ MPa}} = 16{,}67 \times 10^{-3}\text{ m}^2$$

$$a^2 = 16{,}67 \times 10^{-3}\text{ m}^2 \qquad a = 129{,}1\text{ mm}$$

Uma seção transversal 130 mm × 130 mm é aceitável.

10.4. Extensão da fórmula de Euler para colunas com outras condições de extremidade

A fórmula de Euler (10.11) foi deduzida na seção anterior para uma coluna articulada em ambas as extremidades. Agora a força crítica P_{cr} será determinada para colunas com diferentes condições de extremidade.

No caso de uma coluna com uma extremidade livre A suportando uma força $\mathbf{P}$ e uma extremidade engastada B (Fig. 10.10*a*), observamos que a coluna se comportará como a metade superior de uma coluna biarticulada (Fig. 10.10*b*). A força crítica para a coluna da Fig. 10.10*a* é então a mesma da coluna biarticulada da Fig. 10.10*b* e pode ser obtida por meio da fórmula de Euler

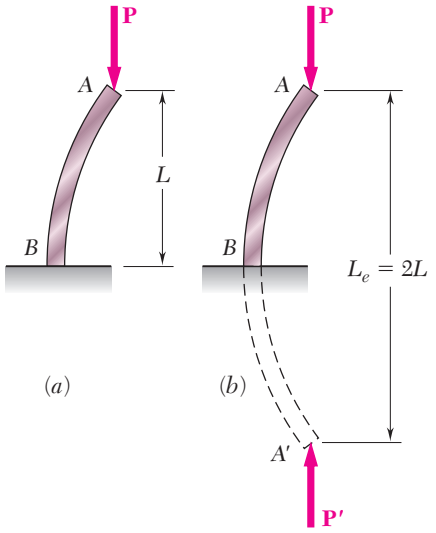


Fig. 10.10

(10.11) usando um comprimento de coluna igual a duas vezes o comprimento L real da coluna dada. Dizemos que o *comprimento de flambagem* L_{fl} da coluna da Fig. 10.10 é igual a $2L$ e substituímos $L_{fl} = 2L$ na fórmula de Euler:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_{fl}^2} \tag{10.11′}$$

A tensão crítica é encontrada de uma maneira análoga por meio da fórmula

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L_{fl}/r)^2} \tag{10.13′}$$

A relação L_{fl}/r é chamada de *índice de esbeltez* da coluna e, no caso considerado aqui, é igual a $2L/r$.

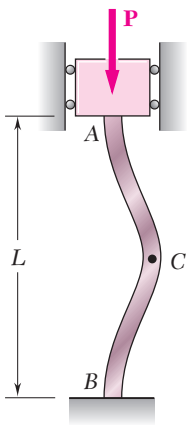


Fig. 10.11

Considere em seguida uma coluna com duas extremidades engastadas A e B suportando uma força $\mathbf{P}$ (Fig. 10.11). A simetria dos vínculos e do carregamento em relação a um eixo horizontal que passa pelo ponto médio C requer que a força cortante em C e as componentes horizontais das reações em A e B sejam zero (Fig. 10.12). Conclui-se que as restrições impostas na metade superior AC da coluna pelo engastamento em A e pela metade inferior

CB são indênticas (Fig. 10.13). A parte *AC* deve portanto ser simétrica em relação ao seu ponto médio *D*, e esse ponto deve ser um ponto de inflexão, em que o momento fletor é zero. Um raciocínio similar mostra que o momento fletor no ponto médio *E* da metade inferior da coluna também deve ser zero (Fig. 10.14*a*). Como o momento fletor nas extremidades de uma coluna biarticulada é zero, conclui-se que a parte *DE* da coluna da Fig. 10.14*a* deve se comportar como uma coluna biarticulada (Fig. 10.14*b*). Concluímos então que o comprimento de flambagem de uma coluna com duas extremidades engastadas é $L_{fl} = L/2$.

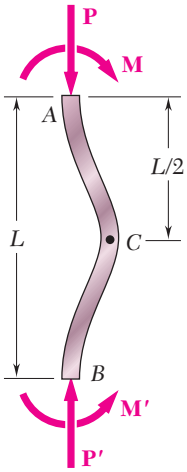


Fig. 10.12

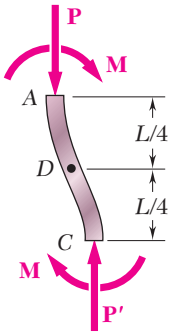


Fig. 10.13

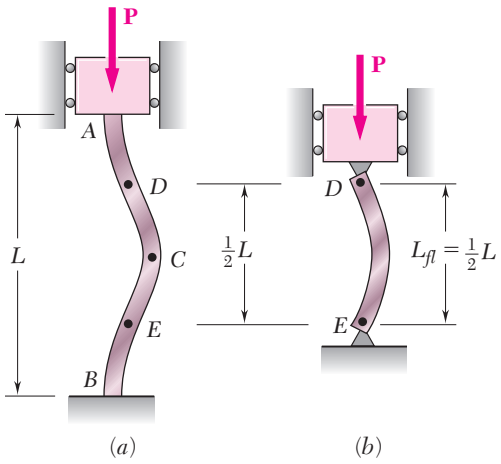


Fig. 10.14

No caso de uma coluna com uma extremidade engastada *B* e uma extremidade articulada *A* suportando uma força **P** (Fig. 10.15), devemos escrever e resolver a equação diferencial da linha elástica para determinar o comprimento de flambagem da coluna. No diagrama de corpo livre da coluna inteira (Fig. 10.16), observamos em primeiro lugar que uma força transversal **V** atua na extremidade *A*, além da força axial **P**, e que **V** é estaticamente indeterminada. Considerando agora o diagrama de corpo livre de uma parte *AQ* da coluna (Fig. 10.17), concluímos que o momento fletor em *Q* é

$$M = -Py - Vx$$

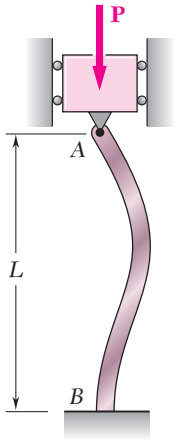


Fig. 10.15

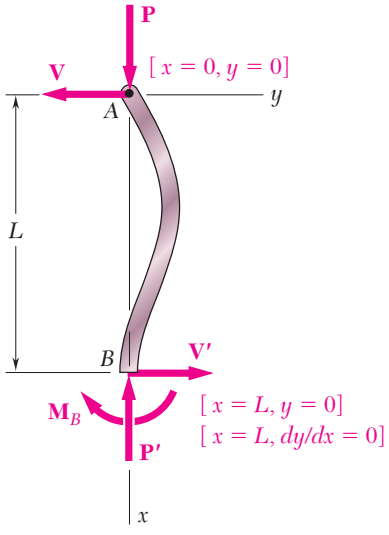


Fig. 10.16

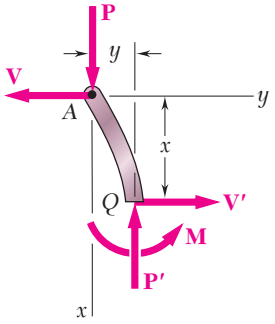


Fig. 10.17

Substituindo esse valor na Equação (9.4) da Seção 9.3, escrevemos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI}y - \frac{V}{EI}x$$

Transpondo o termo contendo y e fazendo

$$p^2 = \frac{P}{EI} \tag{10.6}$$

como fizemos na Seção 10.3, escrevemos

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p^2y = -\frac{V}{EI}x \tag{10.14}$$

Essa é uma equação diferencial linear, não homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes. Observando que os membros esquerdos das Equações (10.7) e (10.14) são idênticos, concluímos que a solução geral da Equação (10.14) pode ser obtida adicionando uma solução particular da Equação (10.14) à solução (10.8) obtida da Equação (10.7). Pode-se facilmente ver que uma solução particular como essa é

$$y = -\frac{V}{p^2EI}x$$

ou, usando a (10.6),

$$y = -\frac{V}{P}x \tag{10.15}$$

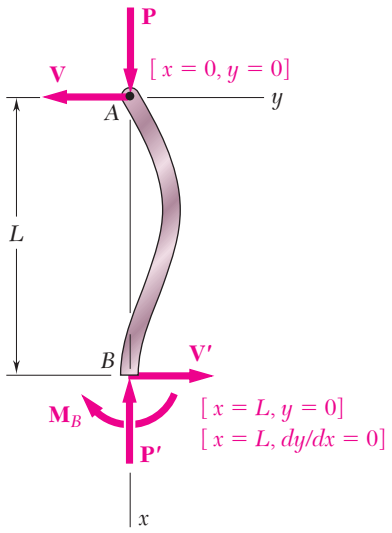


Fig. 10.16 (repetida)

Adicionando as soluções (10.8) e (10.15), escrevemos a solução geral da Equação (10.14) como

$$y = A \operatorname{sen} px + B \cos px - \frac{V}{P}x \tag{10.16}$$

As constantes A e B e o valor da força transversal desconhecida **V** são obtidos com base nas condições de contorno indicadas na Fig. (10.16). Fazendo primeiro $x = 0$, $y = 0$ na Equação (10.16), concluímos que $B = 0$. Fazendo em seguida $x = L$, $y = 0$, obtemos

$$A \operatorname{sen} pL = \frac{V}{P}L \tag{10.17}$$

Finalmente, calculando

$$\frac{dy}{dx} = Ap \cos px - \frac{V}{P}$$

e fazendo $x = L$, $dy/dx = 0$, temos

$$Ap \cos pL = \frac{V}{P} \tag{10.18}$$

Dividindo (10.17) por (10.18) membro a membro, concluímos que uma solução da forma (10.16) pode existir somente se

$$\text{tg } pL = pL \tag{10.19}$$

Resolvendo essa equação por tentativa e erro, concluímos que o menor valor de pL que satisfaz (10.19) é

$$pL = 4{,}4934 \tag{10.20}$$

Usando na Equação (10.6) o valor de p definido pela Equação (10.20) e resolvendo para P, obtemos o valor da força crítica para a coluna da Fig. 10.15

$$P_{cr} = \frac{20{,}19EI}{L^2} \tag{10.21}$$

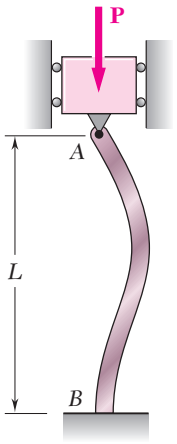


Fig. 10.15 (repetida)

O comprimento de flambagem da coluna é obtido igualando-se os membros direitos das Equações (10.11′) e (10.21):

$$\frac{\pi^2 EI}{L_{fl}^2} = \frac{20{,}19EI}{L^2}$$

Resolvendo para L_{fl}, concluímos que o comprimento de flambagem de uma coluna com uma extremidade engastada e uma extremidade articulada é $L_{fl} = 0{,}699L \approx 0{,}7L$.

Os comprimentos de flambagem correspondentes às várias condições de extremidade consideradas nessa seção são mostrados na Fig. 10.18.

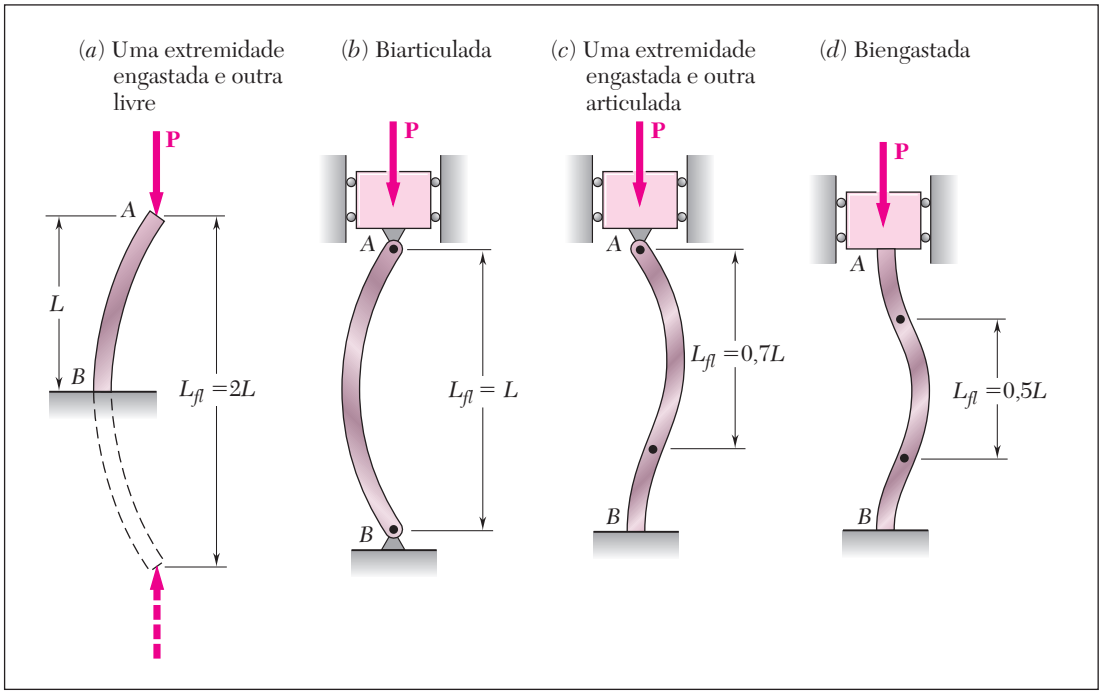
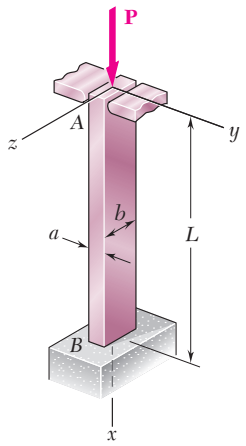


Fig. 10.18 Comprimento de flambagem de coluna para várias condições de extremidade.



PROBLEMA RESOLVIDO 10.1

Uma coluna de alumínio de comprimento L e seção transversal retangular tem uma extremidade engastada B e suporta uma força centrada em A. Duas placas lisas e de lados arredondados impedem a extremidade A de se mover em um dos planos verticais de simetria da coluna, mas permitem o movimento no outro plano. (*a*) Determine a relação a/b dos dois lados da seção transversal correspondendo ao projeto mais eficiente contra a flambagem. (*b*) Determine a seção transversal mais eficiente para a coluna sabendo que $L = 500$ mm, $E = 70$ GPa, $P = 22$ kN, e que o coeficiente de segurança adotado é 2,5.

SOLUÇÃO

Flambagem no plano *xy*. Pela Fig. 10.18, notamos que o comprimento de flambagem da coluna em relação à flambagem nesse plano é $L_{fl} = 0{,}7L$. O raio de giração r_z da seção transversal é obtido escrevendo

$$I_z = \tfrac{1}{12}ba^3 \qquad A = ab$$

e, como $I_z = Ar_z^2$,

$$r_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{\frac{1}{12}ba^3}{ab} = \frac{a^2}{12} \qquad r_z = a/\sqrt{12}$$

O índice de esbeltez da coluna em relação à flambagem no plano xy é

$$\frac{L_{fl}}{r_z} = \frac{0{,}7L}{a/\sqrt{12}}$$

Flambagem no plano *xz*. O comprimento de flambagem da coluna em relação à flambagem neste plano é $L_{fl} = 2L$, e o raio de giração correspondente é $r_y = b/\sqrt{12}$. Assim,

$$\frac{L_{fl}}{r_y} = \frac{2L}{b/\sqrt{12}} \tag{2}$$

***a*. Projeto mais eficiente.** O projeto mais eficiente é aquele para o qual as tensões críticas correspondentes aos dois possíveis modos de flambagem são iguais. Retomando à Equação (10.13′), notamos que esse será o caso se os dois valores obtidos acima para os valores dos índices de esbeltez forem iguais. Escrevemos

$$\frac{0{,}7L}{a/\sqrt{12}} = \frac{2L}{b/\sqrt{12}}$$

e, resolvendo para a relação a/b,

$$\frac{a}{b} = \frac{0{,}7}{2} \qquad \frac{a}{b} = 0{,}35 \blacktriangleleft$$

***b*. Projeto para os dados fornecidos.** Como o valor adotado para o *C.S.* = 2,5,

$$P_{cr} = (C.S.)P = (2{,}5)(22\text{ kN}) = 55\text{ kN}$$

Usando $a = 0{,}35b$, temos $A = ab = 0{,}35b^2$ e

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{55\text{ kN}}{0{,}35b^2}$$

Fazendo $L = 500$ mm na Equação (2), temos $L_{fl}/r_y = 3464/b$. Substituindo E, L_{fl}/r_y, e σ_{cr} na Equação (10.13′), escrevemos

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L_{fl}/r)^2} \qquad \frac{55\text{ kN}}{0{,}35b^2} = \frac{\pi^2(70\text{ kN/mm}^2)}{(3464/b)^2}$$

$$b = 40{,}7\text{ mm} \qquad a = 0{,}35b = 14{,}2\text{ mm} \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

10.1 Sabendo que a mola de torção em B tem uma constante K e que a barra AB é rígida, determine a força crítica P_{cr}.

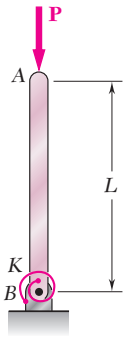


Fig. P10.1

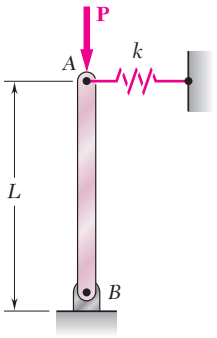


Fig. P10.2

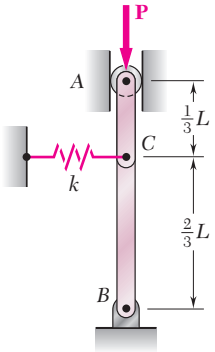


Fig. P10.3

10.2 Sabendo que a mola em A tem uma constante k e que a barra AB é rígida, determine a força crítica P_{cr}.

10.3 Duas barras rígidas AC e BC são conectadas, conforme mostra a figura, a uma mola de constante K. Sabendo que a mola pode atuar tanto em tração como em compressão, determine a força crítica P_{cr} para o sistema.

10.4 Duas barras rígidas AC e BC são conectadas por um pino em C como mostra a figura. Sabendo que a mola de torção em B tem uma constante K, determine a força crítica P_{cr} para o sistema.

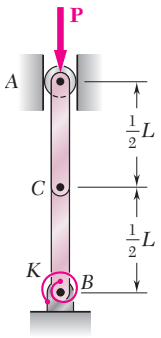


Fig. P10.4

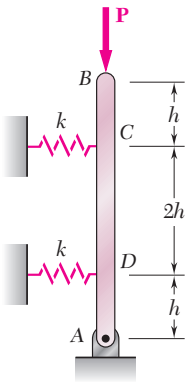


Fig. *P10.5*

10.5 A barra rígida AB está presa à articulação em A e a duas molas de constante $k = 350$ N/mm que podem atuar tracionadas ou comprimidas. Sabendo que $h = 600$ mm, determine a carga crítica.

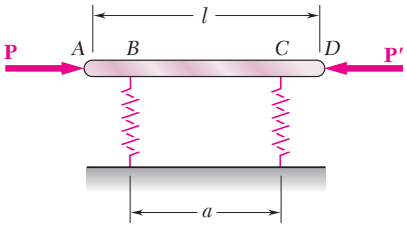


Fig. *P10.6*

10.6 A barra rígida AD está conectada a duas molas de constante k e está em equilíbrio na posição indicada. Sabendo que as cargas iguais e opostas **P** e **P′** permanecem horizontais, determine a intensidade P_{cr} da carga crítica para o sistema.

10.7 A barra rígida AB está conectada à articulação em A e a duas molas de constante k. Se $h = 450$ mm, $d = 300$ mm e $m = 200$ kg, determine o intervalo de valores de k para o qual o equilíbrio da barra AB seja estável na posição mostrada. Cada mola pode atuar em tração ou compressão.

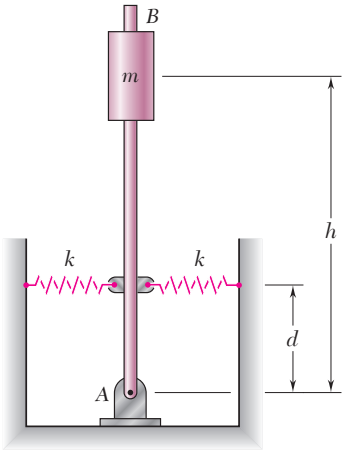


Fig. P10.7

10.8 Um pórtico consiste em quatro elementos em forma de L, conectados por quatro molas de torção, cada uma com constante K. Sabendo que forças iguais **P** são aplicadas nos pontos A e D, conforme mostra a figura, determine o valor crítico P_{cr} das forças aplicadas no pórtico.

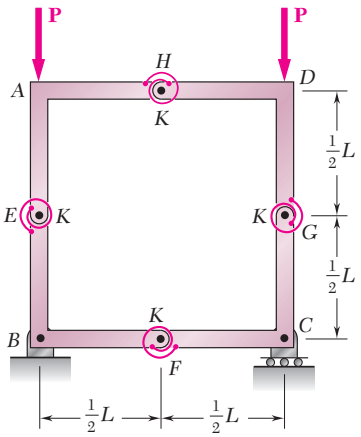


Fig. P10.8

10.9 Determine a carga crítica para uma régua de madeira cuja seção transversal retangular tem 7×24 mm. Use $E = 12$ GPa.

10.10 Determine a carga crítica para um tarugo de madeira redondo de 0,9 m de comprimento e diâmetro de (*a*) 10 mm, (*b*) 15 mm. Use $E = 12$ GPa.

10.11 Determine a dimensão d para a qual as escoras de alumínio e de aço terão o mesmo peso e calcule para ambas o valor da carga crítica.

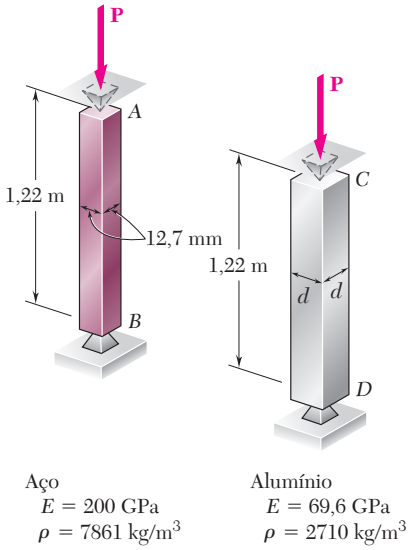


Fig. P10.11 e P 10.12

10.12 Determine (*a*) a carga crítica para a escora de aço, (*b*) a dimensão d para a qual ambas escoras tem a mesma carga crítica e (*c*) expresse em termos de porcentagem o peso da escora de alumínio em relação a escora de aço.

10.13 Um elemento comprimido com comprimento de flambagem de 1,5m consiste em uma barra de seção cheia, de latão, com 30 mm de diâmetro. Para reduzir o peso do elemento em 25%, a barra de seção cheia é substituída por uma barra de seção vazada como a seção transversal mostrada. Determine (*a*) a porcentagem de redução na força crítica e (*b*) o valor da força crítica para a barra de seção vazada. Use $E = 105$ GPa.

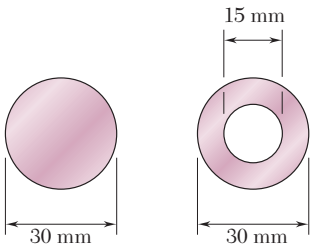


Fig. P10.13

10.14 Uma coluna de comprimento de flambagem L pode ser feita colando-se pranchas idênticas em um dos arranjos mostrados na figura. Determine a relação entre as forças críticas calculadas usando o arranjo *a* e o arranjo *b*.

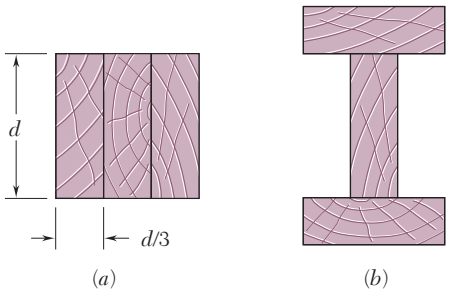


Fig. *P10.14*

10.15 A coluna de comprimento de flambagem igual a 6 m é formada por três chapas. Usando $E = 200$ GPa, determine o coeficiente de segurança à flambagem para a carga centrada de 16 kN.

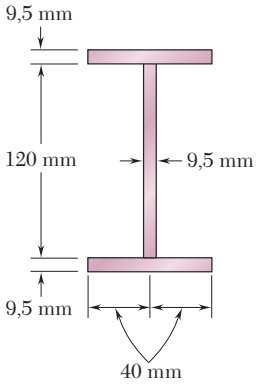


Fig. P10.15

10.16 e 10.17 Um elemento comprimido com 3658 mm de comprimento de flambagem é feito soldando juntas duas cantoneiras de aço com 10 × 76 × 6,4 mm, conforme mostrado. Usando 200 GPa, determine a carga centrada admissível para esse elemento se o coeficiente de segurança requerido for 2,5.

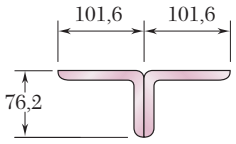


Fig. P10.16

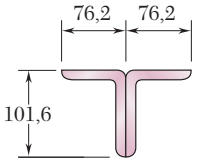


Fig. P10.17

10.18 Um elemento de compressão com 8,2 m de comprimento de flambagem é obtido ligando-se dois perfis U de aço U200 × 17,1 com barras de travejamento conforme mostra a figura. Sabendo que o coeficiente de segurança é de 1,85, determine a força centrada admissível para o elemento. Use $E = 200$ GPa e $d = 100$ mm.

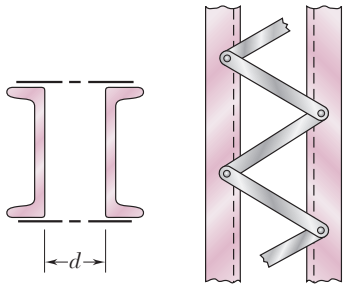


Fig. ***P10.18***

10.19 Os elementos *AB* e *CD* são barras de aço com 30 mm de diâmetro, e os elementos *BC* e *AD* são barras de aço com 22 mm de diâmetro. Quando o tensor é acionado, o elemento diagonal *AC* é colocado sob tração. Sabendo que é exigido um coeficiente de segurança de 2,75 em relação à flambagem, determine a maior tração admissível em *AC*. Use $E = 200$ GPa e considere a flambagem somente no plano da estrutura.

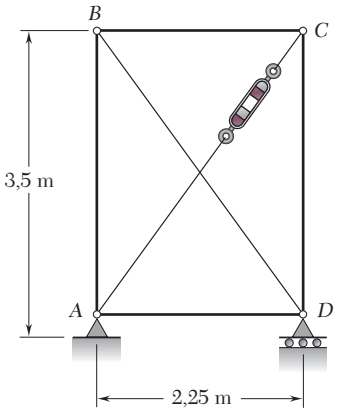


Fig. ***P10.19***

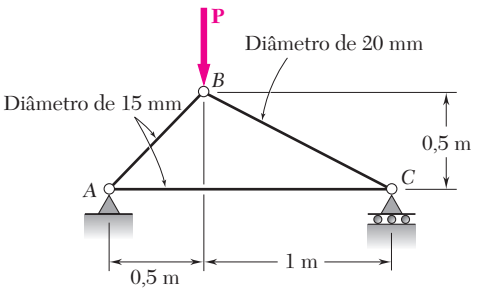


Fig. P10.20

10.20 Sabendo que é adotado um coeficiente de segurança de 2,6, determine a maior força **P** que pode ser aplicada à estrutura mostrada. Use $E = 200$ GPa e considere a flambagem somente no plano da estrutura.

10.21 A barra *AB* de alumínio que tem seção retangular de 20 × 36 mm é conectada por pinos e suportes conforme a ilustração. Cada uma das extremidades da barra pode rotacionar livremente em relação a um eixo horizontal por meio dos pinos, embora a rotação em relação ao eixo vertical esteja impedida pelos suportes. Usando $E = 70$ GPa, determine a carga **P** centrada admissível se o coeficiente de segurança requerido é igual a 2,5.

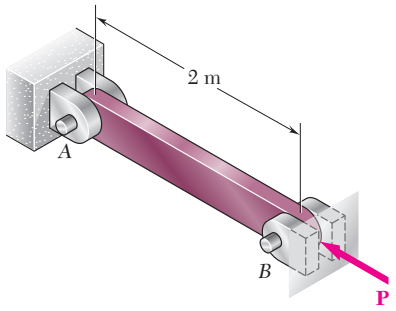


Fig. P10.21

10.22 A coluna *AB* suporta uma força centrada **P** de intensidade de 66 kN. Os cabos *BC* e *BD* estão esticados e impedem o movimento do ponto *B* no plano *xz*. Usando a fórmula de Euler e um coeficiente de segurança de 2,2, e desprezando a tração nos cabos, determine o comprimento *L* máximo admissível. Use $E = 200$ GPa.

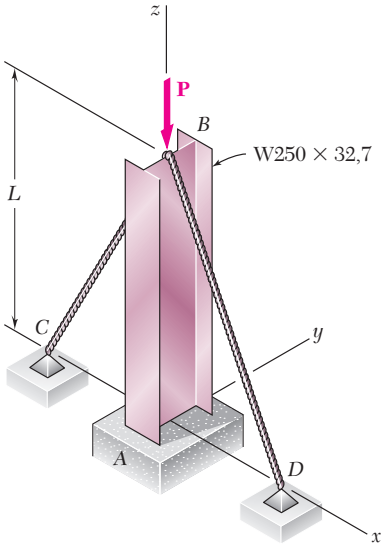


Fig. *P10.22*

10.23 Um perfil de aço laminado W200 × 31,3 é usado com o vínculo e os cabos mostrados no Problema 10.22. Sabendo que $L = 7{,}3$ m, determine a força centrada **P** admissível se for considerado um coeficiente de segurança de 2,2. Use $E = 200$ GPa.

10.24 Uma barra de alumínio quadrada de 25,4 mm de lado é mantida na posição mostrada na figura por um apoio articulado em *A* e por conjuntos de roletes em *B* e *C* que impedem a rotação da barra no plano da figura. Sabendo que $L_{AB} = 0{,}91$ m, determine (*a*) os maiores valores possíveis para L_{BC} e L_{CD} que podem ser empregados para que a força **P** seja a maior possível e (*b*) a intensidade da correspondente carga admissível. Considere apenas a flambagem no plano da figura e use $E = 71{,}7$ GPa.

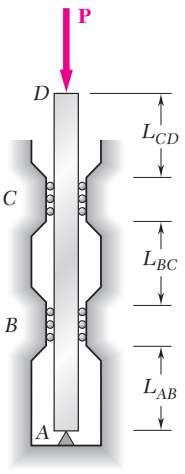


Fig. P10.24

10.25 A coluna *ABC* tem uma seção transversal retangular uniforme com $b = 12$ mm e $d = 22$ mm. A coluna é contraventada no plano xz em seu ponto médio C e suporta uma força centrada **P** de intensidade de 3,8 kN. Sabendo que é exigido um coeficiente de segurança de 3,2, determine o maior comprimento L admissível. Use $E = 200$ GPa.

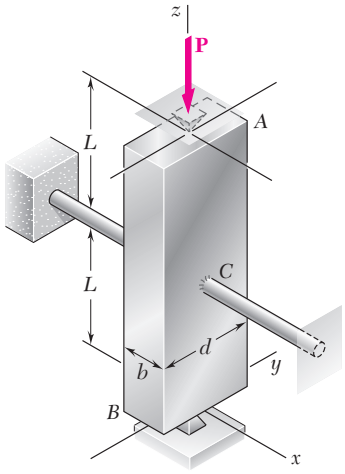


Fig. P10.25 e P10.26

10.26 A coluna *ABC* tem uma seção transversal retangular uniforme e é contraventada no plano xz em seu ponto médio C. (*a*) Determine a relação b/d para a qual o coeficiente de segurança é o mesmo em relação à flambagem nos planos xz e yz. (*b*) Usando a relação encontrada na parte *a*, projete a seção transversal da coluna de maneira que o coeficiente de segurança seja 3,0 quando $P = 4{,}4$ kN, $L = 1$ m e $E = 200$ GPa.

10.27 Cada uma das cinco barras consiste em um tubo de alumínio com um diâmetro externo de 32 mm e uma parede com espessura de 4 mm. Usando $E = 70$ GPa e um coeficiente de segurança de 2,3, determine a força $\mathbf{P}_0$ admissível para cada condição de vínculo abaixo.

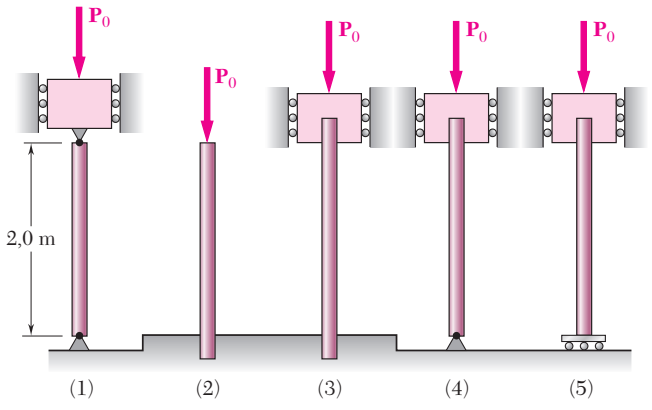


Fig. P10.27

10.28 São usadas duas colunas para suportar um bloco pesando 14,46 kN em cada um dos quatro arranjos mostrados. (*a*) Sabendo que a coluna da Fig. (1) é feita de aço com diâmetro de 31,8 mm, determine o coeficiente de segurança em relação à flambagem para o carregamento mostrado. (*b*) Determine o diâmetro de cada uma das outras colunas para as quais o coeficiente de segurança é o mesmo que o obtido na parte *a*. Use $E = 200$ GPa.

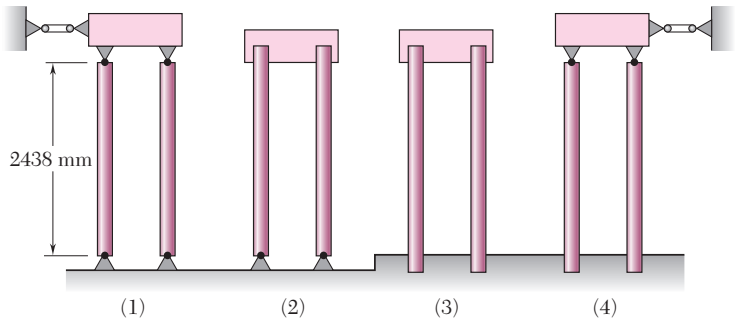


Fig. P10.28

*10.5. Carregamento excêntrico e fórmula da secante

Nesta seção será abordado o problema de flambagem de coluna de uma maneira diferente, observando que a força **P** aplicada a uma coluna nunca é perfeitamente centrada. Chamando de e a excentricidade da força, isto é, a distância entre a linha de ação de **P** e o eixo da coluna (Fig. 10.19*a*), substituímos a força excêntrica dada por uma força centrada **P** e um momento $M_A = Pe$ (Fig. 10.19*b*). Está claro que, não importa o tamanho da força **P** e a excentricidade e, o momento $\mathbf{M}_A$ resultante sempre provocará alguma flexão na coluna (Fig. 10.20). À medida que aumenta a força excêntrica, tanto o mo-

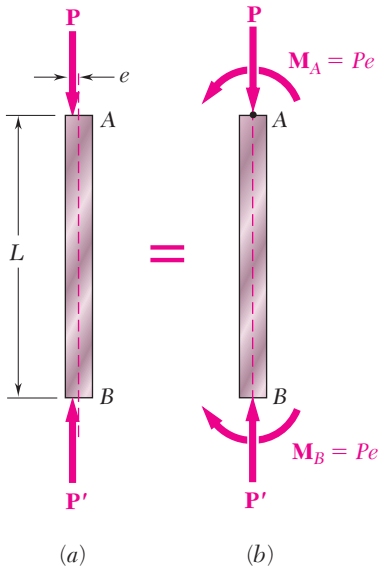


Fig. 10.19

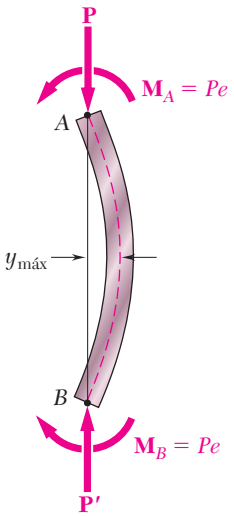


Fig. 10.20

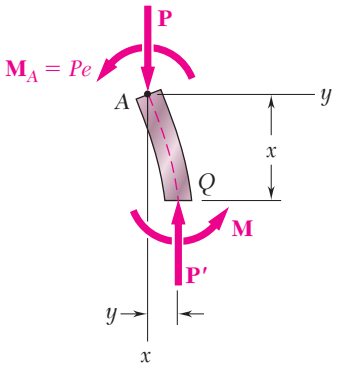


Fig. 10.21

mento $\mathbf{M}_A$ quanto a força axial **P** também aumentam, e ambos farão a coluna flexionar ainda mais. Visto dessa maneira, o problema de flambagem não é uma questão de determinar por quanto tempo a coluna pode permanecer reta e estável sob uma força cada vez maior, mas sim quanto se pode permitir que a coluna flexione sob uma força cada vez maior, sem que a tensão admissível seja ultrapassada e sem que a deflexão $y_{máx}$ se torne excessiva.

Primeiro escrevemos e resolvemos a equação diferencial da linha elástica, adotando o mesmo procedimento que usamos anteriormente nas Seções 10.3 e 10.4. Desenhando o diagrama de corpo livre de uma parte AQ da coluna e escolhendo os eixos de coordenadas mostrados na Fig. 10.21, concluímos que o momento fletor em Q é

$$M = -Py - M_A = -Py - Pe \tag{10.22}$$

Substituindo o valor de M na Equação (9.4) da Seção 9.3, escrevemos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI}y - \frac{Pe}{EI}$$

Transpondo o termo contendo y e usando

$$p^2 = \frac{P}{EI} \tag{10.6}$$

conforme fizemos anteriormente, escrevemos

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p^2y = -p^2e \tag{10.23}$$

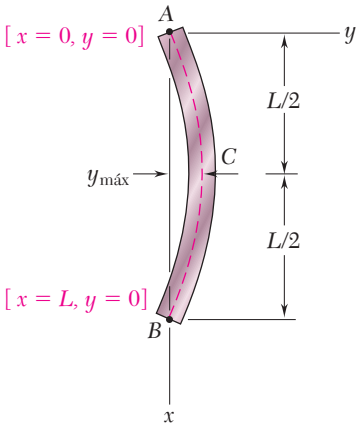


Fig. 10.22

Como o membro esquerdo dessa equação é o mesmo da Equação (10.7), resolvida na Seção 10.3, escrevemos a solução geral da Equação (10.23) como

$$y = A \operatorname{sen} px + B \cos px - e \tag{10.24}$$

em que o último termo é uma solução particular da Equação (10.23).

As constantes A e B são obtidas com base nas condições de contorno mostradas na Fig. 10.22. Fazendo primeiro $x = 0$, $y = 0$ na Equação (10.24), temos

$$B = e$$

Fazendo em seguida $x = L$, $y = 0$, escrevemos

$$A \operatorname{sen} pL = e(1 - \cos pL) \tag{10.25}$$

Lembrando que

$$\operatorname{sen} pL = 2 \operatorname{sen} \frac{pL}{2} \cos \frac{pL}{2}$$

e

$$1 - \cos pL = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{pL}{2}$$

e substituindo na Equação (10.25), obtemos, após as reduções,

$$A = e \operatorname{tg} \frac{pL}{2}$$

Substituindo A e B na Equação (10.24), escrevemos a equação da linha elástica:

$$y = e\left(\operatorname{tg}\frac{pL}{2}\operatorname{sen} px + \cos px - 1\right) \tag{10.26}$$

O valor da deflexão máxima é obtido fazendo-se $x = L/2$ na Equação (10.26). Temos

$$y_{\text{máx}} = e\left(\operatorname{tg}\frac{pL}{2}\operatorname{sen}\frac{pL}{2} + \cos\frac{pL}{2} - 1\right)$$

$$= e\left(\frac{\operatorname{sen}^2\dfrac{pL}{2} + \cos^2\dfrac{pL}{2}}{\cos\dfrac{pL}{2}} - 1\right)$$

$$y_{\text{máx}} = e\left(\sec\frac{pL}{2} - 1\right) \tag{10.27}$$

Lembrando da Equação (10.6), escrevemos

$$y_{\text{máx}} = e\left[\sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{L}{2}\right) - 1\right] \tag{10.28}$$

Notamos, com base na expressão obtida, que $y_{\text{máx}}$ torna-se infinito quando

$$\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{L}{2} = \frac{\pi}{2} \tag{10.29}$$

Embora a deflexão não se torne realmente infinita, torna-se contudo demasiadamente grande e inaceitável, e não se pode permitir que P alcance o valor crítico que satisfaz a Equação (10.29). Resolvendo (10.29) para P, temos

$$P_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \tag{10.30}$$

que é o valor que obtivemos na Seção 10.3 para uma coluna sob uma força centrada. Resolvendo (10.30) para EI e substituindo na (10.28), podemos expressar a deflexão máxima na forma alternativa

$$y_{\text{máx}} = e\left(\sec\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{\text{cr}}}} - 1\right) \tag{10.31}$$

A tensão máxima $\sigma_{\text{máx}}$ ocorre na seção da coluna em que o momento fletor é máximo, isto é, na seção transversal onde se localiza o ponto médio C, e pode ser obtida somando-se as tensões normais provocadas, respectivamente, pela força axial e pelo momento fletor que atuam naquela seção (Seção 4.12). Temos

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{P}{A} + \frac{M_{\text{máx}}c}{I} \tag{10.32}$$

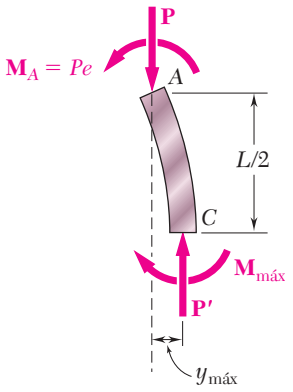


Fig. 10.23

Com base no diagrama de corpo livre da parte AC da coluna (Fig. 10.23), concluímos que

$$M_{máx} = Py_{máx} + M_A = P(y_{máx} + e)$$

Substituindo esse valor na (10.32) e lembrando que $I = Ar^2$, escrevemos

$$\sigma_{máx} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{(y_{máx} + e)c}{r^2}\right] \tag{10.33}$$

Substituindo $y_{máx}$ pelo valor obtido na (10.28), escrevemos

$$\sigma_{máx} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{L}{2}\right)\right] \tag{10.34}$$

Uma forma alternativa para $\sigma_{máx}$ é obtida substituindo-se $y_{máx}$ de (10.31) em (10.33). Temos

$$\sigma_{máx} = \frac{P}{A}\left(1 + \frac{ec}{r^2}\sec\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right) \tag{10.35}$$

A equação obtida pode ser usada com qualquer condição de contorno, desde que seja usado o valor apropriado para a força crítica (cf. Seção 10.4).

Notamos que, como $\sigma_{máx}$ não varia linearmente com a força P, o princípio da superposição não se aplica na determinação da tensão provocada pela aplicação simultânea de várias forças; deve ser calculada, inicialmente, a força resultante, e depois pode ser usada a Equação (10.34) ou Equação (10.35) para determinar a tensão correspondente. Pela mesma razão, qualquer coeficiente de segurança dado deve ser aplicado à força, e não à tensão.

Fazendo $I = Ar^2$ na Equação (10.34) e resolvendo para a relação P/A na frente dos colchetes, escrevemos

$$\frac{P}{A} = \frac{\sigma_{máx}}{1 + \dfrac{ec}{r^2}\sec\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{P}{EA}}\dfrac{L_{fl}}{r}\right)} \tag{10.36}$$

em que o comprimento de flambagem é usado para tornar a fórmula aplicável às várias condições de contorno. Essa fórmula é chamada de *fórmula da secante*; ela define a força por unidade de área, P/A, que provoca determina-

da tensão máxima $\sigma_{máx}$ em uma coluna com determinado índice de esbeltez, L_{fl}/r, para um dado valor da relação ec/r^2, em que e é a excentricidade da força aplicada. Notamos que, como P/A aparece em ambos os membros, é necessário resolver uma equação transcedental por tentativa e erro para obter o valor de P/A correspondente a uma dada coluna e condição de carregamento.

A Equação (10.36) foi usada para desenhar as curvas mostradas na Fig. 10.24 para uma coluna de aço, considerando os valores de E e σ_E mostrados na figura. Essas curvas permitem determinar a força por unidade de área P/A, que faz a coluna escoar para valores dados das relações L_{fl}/r e ec/r^2.

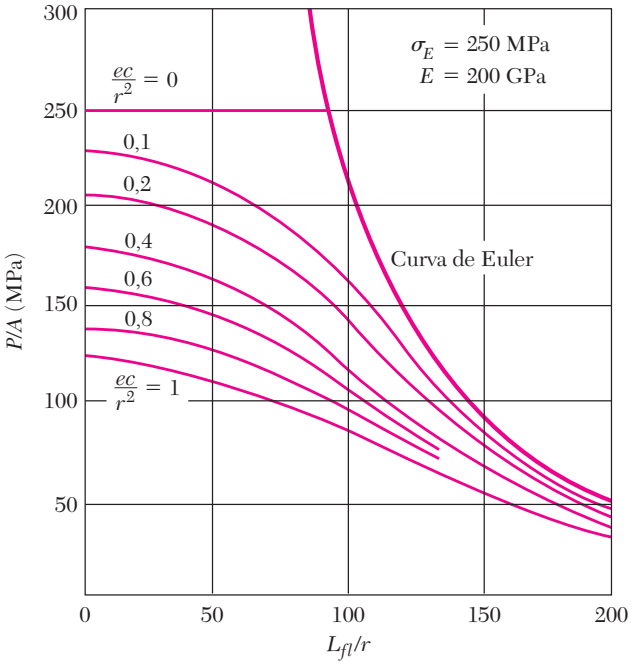
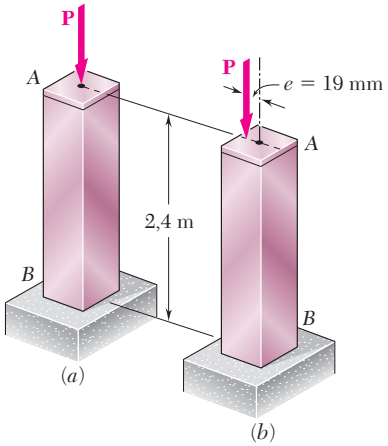


Fig. 10.24 Força por unidade de área, P/A, provocando escoamento na coluna.

Notamos que, para pequenos valores de L_{fl}/r, a secante é aproximadamente igual a 1 na Equação (10.36), e a relação P/A pode ser considerada igual a

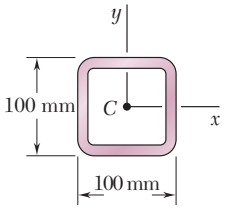
$$\frac{P}{A} = \frac{\sigma_{máx}}{1 + \dfrac{ec}{r^2}} \tag{10.37}$$

que é um valor que poderia ter sido obtido desprezando-se o efeito da deflexão lateral da coluna e usando o método da Seção 4.12. Em contrapartida, notamos na Fig. 10.24 que, para grandes valores de L_{fl}/r, as curvas correspondentes aos vários valores da relação ec/r^2 ficam muito próximas à curva de Euler definida pela Equação (10.13′), e portanto o efeito da excentricidade da força sobre o valor P/A torna-se desprezível. A fórmula da secante é útil principalmente para valores intermediários de L_{fl}/r. No entanto, para usá-la de forma eficiente, devemos saber o valor da excentricidade e da força, infelizmente, esse valor raramente é conhecido com um bom grau de precisão.



PROBLEMA RESOLVIDO 10.2

A coluna uniforme *AB*, com 2,4 m de comprimento, consiste em um tubo estrutural com a seção transversal mostrada na figura. (*a*) Usando a fórmula de Euler e um coeficiente de segurança igual a 2, determine a força centrada admissível para a coluna e a tensão normal correspondente. (*b*) Considerando que a força admissível, encontrada na parte *a*, é aplicada conforme mostra a figura em um ponto distante 19 mm do eixo geométrico da coluna, determine a deflexão horizontal do topo da coluna e a tensão normal máxima na coluna. Use $E = 200$ GPa.



$A = 2284\ \text{mm}^2$
$I = 3{,}3 \times 10^6\ \text{mm}^4$
$r = 38\ \text{mm}$
$c = 50\ \text{mm}$

SOLUÇÃO

Comprimento de flambagem. Como a coluna tem uma extremidade engastada e outra livre, seu comprimento de flambagem é

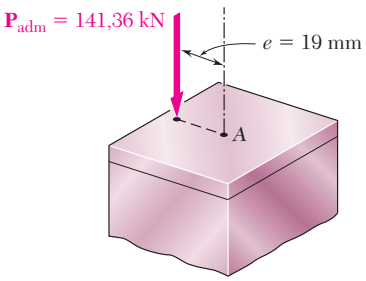
$$L_e = 2(2{,}4\ \text{m}) = 4{,}8\ \text{m} = 4800\ \text{mm}$$

Força crítica. Usando a fórmula de Euler, escrevemos

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_{fl}^2} = \frac{\pi^2(200\ \text{kN/mm}^2)(3{,}3 \times 10^6\ \text{mm}^4)}{(4800\ \text{mm})^2} \qquad P_{cr} = 282{,}7\ \text{kN}$$

***a*. Força e tensão admissíveis.** Para um coeficiente de segurança igual a 2, temos

$$P_{adm} = \frac{P_{cr}}{C.S.} = \frac{282{,}7\ \text{kN}}{2} \qquad P_{adm} = 141{,}36\ \text{kN} \blacktriangleleft$$

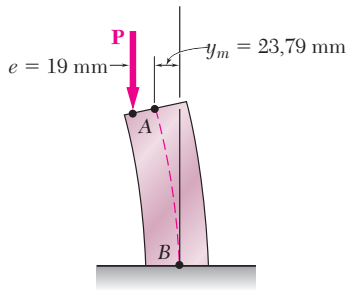


e

$$\sigma = \frac{P_{adm}}{A} = \frac{141{,}36\ \text{kN}}{2284\ \text{mm}^2} \qquad \sigma = 61{,}9\ \text{MPa} \blacktriangleleft$$

***b*. Força excêntrica.** Observamos que a coluna *AB* e seu carregamento são idênticos à metade superior da coluna da Fig. 10.19 usada na determinação das fórmulas da secante; concluímos que as fórmulas da Seção 10.5 se aplicam diretamente ao caso considerado aqui. Lembrando que $P_{adm}/P_{cr} = \frac{1}{2}$ e usando a Equação (10.31), calculamos a deflexão horizontal no ponto *A*:

$$y_m = e\left[\sec\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right) - 1\right] = (19\ \text{mm})\left[\sec\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right) - 1\right]$$
$$= (19\ \text{mm})(2{,}252 - 1) \qquad y_m = 23{,}79\ \text{mm} \blacktriangleleft$$



A tensão normal máxima é obtida da Equação (10.35):

$$\sigma_m = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right)\right]$$
$$= \frac{141{,}36\ \text{kN}}{2284\ \text{mm}^2}\left[1 + \frac{(19\ \text{mm})(50\ \text{mm})}{(38\ \text{mm})^2}\sec\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right)\right]$$
$$= (61{,}9\ \text{MPa})[1 + 0{,}658(2{,}252)] \qquad \sigma_m = 153{,}6\ \text{MPa} \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

10.29 A linha de ação da força axial de 333,6 kN é paralela ao eixo geométrico da coluna AB e intercepta o eixo x em $x = 15{,}24$ mm. Usando $E = 200$ GPa, determine (*a*) a deflexão horizontal do ponto médio C da coluna e (*b*) a tensão máxima na coluna.

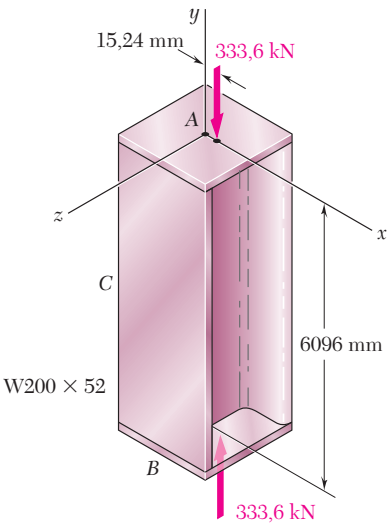


Fig. P10.29

10.30 Uma força axial **P** de intensidade 560 kN é aplicada a um ponto do eixo x a uma distância $e = 6$ mm do eixo geométrico da coluna BC, que é um perfil de aço laminado W200 × 46,1. Usando $E = 200$ GPa, determine (*a*) a deflexão horizontal da extremidade C e (*b*) a tensão máxima na coluna.

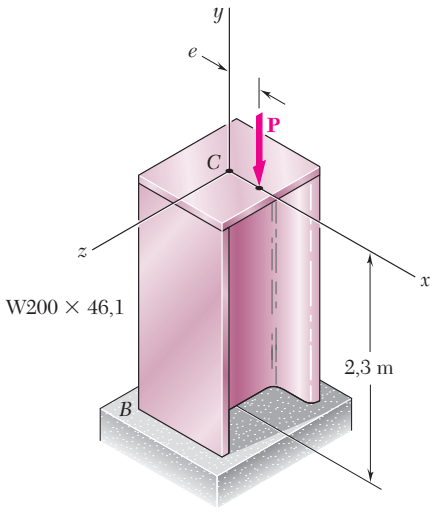


Fig. P10.30

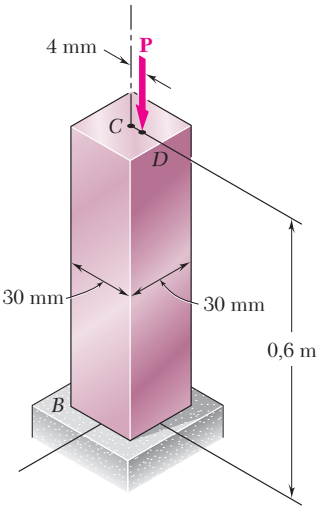


Fig. *P10.31*

10.31 Uma carga axial **P** = 15 kN é aplicada ao ponto D que está a 4 mm distante do eixo geométrico da barra de alumínio de seção quadrada BC. Utilizando $E = 70$ GPa, determine (*a*) a deflexão horizontal da extremidade C e (*b*) a máxima tensão na coluna.

10.32 Uma força axial **P** é aplicada à barra de aço AB de 34,9 mm de diâmetro como mostra a figura. Para $P = 93{,}4$ kN, observa-se que a deflexão horizontal do ponto médio C é de 0,762 mm. Usando $E = 200$ GPa, determine (a) a encentricidade e a força aplicada e (*b*) a tensão máxima na barra.

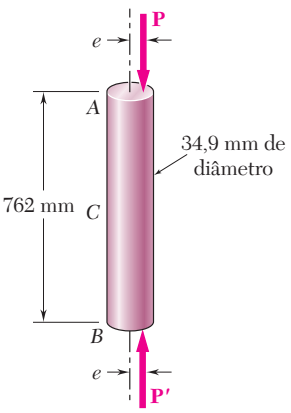


Fig. P10.32

10.33 Uma força axial **P** é aplicada à barra quadrada *BC* de alumínio com 32 mm de lado conforme mostra a figura. Quando $P = 24$ kN, a deflexão horizontal na extremidade *C* é de 4 mm. Usando $E = 70$ GPa, determine (*a*) a excentricidade *e* da força e (*b*) a tensão máxima na barra.

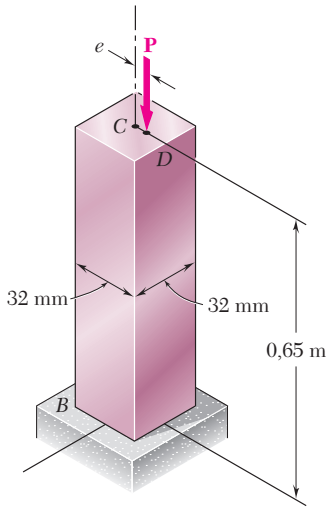


Fig. P10.33

10.34 A força axial **P** é aplicada a um ponto localizado no eixo *x* a uma distância *e* do eixo geométrico da coluna *BC* de aço laminado. Quando $P = 350$ kN, a deflexão horizontal no topo da coluna é de 5 mm. Usando $E = 200$ GPa, determine (*a*) a excentricidade *e* da força e (*b*) a tensão máxima na coluna.

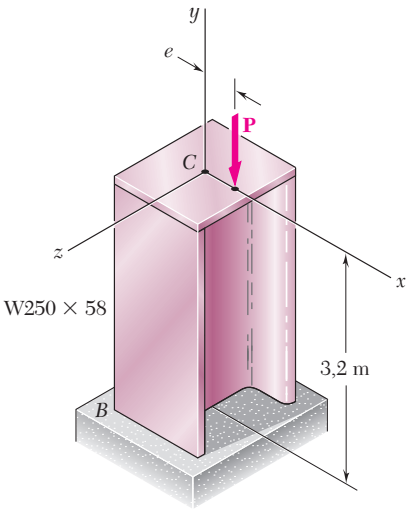


Fig. *P10.34*

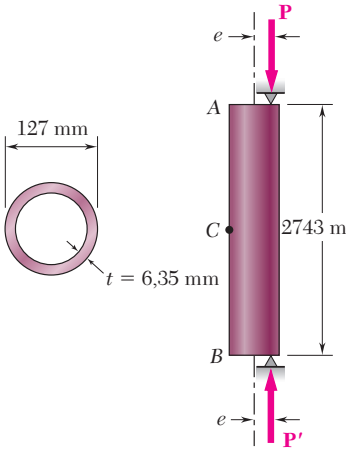


Fig. P10.35

10.35 Um tubo de latão com a seção transversal mostrada tem uma força axial **P** aplicada a 3,81 mm do eixo geométrico. Usando $E = 117{,}2$ GPa, determine (*a*) a força **P** para a qual a deflexão horizontal no ponto médio *C* seja de 5,08 mm e (*b*) a tensão máxima correspondente na coluna.

10.36 Resolva o Problema 10.35 considerando que a força axial **P** é aplicada a 7,62 mm do eixo geométrico da coluna.

10.37 Uma força axial **P** é aplicada a um ponto localizado no eixo x a uma distância $e = 12{,}7$ mm do eixo geométrico da coluna BC de aço laminado W250 × 58. Usando $E = 200$ GPa, determine (*a*) a força **P** para a qual a deflexão horizontal do topo da coluna é de 15,24 mm e (*b*) a tensão máxima correspondente na coluna.

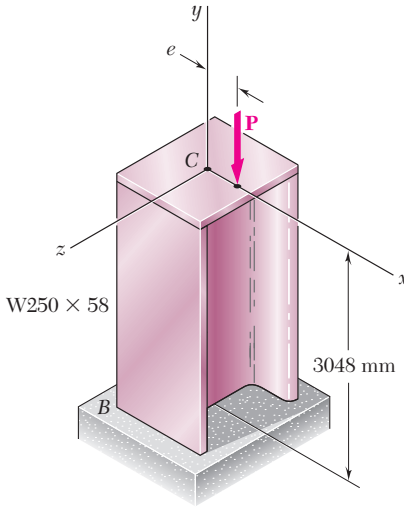


Fig. *P10.37*

10.38 A linha de ação da força axial **P** é paralela ao eixo geométrico da coluna AB e intercepta o eixo x em $x = 20{,}32$ mm. Usando $E = 200$ GPa, determine (*a*) a força **P** para a qual a deflexão horizontal no ponto médio C da coluna é igual a 12,7 mm e (*b*) a tensão máxima correspondente na coluna.

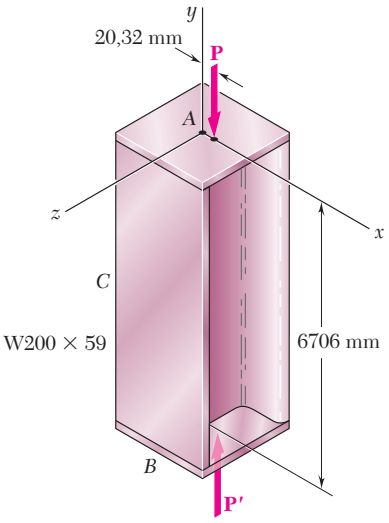


Fig. *P10.38*

10.39 Uma força axial **P** é aplicada a um ponto localizado no eixo x a uma distância $e = 12$ mm do eixo geométrico da coluna BC de aço laminado W310 × 60. Considerando que $L = 3{,}5$ m e usando $E = 200$ GPa, determine (*a*) a força **P** para a qual a deflexão horizontal na extremidade C é de 15 mm e (*b*) a tensão máxima correspondente na coluna.

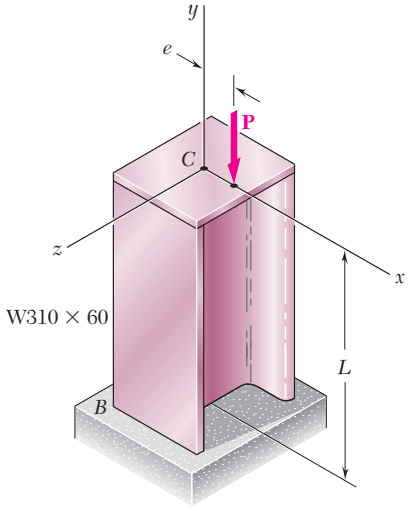


Fig. P10.39

10.40 Resolva o Problema 10.39 considerando que L é 4,5 m.

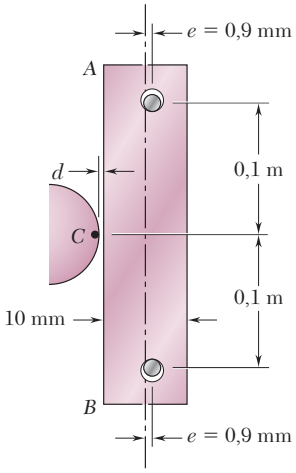


Fig. P10.41

10.41 A barra de aço *AB* tem uma seção transversal quadrada de 10 mm de lado e é suspensa por pinos a uma distância fixa entre si e localizados a uma distância $e = 0{,}9$ mm do eixo geométrico da barra. Sabendo que na temperatura T_0 os pinos estão em contato com a barra e que a força na barra é zero, determine o aumento na temperatura para o qual a barra entrará em contato com o ponto *C* se $d = 0{,}3$ mm. Use $E = 200$ GPa e o coeficiente de expansão térmica $\alpha = 11{,}7 \times 10^{-6}/°\text{C}$.

10.42 Para a barra do Problema 10.41, determine a distância *d* necessária para a qual a barra entrará em contato com o ponto *C* quando a temperatura aumentar em 60°C.

10.43 Um tubo de aço com 3048 mm de comprimento com a seção transversal e propriedades mostradas na figura é usado como uma coluna. Para a classe do aço usado $\sigma_E = 248{,}2$ MPa e $E = 200$ GPa. Sabendo que é necessário um coeficiente de segurança de 2,8 em relação à deformação permanente, determine a força **P** admissível quando a excentricidade *e* é (*a*) 15,24 mm e (*b*) 7,62 mm. (*Sugestão*: Uma vez que o fator de segurança deve ser aplicado a carga **P**, e não a tensão, use a Fig. 10.24 para determinar P_E).

10.44 Resolva o Problema 10.43 considerando que o comprimento do tubo de aço será aumentado para 4267 mm.

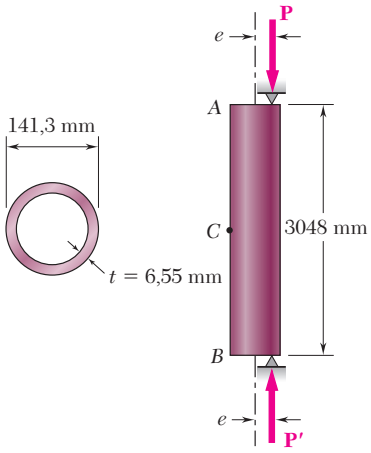


Fig. P10.43

10.45 Uma carga axial **P** é aplicada à coluna *BC* de aço laminado W250 × 44,8 que está livre no topo *C* e engastada na base *B*. Sabendo que a excentricidade da força é $e = 12$ mm e que para a classe do aço usado $\sigma_E = 250$ MPa e $E = 200$ GPa, determine (*a*) a intensidade *P* da força admissível quando é adotado um coeficiente de segurança de 2,4 em relação à deformação permanente e (*b*) a relação entre a força encontrada na parte *a* e a intensidade da força centrada admissível para a coluna. (Veja a sugestão do Prob. 10.43)

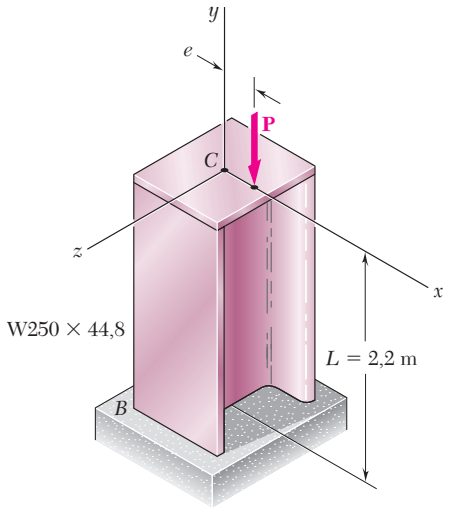


Fig. P10.45

10.46 Resolva o Problema 10.45 considerando que o comprimento da coluna seja reduzido para 1,6 m.

10.47 Uma força axial **P** de 100 kN é aplicada a uma coluna *BC* de aço laminado W150 × 18 que está livre no topo *C* e engastada na base *B*. Sabendo que a excentricidade da força é $e = 6$ mm, determine o maior comprimento admissível *L* se a tensão admissível na coluna for 80 MPa. Use $E = 200$ GPa.

10.48 Uma força axial **P** de 244,6 kN é aplicada à coluna *BC* de aço laminado W200 × 35,9 que está livre na parte superior *C* e engastada na base *B*. Sabendo que a excentricidade da força é $e = 6{,}35$ mm, determine o maior comprimento *L* admissível se a tensão admissível na coluna é de 96,5 MPa. Use $E = 200$ GPa.

10.49 Cargas axiais de intensidade $P = 600{,}5$ kN são aplicadas paralelas ao eixo geométrico da coluna *AB* feita com um perfil de aço laminado W250 × 80 e interceptam o eixo *x* a uma distância *e* do eixo geométrico. Sabendo que $\sigma_{adm} = 82{,}74$ MPa e 200 GPa, determine o maior comprimento *L* admissível quando (*a*) $e = 6{,}35$ mm, (*b*) $e = 12{,}7$ mm.

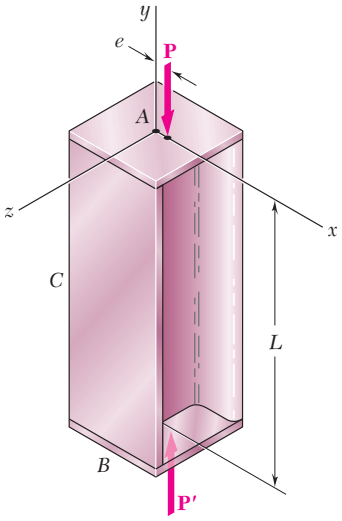


Fig. *P10.49* e P10.50

10.50 Forças axiais de intensidade $P = 580$ kN são aplicadas paralelas ao eixo geométrico da coluna *AB* feita com um perfil de aço laminado W250 × 80 e interceptam o eixo *x* a uma distância *e* do eixo geométrico. Sabendo que $\sigma_{adm} = 75$ MPa e $E = 200$ GPa, determine o maior comprimento *L* admissível quando (*a*) $e = 5$ mm e (*b*) $e = 10$ mm.

10.51 Uma força axial de intensidade $P = 220$ kN é aplicada a um ponto localizado no eixo *x* a uma distância $e = 6$ mm do eixo geométrico da coluna de mesa larga *BC*. Sabendo que $E = 200$ GPa, escolha o perfil W200 mais leve que possa ser usado se $\sigma_{adm} = 120$ MPa.

10.52 Resolva o Problema 10.51 considerando que a intensidade da força axial seja $P = 345$ kN.

10.53 Uma força axial de 53,4 kN é aplicada com uma excentricidade $e = 9{,}53$ mm à barra circular de aço *BC* que está livre no topo *C* e engastada na base *B*. Sabendo que o estoque de barras disponíveis para uso tem diâmetros em incrementos de 3,175 mm de 38,1 mm até 76,2 mm, determine a barra mais leve que pode ser usada se $\sigma_{adm} = 103{,}4$ MPa. Use $E = 200$ GPa.

10.54 Resolva o Problema 10.53 considerando que a força axial de 53,4 kN será aplicada à barra com uma excentricidade $e = \frac{1}{2}d$.

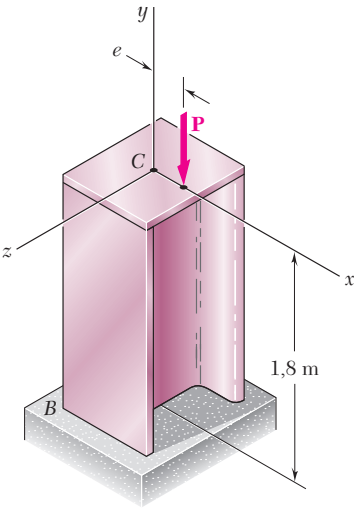


Fig. P10.47 e P10.48

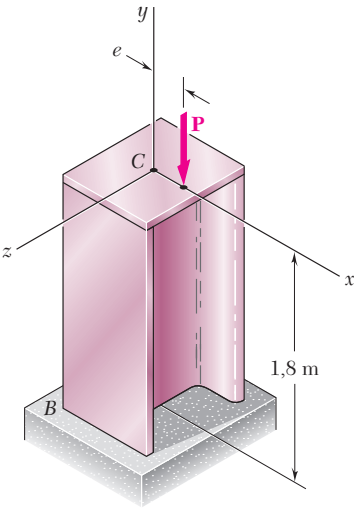


Fig. P10.51

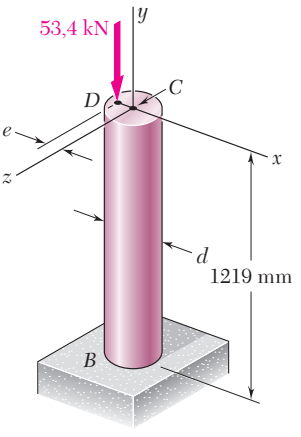


Fig. P10.53

10.55 Forças axiais de intensidade $P = 175$ kN são aplicadas paralelas ao eixo geométrico de uma coluna AB de aço laminado W250 × 44,8 e interceptam o eixo a uma distância $e = 12$ mm do eixo geométrico. Sabendo que $\sigma_E = 250$ MPa e $E = 200$ GPa, determine o coeficiente de segurança em relação ao escoamento. (*Sugestão*: Como o coeficiente de segurança deve ser aplicado à força **P**, não às tensões, use a Fig. 10.24 para determinar P_E.)

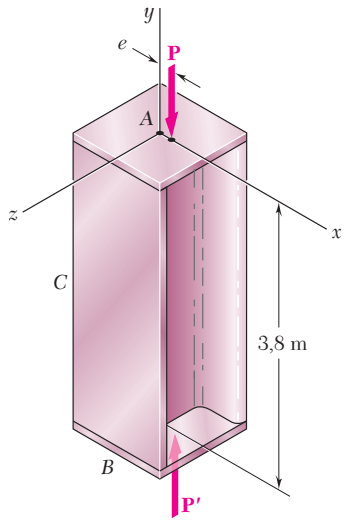


Fig. *P10.55*

10.56 Resolva o Problema 10.55 considerando que $e = 0{,}16$ mm e $P = 155$ kN.

10.6. Projeto de colunas submetidas a uma força centrada

Nas seções anteriores, determinamos a força crítica de uma coluna usando a fórmula de Euler e investigamos as deformações e tensões em colunas carregadas excentricamente usando a fórmula da secante. Em cada caso consideramos que todas as tensões permaneciam abaixo do limite de proporcionalidade e que a coluna era inicialmente um prisma reto e homogêneo. Na prática, poucas são as colunas assim ideais e seu projeto se baseia em fórmulas empíricas que refletem os resultados de numerosos testes de laboratório.

Durante o último século, foram testadas muitas colunas de aço aplicando a elas uma força axial centrada e aumentando a força até ocorrer a falha. Os resultados desses testes estão representados na Fig. 10.25, em que, para cada um dos diversos testes, foi colocado no gráfico um ponto com sua ordenada igual à tensão normal σ_{cr} na falha, e sua abscissa igual ao valor correspondente do índice de esbeltez, L_{fl}/r. Embora os resultados do teste sejam bastante dispersos, podem ser observadas as regiões correspondentes a três tipos de falhas. Para colunas longas, em que L_{fl}/r é grande, a falha é prevista com boa aproximação pela fórmula de Euler, e observa-se que o

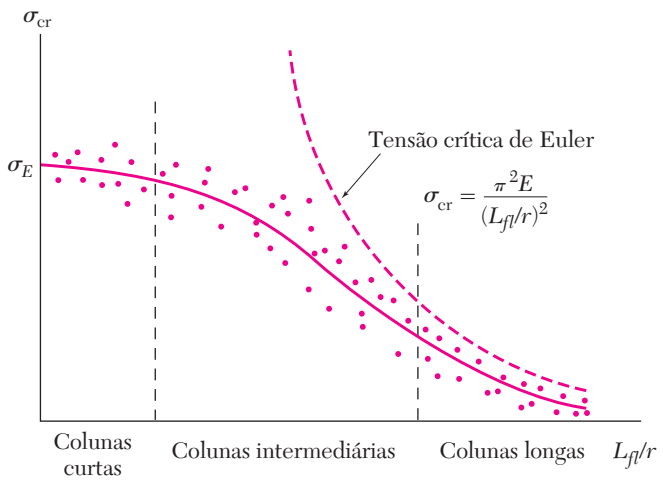


Fig. 10.25

valor σ_{cr} depende do módulo de elasticidade E do aço utilizado, e não de sua tensão de escoamento σ_E. Para colunas muito curtas e blocos de compressão, a falha ocorre essencialmente como resultado do escoamento, e temos $\sigma_{cr} \approx \sigma_E$. Colunas de comprimento intermediário compreendem aqueles casos em que a falha depende tanto de σ_E quanto de E. Nessa região, a falha da coluna é um fenômeno extremamente complexo, e foram usados extensivamente dados de ensaios para orientar o desenvolvimento de especificações e fórmulas de projeto.

As fórmulas empíricas que expressam uma tensão admissível ou tensão crítica em termos do índice de esbeltez foram apresentadas pela primeira vez há um século e, desde então, passaram por um contínuo processo de refinamento e melhora. A Fig. 10.26 mostra fórmulas empíricas típicas usadas para aproximar dados de ensaio. Nem sempre é viável usar uma única fórmula para todos os valores de L_{fl}/r. Muitas especificações de projeto utilizam fór-

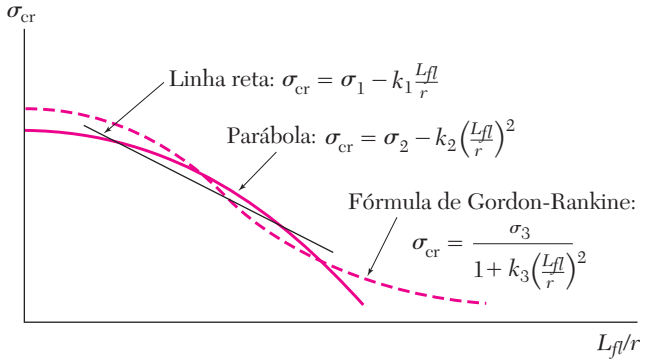


Fig. 10.26

mulas diferentes, cada uma delas com determinada região de aplicabilidade. Em cada caso devemos verificar se a fórmula que propomos usar é aplicável para o valor L_{fl}/r para a coluna envolvida. Além disso, devemos verificar se a fórmula fornece o valor da tensão crítica para a coluna, em que caso devemos aplicar o coeficiente de segurança apropriado, ou se ela já fornece uma tensão admissível.

Consideraremos agora as fórmulas específicas para projeto de colunas de aço, alumínio e madeira submetidas a carregamento centrado. A Fig. 10.27 mostra exemplos de colunas que seriam projetadas usando essas fórmulas. Primeiro é apresentado o projeto para os três diferentes materiais usando o *Método da Tensão Admissível*. Ele será acompanhado com as fórmulas necessárias para o projeto de colunas de aço com base no *Coeficiente de Projeto para Carga e Resistência*.†

(*a*) (*b*)

Fig. 10.27 O reservatório de água em (*a*) é suportado por colunas de aço e o prédio em construção em (*b*) é um pórtico com colunas de madeira.

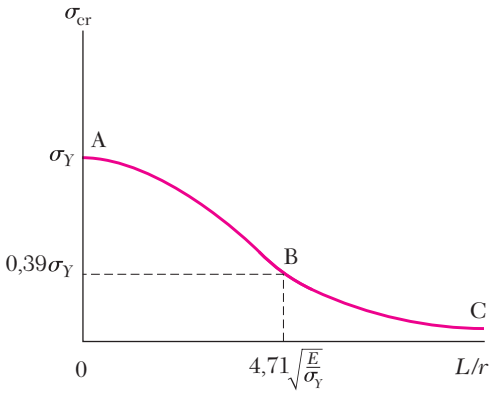


Fig. 10.28

Aço estrutural — método da tensão admissível. As fórmulas mais amplamente usadas para o projeto de colunas de aço, pelo Método da tensão admissível, submetidas a uma carga centrada são encontradas nas especificações do American Institute of Steel Construction (AISC).‡ Uma expressão parabólica será usada para prever o valor de σ_{adm} para colunas de comprimento curto e intermediário, e a fórmula de Euler será usada para colunas longas. Essas relações são desenvolvidas em duas etapas:

1. Primeiro é obtida uma curva representando a variação de σ_{cr} com L/r (Fig. 10.28). É importante notar que essa curva não incorpora coeficientes de segurança.§ A parte *AB* dessa curva é definida pela equação

$$\sigma_{cr} = [0{,}658^{(\sigma_E/\sigma_c)}]\,\sigma_E \qquad (10.38)$$

†Em fórmulas específicas de projeto, a letra *L* será sempre usada para se referir ao comprimento de flambagem de uma coluna.

‡*Manual of Steel Construction,* 13 ed. American Institute of Steel Construction, Chicago, 2005.

§Na *Specification for Structural Steel for Buildings*, o símbolo *F* é utilizado para tensões.

em que

$$\sigma_e = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} \tag{10.39}$$

A porção *BC* é definida pela equação

$$\sigma_{cr} = 0{,}877\sigma_e \tag{10.40}$$

Notamos que quando $L/r = 0$ e $\sigma_{cr} = \sigma_E$ na Equação (10.38). No ponto *B*, a Equação (10.38) coincide com a Equação (10.40). O valor do coeficiente de esbeltez L/r nesse ponto será

$$\frac{L}{r} = 4{,}71\sqrt{\frac{E}{\sigma_E}} \tag{10.41}$$

Se L/r é menor que aquele fornecido pela Equação (10.41), σ_{cr} será determinado pela Equação (10.38), e se L/r é maior, σ_{cr} será determinado pela Equação (10.40). No ponto equivalente ao coeficiente de esbeltez fornecida pela Equação (10.41), temos a tensão $\sigma_e = 0{,}44\,\sigma_E$. Utilizando a Eq. (10.40), temos $\sigma_{cr} = 0{,}877\,(0{,}44\,\sigma_E) = 0{,}39\,\sigma_E$.

2. Deve ser introduzido um coeficiente de segurança para obtermos as fórmulas finais de projeto do AISC. O coeficiente de segurança determinado por essas especificações é 1,67. Portanto

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_{cr}}{1{,}67} \tag{10.42}$$

Observamos que, usando as Equações (10.38), (10.40), (10.41) e (10.42), podemos determinar a tensão admissível axial para uma dada classe de aço e um dado valor de L/r. Deve-se primeiramente calcular o valor de L/r na intersecção entre as duas equações usando a Equação (10.41). Para valores de L/r menores do que aquele dado por esta última, usamos as Equações (10.38) e (10.42) para determinar σ_{adm}, e para valores maiores do que aquele dado pela Equação (10.41), usamos as Equações (10.40) e (10.42) para determinar σ_{adm}. A Figura 10.29 proporciona uma visão geral sobre como σ_{adm} varia com L/r para diferentes classes de aço estrutural.

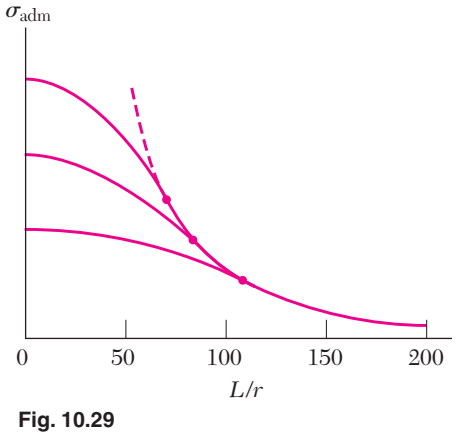


Fig. 10.29

EXEMPLO 10.2

Determine o maior comprimento L para o qual o elemento de compressão AB, que é um perfil de aço laminado I100 × 11,5, possa suportar com segurança a força centrada mostrada (Fig. 10.30). Considere que $\sigma_E = 250$ MPa e $E = 200$ GPa.

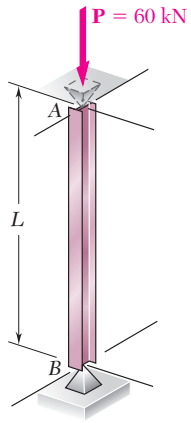


Fig. 10.30

No Apêndice C, temos para um perfil I100 × 11,5,

$$A = 1460 \text{ mm}^2 \qquad r_x = 41{,}6 \text{ mm} \qquad r_y = 14{,}8 \text{ mm}$$

Se a força de 60 kN deve ser suportada com segurança, devemos ter

$$\sigma_{adm} = \frac{P}{A} = \frac{60 \times 10^3 \text{ N}}{1460 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 41{,}1 \times 10^6 \text{ Pa}$$

Devemos calcular a tensão crítica σ_{cr}. Considerando que L/r é maior que o coeficiente esbeltez calculado pela Equação (10.41), usamos a Equação (10.40) com (10.39) e escrevemos

$$\sigma_{cr} = 0{,}877\,\sigma_e = 0{,}877\,\frac{\pi^2 E}{(L/r)^2}$$
$$= 0{,}877\,\frac{\pi^2(200 \times 10^9 \text{ Pa})}{(L/r)^2} = \frac{1{,}731 \times 10^{12} \text{ Pa}}{(L/r)^2}$$

Usando essa expressão na Equação (10.42) para σ_{adm}, escrevemos

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_{cr}}{1{,}67} = \frac{1{,}037 \times 10^{12} \text{ Pa}}{(L/r)^2}$$

Igualando essa expressão ao valor requerido para σ_{adm}, escrevemos

$$\frac{1{,}037 \times 10^{12} \text{ Pa}}{(L/r)^2} = 41{,}1 \times 10^6 \text{ Pa} \qquad L/r = 158{,}8$$

O coeficiente de esbeltez dado pela Equação (10.41) é

$$\frac{L}{r} = 4{,}71\sqrt{\frac{200 \times 10^9}{250 \times 10^6}} = 133{,}2$$

Nossa suposição de que L/r era maior que este coeficiente de esbeltez estava correta. Escolhendo o menor entre os dois raios de giração, temos

$$\frac{L}{r_y} = \frac{L}{14{,}8 \times 10^{-3} \text{ m}} = 158{,}8 \qquad L = 2{,}35 \text{ m}$$

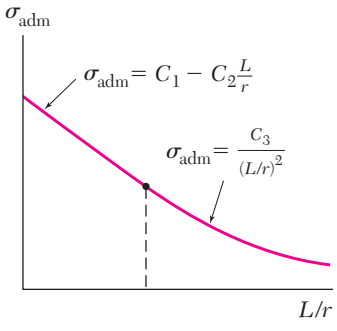


Fig. 10.31

Alumínio. Existem disponíveis muitas ligas de alumínio para uso em estruturas e construção de máquinas. Para muitas colunas, as especificações da Aluminum Association† fornecem duas fórmulas para a tensão admissível em colunas submetidas a carregamento centrado. A variação de σ_{adm} com L/r definida por essas fórmulas é mostrada na Fig. 10.31. Notamos que, para colunas curtas, é usada uma relação linear entre σ_{adm} e L/r e, para colunas longas, é usada a equação de Euler. A seguir, estão algumas fórmulas específicas para o uso no projeto de prédios e estruturas similares, para as duas ligas mais empregadas.

Liga 6061-T6:

$$L/r < 66: \qquad \sigma_{adm} = [20{,}2 - 0{,}126(L/r)] \text{ ksi} \qquad (10.43)$$
$$= [139 - 0{,}868(L/r)] \text{ MPa} \qquad (10.43')$$
$$L/r \geq 66: \qquad \sigma_{adm} = \frac{51000 \text{ ksi}}{(L/r)^2} = \frac{351 \times 10^3 \text{ MPa}}{(L/r)^2} \qquad (10.44)$$

†*Specifications and Guidelines for Aluminum Structures*, Aluminum Association, Inc., Washington D.C., 2005.

Liga 2014-T6:

$$L/r < 55: \qquad \sigma_{\text{adm}} = [30{,}7 - 0{,}23(L/r)] \text{ ksi} \tag{10.45}$$

$$= [212 - 1{,}585(L/r)] \text{ MPa} \tag{10.45'}$$

$$L/r \geq 55: \qquad \sigma_{\text{adm}} = \frac{54000 \text{ ksi}}{(L/r)^2} = \frac{372 \times 10^3 \text{ MPa}}{(L/r)^2} \tag{10.46}$$

Madeira. Para o projeto de colunas de madeira, as especificações da American Forest and Paper Association† fornece uma única equação que pode ser usada para obter a tensão admissível para colunas curtas, intermediárias e longas submetidas a carregamento centrado. Para uma coluna com uma seção transversal retangular de lados b e d, em que $d < b$, a variação de σ_{adm} com L/d é mostrada na Fig. 10.32.

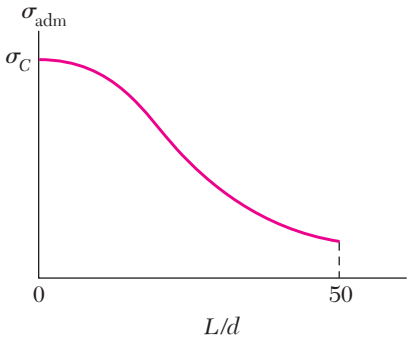


Fig. 10.32

Para colunas de seção cheia feitas de uma única peça de madeira ou elaboradas com laminados colados, a tensão admissível σ_{adm} é

$$\sigma_{\text{adm}} = \sigma_C C_P \tag{10.47}$$

em que σ_C é a tensão admissível ajustada à compressão paralela às fibras da madeira.‡ Nas especificações incluem-se ajustes usados para obter σ_C levando em consideração diferentes variações, como a duração da força. O coeficiente de estabilidade da coluna C_P leva em conta o comprimento da coluna e é definido pela seguinte equação:

$$C_P = \frac{1 + (\sigma_{CE}/\sigma_C)}{2c} - \sqrt{\left[\frac{1 + (\sigma_{CE}/\sigma_C)}{2c}\right]^2 - \frac{\sigma_{CE}/\sigma_C}{c}} \tag{10.48}$$

O parâmetro c considera o tipo de coluna, e é igual a 0,8 para colunas de madeira serrada e 0,90 para colunas de madeira laminada colada. O valor de σ_{CE} é definido como

$$\sigma_{CE} = \frac{0{,}822E}{(L/d)^2} \tag{10.49}$$

em que E é um módulo de elasticidade ajustado para flambagem de colunas. Colunas nas quais L/d excede 50 não são permitidas pela *National Design Specification for Wood Construction*.

† *National Design Specification for Wood Construction*, American Forest and Paper Association, American Wood Council, Washington, D.C., 1997.

‡ Na *National Design Specification for Wood Construction*, o símbolo F é usado para tensões.

EXEMPLO 10.3

Sabendo que a coluna *AB* (Fig. 10.33) tem um comprimento de flambagem de 4,2 m e que ela deve suportar com segurança uma força de 142 kN, projete uma coluna usando uma seção transversal quadrada composta de laminados colados. O módulo de elasticidade ajustado para a madeira é $E = 5{,}52$ GPa, e a tensão admissível ajustada à compressão paralela às fibras da madeira é $\sigma_C = 7{,}3$ MPa.

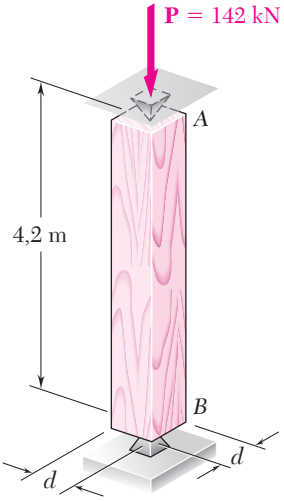


Fig. 10.33

Observamos que $c = 0{,}90$ para colunas de madeira constituídas de laminados colados. Devemos calcular o valor de σ_{CE}. Usando a Equação (10.49) escrevemos

$$\sigma_{CE} = \frac{0{,}822\,E}{(L/d)^2} = \frac{0{,}822\,(5520\ \text{MN/m}^2)}{(4{,}2\ \text{m/d})^2} = 257{,}2\,d^2\ \text{MN/m}^2$$

Usamos então a Equação (10.48) para expressar o coeficiente de estabilidade da coluna em termos de d, com $(\sigma_{CE}/\sigma_C) = (257{,}2\,d^2/7{,}3) = 35{,}24\,d^2$,

$$C_p = \frac{1 + (\sigma_{CE}/\sigma_C)}{2c} - \sqrt{\left[\frac{1 + (\sigma_{CE}/\sigma_C)}{2c}\right]^2 - \frac{(\sigma_{CE}/\sigma_C)}{c}}$$

$$= \frac{1 + 35{,}24\,d^2}{2(0{,}90)} - \sqrt{\left[\frac{1 + 35{,}24\,d^2}{2(0{,}9)}\right]^2 - \frac{35{,}24\,d^2}{(0{,}9)}}$$

Como a coluna deve suportar 142×10^3 N, que é igual a $\sigma_C\,d^2$, usamos a Equação (10.47) para escrever

$$\sigma_{\text{adm}} = \frac{0{,}142\ \text{MN}}{d^2} = \sigma_C C_P = 7{,}3 C_P$$

Resolvendo essa equação para C_P e substituindo na equação anterior o valor obtido, escrevemos

$$\frac{19{,}5 \times 10^{-3}}{d^2} = \frac{1 + 3{,}5\,d^2}{2(0{,}90)} - \sqrt{\left[\frac{1 + 3{,}5\,d^2}{2(0{,}90)}\right]^2 - \frac{3{,}5\,d^2}{0{,}90}}$$

Resolvendo para d por tentativa e erro, obtemos $d = 0{,}163$ m.

***Aço Estrutural — Coeficiente de Projeto para Carga e Resistência.** Conforme vimos na Seção 1.13, um método alternativo de projeto baseia-se na determinação da força na qual a estrutura deixa de ser útil. O projeto baseia-se na desigualdade dada pela Equação (1.26):

$$\gamma_P P_P + \gamma_E P_E \leq \phi P_L \tag{1.26}$$

A abordagem usada para o projeto de colunas de aço submetidas a uma força centrada considerando os Coeficientes de Projeto para Carga e Resistência (Load and Resistance Factor Design) contidos nas especificações do AISC (American Institute of Steel Construction)†, é similar àquela usada no projeto pelas tensões admissíveis (Allowable Stress Design). Usando a tensão crítica σ_{cr}, a carga última P_L é definida por

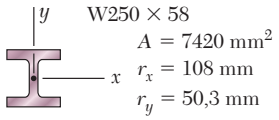
$$P_L = \sigma_{cr} A \tag{10.50}$$

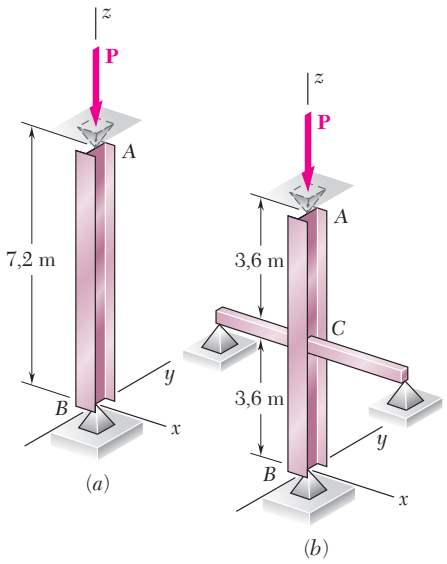
A determinação da tensão crítica σ_{cr} segue a mesma abordagem que a feita via Projeto por tensões admissíveis. Necessita-se da Equação (10.41) para determinar coeficiente de esbeltez no ponto comum às Equações (10.38) e (10.40). Se o coeficiente de esbeltez calculado for menor que o valor calculado pela Equação (10.41), a Equação (10.38) determinará, e se for maior a Equação (10.40) determinará. As equações podem ser usadas com o SI ou com o sistema inglês.

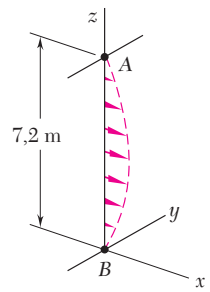
Observamos que, usando a Equação (10.50) com a Equação (1.26), podemos determinar se o projeto é aceitável. O procedimento é determinar primeiro o coeficiente de esbeltez dada pela Equação (10.41). Para valores de L/r menores do que essa esbeltez, a carga última P_L para ser usada na (1.26), é obtida da Equação (10.50), usando σ_{cr} determinado pela Equação (10.38). Para valores de L/r maiores que esse coeficiente de esbeltez, a carga última P_L é obtida usando a Equação (10.50) juntamente com a Equação (10.40) para determinar se o projeto é aceitável. As Especificações de projeto por coeficiente de carga e resistência do American Institute of Steel Construction especificam que o coeficiente de resistência ϕ é de 0,90.

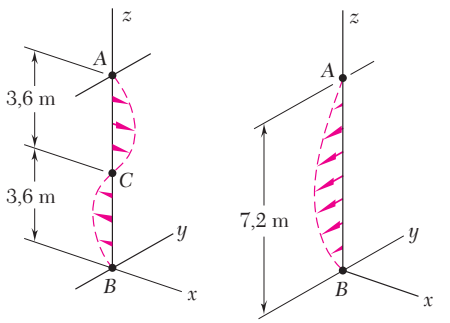
> **Nota:** As fórmulas apresentadas nesta seção se destinam a fornecer exemplos de diferentes abordagens de projeto. Elas não fornecem todos os requisitos necessários para muitos trabalhos, e o estudante deve consultar as especificações apropriadas antes de iniciar o projeto.

†*Manual of Steel Construction, Load & Resistance Factor Design*. 3. ed. Chicago: American Institute of Steel Construction, 2001.









Flambagem no plano *xz* Flambagem no plano *yz*

PROBLEMA RESOLVIDO 10.3

A coluna *AB* consiste em um perfil de aço laminado W250 × 58 feito com uma classe de aço para a qual $\sigma_E = 250$ MPa e $E = 200$ GPa. Determine a força centrada **P** admissível (*a*) se o comprimento de flambagem da coluna for de 7,2 m em todas as direções e (*b*) se houver contraventamento para impedir o movimento do ponto médio *C* no plano *xz*. (Considere que o movimento do ponto *C* no plano *yz* não seja afetado pelo contraventamento.)

SOLUÇÃO

Primeiro calculamos o coeficiente de esbeltez por meio da Equação (10.41) correspondente à tensão de escoamento dada $\sigma_E = 250$ MPa.

$$\frac{L}{r} = 4{,}71\sqrt{\frac{200 \times 10^3}{250}} = 133{,}2$$

***a.* Comprimento de flambagem = 7,2 m.** Como $r_y < r_x$, a flambagem ocorrerá no plano *xz*. Para $L = 7{,}2$ m e $r = r_y = 50{,}3$ mm o coeficiente de esbeltez é

$$\frac{L}{r_y} = \frac{720 \text{ cm}}{5{,}03 \text{ cm}} = 143{,}1$$

Como $L/r > 133{,}2$, usamos a Equação (10. 39) na Equação (10.40) para determinar σ_{cr}

$$\sigma_{cr} = 0{,}877\sigma_e = 0{,}877\frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} = 0{,}877\frac{\pi^2(200 \times 10^3 \text{MPa})}{(143{,}1)^2} = 84{,}5 \text{ MPa}$$

A tensão admissível, determinada usando a Equação (10.42) e P_{adm} são

$$\sigma_{\text{adm}} = \frac{\sigma_{\text{cr}}}{1{,}67} = \frac{84{,}5 \text{ MPa}}{1{,}67} = 50{,}6 \text{ MPa}$$

$$P_{\text{adm}} = \sigma_{\text{adm}} A = (50{,}6 \text{ MN/m}^2)(7420 \times 10^{-6} \text{m}^2) = 0{,}376 \text{ MN}$$ ◀

***b.* Contraventamento no ponto médio *C*.** Como o contraventamento impede o movimento do ponto *C* no plano *xz*, mas não no plano *yz*, devemos calcular o coeficiente de esbeltez correspondente à flambagem em cada plano e determinar qual dos valores é maior.

***Plano xz*:** Comprimento de flambagem = 3,6 m = 3600 mm, $r = r_y = 50{,}3$ mm.

$$L/r = (3600 \text{ mm})/(50{,}3 \text{ mm}) = 71{,}6$$

***Plano yz*:** Comprimento de flambagem= 7,2 m = 7200 mm, $r = r_x = 108$ mm.

$$L/r = (7200 \text{ mm})/(108 \text{ mm}) = 66{,}7$$

Como um coeficiente de esbeltez maior corresponde a uma força admissível menor, escolhemos $L/r = 71{,}6$. Uma vez que esse valor é menor que $L/r = 133{,}2$, usamos as Equações (10.39) e (10.38) para determinar

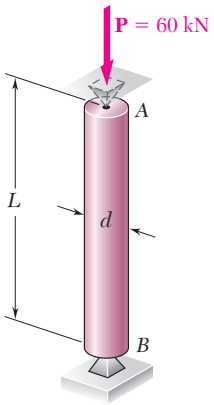
$$\sigma_e = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} = \frac{\pi^2(200 \times 10^3 \text{MN/m}^2)}{(71{,}6)^2} = 385{,}0 \text{ MN/m}^2$$

$$\sigma_{cr} = [0{,}658^{(\sigma_e/\sigma_e)}]F_y = [0{,}658^{(250 \text{ MPa}/385 \text{MPa})}]\,250 = 190{,}5 \text{ MPa}$$

Agora calculamos a tensão admissível usando a Equação (10.42) e a carga admissível.

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_{cr}}{1{,}67} = \frac{190{,}5 \text{ MPa}}{1{,}67} = 114{,}1 \text{ MPa}$$

$$P_{adm} = \sigma_{adm} A = (114{,}1 \text{ MN/m}^2)(7420 \times 10^{-3} \text{m}^2) = 0{,}846 \text{ MN}$$ ◀



PROBLEMA RESOLVIDO 10.4

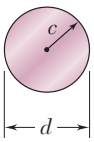
Usando a liga de alumínio 2014-T6, determine a barra de menor diâmetro que pode ser usada para suportar a força centrada $P = 60$ kN se (*a*) $L = 750$ mm e (*b*) $L = 300$ mm.

SOLUÇÃO

Para a seção transversal de uma barra circular cheia, temos

$$I = \frac{\pi}{4}c^4 \qquad A = \pi c^2 \qquad r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{\pi c^4/4}{\pi c^2}} = \frac{c}{2}$$

***a.* Comprimento de 750 mm.** Como o diâmetro da barra não é conhecido, deve-se adotar um valor de L/r; *consideramos* que $L/r > 55$ e usamos a Equação (10.46). Para a força centrada **P**, temos $\sigma = P/A$ e escrevemos



$$\frac{P}{A} = \sigma_{\text{adm}} = \frac{372 \times 10^3 \text{ MPa}}{(L/r)^2}$$

$$\frac{60 \times 10^3 \text{ N}}{\pi c^2} = \frac{372 \times 10^9 \text{ Pa}}{\left(\dfrac{0{,}750 \text{ m}}{c/2}\right)^2}$$

$$c^4 = 115{,}5 \times 10^{-9} \text{ m}^4 \qquad c = 18{,}44 \text{ mm}$$

Para $c = 18{,}44$ mm, o coeficiente de esbeltez é

$$\frac{L}{r} = \frac{L}{c/2} = \frac{750 \text{ mm}}{(18{,}44 \text{ mm})/2} = 81{,}3 > 55$$

Nossa suposição está correta e, para $L = 750$ mm, o diâmetro necessário é

$$d = 2c = 2(18{,}44 \text{ mm}) \qquad d = 36{,}9 \text{ mm} \blacktriangleleft$$

***b*. Comprimento de 300 mm.** Novamente *consideramos* que $L/r > 55$. Usando a Equação (10.46), e seguindo o procedimento usado na parte *a*, encontramos $c = 11{,}66$ mm e $L/r = 51{,}5$. Como L/r é menor que 55, nossa suposição está errada; consideramos agora que $L/r < 55$ e usamos a Equação (10.45) para o projeto dessa barra.

$$\frac{P}{A} = \sigma_{\text{adm}} = \left[212 - 1{,}585\left(\frac{L}{r}\right)\right] \text{MPa}$$

$$\frac{60 \times 10^3 \text{ N}}{\pi c^2} = \left[212 - 1{,}585\left(\frac{0{,}3 \text{ m}}{c/2}\right)\right] 10^6 \text{ Pa}$$

$$c = 12{,}00 \text{ mm}$$

Para $c = 12{,}00$ mm, o coeficiente de esbeltez é

$$\frac{L}{r} = \frac{L}{c/2} = \frac{300 \text{ mm}}{(12{,}00 \text{ mm})/2} = 50$$

Nossa segunda suposição de que $L/r < 55$ está correta. Para $L = 300$ mm, o diâmetro necessário é

$$d = 2c = 2(12{,}00 \text{ mm}) \qquad d = 24{,}0 \text{ mm} \blacktriangleleft$$

PROBLEMA

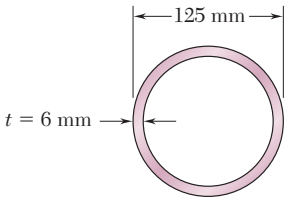


Fig. P10.57

10.57 Um tubo de aço com a seção transversal mostrada na figura é utilizado como coluna. Usando as fórmulas da tensão admissível do AISC, determine a força centrada admissível se o comprimento de flambagem da coluna for (*a*) 6 m e (*b*) 4 m. Use $\sigma_E = 250$ MPa e $E = 200$ GPa.

10.58 Uma coluna com a seção transversal mostrada tem um comprimento de flambagem de 4,11 m. Usando o método da tensão admissível, determine a maior força centrada que lhe pode ser aplicada. Use $\sigma_E = 248{,}2$ MPa e $E = 200$ GPa.

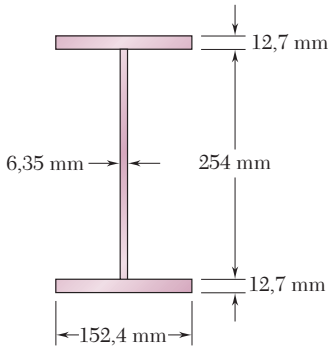


Fig. P10.58

10.59 Usando o método da tensão admissível, determine a força centrada admissível para uma coluna com comprimento de flambagem de 6 m feita com os seguintes perfis de aço laminado: (*a*) W200 × 35,9 e (*b*) W200 × 86. Use $\sigma_E = 250$ MPa e $E = 200$ GPa.

10.60 Um perfil de aço laminado W200 × 46,1 é usado para formar uma coluna com comprimento de flambagem de 6,4 m. Usando o método da tensão admissível, determine a força centrada admissível se a tensão de escoamento do tipo de aço utilizado é (*a*) $\sigma_E = 248{,}2$ MPa e (*b*) $\sigma_E = 344{,}8$ MPa. Use $E = 200$ GPa.

10.61 Uma coluna com um comprimento de flambagem de 3,5 m é feita de madeira serrada com uma seção transversal de 114 × 140 mm. Sabendo que para o tipo de madeira utilizada a tensão admissível ajustada à compressão paralela às fibras é $\sigma_C = 7{,}6$ MPa e o módulo de elasticidade ajustado $E = 2{,}8$ GPa, determine a máxima força centrada admissível para a coluna.

10.62 Uma coluna de madeira serrada com seção transversal de 190,5 × 139,7 mm tem um comprimento de flambagem de 5,49 m. Sabendo que para o tipo de madeira utilizada a tensão admissível ajustada à compressão paralela às fibras é $\sigma_C = 8{,}27$ MPa e que o módulo de elasticidade ajustado $E = 3{,}24$ GPa, determine a máxima força centrada admissível para a coluna.

10.63 A barra *AB* está livre em sua extremidade *A* e engastada na base *B*. Determine a força **P** centrada admissível se a liga de alumínio for (*a*) 6061-T6 ou (*b*) 2014-T6.

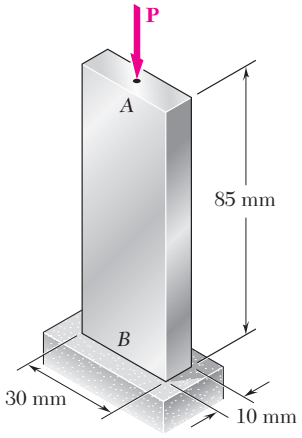


Fig. P10.63

10.64 Um elemento de compressão tem a seção transversal mostrada na figura e comprimento de flambagem de 1524 mm. Sabendo que a liga de alumínio usada é a 6061-T6, determine a carga centrada admissível.

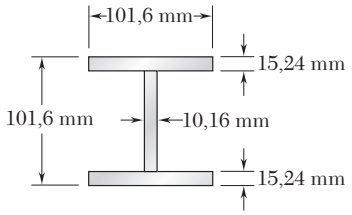


Fig. P10.64

10.65 e *10.66* Um elemento de compressão com 9 m de comprimento de flambagem é obtido soldando-se duas placas de aço com 10 mm de espessura a um perfil de aço laminado W250 × 80, conforme mostra a figura. Sabendo que σ_E = 345 MPa e E = 200 GPa e usando o método da tensão admissível, determine a força centrada admissível para o elemento de compressão.

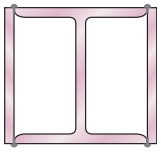


Fig. P10.65

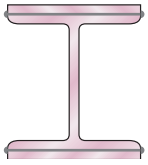


Fig. *P10.66*

10.67 Um membro comprimido de comprimento de flambagem igual a 2,3 m é obtido conectando-se com parafusos duas cantoneiras de 127 × 76 × 12,7 mm conforme mostrado. Usando o método por tensões admissíveis, determine a carga axial centrada para a coluna. Use σ_E = 250 MPa e E = 200 GPa.

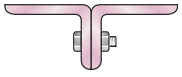


Fig. *P10.67*

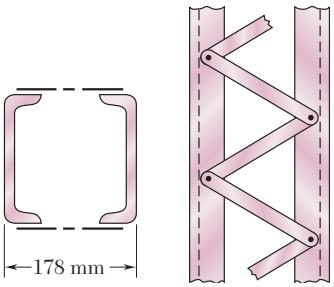


Fig. P10.68

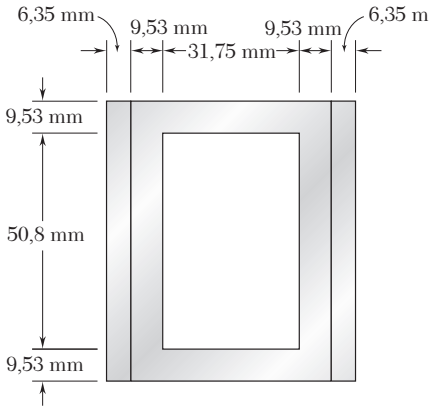


Fig. P10.70

10.68 Uma coluna com comprimento de flambagem de 6,4 m é obtida ligando-se dois perfis U de aço U250 × 30 com barras de travejamento conforme mostra a figura. Usando o método da tensão admissível, determine a força centrada admissível para a coluna. Use $\sigma_E = 248{,}2$ MPa e $E = 200$ GPa.

10.69 A coluna retangular com comprimento de flambagem de 4,4 m é feita de madeira laminada colada. Sabendo que para o tipo de madeira usada a tensão admissível ajustada à compressão paralela às fibras é $\sigma_C = 8{,}3$ MPa e o módulo de elasticidade ajustado $E = 4{,}6$ GPa, determine a força máxima centrada para essa coluna.

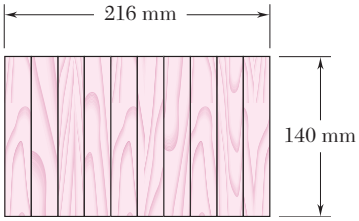


Fig. P10.69

10.70 Um tubo de alumínio estrutural é reforçado rebitando-se nele duas placas, como mostra a figura, para ser usado como uma coluna de 1707 mm de comprimento de flambagem. Sabendo-se que todo o material é composto pela liga de alumínio 2014-T6, determine a máxima força centrada admissível.

10.71 Uma força centrada de 80,1 kN é aplicada a uma coluna retangular de madeira serrada com 6,71 m de comprimento de flambagem. Usando madeira serrada para a qual a tensão admissível ajustada à compressão paralela às fibras é $\sigma_C = 7{,}24$ MPa e sabendo que o módulo de elasticidade ajustado é $E = 3{,}03$ GPa, determine a menor seção transversal quadrada que pode ser usada. Use $b = 2d$.

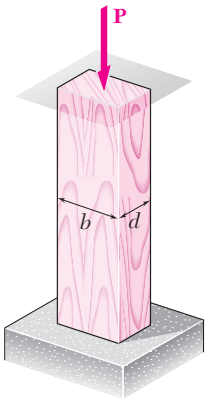


Fig. P10.71

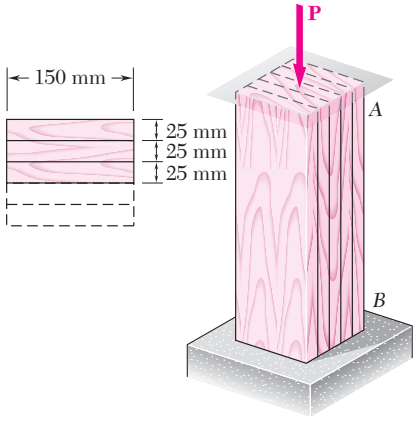


Fig. *P10.72*

10.72 Uma coluna laminada colada com 2,1 m de comprimento de flambagem deve ser feita com tábuas de seção transversal 25 × 150 mm. Sabendo que para o tipo de madeira utilizada, a tensão admissível ajustada à compressão paralela às fibras é $\sigma_C = 7{,}7$ MPa e o módulo de elasticidade ajustado é $E = 5{,}4$ GPa, determine o número de tábuas que devem ser usadas para suportar a força centrada mostrada quando (*a*) $P = 52$ kN e (*b*) $P = 108$ kN.

10.73 A coluna constituída de laminados colados mostrada na figura está livre no topo *A* e engastada na base *B*. Usando um tipo de madeira que tem uma tensão admissível ajustada à compressão paralela às fibras $\sigma_C = 9{,}2$ MPa e um módulo de elasticidade $E = 5{,}7$ GPa, determine a menor seção transversal que pode suportar uma força centrada de 62 kN.

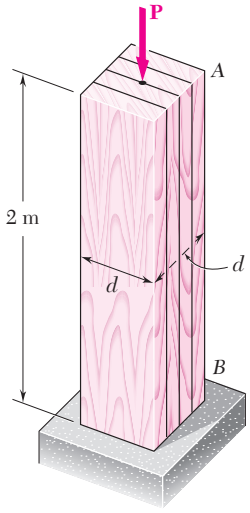


Fig. P10.73

10.74 Uma força centrada de 71,2 kN precisa ser suportada por uma coluna de alumínio conforme mostra a figura. Usando a liga de alumínio 6061-T6, determine a dimensão *b* mínima que pode ser usada.

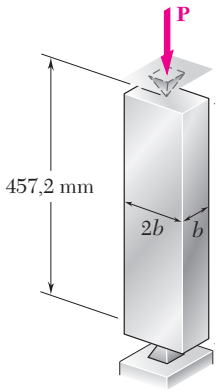


Fig. P10.74

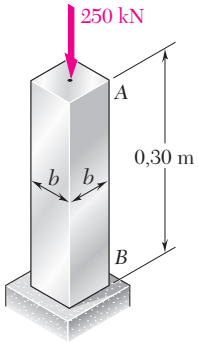


Fig. P10.75

10.75 Uma força centrada de 280 kN é aplicada à coluna mostrada na figura, que está livre no topo *A* e engastada na base *B*. Usando a liga de alumínio 2014-T6, selecione a menor seção quadrado que pode ser usada.

10.76 Um tubo de alumínio com diâmetro externo de 90 mm deve suportar uma força centrada de 120 kN. Sabendo que o estoque de tubos disponíveis para uso é composto de tubos feitos com a liga 2014-T6 e com espessura de parede variando de 6 mm a 15 mm com incrementos de 3 mm, determine o tubo mais leve que pode ser usado.

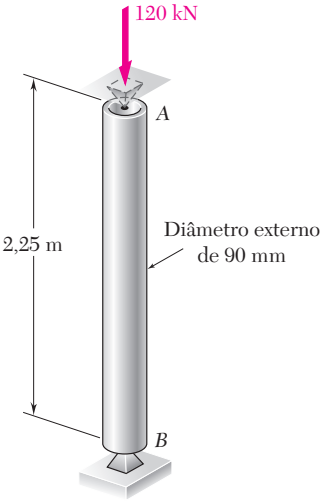


Fig. *P10.76*

10.77 Uma força **P** centrada deve ser suportada pela barra de aço *AB*. Usando o método da tensão admissível, determine a menor dimensão *d* da seção transversal que pode ser usada quando (*a*) $P = 106{,}8$ kN e (*b*) $P = 160{,}1$ kN. Use $\sigma_E = 248{,}2$ MPa e $E = 200$ GPa.

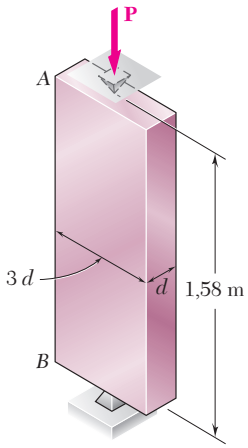


Fig. *P10.77*

10.78 Uma coluna com comprimento de flambagem de 4,5 m deve suportar uma força centrada de 900 kN. Sabendo que $\sigma_E = 345$ MPa e $E = 200$ GPa, use o método da tensão admissível para selecionar o perfil de mesa larga de 250 mm de altura nominal que deverá ser usado.

10.79 Uma coluna com comprimento de flambagem de 685,8 mm deve suportar uma força centrada de 1281 kN. Usando o método da tensão admissível, selecione o perfil de mesa larga de 360 mm de altura nominal que deverá ser usado. Use $\sigma_E = 344{,}8$ MPa e $E = 200$ GPa.

10.80 Uma coluna com comprimento de flambagem de 4,6 m deve suportar uma força centrada de 525 kN. Sabendo que $\sigma_E = 345$ MPa e $E = 200$ GPa, use o método da tensão admissível para selecionar o perfil de mesa larga de 200 mm de altura nominal que deverá ser usado.

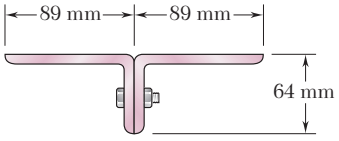


Fig. P10.81

10.81 Duas cantoneiras de 89 mm × 64 mm são soldadas, como mostra a figura, para formarem uma coluna com comprimento de flambagem de 2,4 m para suportar uma força centrada de 180 kN. Sabendo que as cantoneiras disponíveis têm espessuras de 6,4 mm, 9,5 mm e 12,7 mm, utilize o método da tensão admissível para determinar as cantoneiras mais leves que podem ser empregadas. Use $\sigma_E = 250$ MPa e $E = 200$ GPa.

10.82 Duas cantoneiras de 89 mm × 64 mm são soldadas, como mostra a figura, para formarem uma coluna com comprimento de flambagem de 2,4 m para suportar uma força centrada de 325 kN. Sabendo que as cantoneiras disponíveis têm espessuras de 6,4 mm, 9,5 mm e 12,7 mm, utilize o método da tensão admissível para determinar as cantoneiras mais leves que podem ser usadas. Use $\sigma_E = 250$ MPa e $E = 200$ GPa.

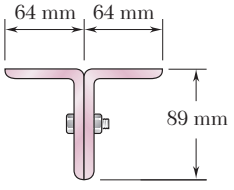


Fig. P10.82

10.83 Um tubo estrutural quadrado com a seção transversal mostrada na figura é usado como uma coluna de 792,5 mm de comprimento de flambagem para suportar uma força centrada de 289 kN. Sabendo que os tubos disponíveis para uso são feitos com espessuras de parede variando entre 6,35 mm e 19,05 mm com incrementos de 1,587 mm, utilize o método da tensão admissível para determinar o tubo mais leve que pode ser usado. Use $\sigma_E = 248{,}2$ MPa e $E = 200$ GPa.

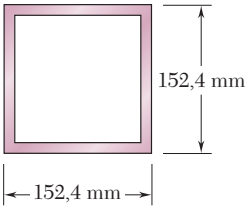


Fig. *P10.83*

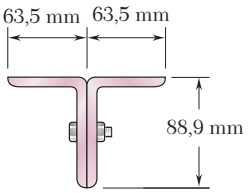


Fig. P10.84

10.84 Duas cantoneiras de 88,9 mm × 63,5 mm são soldadas, como mostra a figura, para formarem uma coluna com comprimento de flambagem de 1,83 m para suportar uma força centrada de 240 kN. Sabendo que as cantoneiras disponíveis têm espessuras de 6,35 mm, 9,53 mm e 12,7 mm, utilize o método da tensão admissível para determinar as cantoneiras mais leves que podem ser empregadas. Use $\sigma_E = 248{,}2$ MPa e $E = 200$ GPa.

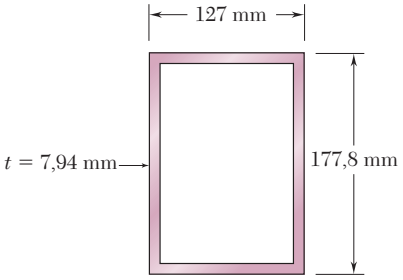


Fig. P10.85

10.85 Um tubo retangular com a seção transversal mostrada é usado como coluna com um comprimento de flambagem igual a 4,42 m. Sabendo que $\sigma_E = 248{,}2$ MPa e $E = 200$ GPa, utilize o Método do Coeficiente de Projeto para Carga e Resistência para determinar a maior carga externa centrada que pode ser aplicada se a carga permanente centrada, é de 240,2 kN. Use um coeficiente de carga permanente $\gamma_P = 1{,}2$, um coeficiente de carga externa $\gamma_E = 1{,}6$ e o coefiente de resistência $\phi = 0{,}90$.

10.86 Uma coluna com comprimento de flambagem de 5,8 m suporta uma força centrada, com uma relação entre o peso próprio e a carga externa igual a 1,35. O coeficiente de carga permanente é $\gamma_P = 1{,}2$, o coeficiente de carga externa é $\gamma_E = 1{,}6$ e o coeficiente de resistência é $\phi = 0{,}90$. Utilize o Método do Coeficiente de Projeto para Carga e Resistência para determinar as cargas permanentes e externas centradas admissíveis se a coluna for feita com o seguinte perfil de aço laminado: (*a*) W250 × 67 e (*b*) W360 × 101. Use $\sigma_E = 345$ MPa e $E = 200$ GPa.

10.87 O tubo estrutural de aço com seção transversal mostrado na figura é usado como coluna com comprimento de flambagem de 4,57 m para suportar uma carga permanente centrada de 226,8 kN e uma carga externa centrada de 258,0 kN. Sabendo que os tubos disponíveis para uso são feitos com espessura de parede com incrementos de 1,59 mm, de 4,76 mm até 9,53 mm, utilize o Método do Coeficiente de Projeto para Carga e Resistência para determinar o tubo mais leve que pode ser usado. Use $\sigma_E = 248{,}2$ MPa e $E = 200$ GPa. O coeficiente de carga permanente é $\gamma_P = 1{,}2$, o coeficiente de carga externa é $\gamma_E = 1{,}6$ e o coeficiente de resistência é $\phi = 0{,}90$.

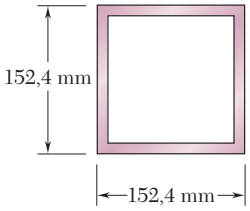


Fig. P10.87

10.88 Uma coluna com comprimento de flambagem de 5,5 m deve suportar uma carga permanente centrada de 310 kN e uma carga externa centrada de 375 kN. Sabendo que $\sigma_E = 250$ MPa e $E = 200$ GPa, utilize o Método do Coeficiente de Projeto para Carga e Resistêcia para selecionar o perfil de mesa larga de 310 mm de altura nominal que deverá ser empregado. O coeficiente de carga permanente é $\gamma_P = 1{,}2$, o coeficiente de carga externa é $\gamma_E = 1{,}6$ e o coeficiente de resistência $\phi = 0{,}90$.

10.7. Projeto de colunas submetidas a uma força excêntrica

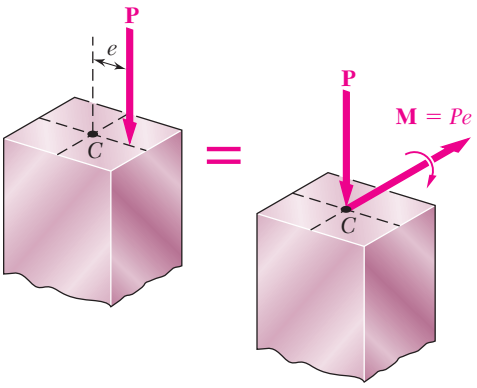


Fig. 10.34

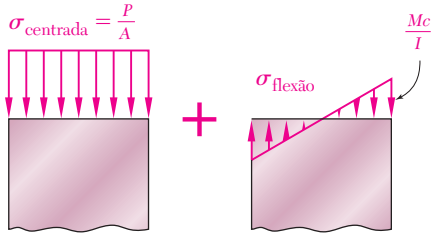


Fig. 10.35

Nessa seção, será considerado o projeto de colunas submetidas a uma força excêntrica. Você verá como as fórmulas empíricas desenvolvidas na seção anterior para colunas submetidas a uma força centrada podem ser modificadas e usadas quando a força **P** aplicada à coluna tem uma excentricidade e conhecida.

Lembremos em primeiro lugar da Seção 4.12, em que uma força **P** axial excêntrica aplicada em um plano de simetria da coluna pode ser substituída por um sistema equivalente consistindo em uma força centrada **P** e um conjugado **M** de momento $M = Pe$, em que e é a distância desde a linha de ação da força até o eixo longitudinal da coluna (Fig. 10.34). As tensões normais que atuam em uma seção transversal da coluna podem então ser obtidas superpondo-se as tensões provocadas, respectivamente, pela força centrada **P** e pelo momento **M** (Fig. 10.35), desde que a seção considerada não esteja muito perto de uma das extremidades da coluna, e desde que as tensões envolvidas não excedam o limite de proporcionalidade do material. As tensões normais provocadas pela força excêntrica **P** podem assim ser expressas como

$$\sigma = \sigma_{\text{centrada}} + \sigma_{\text{flexão}} \tag{10.51}$$

Lembrando dos resultados obtidos na Seção 4.12, concluímos que a tensão de compressão máxima na coluna é

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} \tag{10.52}$$

Em uma coluna projetada adequadamente, a tensão máxima definida pela Equação (10.52) não deve ultrapassar a tensão admissível do material da coluna. Podem ser usadas duas abordagens alternativas para satisfazer esse requisito, e são elas: Método da tensão admissível e o Método da interação.

***a.* Método da tensão admissível.** Este método baseia-se na suposição de que a tensão admissível para uma coluna carregada excentricamente é a mesma se a coluna for carregada de forma centrada. Precisamos ter, portanto, $\sigma_{\text{máx}} \leq \sigma_{\text{adm}}$, em que σ_{adm} é a tensão admissível sob uma força centrada. Substituindo $\sigma_{\text{máx}}$ da Equação (10.52), temos

$$\frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} \leq \sigma_{\text{adm}} \tag{10.53}$$

A tensão admissível é obtida das fórmulas da Seção 10.6 que, para um dado material, expressa σ_{adm} como uma função do coeficiente de esbeltez da coluna. As principais normas de engenharia requerem que seja usado o maior valor do coeficiente de esbeltez da coluna para determinar a tensão admissível, independentemente desse valor corresponder ou não ao plano em que ocorre a flexão. Essa condição às vezes resulta em um projeto demasiadamente conservador.

EXEMPLO 10.4

Uma coluna com seção transversal quadrada de 50 mm e 710 mm de comprimento de flambagem é feita de liga de alumínio 2014-T6. Usando o Método da tensão admissível, determine a força P máxima que pode ser suportada com segurança com uma excentricidade de 20 mm.

Primeiro, calculamos o raio de giração r usando os dados fornecidos

$$A = (50\text{ mm})^2 = 2500\text{ mm}^2$$
$$I = \tfrac{1}{12}(50\text{ mm})^4 = 520{,}8 \times 10^3\text{ mm}^4$$
$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{520{,}8 \times 10^3\text{ mm}^4}{2500\text{ mm}^2}} = 14{,}43\text{ mm}$$

Em seguida, calculamos $L/r = (710\text{ mm})/(14{,}43\text{ mm}) = 49{,}20$.

Como $L/r < 55$, usamos a Equação (10.48) para determinar a tensão admissível para a coluna de alumínio sujeita a uma força centrada. Temos

$$\sigma_{\text{adm}} = [212 - 1{,}585(49{,}20)] = 134\text{ MPa}$$

Usamos agora a Equação (10.53) com $M = Pe$ e $c = 25$ mm para determinar a carga admissível:

$$\frac{P}{2500\text{ mm}^2} + \frac{P(20\text{ mm})(25\text{ mm})}{520{,}8 \times 10^3\text{ mm}^4} \le 134\text{ N/mm}^2$$
$$P \le 98{,}5\text{ kN}$$

A força máxima que pode ser aplicada com segurança é $P = 98{,}5$ kN.

***b.* Método da interação.** Lembramos que a tensão admissível para uma coluna submetida a uma força centrada (Fig. 10.36*a*) geralmente é menor do que a tensão admissível para uma coluna em flexão pura (Fig. 10.36*b*), pois a primeira leva em conta a possibilidade de flambagem. Portanto, quando usamos o Método da tensão admissível para projetar uma coluna carregada excentricamente e escrevemos que a soma das tensões provocadas pela força **P** centrada e pelo momento fletor **M** (Fig. 10.36*c*) não devem ultrapassar a tensão admissível para uma coluna carregada de forma centrada, o projeto resultante frequentemente será muito conservador. Pode ser desenvolvido um método superior de projeto reescrevendo a Equação 10.58 na forma

$$\frac{P/A}{\sigma_{\text{adm}}} + \frac{Mc/I}{\sigma_{\text{adm}}} \le 1 \tag{10.54}$$

e substituindo σ_{adm} no primeiro e segundo termos pelos valores da tensão admissível que correspondem, respectivamente, ao carregamento centrado da Fig. 10.36*a* e à flexão pura da Fig. 10.36*b*. Temos

$$\frac{P/A}{(\sigma_{\text{adm}})_{\text{centrada}}} + \frac{Mc/I}{(\sigma_{\text{adm}})_{\text{flexão}}} \le 1 \tag{10.55}$$

O tipo de fórmula obtida é conhecido como *fórmula da interação*.

Observamos que, quando $M = 0$, o uso dessa fórmula resulta no projeto de uma coluna carregada de forma centrada pelo método da Seção 10.6. No entanto, quando $P = 0$, o uso da fórmula resulta no projeto de uma viga em flexão pura pelo método do Capítulo 4. Quando P e M são ambos diferentes de zero, a fórmula de interação resulta em um projeto que leva em conta a capacidade do elemento em resistir à flexão, bem como o carregamento axial centrado. Em todos os casos, $(\sigma_{\text{adm}})_{\text{centrada}}$ será determinado usando-se o maior coeficiente de esbeltez da coluna, independentemente do plano no qual a flexão ocorra.†

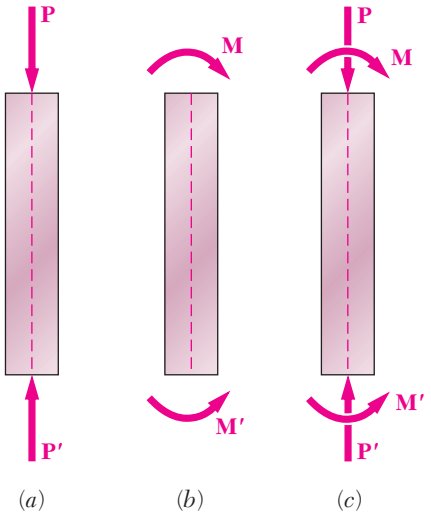


Fig. 10.36

†Esse procedimento é exigido por todas as principais normas de projeto de elementos de compressão em aço, alumínio e madeira. Além disso, muitas especificações pedem o uso de um coeficiente adicional no segundo termo da Equação (10.60); esse coeficiente leva em conta as tensões adicionais resultantes da deflexão da coluna causada pela flexão.

Quando a força excêntrica **P** não é aplicada em um plano de simetria da coluna, ela provoca flexão em relação a ambos os eixos principais da seção transversal. Recordando a Seção 4.14, vimos que a força **P** pode então ser

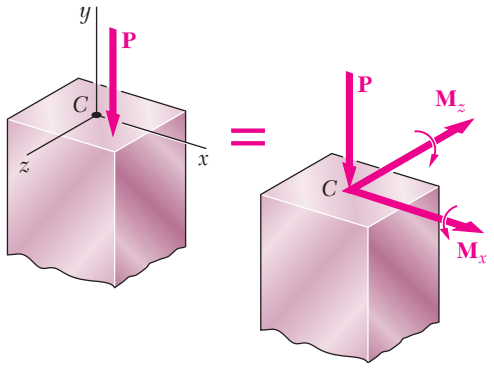


Fig. 10.37

substituída por uma força **P** centrada e dois momentos representados pelos momentos vetores $\mathbf{M}_x$ e $\mathbf{M}_z$ mostrados na Fig. 10.37. A fórmula da interação a ser usada nesse caso é

$$\frac{P/A}{(\sigma_{\text{adm}})_{\text{centrada}}} + \frac{|M_x|z_{\text{máx}}/I_x}{(\sigma_{\text{adm}})_{\text{flexão}}} + \frac{|M_z|x_{\text{máx}}/I_z}{(\sigma_{\text{adm}})_{\text{flexão}}} \leq 1 \tag{10.56}$$

EXEMPLO 10.5

Use o método da interação para determinar a força P máxima que pode ser suportada com segurança pela coluna do Exemplo 10.4 com uma excentricidade de 20 mm. A tensão admissível em flexão é de 165 MPa.

O valor de $(\sigma_{\text{adm}})_{\text{centrada}}$ já foi determinado no Exemplo 10.4. Temos

$$(\sigma_{\text{adm}})_{\text{centrada}} = 134 \text{ MPa} \quad (\sigma_{\text{adm}})_{\text{flexão}} = 165 \text{ MPa}$$

Substituindo esses valores na Equação (10.55), escrevemos

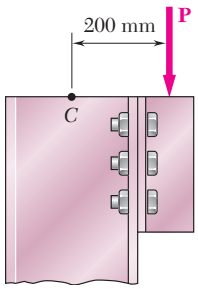
$$\frac{P/A}{134 \text{ MPa}} + \frac{Mc/I}{165 \text{ MPa}} \leq 1{,}0$$

Usando os dados numéricos do Exemplo 10.4, escrevemos

$$\frac{P/2500}{134 \text{ MPa}} + \frac{P(20)(25)/520 \times 10^3}{165 \text{ MPa}} \leq 1{,}0$$

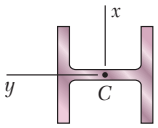
$$P \leq 113{,}6 \text{ kN}$$

A força máxima que pode ser aplicada com segurança é então $P = 113{,}6$ kN.



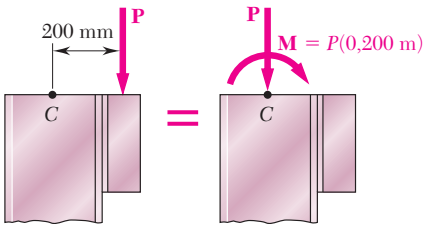
PROBLEMA RESOLVIDO 10.5

Usando o Método da tensão admissível, determine a maior força **P** que pode ser suportada com segurança por uma coluna de aço W310 × 74 de 4,5 m de comprimento de flambagem. Use $E = 200$ GPa e $\sigma_E = 250$ MPa.



W310 × 74
$A = 9480 \text{ mm}^2$
$r_x = 132 \text{ mm}$
$r_y = 49{,}7 \text{ mm}$
$W_x = 1060 \times 10^3 \text{ mm}^3$

SOLUÇÃO



O maior coeficiente de esbeltez da coluna é $L/r_y = (4{,}5 \text{ m})/(0{,}0497 \text{ m}) = 90{,}5$. Usando a Equação (10.41) com $E = 200$ GPa e $\sigma_E = 250$ MPa, verificamos que o coeficiente de esbeltez na interseção das duas equações para σ_{cr} é $L/r = 133{,}2$. Portanto usamos as Equações (10.38) e (10.39) e constatamos que $\sigma_{cr} = 161{,}9$ MPa. Usando a Equação (10.42), a tensão admissível é

$$(\sigma_{adm})_{centrada} = 161{,}9/1{,}67 = 96{,}9 \text{ MPa}$$

Para a coluna e o carregamento fornecidos, temos

$$\frac{P}{A} = \frac{P}{9{,}48 \times 10^{-3} \text{ m}^2} \qquad \frac{Mc}{I} = \frac{M}{W} = \frac{P(0{,}200 \text{ m})}{1{,}060 \times 10^{-3} \text{ m}^3}$$

Substituindo na Equação (10.58), escrevemos

$$\frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} \le \sigma_{adm}$$

$$\frac{P}{9{,}48 \times 10^{-3} \text{ m}^2} + \frac{P(0{,}200 \text{ m})}{1{,}060 \times 10^{-3} \text{ m}^3} \le 96{,}9 \text{ MPa} \qquad P \le 330 \text{ kN}$$

A maior carga **P** admissível é então **P = 330 kN ↓** ◀

PROBLEMA RESOLVIDO 10.6

Usando o método da interação, resolva o Problema Resolvido 10.5. Considere $(\sigma_{adm})_{flexão} = 150$ MPa.

SOLUÇÃO

Usando a Equação (10.60), escrevemos

$$\frac{P/A}{(\sigma_{adm})_{centrada}} + \frac{Mc/I}{(\sigma_{adm})_{flexão}} \le 1$$

Substituindo a tensão admissível de flexão fornecida e a tensão admissível centrada do Problema Resolvido 10.5, bem como os outros dados, temos

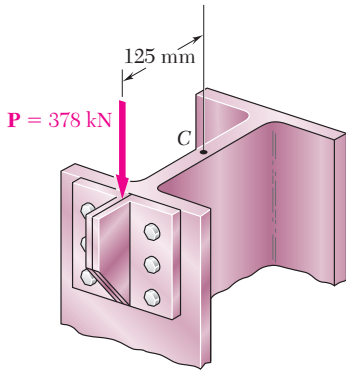
$$\frac{P/(9{,}48 \times 10^{-3} \text{ m}^2)}{97{,}9 \times 10^6 \text{ Pa}} + \frac{P(0{,}200 \text{ m})/(1{,}060 \times 10^{-3} \text{ m}^3)}{150 \times 10^6 \text{ Pa}} \le 1$$

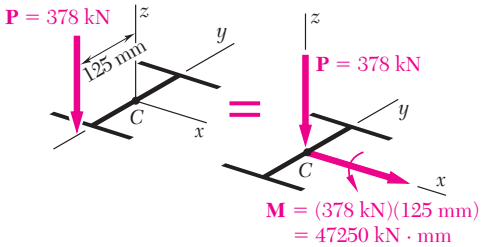
$$P \le 426 \text{ kN}$$

A maior força **P** admissível é então **P = 426 kN ↓** ◀

PROBLEMA RESOLVIDO 10.7

Uma coluna de aço com um comprimento de flambagem de 4,8 m é carregada excentricamente como mostra a figura. Usando o método da interação, selecione o perfil de mesa larga com altura nominal de 200 mm que deveria ser usado. Considere que $E = 200$ GPa e $\sigma_E = 250$ MPa, e use uma tensão admissível à flexão de 152 MPa.





SOLUÇÃO

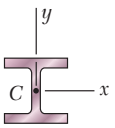
Para podermos ter uma ideia inicial do perfil a ser escolhido, vamos usar o Método da tensão admissível com $\sigma_{adm} = 152$ MPa e escrevemos

$$\sigma_{adm} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I_x} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{Ar_x^2} \tag{1}$$

Com base no Apêndice *C*, observamos para os perfis com 200 mm de altura nominal que $c \approx 100$ mm e $r_x \approx 88$ mm. Substituindo na Equação (1), temos

$$152 \text{ MPa} = \frac{378000 \text{ N}}{A} + \frac{(47{,}25 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm})(100 \text{ mm})}{A(88 \text{ mm})^2} \qquad A \approx 6522 \text{ mm}^2$$

Na primeira tentativa selecionamos o perfil: W200 × 52.



W200 × 52
$A = 6660$ mm^2
$r_x = 89$ mm
$r_y = 51{,}7$ mm
$W_x = 512 \times 10^3$ mm^3
$L = 4{,}8$ m $= 4800$ mm

Tentativa 1: W200 × 52. As tensões admissíveis são

Tensão admissível à flexão: (ver dados) $\quad (\sigma_{adm})_{flexão} = 152$ MPa

Tensão admissível centrada: O maior coeficiente de esbeltez é $L/r_y = (4800 \text{ mm})/(51{,}7 \text{ mm}) = 92{,}8$. Usando a Equação (10.41) com $E = 200$ GPa e $\sigma_E = 250$ MPa, verificamos que o coeficiente de esbeltez na interseção das duas equações para σ_{cr} é $L/r = 133{,}2$. Portanto, usaremos as Equações (10.38) e (10.39) lembrando que $\sigma_{cr} = 158{,}4$ MPa. Usando a Equação (10.42), a tensão admissível é

$$(\sigma_{adm})_{centrada} = 158{,}4/1{,}67 = 94{,}9 \text{ MPa}$$

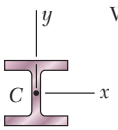
Para o perfil W200 × 52, temos

$$\frac{P}{A} = \frac{378000 \text{ N}}{6660 \text{ mm}^2} = 56{,}8 \text{ MPa} \qquad \frac{Mc}{I} = \frac{M}{W_x} = \frac{47{,}25 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}}{512 \times 10^3 \text{ mm}^3} = 92{,}3 \text{ MPa}$$

Com esses dados vemos que o membro esquerdo da Equação (10.60) é

$$\frac{P/A}{(\sigma_{adm})_{centrada}} + \frac{Mc/I}{(\sigma_{adm})_{flexão}} = \frac{56{,}8 \text{ MPa}}{94{,}9 \text{ MPa}} + \frac{92{,}3 \text{ MPa}}{152 \text{ MPa}} = 1{,}21$$

Como $1{,}21 > 1{,}00$, a condição dada pela fórmula de interação não é satisfeita; temos que tentar selecionar um perfil maior.



W200 × 71
$A = 9100$ mm^2
$r_x = 91{,}7$ mm
$r_y = 52{,}8$ mm
$W_x = 709 \times 10^3$ mm^3
$L = 4{,}8$ m $= 4800$ mm

Tentativa 2: W200 × 71. Seguindo o procedimento da tentativa 1, escrevemos

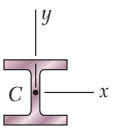
$$\frac{L}{r_y} = \frac{4800 \text{ mm}}{52{,}8 \text{ mm}} = 90{,}9 \qquad (\sigma_{adm})_{centrada} = 96{,}6 \text{ MPa}$$

$$\frac{P}{A} = \frac{378000 \text{ N}}{9100 \text{ mm}^2} = 41{,}5 \text{ MPa} \qquad \frac{Mc}{I} = \frac{M}{W_x} = \frac{47{,}25 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}}{709 \times 10^3 \text{ mm}^3} = 66{,}6 \text{ MPa}$$

Substituindo na Equação (10.60) resulta

$$\frac{P/A}{(\sigma_{adm})_{centrada}} + \frac{Mc/I}{(\sigma_{adm})_{flexão}} = \frac{41{,}5 \text{ MPa}}{96{,}6 \text{ MPa}} + \frac{66{,}6 \text{ MPa}}{152 \text{ MPa}} = 0{,}87$$

O perfil W200 × 71 satisfaz a condição, mas pode ser desnecessariamente grande.



W200 × 59
$A = 7560$ mm^2
$r_x = 89{,}9$ mm
$r_y = 51{,}9$ mm
$W_x = 582 \times 10^3$ mm^3
$L = 4{,}8$ m $= 4800$ mm

Tentativa 3: W200 × 59. Seguindo novamente o mesmo procedimento, vemos que a fórmula da interação não é satisfeita.

Seleção do perfil. O perfil a ser usado é W200×71 ◀

PROBLEMAS

10.89 Uma coluna com comprimento de flambagem de 5,5 m é feita com a liga de alumínio 2014-T6, para a qual a tensão admissível à flexão é de 220 MPa. Usando o método da interação, determine a força **P** admissível, sabendo que a excentricidade é (*a*) $e = 0$ e (*b*) $e = 40$ mm.

10.90 Resolva o Problema 10.89 considerando que o comprimento de flambagem da coluna é de 3,0 m.

10.91 Uma coluna de madeira serrada de seção transversal 127 mm × 190,5 mm tem um comprimento de flambagem de 2591 mm. A madeira usada tem uma tensão admissível ajustada à compressão paralela às fibras de $\sigma_C = 8{,}14$ MPa e um módulo de elasticidade ajustado $E = 3{,}03$ GPa. Usando o método da tensão admissível, determine a maior força **P** excêntrica que pode ser aplicada quando (*a*) $e = 12{,}7$ mm e (*b*) $e = 25{,}4$ mm.

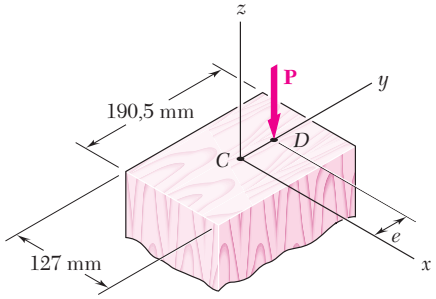


Fig. P10.91

10.92 Resolva o Problema 10.91 usando o método da interação e uma tensão admissível à flexão de 8,96 MPa.

10.93 Um elemento de compressão de aço com comprimento de flambagem de 2,75 m suporta uma força excêntrica como mostra a figura. Usando o Método da tensão admissível e considerando $e = 40$ mm, determine a força **P**. Use $\sigma_E = 250$ MPa e $E = 200$ GPa.

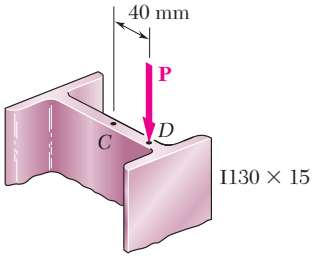


Fig. P10.93

10.94 Resolva o Problema 10.93 usando $e = 60$ mm.

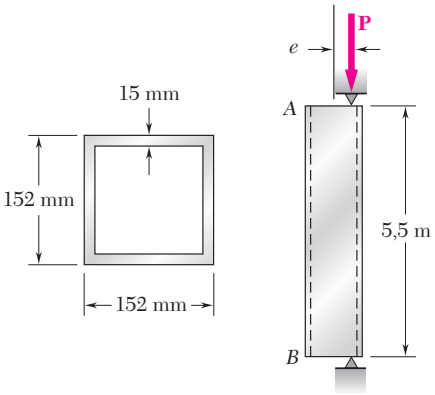


Fig. P10.89

10.95 Uma coluna retangular é feita de um tipo de madeira serrada que tem uma tensão admissível ajustada à compressão paralela às fibras $\sigma_C = 12{,}07$ MPa e um módulo de elasticidade ajustado 40 GPa. Usando o Método da tensão admissível, determine o maior comprimento de flambagem L admissível que pode ser usado.

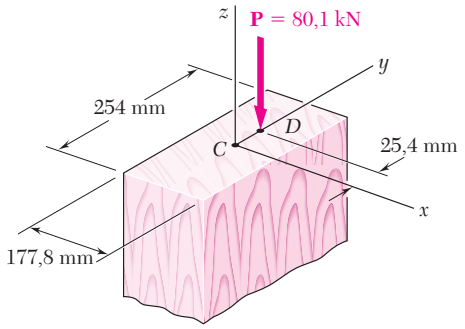


Fig. P10.95

10.96 Resolva o Problema 10.95 considerando que $P = 106{,}8$ kN.

10.97 Uma força excêntrica $P = 48$ kN é aplicada a um ponto distante 20 mm do eixo geométrico de uma barra de 50 mm de diâmetro feita com a liga de alumínio 6061-T6. Usando o método da interação e uma tensão admissível à flexão de 145 MPa, determine o maior comprimento de flambagem L admissível que pode ser usado.

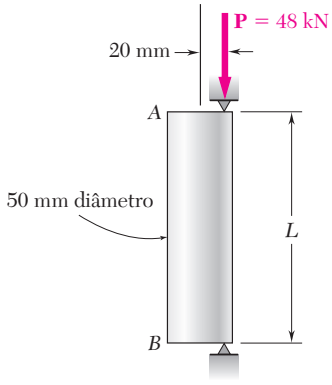


Fig. P10.97

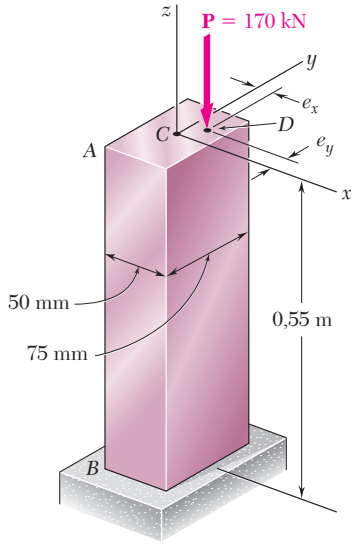


Fig. P10.99 e P10.100

10.98 Resolva o Problema 10.97 considerando que a liga de alumínio usada é a 2014-T6 e que a tensão admissível à flexão é de 180 MPa.

10.99 O elemento de compressão AB é feito de um tipo de aço para o qual $\sigma_E = 250$ MPa e $E = 200$ GPa. Ele está livre no topo A e engastado na base B. Usando o método das tensões admissíveis, determine o maior valor admissível para a excentricidade e_x, sabendo que (*a*) $e_y = 0$ e (*b*) $e_y = 8$ mm.

10.100 O elemento de compressão AB é feito de um tipo de aço para o qual $\sigma_E = 250$ MPa e $E = 200$ GPa. Ele está livre no topo A e engastado na base B. Usando o método da interação, com uma tensão admissível à flexão igual a 120 MPa e sabendo que as excentricidades e_x e e_y são iguais, determine seus maiores valores comuns admissíveis.

10.101 Uma coluna de comprimento de flambagem de 4267 mm consiste de uma seção transversal tubular de aço mostrada na figura. Usando o Método da tensão admissível, determine a máxima excentricidade admissível e se (*a*) $P = 244{,}6$ kN e (*b*) $P = 155{,}7$ kN. Use $\sigma_E = 248{,}2$ MPa e $E = 200$ GPa.

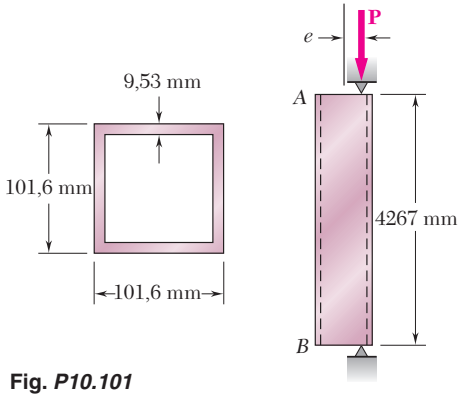


Fig. *P10.101*

10.102 Resolva o Problema 10.101, considerando que o comprimento de flambagem da coluna é incrementado para 5486 mm e que (*a*) $P = 124{,}5$ kN, (*b*) $P = 80{,}1$ kN.

10.103 Uma coluna de madeira serrada de seção transversal retangular tem 2195 mm de comprimento de flambagem e suporta uma força de 40,9 kN conforme mostra a figura. As dimensões disponíveis para uso têm b igual a 88,9 mm, 139,7 mm, 190,5 mm e 241,3 mm. Essa madeira tem uma tensão admissível ajustada à compressão paralela às fibras $\sigma_C = 8{,}14$ MPa e módulo de elasticidade ajustado $E = 3{,}0$ GPa. Use o Método da tensão admissível para determinar a seção mais leve que pode ser utilizada.

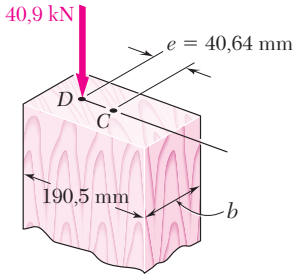


Fig. P10.103

10.104 Resolva o Problema 10.103 considerando $e = 81{,}3$ mm.

10.105 A carga excêntrica **P** de intensidade igual a 85 kN é aplicada em um ponto posicionado a distância $e = 30$ mm em relação ao eixo geométrico da haste feita com uma liga de alumínio 6016-T6. Utilizando o método da interação com uma tensão admissível na flexão igual a 140 MPa, determine o menor diâmetro d que poderá ser utilizado.

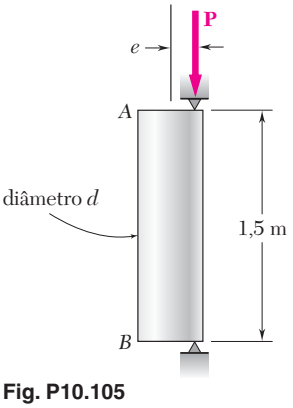


Fig. P10.105

10.106 Resolva o Problema 10.105, usando o método das tensões admissíveis e assumindo que a liga de alumínio utilizada é a 2014-T6.

10.107 Um elemento de compressão de seção transversal retangular tem um comprimento de flambagem de 914 mm e é feito com a liga de alumínio 2014-T6 para a qual a tensão admissível à flexão é de 165,5 MPa. Usando o método da interação, determine a menor dimensão d da seção transversal que pode ser usada quando $e = 10{,}16$ mm.

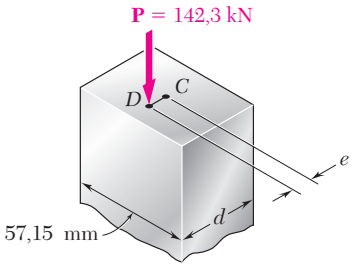


Fig. P10.107

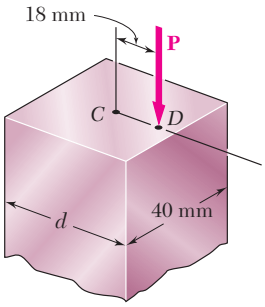


Fig. P10.109

10.108 Resolva o Problema 10.107 considerando que $e = 5{,}08$ mm.

10.109 Um elemento de compressão feito de aço tem um comprimento de flambagem de 720 mm e deve suportar a força **P** de 198 kN conforme mostra a figura. Para o material utilizado, $\sigma_E = 250$ MPa e $E = 200$ GPa e usando o método da interação com uma tensão admissível à flexão igual a 150 MPa, determine a menor dimensão d da seção transversal que pode ser usada.

10.110 Resolva o Problema 10.109 considerando que o comprimento de flambagem é de 1,62 m e que a intensidade P da força excêntrica é de 128 kN.

10.111 Um tubo de aço com diâmetro externo de 80 mm deve suportar uma força **P** de 93 kN com uma excentricidade de 20 mm. Sabendo que o estoque de tubos para utilização são feitos com espessuras de parede que variam em incrementos de 3 mm de 6 mm até 15 mm. Usando o Método das tensões admissíveis, determine o tubo mais leve que pode ser utilizado. Considere $E = 200$ GPa e $\sigma_E = 250$ MPa.

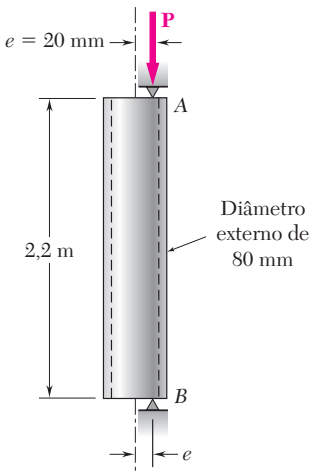


Fig. P10.111

10.112 Resolva o Problema 10.111 usando o método da interação com $P = 165$ kN, $e = 15$ mm e a tensão admissível à flexão de 150 MPa.

10.113 Uma coluna de aço com um comprimento de flambagem de 7,3 m é carregada excentricamente conforme mostra a figura. Usando o Método da tensão admissível, selecione o perfil de mesa larga de 360 mm de altura nominal que deverá ser empregado. Use $\sigma_E = 248{,}2$ MPa e $E = 200$ GPa.

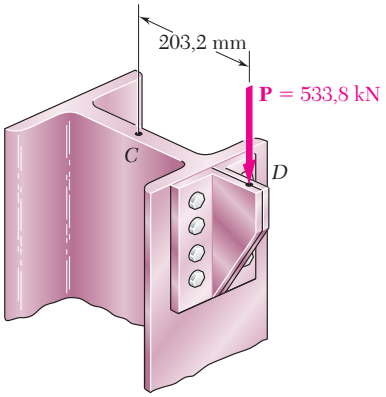


Fig. P10.113

10.114 Resolva o Problema 10.113 usando o método da interação, considerando que $\sigma_E = 344{,}8$ MPa e uma tensão admissível à flexão de 206,9 MPa.

10.115 Um elemento de aço com 5,8 m de comprimento de flambagem submetido à compressão deve suportar uma carga excêntrica de 296 kN. Usando o método da interação, selecione o perfil de abas largas com 200 mm de altura nominal que deverá ser usado. Considere $E = 200$ GPa, $\sigma_e = 250$ MPa e $\sigma_{adm} = 150$ MPa na flexão.

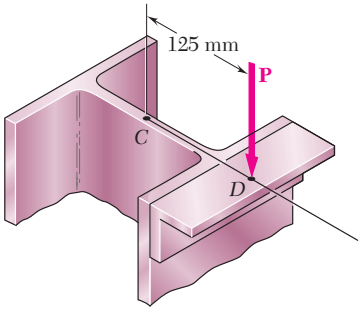


Fig. P10.115

10.116 Uma coluna de aço com comprimento de flambagem de 7,2 m deve suportar uma força **P** excêntrica de 83 kN em um ponto D localizado no eixo x conforme mostra a figura. Usando o Método da tensão admissível, selecione o perfil de mesa larga de 250 mm de altura nominal que deverá ser empregado. Use $E = 200$ GPa e $\sigma_E = 250$ MPa.

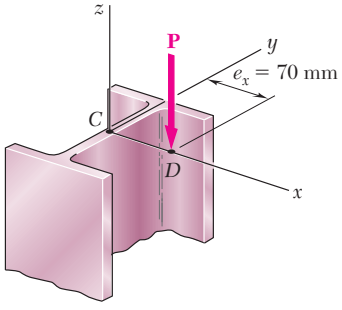


Fig. *P10.116*

REVISÃO E RESUMO DO CAPÍTULO 10

Esse capítulo foi dedicado ao projeto e à análise de colunas, isto é, membros prismáticos que suportam forças axiais de compressão. Para ter uma visão do comportamento das colunas, consideramos primeiramente na Seção 10.2 o equilíbrio de um modelo simples e vimos que, para valores da força P ultrapassando um certo valor P_{cr}, chamado de *força crítica*, havia duas posições possíveis para equilíbrio do modelo: a posição original com deflexões transversais iguais a zero e uma segunda posição envolvendo deflexões que poderiam ser muito grandes. Isso nos levou a concluir que a primeira posição de equilíbrio era instável para $P > P_{cr}$, e estável para $P < P_{cr}$, pois neste último caso ela era a única posição de equilíbrio possível.

Força crítica

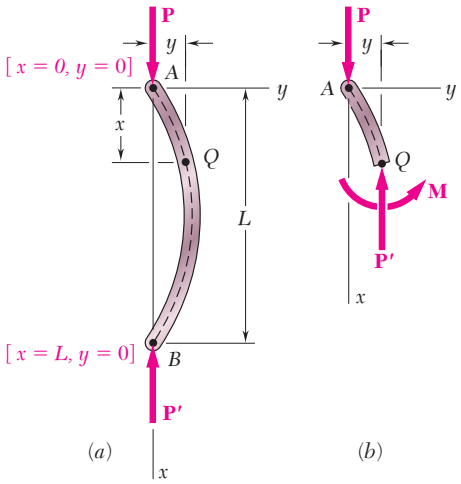


Fig. 10.8

Na Seção 10.3, consideramos uma coluna biarticulada de comprimento L e de rigidez à flexão constante EI submetida a uma força axial centrada P. Considerando que a coluna havia sofrido flambagem (Fig. 10.8), notamos que o momento fletor no ponto Q era igual a $-Py$ e escrevemos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI}y \tag{10.4}$$

Resolvendo essa equação diferencial e impondo as condições de contorno correspondentes a uma coluna biarticulada, determinamos a menor força P para a qual pode haver a flambagem. Essa força, conhecida como *força crítica* e representada por P_{cr}, é dada pela *fórmula de Euler*:

Fórmula de Euler

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \tag{10.11}$$

em que L é o comprimento da coluna. Para essa força ou qualquer força maior, o equilíbrio da coluna é instável e ocorrerão deformações transversais.

Representando a área da seção transversal da coluna por A e seu raio de giração por r, determinamos a tensão crítica σ_{cr} correspondente à força crítica P_{cr}:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} \tag{10.13}$$

O valor L/r é chamado de *coeficiente de esbeltez* e desenhamos o gráfico de σ_{cr} como uma função de L/r (Fig. 10.9). Como nossa análise baseou-se nas tensões que estão abaixo da tensão de escoamento do material, notamos que a coluna falharia por escoamento quando $\sigma_{cr} > \sigma_E$.

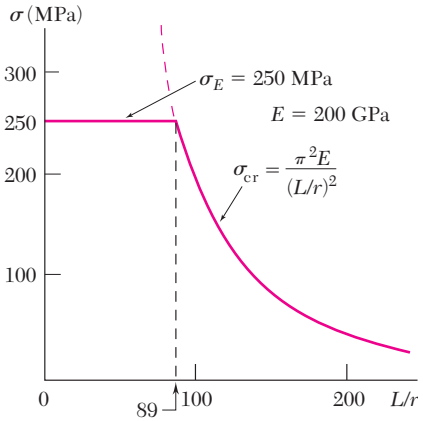


Fig. 10.9

Coeficiente de esbeltez

Na Seção 10.4, discutimos a força crítica de colunas com várias condições de extremidade e escrevemos

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_{fl}^2} \qquad (10.11')$$

em que L_{fl} é o *comprimento de flambagem* da coluna, isto é, o comprimento de uma coluna biarticulada equivalente. Os comprimentos de flambagem de várias colunas com diferentes condições de extremidade foram calculados e mostrados na Fig. 10.18, na página 605.

Comprimento de flambagem

Na Seção 10.5, consideramos colunas suportando uma *força axial excêntrica*. Para uma coluna biarticulada submetida a uma força P aplicada com uma excentricidade e, nós a substituímos por uma força axial centrada e um conjugado de momento $M_A = Pe$ (Figs. 10.19*a* e 10.20) e determinamos a expressão a seguir para a máxima deflexão:

$$y_{máx} = e\left[\sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{L}{2}\right) - 1\right] \qquad (10.28)$$

Força axial excêntrica.
Fórmula da secante.

Determinamos então a tensão máxima na coluna, e da expressão obtida para aquela tensão, deduzimos a *fórmula da secante*:

$$\frac{P}{A} = \frac{\sigma_{máx}}{1 + \dfrac{ec}{r^2}\sec\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{P}{EA}}\dfrac{L_{fl}}{r}\right)} \qquad (10.36)$$

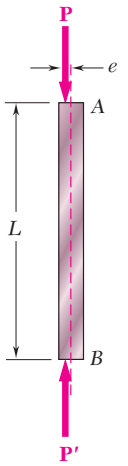


Fig. 10.19*a*

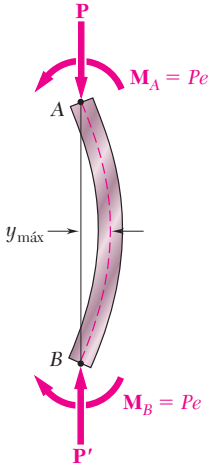


Fig. 10.20

Essa equação pode ser resolvida para a força por unidade de área, P/A, que provoca uma tensão máxima específica $\sigma_{máx}$ em uma coluna biarticulada ou qualquer outra coluna com coeficiente de esbeltez L_{fl}/r.

Na primeira parte do capítulo, consideramos cada coluna como um prisma reto homogêneo. Como existem imperfeições em todas as colunas na prática, o *projeto de colunas na prática* é feito usando-se fórmulas empíricas com base em testes de laboratório e definidas em normas de especificações publicadas por organizações profissionais. Na Seção 10.6, discutimos o projeto de *colunas carregadas de forma centrada* feitas de aço, alumínio e madeira. Para cada material, o projeto da coluna baseava-se nas fórmulas que expressam a tensão admissível como uma função do coeficiente de esbeltez L/r da coluna. Para o aço estrutural, discutimos também o método alternativo do *Coeficiente de Projeto para Carga e Resistência*.

Projeto de colunas na prática

Colunas carregadas de forma centrada

Na última seção do capítulo [Seção 10.7], estudamos dois métodos usados para o projeto de colunas sob uma força *excêntrica*. O primeiro foi o *Método da tensão admissível*, um método conservador no qual considera-se que a tensão admissível é a mesma, como se a coluna fosse carregada de forma centrada. O método da tensão admissível exige que seja satisfeita a seguinte desigualdade:

$$\frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} \le \sigma_{adm} \qquad (10.53)$$

Colunas carregadas de forma excêntrica

Método da tensão admissível

O segundo método foi o método *da interação*, usado na maioria das especificações modernas. Neste método, a tensão admissível para uma coluna carregada de forma centrada é usada para a parte da tensão total provocada pela força axial e a tensão admissível à flexão para a tensão provocada pelo momento fletor. Assim, a desigualdade a ser satisfeita é

$$\frac{P/A}{(\sigma_{adm})_{centrada}} + \frac{Mc/I}{(\sigma_{adm})_{flexão}} \le 1 \qquad (10.55)$$

Método da interação

PROBLEMAS DE REVISÃO

10.117 A barra de aço *BC* está fixada à barra rígida *AB* e ao suporte fixo em *C*. Sabendo que $G = 77{,}2$ GPa, determine a força crítica P_{cr} do sistema quando $d = 12{,}7$ mm.

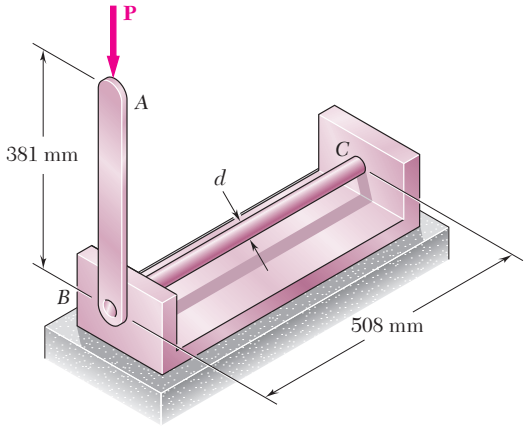


Fig. P10.117

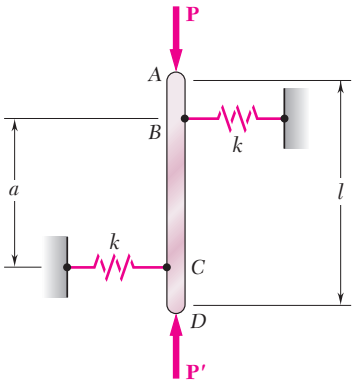


Fig. *P10.118*

10.118 A barra rígida *AD* está presa a duas molas de constante *k* e está em equilíbrio na posição indicada. Sabendo que as forças iguais e opostas **P** e **P′** permanecem verticais, determine a intensidade P_{cr} da força crítica para o sistema. Cada mola pode atuar tanto em tração quanto em compressão.

10.119 Uma coluna com 3 m de comprimento de flambagem deve ser feita soldando-se dois perfis U de aço laminado U130 × 13. Usando $E = 200$ GPa, determine para cada arranjo mostrado a força centrada admissível se for adotado um coeficiente de segurança de 2,4.

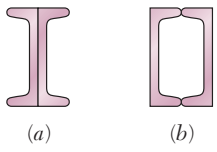


Fig. P10.119

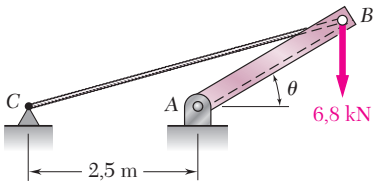


Fig. P10.120

10.120 O elemento *AB* consiste em um perfil U de aço laminado U130 × 10,4 de comprimento igual a 2,5 m. Sabendo que os pinos em *A* e *B* passam pelo centroide da seção transvcersal do perfil, determine o coeficiente de segurança para a carga mostrada com respeito a flambagem no plano da figura quando $\theta = 30°$. Use $E = 200$ GPa.

10.121 Uma barra de alumínio quadrada de 25,4 mm de lado é mantida na posição mostrada na figura por um apoio articulado em A e por conjuntos de roletes em B e C que impedem sua rotação no plano da figura. Sabendo que $L_{AB} = 914{,}4$ mm, $L_{BC} = 1219$ mm e $L_{CD} = 304{,}8$ mm, determine a força **P** admissível usando um coeficiente de segurança em relação à flambagem de 3,2. Considere flambagem somente no plano da figura e use $E = 71{,}7$ GPa.

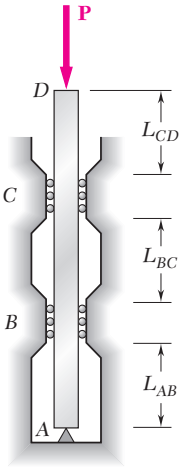


Fig. P10.121

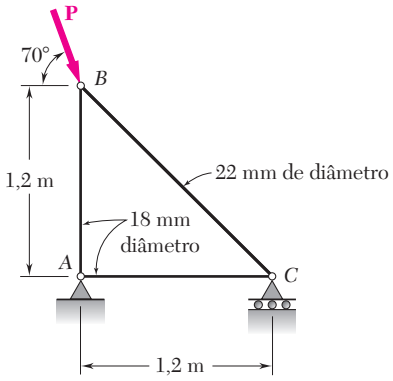


Fig. *P10.122*

10.122 Sabendo que $P = 5{,}2$ kN, determine o coeficiente de segurança para a estrutura mostrada. Use $E = 200$ GPa e considere flambagem somente no plano da estrutura.

10.123 Uma força axial **P** é aplicada à barra de aço AB de 31,75 mm de diâmetro conforme mostra a figura. Para $P = 38{,}3$ kN e $e = 1{,}588$ mm, determine (*a*) a deflexão no ponto médio C da barra e (*b*) a tensão máxima na barra. Use $E = 200$ GPa.

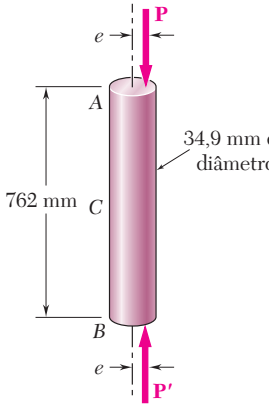


Fig. P10.123

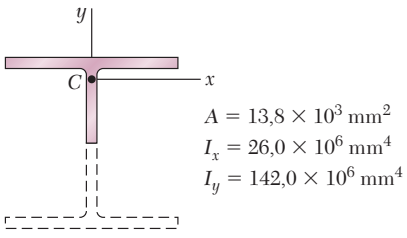


Fig. P10.124

10.124 Uma coluna é feita com metade de um perfil de aço laminado W360 × 216 cujas propriedades geométricas são as mostradas. Usando o método das tensões admissíveis, determine a carga centrada admissível se o comprimento de flambagem da coluna é (*a*) 4,0 m e (*b*) 6,5 m. Use $\sigma_E = 345$ MPa e $E = 200$ GPa.

10.125 Um elemento sob compressão tem a seção transversal mostrada e comprimento de flambagem de 1524 mm. Sabendo que a liga de alumínio usada é a 2014-T6, determine a carga centrada admissível.

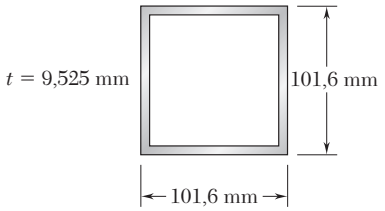


Fig. *P10.125*

10.126 Uma coluna com comprimento de flambagem de 5182 mm deve suportar uma força centrada de 1045 kN. Usando o Método da tensão admissível, selecione o perfil de mesa larga de 250 mm de altura nominal que deverá ser usado. Use $\sigma_E = 248{,}2$ MPa e $E = 200$ GPa.

10.127 Uma força vertical **P** de 32 kN é aplicada ao ponto médio de uma das bordas da seção transversal quadrada de um elemento comprimido de alumínio *AB*, o qual é livre na extremidade *A* e engastado na sua base *B*. Sabendo que a liga de alumínio usada é a 6061-T6 e usando o Método das tensões admissíveis, determine a menor dimensão *d* admissível.

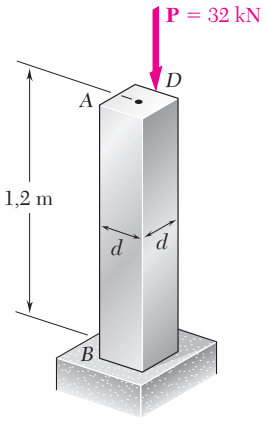


Fig. *P10.127*

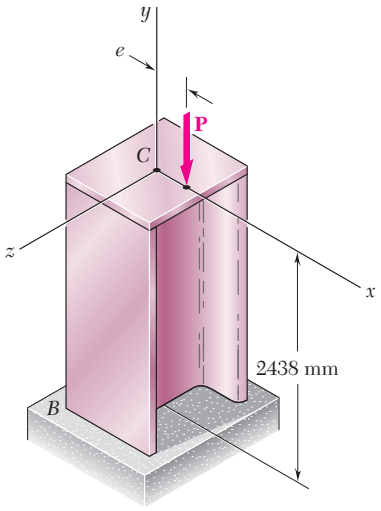


Fig. P10.128

10.128 Uma força axial **P** de 191,3 kN é aplicada à coluna *BC* de aço laminado em um ponto no eixo *x* a uma distância $e = 63{,}5$ mm do eixo geométrico da coluna. Usando o Método da tensão admissível, selecione o perfil de mesa larga de 200 mm de altura nominal que deverá ser usado. Use $E = 200$ GPa e $\sigma_E = 248{,}2$ MPa.

PROBLEMAS PARA COMPUTADOR

Os problemas a seguir devem ser resolvidos com o uso de um computador.

10.C1 Uma barra de aço de seção cheia com um comprimento de flambagem de 500 mm deve ser usada como um apoio de compressão para suportar uma força centrada **P**. Para o tipo de aço utilizado, $E = 200$ GPa e $\sigma_E = 245$ MPa. Sabendo que é exigido um coeficiente de segurança de 2,8 e usando a fórmula de Euler, elabore um programa de computador e use-o para calcular a força centrada admissível P_{adm} para valores do raio da barra de 6 mm a 24 mm, usando incrementos de 2 mm.

10.C2 Uma barra de alumínio é engastada na extremidade *A* e articulada na extremidade *B* de maneira que ela está livre para rodar em torno de um eixo horizontal pela articulação. A rotação em torno do eixo vertical na extremidade *B* é impedida pelos suportes. Sabendo que $E = 69{,}6$ GPa, use a fórmula de Euler com um coeficiente de segurança de 2,5 para determinar a força centrada **P** admissível para valores de *b* de 19,05 mm a 38,1 mm, usando incrementos de 3,175 mm.

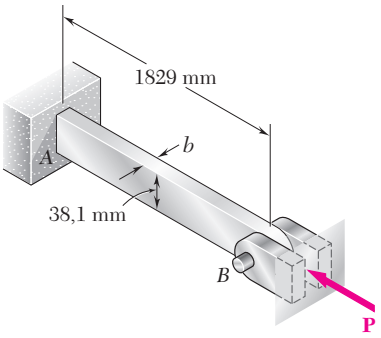


Fig. P10.C2

10.C3 Os elementos biarticulados *AB* e *BC* consistem em seções de tubo de alumínio com diâmetro externo de 120 mm e espessura de parede de 10 mm. Sabendo que é exigido um coeficiente de segurança de 3,5, determine a massa *m* do maior bloco que pode ser suportado pelo sistema de cabos mostrado na figura para valores de *h* de 4 m até 8 m, usando incrementos de 0,25 m. Use $E = 70$ GPa e considere flambagem somente no plano da estrutura.

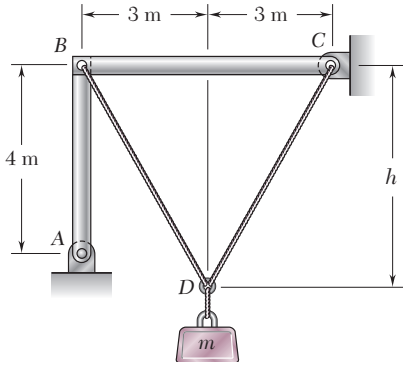


Fig. P10.C3

10.C4 Uma força axial **P** é aplicada a um ponto localizado no eixo *x* a uma distância $e = 12{,}7$ mm do eixo geométrico da coluna *AB* de aço laminado W200 × 59. Usando $E = 200$ GPa, elabore um programa de computador e use-o para calcular os valores de *P* de 111,2 a 333,2 kN, usando incrementos de 22,2 kN, (*a*) a deflexão horizontal no ponto médio *C* e (*b*) a tensão máxima na coluna.

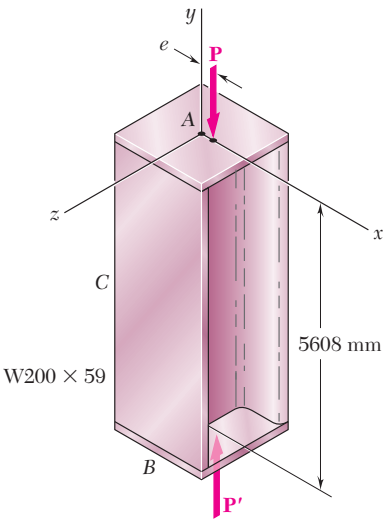


Fig. P10.C4

10.C5 Uma coluna de comprimento de flambagem L é feita de um perfil de aço laminado e suporta uma força axial centrada **P**. A tensão de escoamento para o tipo de aço utilizado é representada por σ_E, o módulo de elasticidade por E, a área da seção transversal do perfil selecionado por A, e seu menor raio de giração por r. Usando as fórmulas da tensão admissível do AISC, elabore um programa de computador que possa ser usado para determinar a força admissível **P**. Use esse programa para resolver (*a*) o Problema 10.59, (*b*) o Problema 10.60 e (*c*) o Problema 10.124.

10.C6 Uma coluna de comprimento de flambagem L é feita de um perfil de aço laminado e é carregada excentricamente como mostra a figura. A tensão de escoamento para o tipo de aço utilizado é representada por σ_E, a tensão admissível à flexão por σ_{adm}, o módulo de elasticidade por E, a área da seção transversal do perfil selecionado por A, e seu menor raio de giração por r. Elabore um programa de computador que possa ser usado para determinar a força admissível **P**, utilizando o Método da tensão admissível ou o Método da interação. Use esse programa para verificar a resposta dada para (*a*) o Problema 10.113 e (*b*) o Problema 10.114.

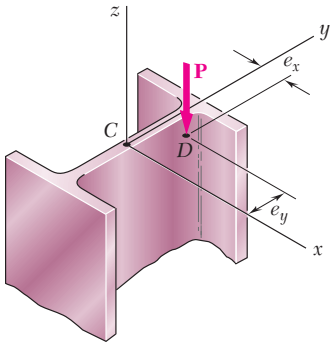


Fig. P10.C6

CAPÍTULO

11

Métodos de energia

Quando o mergulhador flexiona o trampolim, a energia potencial causada por sua elevação acima do trampolim será convertida em energia de deformação devido à flexão do trampolim. As tensões normal e de cisalhamento resultantes das cargas de energia serão determinadas neste capítulo.

11.1. Introdução

No capítulo anterior estávamos interessados nas relações existentes entre forças e deformações sob várias condições de carregamento. Nossa análise baseou-se em dois conceitos fundamentais; o conceito de tensão (Capítulo 1) e o conceito de deformação específica (Capítulo 2). Será apresentado agora um terceiro conceito importante, o conceito de *energia de deformação*.

Na Seção 11.2, será definida a *energia de deformação* de uma barra com o aumento de energia associado à sua deformação. Você verá que a energia de deformação é igual ao trabalho realizado por uma força aplicada à barra, quando essa força cresce lentamente. A *densidade de energia de deformação* de um material será definida como a energia de deformação por unidade de volume; veremos que ela é igual à área sob a curva da tensão em função da deformação do material (Seção 11.3). Com base na curva de um material serão definidas duas outras propriedades adicionais: o *módulo de tenacidade* e o *módulo de resiliência* do material.

Na Seção 11.4 será discutida a energia de deformação elástica associada às *tensões normais*, primeiro em barras submetidas a carregamento axial e depois em barras em flexão. Mais adiante você verá a energia de deformação elástica associada às tensões de cisalhamento como aquelas que ocorrem com carregamentos torcionais de eixos e com carregamentos transversais de vigas (Seção 11.5). A energia de deformação para um *estado geral de tensão* será considerada na Seção 11.6, em que será deduzido o *critério da máxima energia de distorção* para o escoamento.

O efeito do *carregamento de impacto* sobre membros será considerado na Seção 11.7. Você aprenderá a calcular a *tensão máxima* e a *deflexão máxima* provocada por uma massa em movimento colidindo com uma barra. As propriedades que aumentam a capacidade de uma estrutura para resistir a forças de impacto eficientemente serão discutidas na Seção 11.8.

Na Seção 11.9 será calculada a deformação elástica de uma barra sujeita a uma *única força concentrada*, e na Seção 11.10 será determinada a deflexão no ponto de aplicação de uma única força.

A última parte do capítulo será dedicada à determinação da energia de deformação de estruturas sujeitas a *várias forças* (Seção 11.11). O teorema de Castigliano será deduzido na Seção 11.12 e usado na Seção 11.13 para determinar a deflexão em um dado ponto de uma estrutura sujeita a várias forças. Na última seção, o teorema de Castigliano será aplicado para a análise de estruturas indeterminadas (Seção 11.14).

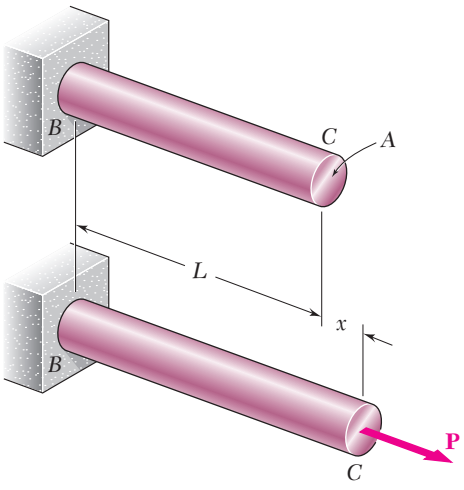


Fig. 11.1

11.2. Energia de deformação

Considere uma barra BC de comprimento L e seção transversal uniforme de área A, que está presa em B a um suporte fixo e que em C está submetida a uma força axial P que cresce lentamente (Fig. 11.1). Conforme observamos na Seção 2.2, desenhando o gráfico da intensidade P da força em função da deformação x da barra, obtemos uma curva (Fig. 11.2) característica da barra BC.

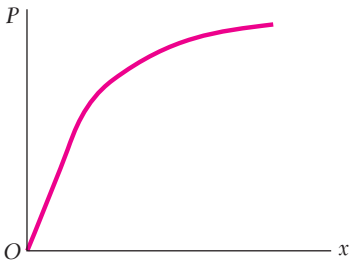


Fig. 11.2

Vamos agora considerar o trabalho dU feito pela força **P** à medida que a barra se alonga de um pequeno valor dx. Esse *trabalho elementar* é igual ao produto da intensidade P da força pelo pequeno alongamento dx. Escrevemos

$$dU = P\,dx \tag{11.1}$$

e observamos que a expressão obtida é igual ao elemento de área de largura dx localizado sob o diagrama força-deformação (Fig. 11.3). O *trabalho total* U feito pela força enquanto a barra sofre uma deformação x_1 é portanto

$$U = \int_0^{x_1} P\,dx$$

e é igual à área sob o diagrama força-deformação entre $x = 0$ e $x = x_1$.

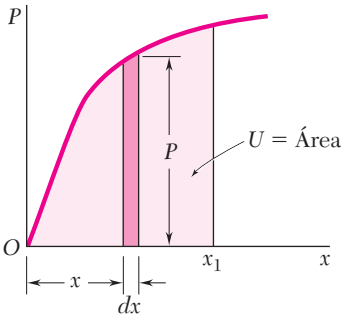


Fig. 11.3

O trabalho feito pela força **P** enquanto ela é aplicada lentamente à barra deve resultar no aumento de algum tipo de energia associada à deformação da barra. Essa energia é conhecida como *energia de deformação* da barra. Temos, por definição,

$$\text{Energia de deformação} = U = \int_0^{x_1} P\,dx \tag{11.2}$$

Lembramos que o trabalho e a energia devem ser expressos em unidades obtidas multiplicando-se unidades de comprimento por unidades de força. Assim, se for usado o sistema de unidades SI, o trabalho e a energia serão expressos em N · m; essa unidade é chamada de *joule* (J).

No caso de uma deformação linear e elástica, a parte do diagrama força-deformação envolvida pode ser representada por uma linha reta cuja equação é $P = kx$ (Fig. 11.4). Substituindo P na Equação (11.2), temos

$$U = \int_0^{x_1} kx\,dx = \tfrac{1}{2}kx_1^2$$

ou

$$U = \tfrac{1}{2}P_1x_1 \tag{11.3}$$

em que P_1 é o valor da força correspondente à deformação x_1.

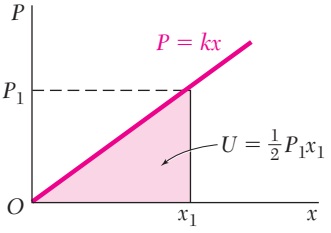


Fig. 11.4

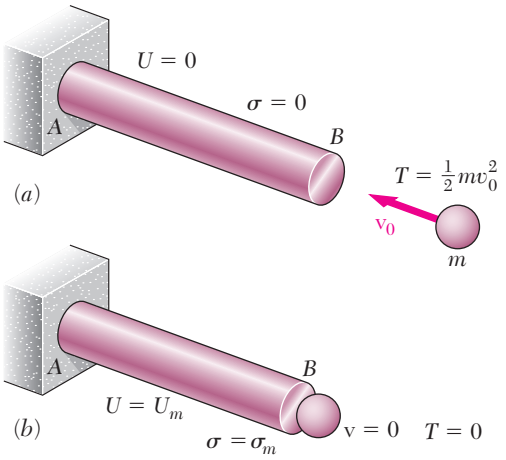


Fig. 11.5

O conceito de energia de deformação é particularmente útil na determinação dos efeitos de forças de impacto sobre estruturas ou componentes de máquinas. Considere, por exemplo, um corpo de massa m movendo-se com uma velocidade $\mathbf{v}_0$ que se choca com a extremidade B de uma barra AB (Fig. 11.5*a*). Desprezando-se a inércia dos elementos da barra e considerando que não há dissipação de energia durante o impacto, concluímos que a energia de deformação máxima U_m adquirida pela barra (Fig. 11.5*b*) é igual à energia cinética original $T = \frac{1}{2}mv_0^2$ do corpo em movimento. Determinamos então o valor P_m da força estática que teria produzido a mesma energia de deformação na barra, e obtemos o valor σ_m da maior tensão que ocorre na barra dividindo P_m pela área da seção transversal da barra.

11.3. Densidade de energia de deformação

Conforme notamos na Seção 2.2, o diagrama força-deformação para uma barra BC depende do comprimento L e da área A da seção transversal da barra. A energia de deformação U definida pela Equação (11.2), portanto, dependerá também das dimensões da barra. Para eliminar de nossa discussão o efeito do tamanho e dirigir nossa atenção às propriedades do material, será considerada a energia por unidade de volume. Dividindo a energia de deformação U pelo volume $V = AL$ da barra (Fig. 11.1) e usando a Equação (11.2), temos

$$\frac{U}{V} = \int_0^{x_1} \frac{P}{A}\frac{dx}{L}$$

Lembrando que P/A representa a tensão normal σ_x na barra e x/L a deformação específica normal ϵ_x, escrevemos

$$\frac{U}{V} = \int_0^{\epsilon_1} \sigma_x \, d\epsilon_x$$

em que ϵ_1 representa o valor da deformação específica correspondente ao alongamento x_1. A energia de deformação por unidade de volume, U/V, é conhecida como *densidade de energia de deformação* e será representada pela letra u. Temos, portanto,

$$\text{Densidade de energia de deformação} = u = \int_0^{\epsilon_1} \sigma_x \, d\epsilon_x \qquad (11.4)$$

A densidade de energia de deformação u é expressa em unidades obtidas dividindo-se as unidades de energia por unidades de volume. Assim, a densidade de energia de deformação em unidade do sistema métrico SI será expressa em J/m^3 ou seus múltiplos kJ/m^3 e Mj/m^3.†

†Observamos que 1 J/m^3 e 1 Pa são ambos iguais a 1 N/m^2. Assim, a densidade de energia de deformação e a tensão são dimensionalmente iguais e poderiam ser expressas nas mesmas unidades.

Observando a Fig. 11.6, notamos que a densidade de energia de deformação u é igual à área sob a curva da tensão em função da deformação específica, medida desde $\epsilon_x = 0$ até $\epsilon_x = \epsilon_1$. Se o material é descarregado, a tensão retorna a zero, mas há uma deformação permanente representada pela deformação específica ϵ_p, e somente a parte da energia de deformação por unidade de volume correspondente à área triangular é recuperada. O restante da energia gasta na deformação do material é dissipada na forma de calor.

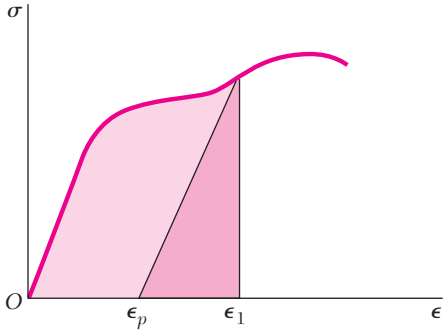


Fig. 11.6

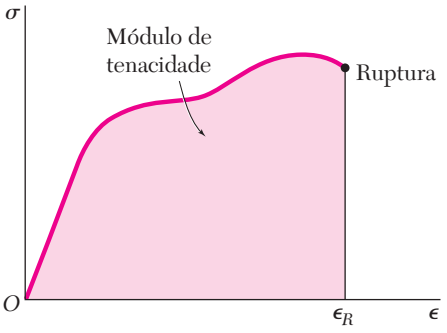


Fig. 11.7

O valor da densidade de energia de deformação obtida fazendo $\epsilon_1 = \epsilon_R$ na Equação (11.4), em que ϵ_R é a deformação específica na ruptura, é conhecido como *módulo de tenacidade* do material. Ele é igual à área total sob o diagrama tensão-deformação específica (Fig. 11.7) e representa a energia por unidade de volume necessária para fazer o material entrar em ruptura. Está claro que a tenacidade do material está relacionada com sua ductilidade, bem como a seu limite de resistência (Seção 2.3), e que a capacidade de uma estrutura para resistir a uma força de impacto depende da tenacidade do material utilizado (Fig. 11.8).

Fig. 11.8 O acoplador de vagões é feito de um aço dúctil que tem um grande módulo de tenacidade.

Se a tensão σ_x permanecer dentro do limite de proporcionalidade do material, aplica-se a lei de Hooke e escrevemos

$$\sigma_x = E\epsilon_x \tag{11.5}$$

Substituindo σ_x de (11.5) em (11.4), temos

$$u = \int_0^{\epsilon_1} E\epsilon_x \, d\epsilon_x = \frac{E\epsilon_1^2}{2} \tag{11.6}$$

ou, usando a Equação (11.5) para expressar $_1$ em termos da tensão σ_1 correspondente,

$$u = \frac{\sigma_1^2}{2E} \tag{11.7}$$

O valor u_E da densidade de energia de deformação obtido fazendo-se $\sigma_1 = \sigma_E$ na Equação (11.7), em que σ_E é a tensão de escoamento, é chamado de *módulo de resiliência* do material. Temos

$$u_E = \frac{\sigma_E^2}{2E} \tag{11.8}$$

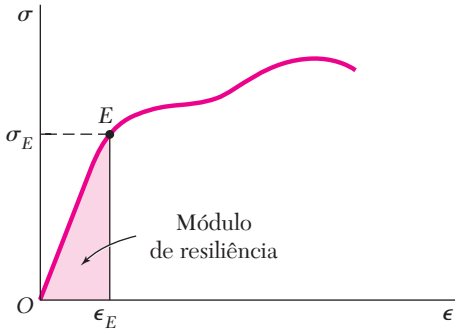


Fig. 11.9

O módulo de resiliência é igual à área sob a parte reta *OE* do diagrama tensão-deformação específica (Fig. 11.9) e representa a energia por unidade de volume que o material pode absorver sem escoar. A capacidade de uma estrutura para resistir a uma força de impacto sem se deformar permanentemente depende claramente da resiliência do material utilizado.

Como o módulo de tenacidade e o módulo de resiliência representam valores característicos da densidade de energia de deformação do material considerado, eles são ambos expressos em J/m^3 ou seus múltiplos em unidades SI.†

11.4. Energia de deformação elástica para tensões normais

Como a barra considerada na seção anterior estava submetida a tensões σ_x uniformemente distribuídas, a densidade de energia de deformação era constante em toda sua extensão e podia ser definida pela relação entre a energia de deformação U e o seu volume V, ou seja, U/V. Em um elemento estrutural ou peça de uma máquina com uma distribuição de tensão não uniforme, a densidade de energia de deformação u pode ser definida considerando-se a energia de deformação de um pequeno elemento de material de volume ΔV e escrevendo

$$u = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta V}$$

ou

$$u = \frac{dU}{dV} \tag{11.9}$$

A expressão obtida para u na Seção 11.3 em termos de σ_x e ϵ_x permanece válida, ou seja, ainda temos

$$u = \int_0^{\epsilon_x} \sigma_x \, d\epsilon_x \tag{11.10}$$

mas a tensão σ_x, a deformação específica $_x$ e a densidade de energia de deformação u geralmente irão variar de um ponto para outro.

Para valores de σ_x dentro do limite de proporcionalidade, podemos definir $\sigma_x = E\epsilon_x$ na Equação (11.10) e escrever

$$u = \frac{1}{2}E\epsilon_x^2 = \frac{1}{2}\sigma_x\epsilon_x = \frac{1}{2}\frac{\sigma_x^2}{E} \tag{11.11}$$

O valor da energia de deformação U de um corpo submetido a tensões normais uniaxiais pode ser obtido substituindo-se u da Equação (11.11) na Equação (11.9) e integrando ambos os membros. Temos

$$U = \int \frac{\sigma_x^2}{2E} dV \tag{11.12}$$

A expressão obtida é válida somente para deformações elásticas e é conhecida como *energia de deformação elástica* do corpo.

†No entanto, voltando à nota de rodapé da página 672, notamos que o módulo de tenacidade e o módulo de resiliência poderiam ser expressos nas mesmas unidades da tensão.

Energia de Deformação para Carregamento Axial. Lembramos da Seção 2.17 que, quando uma barra é submetida a um carregamento axial centrado, as tensões normais σ_x podem ser consideradas uniformemente distribuídas em uma seção transversal. Chamando de A a área da seção localizada a uma distância x da extremidade B da barra (Fig. 11.10), e por P o esforço interno naquela seção, escrevemos $\sigma_x = P/A$. Substituindo σ_x na Equação (11.12), temos

$$U = \int \frac{P^2}{2EA^2} dV$$

ou, fazendo $dV = A\,dx$,

$$U = \int_0^L \frac{P^2}{2AE} dx \tag{11.13}$$

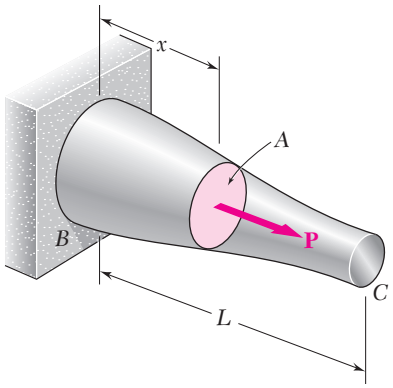


Fig. 11.10

No caso de uma barra de seção transversal uniforme sujeita em suas extremidades a forças iguais e opostas de intensidade P (Fig. 11.11), a Equação (11.13) resulta em

$$U = \frac{P^2 L}{2AE} \tag{11.14}$$

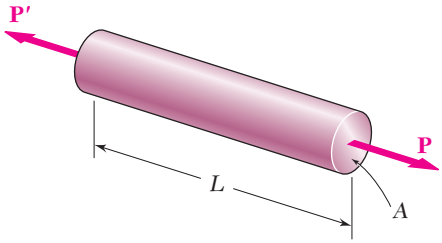


Fig. 11.11

EXEMPLO 11.1

Uma barra consiste em duas partes BC e CD do mesmo material e mesmo comprimento, mas com seções transversais diferentes (Fig. 11.12). Determine a energia de deformação da barra quando ela é submetida a uma força **P** axial centrada, expressando o resultado em termos de P, L, E, da área A da seção transversal da parte CD, e da relação n entre os dois diâmetros.

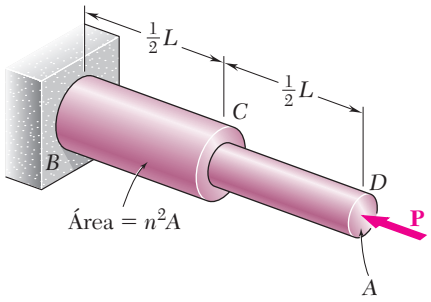


Fig. 11.12

Usamos a Equação (11.14) para calcular a energia de deformação de cada uma das duas partes e somamos as expressões obtidas:

$$U_n = \frac{P^2(\frac{1}{2}L)}{2AE} + \frac{P^2(\frac{1}{2}L)}{2(n^2A)E} = \frac{P^2 L}{4AE}\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$$

ou

$$U_n = \frac{1 + n^2}{2n^2} \frac{P^2 L}{2AE} \tag{11.15}$$

Verificamos que, para $n = 1$, temos

$$U_1 = \frac{P^2 L}{2AE}$$

que é a expressão dada na Equação (11.14) para uma barra de comprimento L e seção transversal uniforme de área A. Notamos também que, para $n > 1$, temos $U_n < U_1$; por exemplo, quando $n = 2$, temos $U_2 = (5/8)U_1$. Como a tensão máxima ocorre na parte CD da barra e é igual a $\sigma_{máx} = P/A$, conclui-se que, para uma dada tensão admissível, o aumento no diâmetro da parte BC da barra resulta em uma diminuição da capacidade de absorção de energia da barra toda. Portanto, devem ser evitadas alterações desnecessárias na área de seção transversal de elementos que devem estar sujeitos a carregamentos, como forças de impacto, em que a capacidade de absorção de energia do elemento é crítica.

EXEMPLO 11.2

Uma força **P** é suportada em *B* por duas barras do mesmo material e mesma área *A* de seção transversal (Fig. 11.13). Determine a energia de deformação do sistema.

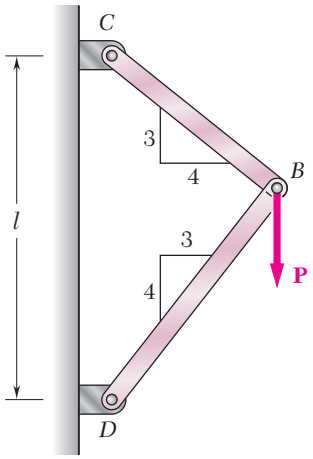


Fig. 11.13

Chamando de F_{BC} e F_{BD}, respectivamente, as forças nas barras *BC* e *BD*, e lembrando da Equação (11.14), expressamos a energia de deformação do sistema como

$$U = \frac{F_{BC}^2(BC)}{2AE} + \frac{F_{BD}^2(BD)}{2AE} \qquad (11.16)$$

Mas, pela Fig. 11.13 notamos que

$$BC = 0{,}6l \qquad BD = 0{,}8l$$

e do diagrama de corpo livre do nó *B* e do triângulo de forças

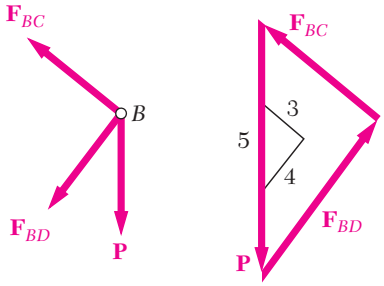


Fig. 11.14

correspondente (Fig. 11.14) temos

$$F_{BC} = +0{,}6P \qquad F_{BD} = -0{,}8P$$

Substituindo na Equação (11.16), temos

$$U = \frac{P^2l[(0{,}6)^3 + (0{,}8)^3]}{2AE} = 0{,}364\frac{P^2l}{AE}$$

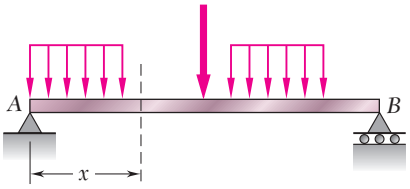


Fig. 11.15

Energia de Deformação na Flexão. Considere uma viga *AB* submetida a um carregamento (Fig. 11.15), e seja *M* o momento fletor a uma distância *x* da extremidade *A*. Desprezando por enquanto o efeito da força cortante e levando em conta somente as tensões normais $\sigma_x = My/I$, substituímos essa expressão na Equação (11.12) e escrevemos

$$U = \int \frac{\sigma_x^2}{2E}dV = \int \frac{M^2y^2}{2EI^2}dV$$

Fazendo $dV = dA\,dx$, em que dA representa um elemento de área da seção transversal, e lembrando que $M^2/2EI^2$ é uma função apenas de *x*, temos

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI^2}\left(\int y^2\,dA\right)dx$$

Lembrando que a integral dentro dos parênteses representa o momento de inércia *I* da seção transversal em relação a sua linha neutra, escrevemos

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI}dx \qquad (11.17)$$

EXEMPLO 11.3

Determine a energia de deformação da viga prismática AB em balanço (Fig. 11.16), levando em conta apenas o efeito das tensões normais.

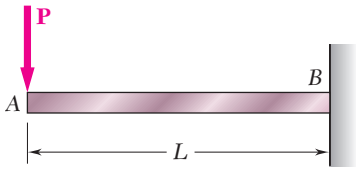


Fig. 11.16

O momento fletor a uma distância x da extremidade A é $M = -Px$. Substituindo essa expressão na Equação (11.17), escrevemos

$$U = \int_0^L \frac{P^2x^2}{2EI}dx = \frac{P^2L^3}{6EI}$$

11.5. Energia de deformação elástica para tensões de cisalhamento

Quando um material é submetido a um estado plano de tensão em cisalhamento puro τ_{xy}, a densidade de energia de deformação em um ponto pode ser expressa como

$$u = \int_0^{\gamma_{xy}} \tau_{xy}\, d\gamma_{xy} \tag{11.18}$$

em que γ_{xy} é a deformação de cisalhamento correspondente à tensão τ_{xy} (Fig. 11.17*a*). Notamos que a densidade de energia de deformação u é igual à área sob o diagrama tensão-deformação de cisalhamento (Fig. 11.17*b*).

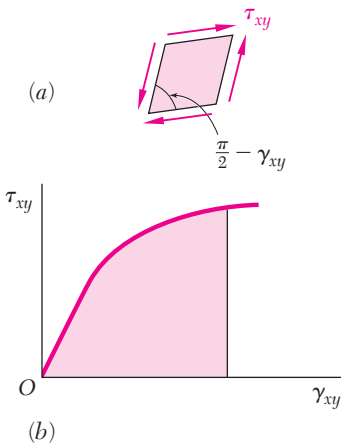


Fig. 11.17

Para valores de τ_{xy} dentro do limite de proporcionalidade, temos $\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$, em que G é o módulo de elasticidade transversal do material. Substituindo o valor de τ_{xy} na Equação (11.18) e fazendo a integração, escrevemos

$$u = \frac{1}{2}G\gamma_{xy}^2 = \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}^2}{2G} \tag{11.19}$$

O valor da energia de deformação U de um corpo sujeito a um estado plano de tensão em cisalhamento puro pode ser obtido lembrando da Seção 11.4 que

$$u = \frac{dU}{dV} \tag{11.9}$$

Substituindo u da Equação (11.19) na Equação (11.9) e integrando ambos os membros, temos

$$U = \int \frac{\tau_{xy}^2}{2G}dV \tag{11.20}$$

Essa expressão define a deformação elástica associada às deformações por cisalhamento do corpo. Assim como a expressão similar obtida na Seção 11.4 para tensões normais uniaxiais, ela é válida somente para deformações elásticas.

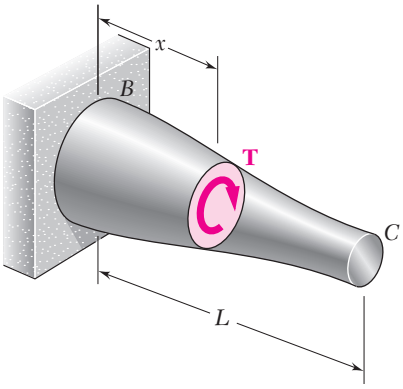


Fig. 11.18

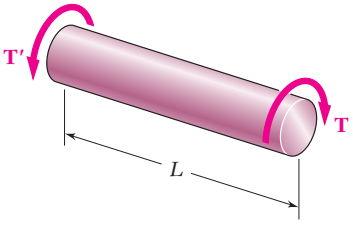


Fig. 11.19

Energia de Deformação na Torção. Considere um eixo BC de comprimento L submetido a uma ou várias cargas torçoras. Chamando de J o momento polar de inércia da seção transversal localizada a uma distância x de B (Fig. 11.18), e por T o momento torçor naquela seção, lembramos que as tensões de cisalhamento na seção são $\tau_{xy} = T\rho/J$. Substituindo τ_{xy} na Equação (11.20), temos

$$U = \int \frac{\tau_{xy}^2}{2G} dV = \int \frac{T^2\rho^2}{2GJ^2} dV$$

Fazendo $dV = dA\, dx$, em que dA representa um elemento de área da seção transversal, e observando que $T^2/2GJ^2$ é uma função de x apenas, escrevemos

$$U = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ^2} \left(\int \rho^2\, dA \right) dx$$

Lembrando que a integral dentro dos parênteses representa o momento polar de inércia J da seção transversal, temos

$$U = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ} dx \tag{11.21}$$

No caso de um eixo de seção transversal uniforme submetido nas suas extremidades a cargas torçoras iguais e opostas de intensidade T (Fig. 11.19), a Equação (11.21) resulta em

$$U = \frac{T^2 L}{2GJ} \tag{11.22}$$

EXEMPLO 11.4

Um eixo circular consiste em duas partes BC e CD do mesmo material e mesmo comprimento, mas com seções transversais diferentes (Fig. 11.20). Determine a energia de deformação do eixo quando ele é submetido a uma carga torçora **T** na extremidade D, expressando o resultado em termos de T, L, G, do momento polar de inércia J da menor seção transversal e da relação n dos dois diâmetros.

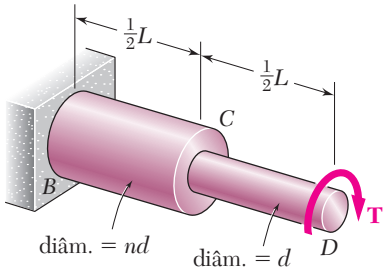


Fig. 11.20

Usamos a Equação (11.22) para calcular a energia de deformação de cada uma das duas partes do eixo e somamos as expressões obtidas. Observando que o momento polar de inércia da parte BC é igual a n^4J, escrevemos

$$U_n = \frac{T^2(\frac{1}{2}L)}{2GJ} + \frac{T^2(\frac{1}{2}L)}{2G(n^4J)} = \frac{T^2L}{4GJ}\left(1 + \frac{1}{n^4}\right)$$

ou

$$U_n = \frac{1 + n^4}{2n^4} \frac{T^2L}{2GJ} \tag{11.23}$$

Verificamos que, para $n = 1$, temos

$$U_1 = \frac{T^2L}{2GJ}$$

que é a expressão dada na Equação (11.22) para um eixo de comprimento L e seção transversal uniforme. Notamos também que, para $n > 1$, temos $U_n < U_1$; por exemplo, quando $n = 2$, temos $U_2 = (\frac{17}{32})\, U_1$. Como a tensão de cisalhamento máxima ocorre na parte CD do eixo e é proporcional ao torque T, observamos como fizemos, anteriormente, no caso de carregamento axial na barra que, para uma dada tensão admissível, o aumento do diâmetro da parte BC do eixo resulta em uma diminuição da capacidade de absorção de energia do eixo todo.

Energia de Deformação para Forças Transversais. Na Seção 11.4 obtivemos uma expressão para a energia de deformação de uma viga submetida a um carregamento transversal. No entanto, ao deduzirmos aquela expressão, levamos em conta somente o efeito das tensões normais em virtude da flexão e desprezamos o efeito das tensões de cisalhamento. No Exemplo 11.5 ambos os tipos de tensão serão levados em consideração.

EXEMPLO 11.5

Determine a energia de deformação da viga AB de seção retangular em balanço (Fig. 11.21), levando em conta o efeito das tensões normal e de cisalhamento.

Primeiro lembramos do Exemplo 11.3 que a energia de deformação em virtude das tensões normais σ_x é

$$U_\sigma = \frac{P^2L^3}{6EI}$$

Para determinarmos a energia de deformação U_τ em virtude de tensões de cisalhamento τ_{xy}, usamos a Equação (6.9) da Seção 6.4 e verificamos que, para uma viga de seção transversal retangular com largura b e altura h,

$$\tau_{xy} = \frac{3}{2}\frac{V}{A}\left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right) = \frac{3}{2}\frac{P}{bh}\left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right)$$

Substituindo τ_{xy} na Equação (11.20), escrevemos

$$U_\tau = \frac{1}{2G}\left(\frac{3}{2}\frac{P}{bh}\right)^2 \int\left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right)^2 dV$$

ou, fazendo $dV = b\,dy\,dx$, e após as reduções,

$$U_\tau = \frac{9P^2}{8Gbh^2}\int_{-c}^{c}\left(1 - 2\frac{y^2}{c^2} + \frac{y^4}{c^4}\right)dy\int_0^L dx$$

Executando as integrações, e lembrando que $c = h/2$, temos

$$U_\tau = \frac{9P^2L}{8Gbh^2}\left[y - \frac{2}{3}\frac{y^3}{c^2} + \frac{1}{5}\frac{y^5}{c^4}\right]_{-c}^{+c} = \frac{3P^2L}{5Gbh} = \frac{3P^2L}{5GA}$$

A energia de deformação total da viga é então

$$U = U_\sigma + U_\tau = \frac{P^2L^3}{6EI} + \frac{3P^2L}{5GA}$$

ou, observando que $I/A = h^2/12$ e fatorando a expressão para U_σ,

$$U = \frac{P^2L^3}{6EI}\left(1 + \frac{3Eh^2}{10GL^2}\right) = U_\sigma\left(1 + \frac{3Eh^2}{10GL^2}\right) \qquad (11.24)$$

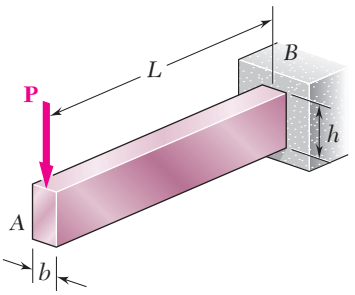


Fig. 11.21

Recordando da Seção 2.14 que $G \geq E/3$, concluímos que o termo entre parênteses na expressão obtida é menor que $1 + 0{,}9(h/L)^2$ e, portanto, que o erro relativo é menor que $0{,}9(h/L)^2$ quando o efeito do cisalhamento é desprezado. Para uma viga com uma relação h/L menor que $1/10$, o erro percentual é menor que 0,9%. Portanto, é normal na engenharia desprezar o efeito do cisalhamento ao calcular-se a energia de deformação de vigas delgadas.

11.6. Energia de deformação para um estado geral de tensão

Nas seções anteriores, determinamos a energia de deformação de um corpo em um estado de tensão uniaxial (Seção 11.4) e em um estado plano de tensão em cisalhamento puro (Seção 11.5). No caso de um corpo em um estado geral de tensão caracterizado pelos seis componentes de tensão σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz} e τ_{zx}, a densidade de energia de deformação pode ser obtida somando-se as expressões dadas nas Equações (11.10) e (11.18), bem como as outras quatro expressões obtidas pela permutação dos índices.

No caso da deformação elástica de um corpo isotrópico, cada uma das seis relações tensão-deformação envolvida é linear, e a densidade de energia de deformação pode ser expressa como

$$u = \tfrac{1}{2}(\sigma_x\epsilon_x + \sigma_y\epsilon_y + \sigma_z\epsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}) \tag{11.25}$$

Lembrando das relações (2.38) obtidas na Seção 2.14 e substituindo os componentes de deformação na (11.25) temos, para o estado mais geral de tensão em um dado ponto de um corpo elástico isotrópico,

$$u = \frac{1}{2E}[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x)] + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \tag{11.26}$$

Se os eixos principais em um ponto forem usados como eixos de coordenadas, as tensões de cisalhamento se tornam zero e a Equação (11.26) se reduz a

$$u = \frac{1}{2E}[\sigma_a^2 + \sigma_b^2 + \sigma_c^2 - 2\nu(\sigma_a\sigma_b + \sigma_b\sigma_c + \sigma_c\sigma_a)] \tag{11.27}$$

em que σ_a, σ_b e σ_c são as tensões principais no ponto dado.

Recordamos agora da Seção 7.7 que um dos critérios usados para prever se um estado de tensão provocará escoamento em um material dúctil, ou seja, o critério da máxima energia de distorção baseia-se na determinação da energia por unidade de volume associada à distorção ou alteração na forma daquele material. Vamos então tentar separar em duas partes a densidade de energia de deformação u em um ponto: uma parte u_v associada à alteração de volume do material nesse ponto, e uma parte u_d associada à distorção, ou mudança na forma, do material naquele mesmo ponto. Escrevemos

$$u = u_v + u_d \tag{11.28}$$

Para determinarmos u_v e u_d, introduzimos o *valor médio* $\overline{\sigma}$ das tensões principais no ponto considerado,

$$\overline{\sigma} = \frac{\sigma_a + \sigma_b + \sigma_c}{3} \tag{11.29}$$

e fazemos

$$\sigma_a = \overline{\sigma} + \sigma_a' \qquad \sigma_b = \overline{\sigma} + \sigma_b' \qquad \sigma_c = \overline{\sigma} + \sigma_c' \tag{11.30}$$

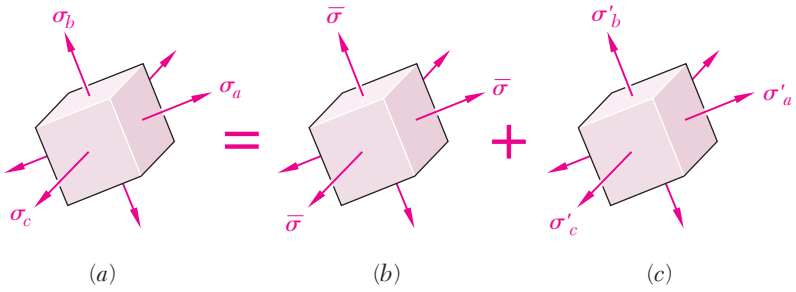


Fig. 11.22

Assim, o estado de tensão (Fig. 11.22*a*) pode ser obtido superpondo os estados de tensão mostrados na Fig. 11.22*b* e *c*. Observamos que o estado de tensão descrito na Fig. 11.22*b* tende a mudar o volume do elemento de material, mas não sua forma, já que todas as faces do elemento estão submetidas à mesma tensão $\overline{\sigma}$. No entanto, conclui-se das Equações (11.29) e (11.30) que

$$\sigma'_a + \sigma'_b + \sigma'_c = 0 \tag{11.31}$$

que indica que algumas das tensões mostradas na Fig. 11.22*c* são de tração e outras de compressão. Assim, esse estado de tensão tende a mudar a forma do elemento. No entanto, ele não tende a mudar o volume. Sem dúvida, examinando a Equação (2.31) da Seção 2.13, notamos que a dilatação e (a mudança de volume por unidade de volume) provocada por esse estado de tensão é

$$e = \frac{1 - 2\nu}{E}(\sigma'_a + \sigma'_b + \sigma'_c)$$

ou $e = 0$, em vista da Equação (11.31). Com base nessas observações concluímos que a parte u_v da densidade de energia de deformação deve ser associada ao estado de tensão mostrado na Fig. 11.22*b*, enquanto a parte u_d deve ser associada ao estado de tensão mostrado na Fig. 11.22*c*.

Conclui-se que a parte u_v da densidade de energia de deformação correspondente a uma variação de volume do elemento pode ser obtida substituindo-se $\overline{\sigma}$ para cada uma das tensões principais na Equação (11.27). Temos

$$u_v = \frac{1}{2E}[3\overline{\sigma}^2 - 2\nu(3\overline{\sigma}^2)] = \frac{3(1 - 2\nu)}{2E}\overline{\sigma}^2$$

ou, lembrando da Equação (11.29),

$$u_v = \frac{1 - 2\nu}{6E}(\sigma_a + \sigma_b + \sigma_c)^2 \tag{11.32}$$

A parte da densidade de energia de deformação correspondente à distorção do elemento é obtida resolvendo-se a Equação (11.28) para u_d e substituindo u e u_v das Equações (11.27) e (11.32), respectivamente. Escrevemos

$$u_d = u - u_v = \frac{1}{6E}[3(\sigma_a^2 + \sigma_b^2 + \sigma_c^2) - 6\nu(\sigma_a\sigma_b + \sigma_b\sigma_c + \sigma_c\sigma_a) - (1 - 2\nu)(\sigma_a + \sigma_b + \sigma_c)^2]$$

Expandindo o quadrado e rearranjando os termos, temos

$$u_d = \frac{1 + \nu}{6E}[(\sigma_a^2 - 2\sigma_a\sigma_b + \sigma_b^2) + (\sigma_b^2 - 2\sigma_b\sigma_c + \sigma_c^2) + (\sigma_c^2 - 2\sigma_c\sigma_a + \sigma_a^2)]$$

Observando que cada um dos parênteses dentro do colchete é um quadrado perfeito e lembrando da Equação (2.43) da Seção 2.15 que o coeficiente na frente do colchete é igual a $1/12G$, obtemos a seguinte expressão para a parte u_d da densidade de energia de deformação, isto é, para a energia de distorção por unidade de volume,

$$u_d = \frac{1}{12G}[(\sigma_a - \sigma_b)^2 + (\sigma_b - \sigma_c)^2 + (\sigma_c - \sigma_a)^2] \tag{11.33}$$

No caso de *estado plano de tensão*, e considerando que o eixo c é perpendicular ao plano de tensão, temos $\sigma_c = 0$ e a Equação (11.33) se reduz a

$$u_d = \frac{1}{6G}(\sigma_a^2 - \sigma_a\sigma_b + \sigma_b^2) \tag{11.34}$$

Considerando o caso particular de um corpo de prova em ensaio de tração, notamos que, no escoamento, temos $\sigma_a = \sigma_E$, $\sigma_b = 0$ e, portanto, $(u_d)_E = \sigma_E^2/6G$. O critério da máxima energia de distorção para um estado plano de tensão indica que um estado de tensão é seguro desde que $u_d < (u_d)_E$ ou, substituindo u_d da Equação (11.34), tem-se

$$\sigma_a^2 - \sigma_a\sigma_b + \sigma_b^2 < \sigma_E^2 \tag{7.26}$$

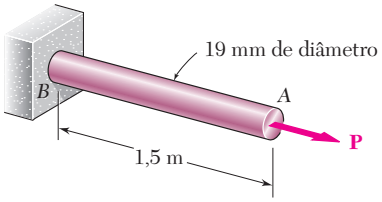
que é a condição estabelecida na Seção 7.7 e representada graficamente pela elipse da Fig. 7.41. No caso de um estado geral de tensão, deverá ser usada a expressão (11.33) obtida para u_d. Nesse caso, o critério da máxima energia de distorção é expresso então pela condição,

$$(\sigma_a - \sigma_b)^2 + (\sigma_b - \sigma_c)^2 + (\sigma_c - \sigma_a)^2 < 2\sigma_E^2 \tag{11.35}$$

que indica que um estado de tensão é seguro se o ponto de coordenadas σ_a, σ_b, σ_c estiver localizado dentro da superfície definida pela equação

$$(\sigma_a - \sigma_b)^2 + (\sigma_b - \sigma_c)^2 + (\sigma_c - \sigma_a)^2 = 2\sigma_E^2 \tag{11.36}$$

Essa superfície é um cilindro circular de raio $\sqrt{2/3}\,\sigma_E$ com um eixo de simetria formando ângulos iguais aos três eixos principais de tensão.



PROBLEMA RESOLVIDO 11.1

Durante uma operação de rotina de fabricação, a barra AB deve adquirir uma energia de deformação elástica de 14 N · m. Usando $E = 200$ GPa, determine a tensão de escoamento necessária para o aço se o coeficiente de segurança em relação à deformação permanente deve ser 5.

SOLUÇÃO

Coeficiente de segurança. Como é necessário um coeficiente de segurança igual a 5, a barra deve ser projetada para uma energia de deformação de

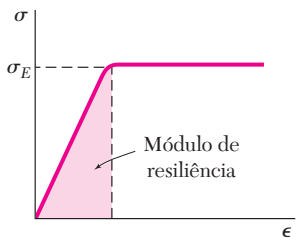
$$U = 5(14) = 70 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Densidade de energia de deformação. O volume da barra é

$$V = AL = \frac{\pi}{4}(0{,}019 \text{ m})^2(1{,}5 \text{ m}) = 4{,}253 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

Como a barra tem seção transversal uniforme, a densidade de energia de deformação necessária é

$$u = \frac{U}{V} = \frac{70 \text{ N} \cdot \text{m}}{4{,}253 \times 10^{-4} \text{ m}^3} = 164590 \text{ N} \cdot \text{m/m}^3$$

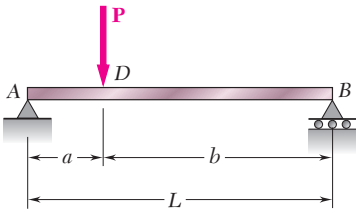


Tensão de escoamento. Lembramos que o módulo de resiliência é igual à densidade de energia de deformação quando a tensão máxima é igual a σ_E. Usando a Equação (11.8), escrevemos

$$u = \frac{\sigma_E^2}{2E}$$

$$164590 \text{ N} \cdot \text{m/m}^3 = \frac{\sigma_E^2}{2(200 \times 10^9 \text{ N/m}^2)} \qquad \sigma_E = 256{,}6 \text{ MPa} \blacktriangleleft$$

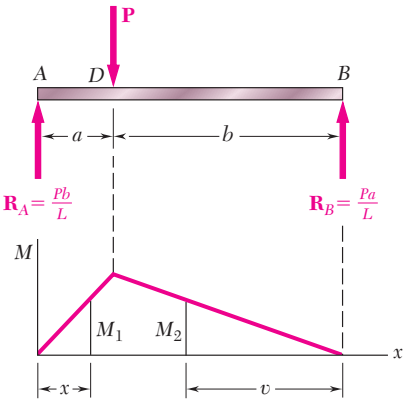
Comentário. É importante observar que, como as cargas de energia não estão linearmente relacionadas com as tensões que elas produzem, os coeficientes de segurança associados às cargas de energia deverão ser aplicados às cargas de energia, e não às tensões.



PROBLEMA RESOLVIDO 11.2

(*a*) Levando em conta apenas o efeito das tensões normais em virtude da flexão, determine a energia de deformação da viga prismática *AB* para o carregamento mostrado. (*b*) Avalie a energia de deformação, sabendo que a viga é um perfil W250 × 67, $P = 180$ kN, $L = 3{,}6$ m, $a = 0{,}9$ m, $b = 2{,}7$ m e $E = 200$ GPa.

SOLUÇÃO



Momento fletor. Usando o diagrama de corpo livre da barra inteira, determinamos as reações

$$\mathbf{R}_A = \frac{Pb}{L}\uparrow \qquad \mathbf{R}_B = \frac{Pa}{L}\uparrow$$

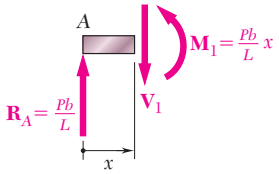
Para a parte *AD* da viga, o momento fletor é

$$M_1 = \frac{Pb}{L}x$$

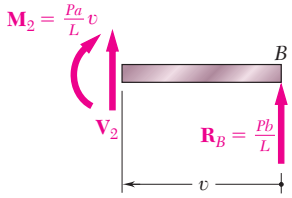
Para a parte *DB*, o momento fletor a uma distância *v* da extremidade *B* é

$$M_2 = \frac{Pa}{L}v$$

De *A* até *D*:



De *B* até *D*:



***a.* Energia de deformação.** Como a energia de deformação é uma grandeza escalar, somamos a energia de deformação da parte *AD* com a energia de deformação da parte *DB* para obter a energia de deformação total da viga. Usando a Equação (11.17), escrevemos

$$\begin{aligned} U &= U_{AD} + U_{DB} \\ &= \int_0^a \frac{M_1^2}{2EI}\,dx + \int_0^b \frac{M_2^2}{2EI}\,dv \\ &= \frac{1}{2EI}\int_0^a \left(\frac{Pb}{L}x\right)^2 dx + \frac{1}{2EI}\int_0^b \left(\frac{Pa}{L}v\right)^2 dv \\ &= \frac{1}{2EI}\frac{P^2}{L^2}\left(\frac{b^2a^3}{3} + \frac{a^2b^3}{3}\right) = \frac{P^2a^2b^2}{6EIL^2}(a+b) \end{aligned}$$

ou, como $(a + b) = L$,

$$U = \frac{P^2a^2b^2}{6EIL} \blacktriangleleft$$

***b.* Avaliação da energia de deformação.** O momento de inércia de um perfil de aço laminado W250 × 67 é obtido do Apêndice C. Este e os dados fornecidos são reproduzidos abaixo.

$$\begin{aligned} P &= 180\text{ kN} & L &= 3{,}6\text{ m} \\ a &= 0{,}9\text{ m} & b &= 2{,}7\text{ m} \\ E &= 200\text{ GPa} = 200 \times 10^6\text{ kN/m}^2 & I &= 104 \times 10^{-6}\text{ m}^4 \end{aligned}$$

Substituindo esses valores na expressão de *U* temos

$$U = \frac{(180\text{ kN})^2(0{,}9\text{ m})^2(2{,}7\text{ m})^2}{6(200 \times 10^6\text{ kN/m}^2)(104 \times 10^{-6}\text{ m}^4)(3{,}6\text{ m})} \qquad U = 0{,}426\text{ kN}\cdot\text{m} \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

11.1 Determine o módulo de resiliência de cada uma das seguintes ligas de alumínio:

(*a*) 1100-H14: $E = 70$ GPa $\sigma_E = 55$ MPa
(*b*) 2014-T6 $E = 72$ GPa: $\sigma_E = 220$ MPa
(*c*) 6061-T6 $E = 69$ GPa: $\sigma_E = 150$ MPa

11.2 Determine o módulo de resiliência para cada um dos seguintes tipos de aço estrutural:

(*a*) ASTM A709 Grau 50: $\sigma_E = 345$ MPa
(*b*) ASTM A913 Grau 65: $\sigma_E = 448$ MPa
(*c*) ASTM A709 Grau 100: $\sigma_E = 690$ MPa

11.3 Determine o módulo de resiliência das seguintes ligas metálicas:

(*a*) Titânio: $E = 114$ GPa $\sigma_E = 827$ MPa
(*b*) Magnésio: $E = 44{,}8$ GPa $\sigma_E = 200$ MPa
(*c*) Cobre-Níquel(recozido) $E = 138$ GPa $\sigma_E = 110$ MPa

11.4 Determine o módulo de resiliência de cada um dos seguintes metais:

(*a*) Aço inoxidável
AISI 302 (recozido): $E = 190$ GPa $\sigma_E = 260$ MPa
(*b*) Aço inoxidável
AISI 302 (laminado a frio): $E = 190$ GPa $\sigma_E = 520$ MPa
(*c*) Ferro fundido maleável: $E = 165$ GPa $\sigma_E = 230$ MPa

11.5 O diagrama tensão-deformação específica mostrado na figura foi construído com base em dados obtidos durante um ensaio de tração de um corpo de prova de um aço estrutural. Usando $E = 200$ GPa, determine (*a*) o módulo de resiliência do aço e (*b*) o seu módulo de tenacidade.

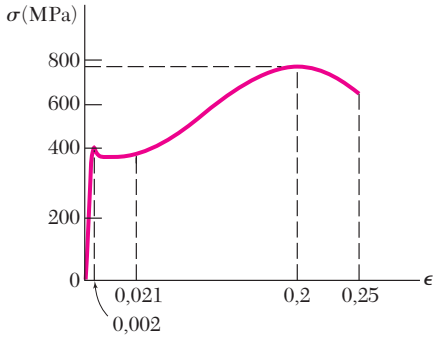


Fig. P11.5

11.6 O diagrama tensão-deformação específica mostrado na figura foi construído com base em dados obtidos durante um ensaio de tração de uma liga de alumínio. Usando $E = 72$ GPa, determine (*a*) o módulo de resiliência da liga e (*b*) o seu módulo de tenacidade.

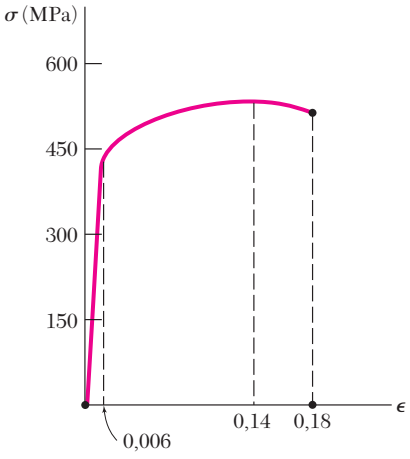


Fig. P11.6

11.7 O diagrama tensão-deformação mostrado foi construído com base em dados obtidos durante um teste de tração de um aço estrutural. Sabendo que a área da seção transversal do corpo de prova é de 250 mm^2 e que a deformação foi medida usando-se um comprimento de referência de 500 mm, determine (*a*) o módulo de resiliência do aço e (*b*) o seu módulo de tenacidade.

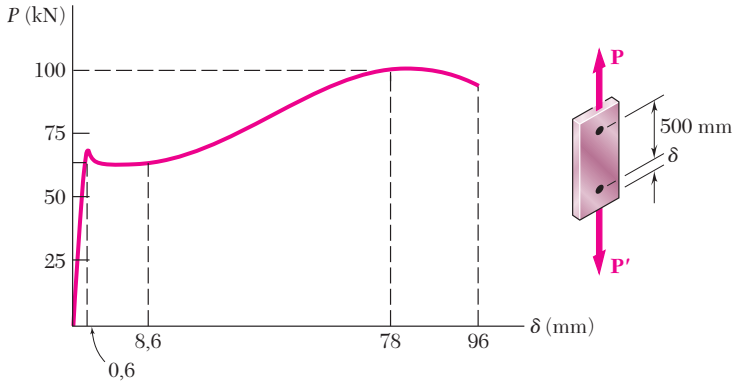


Fig. P11.7

11.8 O diagrama tensão-deformação mostrado foi construído com base em dados obtidos durante um teste de tração de uma barra de uma liga de alumínio, com um diâmetro de 22,2 mm. Sabendo que a deformação foi medida usando-se um comprimento de referência de 381 mm, determine (*a*) o módulo de resiliência da liga e (*b*) o seu módulo de tenacidade.

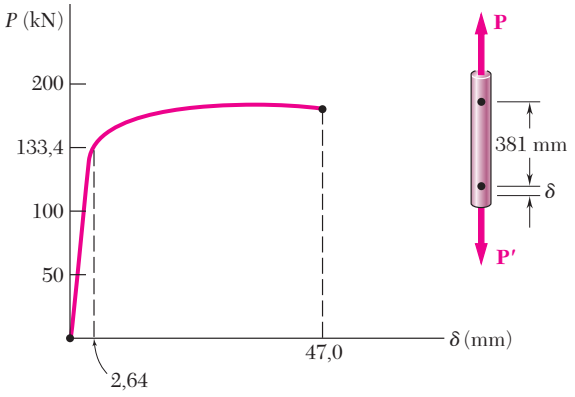


Fig. *P11.8*

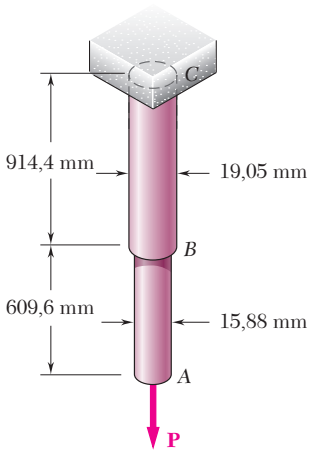


Fig. P11.9

11.9 Usando $E = 200$ GPa, determine (*a*) a energia de deformação da barra de aço *ABC* quando $P = 35{,}6$ kN e (*b*) a densidade de energia de deformação correspondente nas partes *AB* e *BC* da barra.

11.10 Usando $E = 200$ GPa, determine (*a*) a energia de deformação da barra de aço *ABC* quando $P = 25$ kN e (*b*) a densidade de energia de deformação correspondente nas partes *AB* e *BC* da barra.

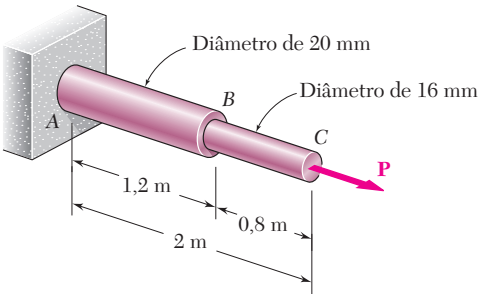


Fig. P11.10

11.11 Um tubo de alumínio com comprimento de 762 mm e seção transversal de área de 1194 mm^2 é soldado a um suporte fixo *A* e a uma tampa rígida *B*. A barra de aço *EF*, de 19,1 mm de diâmetro, é soldada à tampa *B*. Sabendo que o módulo de elasticidade é de 200 GPa para o aço e 74 GPa para o alumínio, determine (*a*) a energia de deformação total do sistema quando $P = 44{,}5$ kN e (*b*) a densidade de energia de deformação correspondente do tubo *CD* e na barra *EF*.

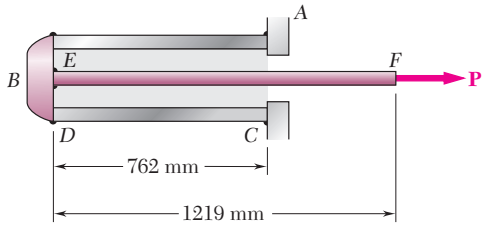


Fig. P11.11

11.12 A barra *AB* é feita de um aço para o qual a tensão de escoamento é $\sigma_E = 450$ MPa e $E = 200$ GPa; a barra *BC* é feita de uma liga de alumínio para a qual $\sigma_E = 280$ MPa e $E = 73$ GPa. Determine a energia de deformação máxima que pode ser armazenada pela barra *ABC* composta sem provocar quaisquer deformações permanentes.

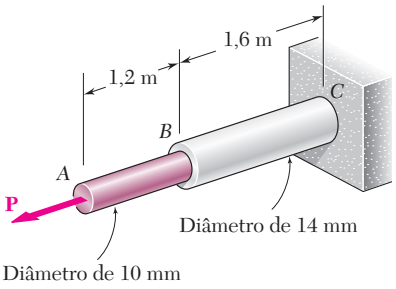


Fig. *P11.12*

11.13 As barras *AB* e *BC* são feitas de um aço para o qual a tensão de escoamento é $\sigma_E = 300$ MPa e o módulo de elasticidade é $E = 200$ GPa. Determine a máxima energia de deformação que pode ser adquirida pelo conjunto sem provocar deformação permanente quando o comprimento *a* da barra *AB* for (*a*) 2 m e (*b*) 4 m.

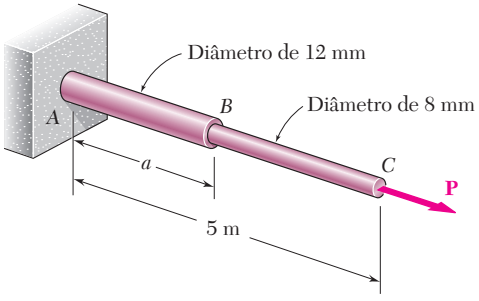


Fig. P11.13

11.14 A barra *BC* é feita de um aço para o qual a tensão de escoamento é $\sigma_E = 300$ MPa e o módulo de elasticidade é $E = 200$ GPa. Sabendo que a energia de deformação de 10 J deve ser adquirida pela barra quando lhe for aplicada a força axial **P**, determine o diâmetro da barra para o qual o coeficiente de segurança com relação à deformação permanente seja 6.

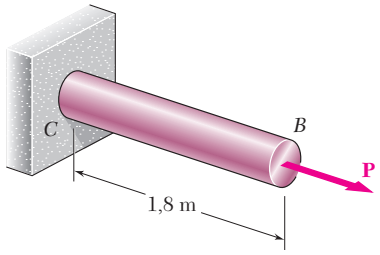


Fig. *P11.14*

11.15 Usando $E = 73{,}1$ GPa, determine de forma aproximada a máxima energia de deformação que a barra de alumínio acumulará se a tensão normal admissível é $\sigma_{adm} = 151{,}7$ MPa.

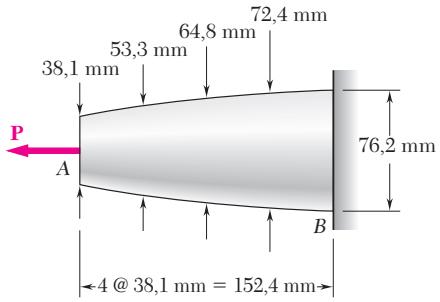


Fig. P11.15

11.16 Mostre, por integração, que a energia de deformação da barra cônica, *AB* é

$$U = \frac{1}{4}\frac{P^2L}{EA_{mín}}$$

em que $A_{mín}$ é a área da seção transversal na extremidade *B*.

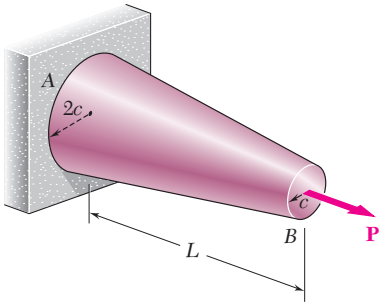


Fig. P11.16

11.17 até 11.20 Na treliça mostrada, todos os elementos são feitos do mesmo material e têm a área da seção transversal indicada. Determine a energia de deformação da treliça quando lhe é aplicada a força **P**.

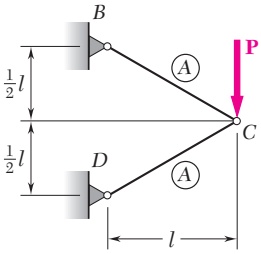


Fig. P11.17

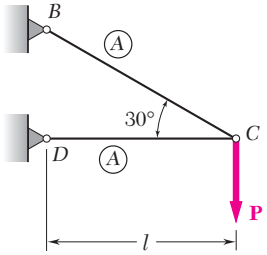


Fig. P11.18

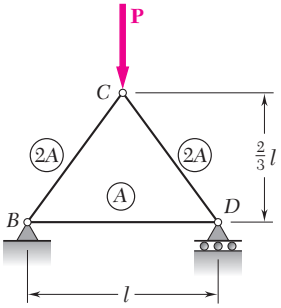


Fig. *P11.19*

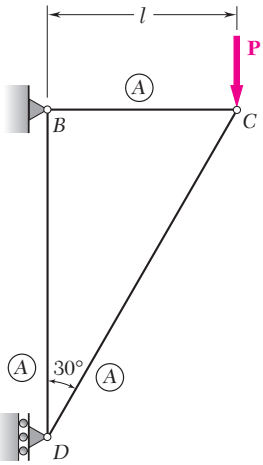


Fig. P11.20

11.21 Na treliça mostrada, todas as barras são feitas de alumínio e tem a área de seção transversal indicada na figura. Usando $E = 72$ GPa, determine a energia de deformação da treliça para o carregamento mostrado.

11.22 Resolva o Problema 11.21, considerando que a força de 120 kN é removida.

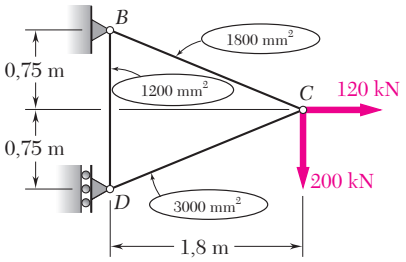


Fig. P11.21 e *P11.22*

11.23 até 11.26 Levando em conta apenas o efeito das tensões normais, determine a energia de deformação da viga prismática *AB* para o carregamento mostrado.

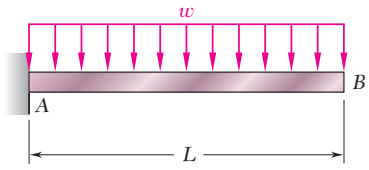


Fig. P11.23

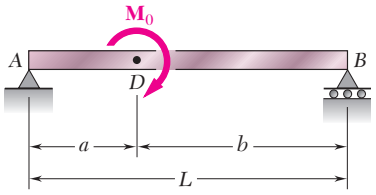


Fig. P11.24

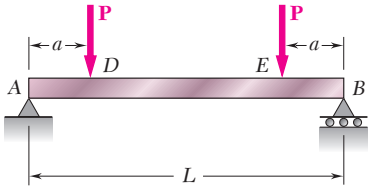


Fig. *P11.25*

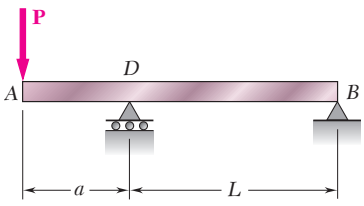


Fig. P11.26

11.27 Considerando que a viga prismática AB tem uma seção transversal retangular, mostre que para o carregamento indicado o valor máximo da densidade de energia de deformação na viga é

$$u_{\text{máx}} = \frac{45}{8}\frac{U}{V}$$

em que U é a energia de deformação da viga e V é o seu volume.

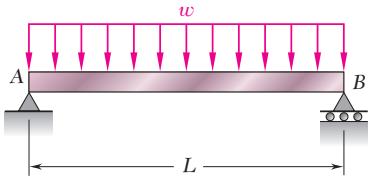


Fig. P11.27

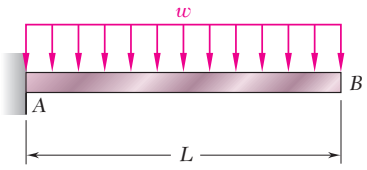


Fig. P11.28

11.28 Considerando que a viga prismática AB tem uma seção transversal retangular, mostre que para o carregamento indicado o valor máximo da densidade de energia de deformação na viga é

$$u_{\text{máx}} = \frac{45}{8}\frac{U}{V}$$

em que U é a energia de deformação da viga e V é seu volume.

11.29 e 11.31 Usando $E = 200$ GPa, determine a energia de deformação devido à flexão, para a barra de aço e o carregamento mostrado.

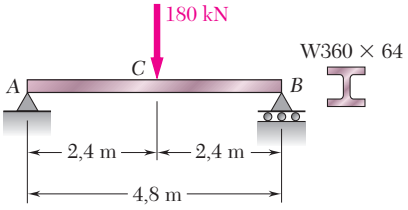


Fig. P11.29

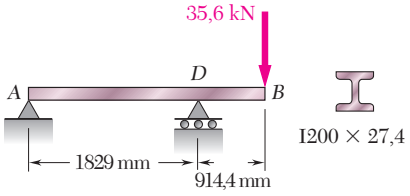


Fig. P11.30

11.30 e *11.32* Usando $E = 200$ GPa, determine a energia de deformação devido à flexão, para a barra de aço e o carregamento mostrado.

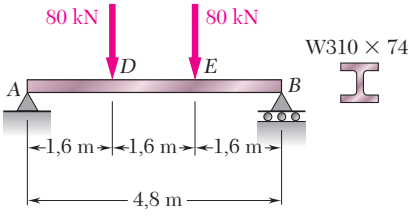


Fig. P11.31

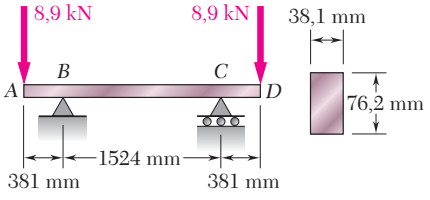


Fig. *P11.32*

11.33 O navio em *A* começou a perfurar um poço de petróleo no fundo do oceano a uma profundidade de 1524 m. A broca de perfuração de aço em forma de tubo tem um diâmetro externo de 203,2 mm e uma espessura de parede uniforme de 12,7 mm. Sabendo que o topo da broca gira duas voltas completas até que ela em *B* comece a operar e usando $G = 77{,}2$ GPa, determine a máxima energia de deformação armazenada na broca.

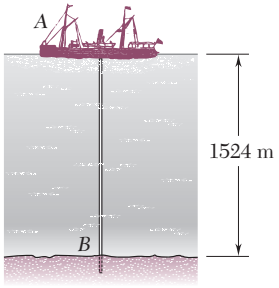


Fig. P11.33

11.34 A barra *AC* é feita de alumínio e está submetida a um torque **T** aplicado em **C**. Sabendo que $G = 73$ GPa e que a parte *BC* da barra é vazada e tem um diâmetro interno de 16 mm, determine a energia de deformação da barra para uma tensão de cisalhamento máxima de 120 MPa.

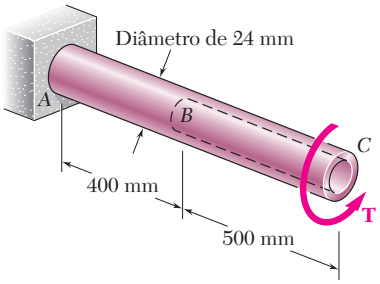


Fig. P11.34

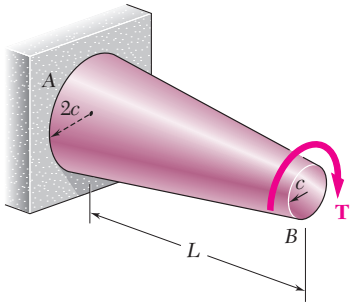


Fig. P11.35

11.35 Mostre por integração que a energia de deformação na barra cônica *AB* é

$$U = \frac{7}{48}\frac{T^2L}{GJ_{\text{mín}}}$$

em que $J_{\text{mín}}$ é o momento polar de inércia da barra na extremidade *B*.

11.36 O estado de tensão mostrado na figura ocorre em um componente de máquina feito de um tipo de latão para o qual $\sigma_E = 160$ MPa. Usando o critério da máxima energia de distorção, determine se ocorre o escoamento quando (*a*) $\sigma_z = +45$ MPa e (*b*) $\sigma_z = -45$ MPa.

11.37 O estado de tensão mostrado na figura ocorre em um componente de máquina feito de um tipo de latão para o qual $\sigma_E = 160$ MPa. Usando o critério da máxima energia de distorção, determine o intervalo de valores de σ_z para o qual não ocorre o escoamento.

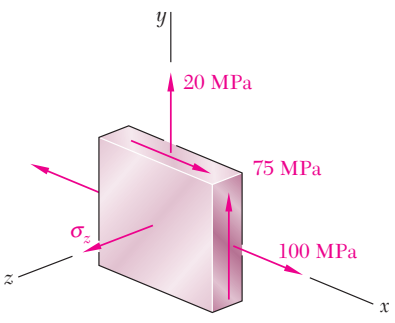


Fig. *P11.36* e P11.37

11.38 O estado de tensão mostrado na figura ocorre em um componente de máquina feito de um tipo de aço para o qual $\sigma_E = 448$ MPa. Usando o critério da máxima energia de distorção, determine o coeficiente de segurança associado à tensão de escoamento quando (*a*) $\sigma_y = +110{,}3$ MPa e (*b*) $\sigma_y = -110{,}3$ MPa.

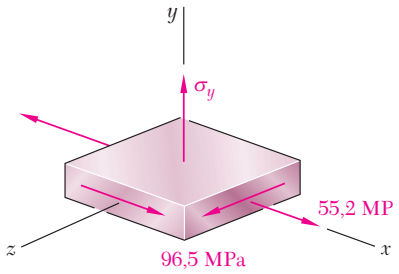


Fig. P11.38 e *P11.39*

11.39 O estado de tensão mostrado na figura ocorre em um componente de máquina feito de um tipo de aço para o qual $\sigma_E = 448$ MPa. Usando o critério da máxima energia de distorção, determine o intervalo de valores de σ_y para o qual o coeficiente de segurança associado à tensão de escoamento é igual ou maior do que 2,2.

11.40 Determine a energia de deformação da viga prismática *AB*, levando em conta o efeito das tensões normal e de cisalhamento.

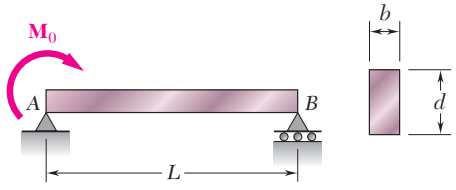


Fig. P11.40

***11.41** Um suporte para isolamento de vibrações é feito colando-se uma barra A, de raio R_1, e um tubo B, de raio interno R_2, a um cilindro vazado de borracha. Denotando por G o módulo de rigidez da borracha, determine a energia de deformação do cilindro vazado de borracha para o carregamento mostrado.

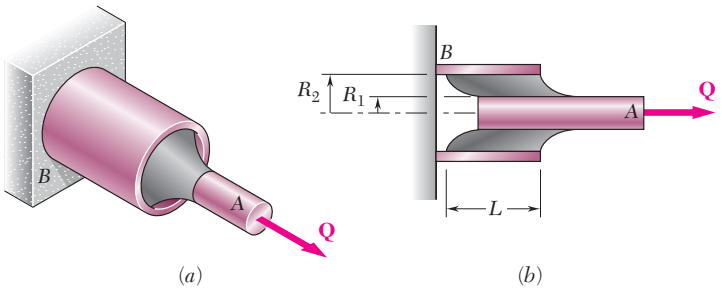


Fig. P11.41

11.7. Carregamento por impacto

Considere a barra BD de seção transversal uniforme, golpeada em sua extremidade B por um corpo de massa m movendo-se com uma velocidade $\mathbf{v}_0$ (Fig. 11.23*a*). Como a barra se deforma pelo impacto (Fig. 11.23*b*), desenvolvem-se tensões no seu interior e elas atingem um valor máximo σ_m. Após vibrar por alguns instantes, a barra voltará ao repouso, e todas as tensões desaparecerão. Essa sequência de eventos é conhecida como *carregamento por impacto* (Fig. 11.24).

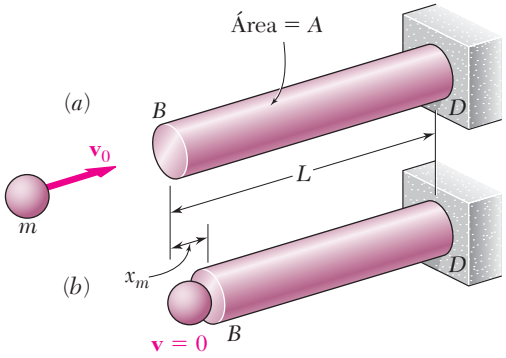


Fig. 11.23

Para determinarmos o valor máximo σ_m da tensão que ocorre em um ponto de uma estrutura submetida a um carregamento por impacto, vamos estabelecer algumas hipóteses simplificadoras.

Primeiro, consideramos que a energia cinética $T = \frac{1}{2}mv_0^2$ do corpo que se choca é transferida inteiramente para a estrutura e, portanto, que a energia de deformação U_m correspondente à deformação máxima x_m é

$$U_m = \tfrac{1}{2}mv_0^2 \tag{11.37}$$

Essa suposição nos leva a duas condições específicas:

1. Nenhuma energia será dissipada durante o impacto.
2. O corpo que se choca não deve saltar para fora da estrutura, retendo parte de sua energia. Isso, por sua vez, exige que a inércia da estrutura seja desprezível, comparada com a inércia do corpo que se choca.

Na prática, nenhuma dessas condições é satisfeita, e somente parte da energia cinética do corpo que se choca é realmente transferida para a estrutura. Portanto, o fato de considerar que toda a energia cinética do corpo que se choca é transferida para a estrutura leva a um projeto a favor da segurança daquela estrutura.

Consideramos ainda que o diagrama tensão-deformação específica obtido de um teste estático do material é válido também quando se tem carregamento por impacto. Assim, para uma deformação elástica da estrutura, podemos expressar o valor máximo da energia de deformação como

$$U_m = \int \frac{\sigma_m^2}{2E}dV \tag{11.38}$$

No caso da barra uniforme da Fig. 11.23, a tensão máxima σ_m tem o mesmo valor ao longo de toda a barra, e escrevemos $U_m = \sigma_m^2 V/2E$. Resolvendo para σ_m e substituindo U_m dado pela Equação (11.37), escrevemos

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{2U_m E}{V}} = \sqrt{\frac{mv_0^2 E}{V}} \tag{11.39}$$

Notamos pela expressão obtida que a seleção de uma barra com um grande volume V e um baixo módulo de elasticidade E resultará em um valor menor da tensão máxima σ_m para um carregamento por impacto.

Em muitos problemas, a distribuição de tensões na estrutura não é uniforme, e a Equação (11.39) não se aplica. É conveniente então determinar a força estática $\mathbf{P}_m$, que produziria a mesma energia de deformação do carregamento por impacto, e calcular por meio de P_m o valor correspondente de σ_m da maior tensão que ocorre na estrutura.

Fig. 11.24 A máquina a vapor levanta o peso dentro do bate-estacas e depois o impulsiona para baixo. Isso transfere uma grande força de impacto à estaca que então penetra no solo.

EXEMPLO 11.6

Um corpo de massa m movendo-se com velocidade $\mathbf{v}_0$ atinge a extremidade B da barra não uniforme BCD (Fig. 11.25). Sabendo que o diâmetro da parte BC é duas vezes o diâmetro da parte CD, determine o valor máximo σ_m da tensão na barra.

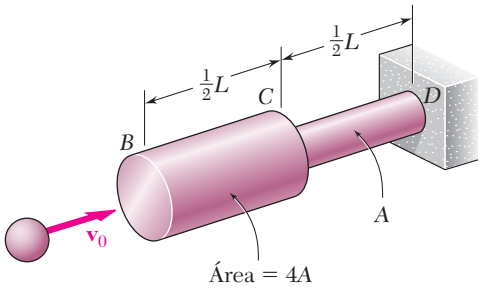


Fig. 11.25

Considerando $n = 2$ na expressão (11.25) obtida no Exemplo 11.1, verificamos que, quando a barra BCD é submetida a uma força estática P_m, sua energia de deformação é

$$U_m = \frac{5P_m^2 L}{16AE} \tag{11.40}$$

em que A é a área da seção transversal da parte CD da barra. Resolvendo a Equação (11.40) para P_m, determinamos a força estática que produz na barra a mesma energia de deformação do carregamento por impacto:

$$P_m = \sqrt{\frac{16}{5}\frac{U_m AE}{L}}$$

em que U_m é dada pela Equação (11.37). A maior tensão ocorre na parte CD da barra. Dividindo P_m pela área A dessa parte, temos

$$\sigma_m = \frac{P_m}{A} = \sqrt{\frac{16}{5}\frac{U_m E}{AL}} \tag{11.41}$$

ou, substituindo U_m da Equação (11.37),

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{8}{5}\frac{mv_0^2 E}{AL}} = 1{,}265\sqrt{\frac{mv_0^2 E}{AL}}$$

Comparando esse valor com o valor obtido para σ_m no caso da barra uniforme da Fig. 11.23* e considerando $V = AL$ na Equação (11.39), notamos que a tensão máxima na barra de seção transversal variável é 26,5% maior do que na barra de seção uniforme. Assim, conforme observamos anteriormente em nossa discussão do Exemplo 11.1, o aumento no diâmetro da parte BC da barra resulta em uma *diminuição* da capacidade de absorção de energia da barra.

EXEMPLO 11.7

Um bloco de peso W é solto de uma altura h atingindo a extremidade livre da viga em balanço AB (Fig. 11.26). Determine o valor da tensão máxima na viga.

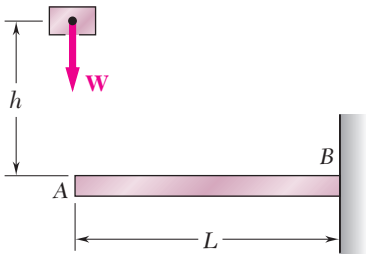


Fig. 11.26

À medida que o bloco cai de uma distância h, sua energia potencial Wh é transformada em energia cinética. Em consequência do impacto, a energia cinética, por sua vez, é transformada em energia de deformação. Temos, portanto,†

$$U_m = Wh \tag{11.42}$$

†A distância total percorrida pelo bloco é na realidade $h + y_m$, em que y_m é a deflexão máxima da extremidade da viga. Assim, uma expressão mais exata para U_m (ver o Problema Resolvido 11.3) é

$$U_m = W(h + y_m) \tag{11.42'}$$

No entanto, quando $h \gg y_m$, podemos desprezar y_m, e usar a Equação (11.42).

Recordando a expressão obtida para a energia de deformação da viga em balanço AB no Exemplo 11.3 e desprezando o efeito da força cortante, escrevemos

$$U_m = \frac{P_m^2 L^3}{6EI}$$

Resolvendo essa equação para P_m, concluímos que a força estática que produz na viga a mesma energia de deformação é

$$P_m = \sqrt{\frac{6U_m EI}{L^3}} \tag{11.43}$$

A tensão máxima σ_m ocorre no engastamento B e é

$$\sigma_m = \frac{|M|c}{I} = \frac{P_m Lc}{I}$$

Substituindo P_m da (11.43), escrevemos

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{6U_m E}{L(I/c^2)}} \tag{11.44}$$

ou, recordando a (11.42),

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{6WhE}{L(I/c^2)}}$$

11.8. Projeto para carregamento por impacto

Vamos agora comparar os valores obtidos na seção anterior para a tensão máxima σ_m (*a*) na barra de seção transversal uniforme da Fig. 11.23, (*b*) na barra de seção transversal variável do Exemplo 11.6, e (*c*) na viga em balanço do Exemplo 11.7, considerando que esta última tem uma seção transversal circular de raio *c*.

(*a*) Primeiro recordamos da Equação (11.39) que, se U_m representa a quantidade de energia transferida para a barra como resultado de um carregamento por impacto, a tensão máxima na barra de seção transversal uniforme é

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{2U_m E}{V}} \tag{11.45a}$$

em que V é o volume da barra.

(*b*) Considerando em seguida a barra do Exemplo 11.6 e observando que o volume da barra é

$$V = 4A(L/2) + A(L/2) = 5AL/2$$

substituímos $AL = 2V/5$ na Equação (11.41) e escrevemos

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{8U_m E}{V}} \tag{11.45b}$$

(*c*) Finalmente, recordando que $I = \frac{1}{4}\pi c^4$ para uma viga de seção transversal circular, notamos que

$$L(I/c^2) = L(\tfrac{1}{4}\pi c^4/c^2) = \tfrac{1}{4}(\pi c^2 L) = \tfrac{1}{4}V$$

em que V representa o volume da viga. Substituindo na Equação (11.44), expressamos a tensão máxima na viga em balanço do Exemplo 11.7 como

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{24U_m E}{V}} \tag{11.45c}$$

Observamos que, em cada caso, a tensão máxima σ_m é proporcional à raiz quadrada do módulo de elasticidade do material e inversamente proporcional à raiz quadrada do volume do elemento. Considerando que os três elementos têm o mesmo volume e que são feitos do mesmo material, notamos também que, para um valor da energia absorvida, a barra de seção uniforme terá a menor tensão máxima e a viga em balanço terá a maior tensão máxima.

Essa observação pode ser explicada pelo fato de que, a distribuição de tensões sendo uniforme no caso *a*, a energia de deformação será uniformemente distribuída ao longo da barra. No caso *b*, entretanto, as tensões na parte *BC* da barra são apenas 25% das tensões na parte *CD*. Essa distribuição de forma desigual das tensões e da energia de deformação resulta em uma tensão máxima σ_m duas vezes maior do que a tensão correspondente na barra de seção uniforme. Finalmente, no caso *c*, em que a viga em balanço é submetida a um carregamento por impacto transversal, as tensões variam linearmente ao longo da viga, bem como ao longo da seção transversal. A distribuição resultante desigual de energia de deformação faz com que a tensão máxima σ_m seja 3,46 vezes maior do que se o mesmo elemento tivesse sido carregado axialmente como no caso *a*.

As propriedades observadas nos três casos específicos discutidos nessa seção são bastante gerais e podem ser observadas em todos os tipos de estrutura e carregamento por impacto. Concluímos então que uma estrutura projetada para resistir eficazmente a um carregamento por impacto deverá:

1. Ter um grande volume.
2. Ser construída com um material de módulo de elasticidade baixo e alta tensão de escoamento.
3. Ter uma forma tal que as tensões sejam distribuídas o mais uniformemente possível ao longo da estrutura.

11.9. Trabalho e energia em razão de uma única carga

Quando introduzimos inicialmente o conceito de energia de deformação no início desse capítulo, consideramos o trabalho feito por uma força axial **P** aplicada à extremidade de uma barra de seção transversal uniforme (Fig. 11.1). Definimos a energia de deformação da barra para um alongamento x_1 como o trabalho da força **P** à medida que ela aumenta lentamente de 0 até o valor P_1 correspondente a x_1. Escrevemos

$$\text{Energia de deformação} = U = \int_0^{x_1} P\,dx \tag{11.2}$$

No caso de uma deformação elástica, o trabalho da força P e, portanto, a energia de deformação da barra foram expressos como

$$U = \tfrac{1}{2}P_1x_1 \tag{11.3}$$

Mais adiante, nas Seções 11.4 e 11.5, calculamos a energia de deformação de elementos estruturais sob várias condições de carregamento determinando a densidade de energia de deformação u em cada ponto do elemento e integrando u sobre todo o elemento.

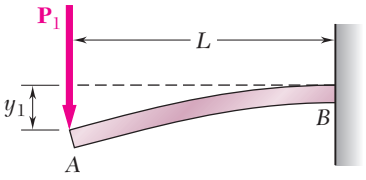


Fig. 11.27

No entanto, quando uma estrutura ou um elemento é submetido a uma *única força concentrada*, é possível usar a Equação (11.3) para avaliar sua energia de deformação elástica, desde que, naturalmente, seja conhecida a relação entre a força e a deformação resultante. Por exemplo, no caso da viga em balanço do Exemplo 11.3 (Fig. 11.27), escrevemos

$$U = \tfrac{1}{2}P_1y_1$$

e, substituindo y_1 pelo valor obtido da tabela de *Deflexões e inclinações de vigas* do Apêndice D,

$$U = \frac{1}{2}P_1\left(\frac{P_1L^3}{3EI}\right) = \frac{P_1^2L^3}{6EI} \tag{11.46}$$

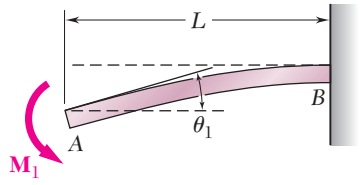


Fig. 11.28

Uma abordagem similar pode ser usada para determinar a energia de deformação de uma estrutura ou elemento submetido a um *único momento*. Recordando que o trabalho elementar de um momento M é $M\,d\theta$, em que $d\theta$ é um ângulo pequeno. Como M e θ estão linearmente relacionados, concluímos que a energia de deformação elástica de uma viga em balanço AB submetida a um único momento $\mathbf{M}_1$ em sua extremidade A (Fig. 11.28) pode ser expressa como

$$U = \int_0^{\theta_1} M\,d\theta = \tfrac{1}{2}M_1\theta_1 \tag{11.47}$$

em que θ_1 é a inclinação da viga em A. Substituindo θ_1 pelo valor obtido do Apêndice D, escrevemos

$$U = \frac{1}{2}M_1\left(\frac{M_1L}{EI}\right) = \frac{M_1^2L}{2EI} \tag{11.48}$$

De maneira similar, a energia de deformação elástica de um eixo circular uniforme AB de comprimento L, submetido em sua extremidade B a um único torque $\mathbf{T}_1$ (Fig. 11.29), pode ser expressa como

$$U = \int_0^{\phi_1} T\,d\phi = \tfrac{1}{2}T_1\phi_1 \tag{11.49}$$

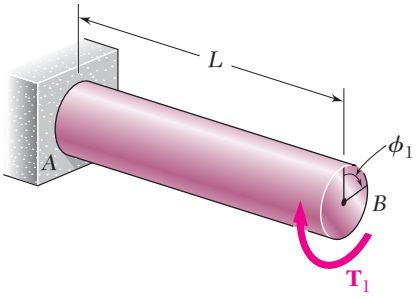


Fig. 11.29

Substituindo o ângulo de torção ϕ_1 da Equação (3.16), verificamos que

$$U = \frac{1}{2}T_1\left(\frac{T_1L}{JG}\right) = \frac{T_1^2L}{2JG}$$

como obtivemos anteriormente na Seção 11.5.

O método apresentado nessa seção pode simplificar a solução de muitos problemas de carregamento por impacto. No Exemplo 11.8 é considerada a colisão de um automóvel com um obstáculo (Fig. 11.30) usando-se um modelo simplificado de um bloco e uma viga simples.

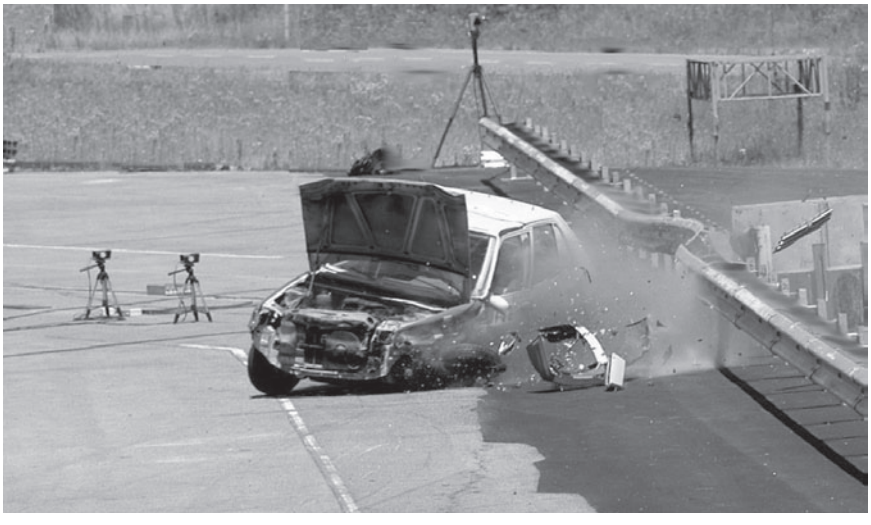


Fig. 11.30 Quando o automóvel colidir com o obstáculo, será dissipada uma energia considerável na forma de calor durante a deformação permanente do automóvel e do obstáculo.

EXEMPLO 11.08

Um bloco de massa m movendo-se com velocidade $\mathbf{v}_0$ atinge perpendicularmente o elemento prismático AB em seu ponto médio C (Fig. 11.31). Determine (*a*) a força estática equivalente P_m, (*b*) a tensão máxima σ_m no elemento e (*c*) a deflexão máxima x_m no ponto C.

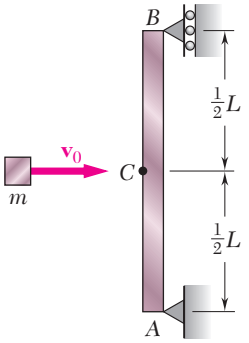


Fig. 11.31

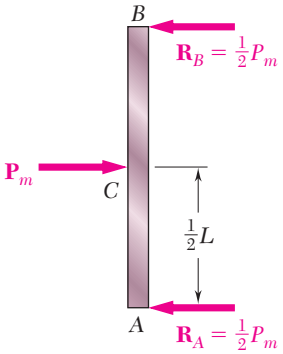


Fig. 11.32

(a) Força estática equivalente. A energia de deformação máxima do elemento é igual à energia cinética do bloco antes do impacto. Temos

$$U_m = \tfrac{1}{2}mv_0^2 \tag{11.50}$$

Em contrapartida, expressando U_m como o trabalho da força estática horizontal equivalente à medida em que ela é aplicada lentamente no ponto médio C do elemento, escrevemos

$$U_m = \tfrac{1}{2}P_m x_m \tag{11.51}$$

em que x_m é a deflexão de C correspondente à força estática P_m. Na tabela de *Deflexões e inclinações de vigas* do Apêndice D, encontramos

$$x_m = \frac{P_m L^3}{48EI} \tag{11.52}$$

Substituindo x_m de (11.52) em (11.51), escrevemos

$$U_m = \frac{1}{2}\frac{P_m^2 L^3}{48EI}$$

Resolvendo para P_m e lembrando da Equação (11.50), concluímos que a força estática equivalente ao carregamento por impacto dado é

$$P_m = \sqrt{\frac{96U_m EI}{L^3}} = \sqrt{\frac{48mv_0^2 EI}{L^3}} \tag{11.53}$$

(b) Tensão máxima. Desenhando o diagrama de corpo livre do elemento (Fig. 11.32), vemos que o valor máximo do momento fletor ocorre em C e é $M_{\text{máx}} = P_m L/4$. A tensão máxima, portanto, ocorre em uma seção transversal que contém o ponto C e é igual a

$$\sigma_m = \frac{M_{\text{máx}}\, c}{I} = \frac{P_m L c}{4I}$$

Substituindo P_m de (11.53), escrevemos

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{3mv_0^2 EI}{L(I/c)^2}}$$

(c) Deflexões máxima. Substituindo na Equação (11.52) a expressão obtida para P_m em (11.53), temos

$$x_m = \frac{L^3}{48EI}\sqrt{\frac{48mv_0^2 EI}{L^3}} = \sqrt{\frac{mv_0^2 L^3}{48EI}}$$

11.10. Deformação provocada por uma única carga pelo método do trabalho e da energia

Vimos na seção anterior que, se for conhecida a deformação x_1 de uma estrutura ou elemento submetido a uma única força concentrada $\mathbf{P}_1$, a energia de deformação U correspondente é obtida escrevendo-se

$$U = \tfrac{1}{2}P_1 x_1 \tag{11.3}$$

Uma expressão análoga para a energia de deformação de um elemento estrutural submetido a um único momento $\mathbf{M}_1$ é:

$$U = \tfrac{1}{2}M_1\theta_1 \tag{11.47}$$

No entanto, se for conhecida a energia de deformação U de uma estrutura ou elemento submetido a uma única força concentrada $\mathbf{P}_1$ ou momento $\mathbf{M}_1$, pode ser usada a Equação (11.3) ou a (11.47) para determinar a deformação x_1 ou ângulo θ_1 correspondente. Para determinar a deformação em razão de uma única força aplicada a uma estrutura formada por várias partes, em vez de usar um dos métodos do Capítulo 9, é mais fácil calcular primeiro a energia de deformação da estrutura integrando a densidade de energia de deformação ao longo de cada uma de suas várias partes, como foi feito nas Seções 11.4 e 11.5, e depois usar a Equação (11.3) ou a Equação (11.47) para obter a deformação desejada. Analogamente, o ângulo de torção ϕ_1 de um eixo composto pode ser obtido integrando-se a densidade de energia de deformação ao longo das várias partes do eixo e resolvendo a Equação (11.49) para ϕ_1.

Deve-se ter em mente que o método apresentado nessa seção poderá ser usado somente *se a estrutura estiver submetida a uma única força concentrada ou a um único momento*. A energia de deformação de uma estrutura submetida a várias forças *não pode* ser determinada calculando-se o trabalho de cada força como se cada uma fosse aplicada independentemente na estrutura (ver a Seção 11.11). Podemos também observar que, mesmo que fosse possível calcular a energia de deformação da estrutura dessa maneira, haveria disponível apenas uma equação para determinar as deformações correspondentes às várias forças. Nas Seções 11.12 e 11.13, é apresentado um outro método que baseia-se no conceito de energia de deformação, um método que pode ser usado para determinar a deflexão ou a inclinação em um ponto de uma estrutura, mesmo quando essa estrutura estiver submetida simultaneamente a várias forças concentradas, forças distribuídas ou momentos.

EXEMPLO 11.9

Uma força **P** é suportada em B por duas barras de seção uniforme e com a mesma área A de seção transversal (Fig. 11.33). Determine o deslocamento vertical no ponto B.

A energia de deformação do sistema em virtude da força foi determinada no Exemplo 11.2. Igualando a expressão obtida para U com o trabalho da força, escrevemos

$$U = 0{,}364\frac{P^2l}{AE} = \frac{1}{2}Py_B$$

e, resolvendo para o deslocamento vertical de B,

$$y_B = 0{,}728\frac{Pl}{AE}$$

Observação. Devemos notar que, uma vez obtidas as forças nas duas barras (ver o Exemplo 11.2), as deformações $\delta_{B/C}$ e $\delta_{B/D}$ das barras poderiam ser obtidas pelo método do Capítulo 2. No entanto, para determinar o deslocamento vertical do ponto B com base nessas deformações, seria necessária uma análise geométrica cuidadosa dos vários deslocamentos envolvidos. O Método da energia de deformação usado aqui torna essa análise desnecessária.

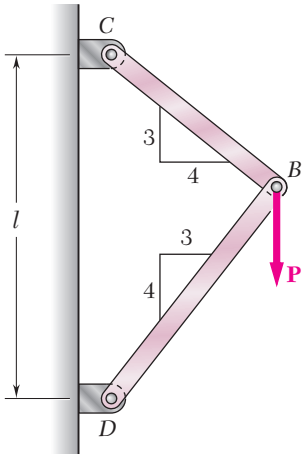


Fig. 11.33

EXEMPLO 11.10

Determine a deflexão da extremidade A da viga em balanço AB (Fig. 11.34), levando em conta o efeito (a) somente das tensões normais e (b) das tensões normal e de cisalhamento.

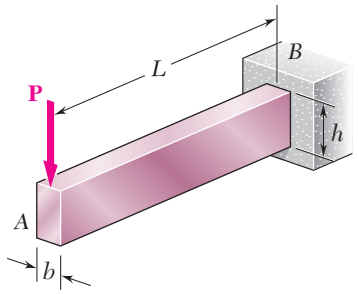


Fig. 11.34

(a) Efeito das tensões normais. O trabalho da força **P** quando ela é aplicada lentamente em A é

$$U = \tfrac{1}{2}Py_A$$

Substituindo U pela expressão obtida para energia de deformação da viga no Exemplo 11.3, em que foi considerado somente o efeito das tensões normais, escrevemos

$$\frac{P^2L^3}{6EI} = \frac{1}{2}Py_A$$

e, resolvendo para y_A,

$$y_A = \frac{PL^3}{3EI}$$

(b) Efeito das tensões normal e de cisalhamento. Substituímos agora U pela expressão (11.24) obtida no Exemplo 11.5, em que os efeitos das tensões normal e de cisalhamento foram considerados. Temos

$$\frac{P^2L^3}{6EI}\left(1 + \frac{3Eh^2}{10GL^2}\right) = \frac{1}{2}Py_A$$

e, resolvendo para y_A,

$$y_A = \frac{PL^3}{3EI}\left(1 + \frac{3Eh^2}{10GL^2}\right)$$

Notamos que o erro relativo quando o efeito da força cortante é desprezado é o mesmo obtido no Exemplo 11.5, isto é, menor que $0{,}9(h/L)^2$. Conforme já dissemos, esse erro é menor do que 0,9% para uma viga com uma relação h/L menor que $1/10$.

EXEMPLO 11.11

Um torque **T** é aplicado à extremidade D do eixo BCD (Fig. 11.35). Sabendo que ambas as partes do eixo são feitas com o mesmo material e têm o mesmo comprimento, mas que o diâmetro BC é duas vezes o diâmetro CD, determine o ângulo de torção da seção D.

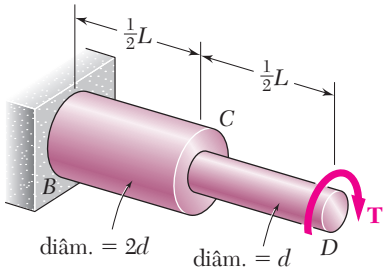


Fig. 11.35

A energia de deformação de um eixo similar foi determinada no Exemplo 11.4 dividindo-se o eixo em suas partes componentes BC e CD. Fazendo $n = 2$ na Equação (11.23), temos

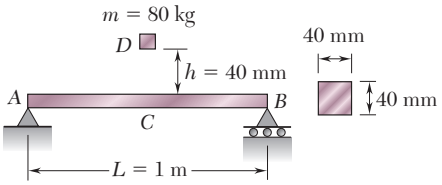
$$U = \frac{17}{32}\frac{T^2L}{2GJ}$$

em que G é o módulo de elasticidade transversal do material e J, o momento polar de inércia da parte CD do eixo. Considerando U igual ao trabalho do torque enquanto ele é aplicado lentamente na extremidade D e recordando a Equação (11.49), escrevemos

$$\frac{17}{32}\frac{T^2L}{2GJ} = \frac{1}{2}T\phi_{D/B}$$

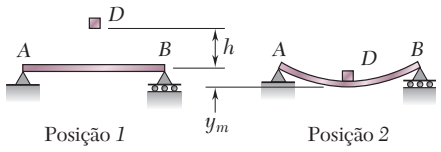
e, resolvendo para o ângulo de torção $\phi_{D/B}$,

$$\phi_{D/B} = \frac{17TL}{32GJ}$$

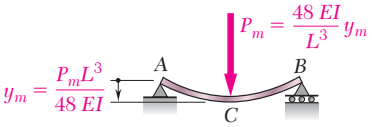


PROBLEMA RESOLVIDO 11.3

O bloco D de massa m é liberado do repouso e cai de uma altura h até atingir o ponto médio C da viga de alumínio AB. Usando $E = 73$ GPa, determine (*a*) a deflexão máxima do ponto C e (*b*) a tensão máxima que ocorre na viga.



Do Apêndice D



SOLUÇÃO

Princípio de trabalho e energia. Como o bloco é liberado do repouso, notamos que na posição *1* tanto a energia cinética quanto a energia de deformação são iguais a zero. Na posição *2*, em que ocorre a deflexão máxima y_m, a energia cinética é novamente igual a zero. Consultando a tabela de *Deflexões e inclinações de vigas* do Apêndice D, encontramos a expressão para y_m. A energia de deformação da viga na posição *2* é

$$U_2 = \frac{1}{2}P_m y_m = \frac{1}{2}\frac{48EI}{L^3}y_m^2 \qquad U_2 = \frac{24EI}{L^3}y_m^2$$

Observamos que o trabalho feito pelo peso **W** do bloco é $W(h + y_m)$. Igualando a energia de deformação da viga com o trabalho feito por **W**, temos

$$\frac{24EI}{L^3}y_m^2 = W(h + y_m) \tag{1}$$

***a.* Deflexão máxima do ponto *C*.** Dos dados fornecidos temos

$$EI = (73 \times 10^9 \text{ Pa})\tfrac{1}{12}(0{,}04 \text{ m})^4 = 15{,}573 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^2$$

$$L = 1 \text{ m} \qquad h = 0{,}040 \text{ m} \qquad W = mg = (80 \text{ kg})(9{,}81 \text{ m/s}^2) = 784{,}8 \text{ N}$$

Substituindo na Equação (1), obtemos e resolvemos a equação quadrática

$$(373{,}8 \times 10^3)y_m^2 - 784{,}8y_m - 31{,}39 = 0 \qquad y_m = 10{,}27 \text{ mm} \blacktriangleleft$$

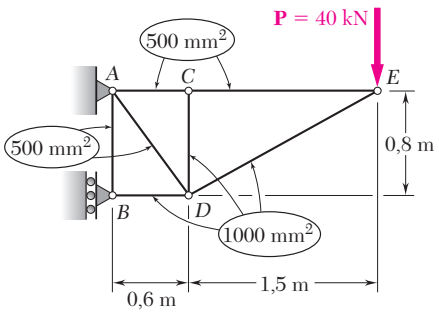
***b.* Tensão máxima.** O valor de P_m é

$$P_m = \frac{48EI}{L^3}y_m = \frac{48(15{,}573 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m})}{(1 \text{ m})^3}(0{,}01027 \text{ m}) \qquad P_m = 7677 \text{ N}$$

Lembrando que $\sigma_m = M_{\text{máx}}c/I$ e $M_{\text{máx}} = \frac{1}{4}P_m L$, escrevemos

$$\sigma_m = \frac{(\frac{1}{4}P_m L)c}{I} = \frac{\frac{1}{4}(7677 \text{ N})(1 \text{ m})(0{,}020 \text{ m})}{\frac{1}{12}(0{,}040 \text{ m})^4} \qquad \sigma_m = 179{,}9 \text{ MPa} \blacktriangleleft$$

Uma aproximação do trabalho feito pelo peso do bloco pode ser obtida omitindo-se y_m do lado direito da Equação (1), como foi feito no Exemplo 11.7. Se essa aproximação for usada aqui, encontramos $y_m = 9{,}16$ mm; o erro é de 10,8%. No entanto, se um bloco de 8 kg for solto de uma altura de 400 mm, produzindo o mesmo valor de Wh, omitir y_m do lado direito da Equação (1) resulta em um erro de somente 1,2%. Uma discussão mais detalhada dessa aproximação é dada no Problema 11.70.

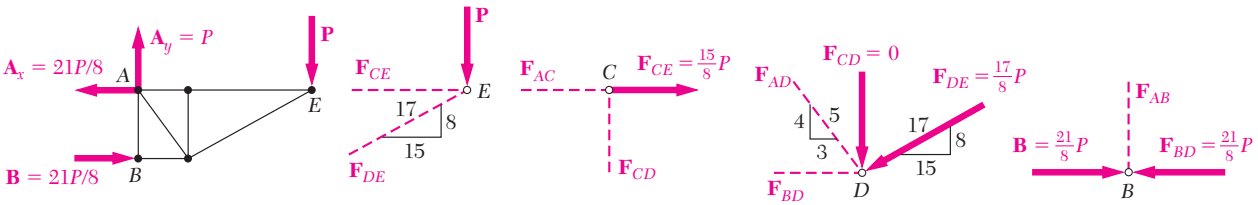


PROBLEMA RESOLVIDO 11.4

As barras de treliça mostradas na figura consistem em seções de tubo de alumínio com as áreas de seção transversal indicadas. Usando $E = 73$ GPa, determine o deslocamento vertical do ponto E provocado pela força **P**.

SOLUÇÃO

Forças axiais em barras de treliça. As reações são encontradas usando o diagrama de corpo livre da treliça inteira. Consideramos então em seguida o equilíbrio dos nós E, C, D, e B. Em cada nó determinamos as forças indicadas pelas linhas tracejadas. No nó B, a equação $\Sigma F_x = 0$ fornece uma verificação de nossos cálculos.



$$\Sigma F_y = 0: F_{DE} = -\tfrac{17}{8}P \qquad \Sigma F_x = 0: F_{AC} = +\tfrac{15}{8}P \qquad \Sigma F_y = 0: F_{AD} = +\tfrac{5}{4}P \qquad \Sigma F_y = 0: F_{AB} = 0$$

$$\Sigma F_x = 0: F_{CE} = +\tfrac{15}{8}P \qquad \Sigma F_y = 0: F_{CD} = 0 \qquad \Sigma F_x = 0: F_{BD} = -\tfrac{21}{8}P \qquad \Sigma F_x = 0: \text{(Verificação)}$$

Energia de deformação. Observando que E é o mesmo para todas as barras, expressamos a energia de deformação da treliça da seguinte forma

$$U = \sum \frac{F_i^2 L_i}{2A_i E} = \frac{1}{2E} \sum \frac{F_i^2 L_i}{A_i} \tag{1}$$

em que F_i é a força em uma barra conforme indicada na tabela a seguir e em que a soma é estendida a todos as barras da treliça.

Barra	F_i	L_i, m	A_i, m²	$\frac{F_i^2 L_i}{A_i}$
AB	0	0,8	500×10^{-6}	0
AC	$+15P/8$	0,6	500×10^{-6}	$4\,219P^2$
AD	$+5P/4$	1,0	500×10^{-6}	$3\,125P^2$
BD	$-21P/8$	0,6	1000×10^{-6}	$4\,134P^2$
CD	0	0,8	1000×10^{-6}	0
CE	$+15P/8$	1,5	500×10^{-6}	$10\,547P^2$
DE	$-17P/8$	1,7	1000×10^{-6}	$7\,677P^2$

$$\sum \frac{F_i^2 L_i}{A_i} = 29\,700P^2$$

Voltando à Equação (1), temos

$$U = (1/2E)(29{,}7 \times 10^3 P^2).$$

Princípio de trabalho e energia. Recordamos de que o trabalho efetuado pela força **P** quando ela é aplicada gradualmente é $\frac{1}{2}Py_E$. Igualando o trabalho feito por **P** com a energia de deformação U e lembrando que $E = 73$ GPa e $P = 40$ kN, temos

$$\frac{1}{2}Py_E = U \qquad \frac{1}{2}Py_E = \frac{1}{2E}(29{,}7 \times 10^3 P^2)$$

$$y_E = \frac{1}{E}(29{,}7 \times 10^3 P) = \frac{(29{,}7 \times 10^3)(40 \times 10^3)}{73 \times 10^9}$$

$$y_E = 16{,}27 \times 10^{-3} \text{ m} \qquad y_E = 16{,}27 \text{ mm} \downarrow \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

11.42 Um anel de 6 kg tem uma velocidade $v_0 = 4{,}5$ m/s quando atinge uma pequena placa fixada na extremidade A da barra AB de 20 mm de diâmetro. Usando $E = 200$ GPa, determine (*a*) a força estática equivalente, (*b*) a tensão máxima na barra e (*c*) o deslocamento máximo de A.

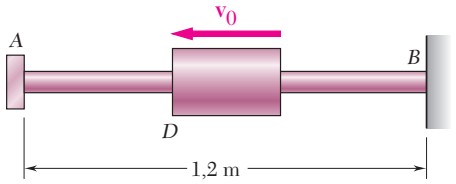


Fig. P11.42 e *P11.43*

11.43 Um anel D de 5 kg move-se ao longo da barra uniforme AB e tem uma velocidade $v_0 = 6$ m/s quando atinge uma pequena placa fixada na extremidade A da barra. Usando $E = 200$ GPa e sabendo que a tensão admissível na barra é de 250 MPa, determine o menor diâmetro que pode ser usado.

11.44 O anel G de 444,8 N é liberado do repouso na posição mostrada e é interrompido pela placa BDF fixada à barra de aço CD de 22,2 mm de diâmetro e às barras de aço AB e EF de 15,9 mm de diâmetro. Sabendo que para o tipo de aço utilizado $\sigma_{adm} = 165{,}5$ MPa e $E = 200$ GPa, determine a maior distância admissível h.

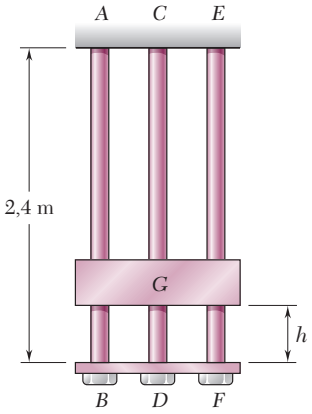


Fig. P11.44

11.45 Resolva o Problema 11.44, considerando que a barra de aço CD de 22,2 mm de diâmetro é substituída por uma barra de 22,2 mm de diâmetro feita de uma liga de alumínio para a qual $\sigma_{adm} = 137{,}9$ MPa e $E = 73{,}1$ GPa.

11.46 O anel D é liberado do repouso na posição mostrada e o seu movimento é interrompido por uma pequena placa fixada à extremidade C da barra vertical ABC. Determine a massa do anel para a qual a tensão normal máxima na parte BC é de 125 MPa.

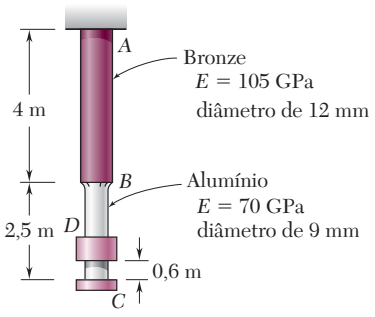


Fig. P11.46

11.47 Resolva o Problema 11.46, considerando que ambas as partes da barra ABC são feitas de alumínio.

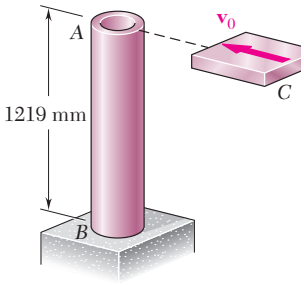


Fig. P11.48

11.48 O poste *AB* consiste em um tubo de aço de 88,9 mm de diâmetro externo e 7,62 mm de espessura de parede. Um bloco *C* de 6,8 kg movendo-se horizontalmente com uma velocidade $\mathbf{v}_0$ atinge o poste perpendicularmente em *A*. Usando $E = 200$ GPa, determine a maior velocidade v_0 para a qual a tensão normal máxima no tubo não excede 165,5 MPa.

11.49 Resolva o Problema 11.48, considerando que o poste *AB* consiste em uma barra de seção cheia de 88,9 mm de diâmetro.

11.50 A barra de aço *AB* é golpeada perpendicularmente em seu ponto médio *C* por um bloco de 4,5 kg movendo-se horizontalmente com uma velocidade $v_0 = 2$ m/s. Usando $E = 200$ GPa, determine (*a*) a força estática equivalente, (*b*) a tensão normal máxima na barra e (*c*) a deflexão máxima no ponto médio *C* da barra.

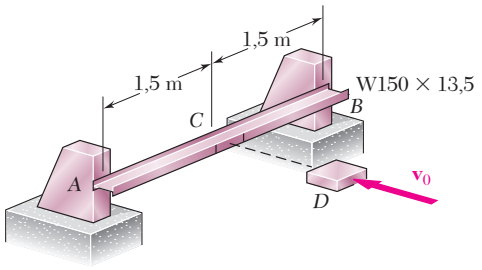


Fig. P11.50

11.51 Resolva o Problema 11.50, considerando que a viga em perfil laminado W150 ×13,5 é rotacionada a 90º ao longo do seu eixo longitudinal de modo que sua alma encontra-se na vertical.

11.52 O bloco *D* de 20 kg cai de uma altura $h = 182,9$ mm sobre a viga de aço *AB*. Sabendo que $E = 200$ GPa, determine (*a*) a deflexão máxima no ponto *E* e (*b*) a tensão normal máxima na viga.

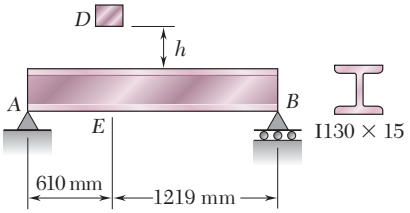


Fig. P11.52

11.53 e 11.54 O bloco *D* de 2 kg cai da posição mostrada sobre a extremidade de uma barra de 16 mm de diâmetro. Sabendo que $E = 200$ GPa, determine (*a*) a deflexão máxima na extremidade *A*, (*b*) o momento fletor máximo e (*c*) a tensão normal máxima na barra.

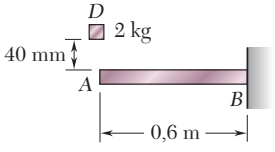


Fig. P11.53

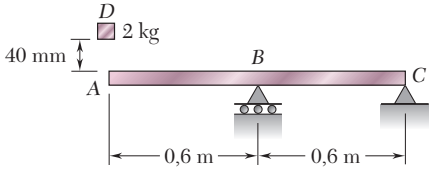


Fig. P11.54

11.55 Um mergulhador de peso igual a 711,7 N salta de uma altura de 508 mm na extremidade C de um trampolim cuja seção transversal é a mostrada. Considerando que as pernas do mergulhador permanecem rígidas e usando $E = 12{,}4$ GPa, determine (*a*) a máxima deflexão do ponto C, (*b*) a máxima tensão normal no trampolim e (*c*) a carga estática equivalente.

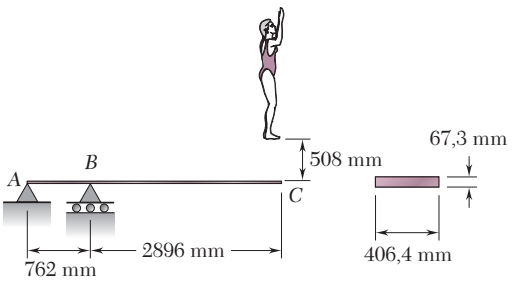


Fig. *P11.55*

11.56 Um bloco de peso W cai de uma altura h sobre a viga horizontal AB e atinge a viga no ponto D. (*a*) Mostre que a deflexão máxima y_m no ponto D pode ser expressa como

$$y_m = y_{est}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{y_{est}}}\right)$$

em que y_{est} representa a deflexão em D provocada por uma força estática W aplicada nesse ponto e no qual a grandeza entre parênteses é conhecida como coeficiente de impacto. (*b*) Calcule o coeficiente de impacto para a viga do Problema 11.53.

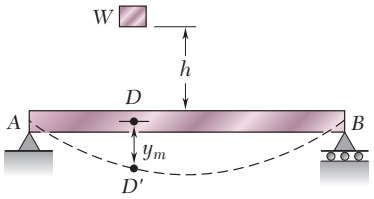


Fig. P11.56 e P11.57

11.57 Um bloco de peso W cai de uma altura h sobre a viga horizontal AB e atinge-a no ponto D. (*a*) Chamando de y_m o valor exato da deflexão máxima em D e por y'_m o valor obtido desprezando seu efeito na variação da energia potencial do bloco, mostre que o valor absoluto do erro relativo é $(y'_m - y_m)/y_m$ e nunca ultrapassa $y'_m/2h$. (*b*) Verifique o resultado obtido na parte *a* resolvendo a parte *a* do Problema 11.53 sem levar em conta y_m ao determinar a variação da energia potencial da força. Compare a resposta obtida dessa maneira com a resposta exata daquele problema.

11.58 e 11.59 Usando o método do trabalho e da energia, determine a deflexão no ponto D provocada pela força **P**.

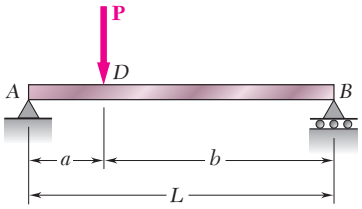


Fig. P11.58

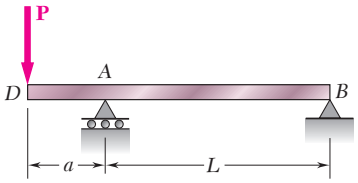


Fig. P11.59

11.60 e 11.61 Usando o método do trabalho e da energia, determine a inclinação no ponto D provocada pelo momento $\mathbf{M}_0$.

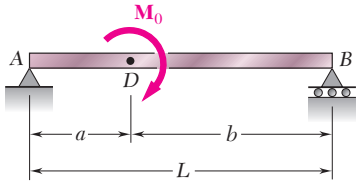


Fig. *P11.60*

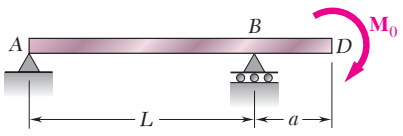


Fig. P11.61

11.62 e 11.63 Usando o método do trabalho e da energia, determine a deflexão no ponto C provocada pela força $\mathbf{P}$.

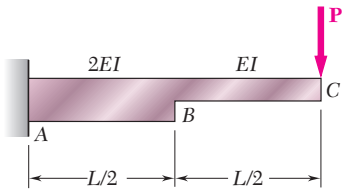


Fig. P11.62

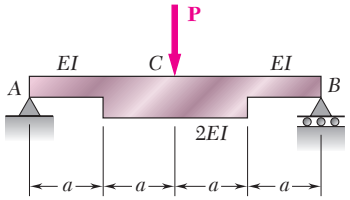


Fig. P11.63

11.64 Usando o método do trabalho e da energia, determine a inclinação no ponto B provocada pela momento $\mathbf{M}_0$.

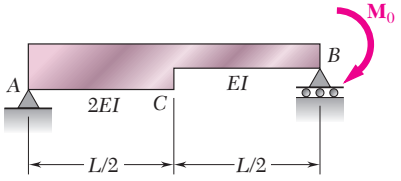


Fig. P11.64

11.65 Usando o método do trabalho e da energia, determine a inclinação no ponto A provocada pela momento $\mathbf{M}_0$.

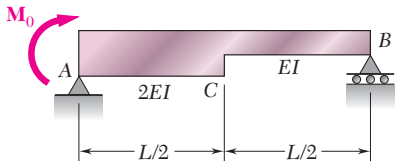


Fig. *P11.65*

11.66 A barra de aço BC com 20 mm de diâmetro está fixada na alavanca AB e engastada em C. A alavanca uniforme de aço tem 10 mm de espessura e 30 mm de largura. Usando o método do trabalho e da energia, determine o deslocamento do ponto A quando $L = 600$ mm. Use $E = 200$ GPa e $G = 77{,}2$ GPa.

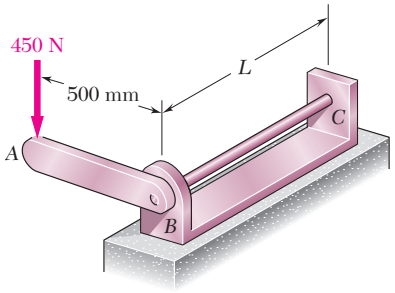


Fig. *P11.66* e P11.67

11.67 A barra de aço BC com 20 mm de diâmetro está fixada na alavanca AB e engastada em C. A alavanca uniforme de aço tem 10 mm de espessura e 30 mm de largura. Usando o método do trabalho e da energia, determine o comprimento L da barra BC para o qual o deslocamento do ponto A é de 40 mm. Use $E = 200$ GPa e $G = 77{,}2$ GPa.

11.68 Dois eixos de aço, ambos com diâmetro de 19,1 mm, estão conectados às engrenagens mostradas na figura. Sabendo que $G = 77{,}2$ GPa e que o eixo DF está fixo em F, determine o ângulo de rotação da extremidade A quando lhe é aplicado um torque de 84,7 N · m em A. Ignore a energia de deformação em virtude da flexão dos eixos.

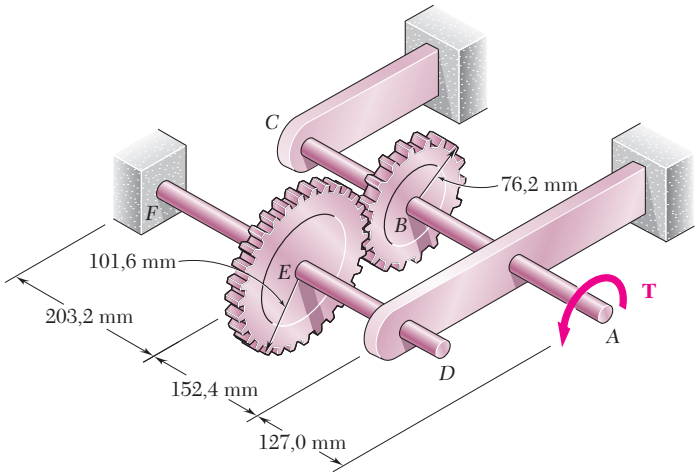


Fig. *P11.68*

11.69 A barra de aço CD, com 20 mm de diâmetro, está soldada ao eixo de aço AB também com 20 mm de diâmetro conforme mostrado. A extremidade C da barra CD toca a superfície rígida mostrada quando um conjugado T_B é aplicado a um disco fixado ao eixo AB. Sabendo que os mancais são auto-alinhados e não exercem conjugados sobre o eixo, determine o ângulo de rotação do disco quando $T_B = 400$ N · m. Utilize $E = 200$ GPa e $G = 77{,}2$ GPa. (Considere a energia de deformação devido a ambos efeitos de flexão e torção no eixo AB e de flexão no braço CD.)

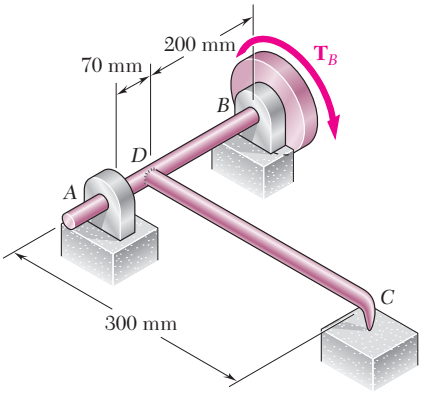


Fig. P11.69

11.70 A barra de seção vazada de parede fina AB tem uma seção transversal não circular com espessura de parede não uniforme. Usando a expressão dada na Equação (3.53) da Seção 3.13 e a expressão para a densidade de energia de deformação dada na Equação (11.19), mostre que o ângulo de torção do elemento AB é

$$\phi = \frac{TL}{4\mathcal{A}^2 G} \oint \frac{ds}{t}$$

em que ds é o comprimento da linha de esqueleto da seção transversal e $\mathcal{A}$ é a área limitada por aquela linha de esqueleto.

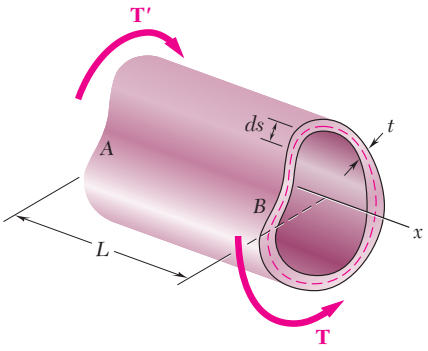


Fig. P11.70

11.71 e *11.72* Cada barra de treliça mostrada na figura tem uma seção transversal uniforme de área A. Usando o método do trabalho e da energia, determine o deslocamento horizontal do ponto de aplicação da força **P**.

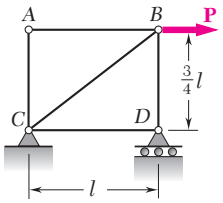


Fig. P11.71

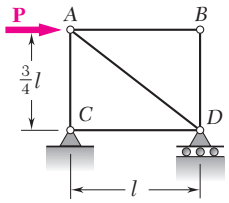


Fig. *P11.72*

11.73 Cada barra de treliça mostrada na figura é feita de aço e têm seção transversal uniforme com área de 1935,5 mm^2. Usando $E = 200$ GPa, determine o deslocamento vertical do nó A provocado pela aplicação de uma força de 106,8 kN.

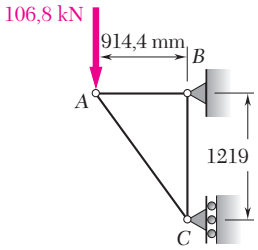


Fig. P11.73

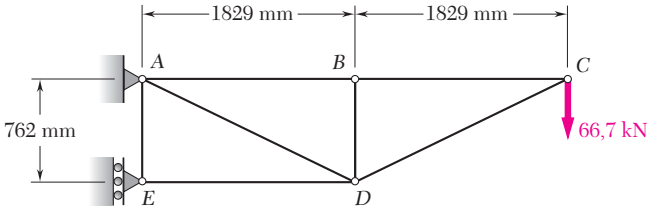


Fig. P11.74

11.74 Cada barra de treliça mostrada na figura é feita de aço e têm seção transversal com área de 3225,8 mm^2. Usando $E = 200$ GPa, determine o deslocamento vertical do ponto C provocado pela força de 66,7 kN.

11.75 As barras de treliça mostradas na figura são feitas de aço e têm as áreas das seções transversais mostradas na figura. Usando $E = 200$ GPa, determine o deslocamento vertical do nó C provocado pela aplicação da força de 210 kN.

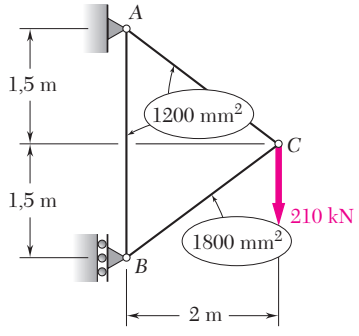


Fig. P11.75

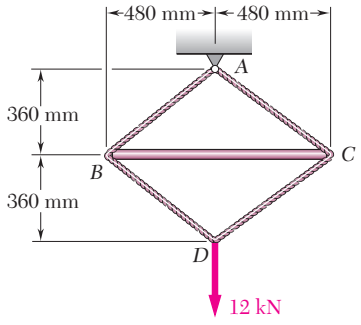


Fig. *P11.76*

11.76 A barra de aço BC tem 24 mm de diâmetro e o cabo de aço ABDCA tem 12 mm de diâmetro. Usando $E = 200$ GPa, determine o deslocamento do ponto D provocado pela carga de 12 kN.

*11.11. Trabalho e energia devido a várias cargas

Nessa seção, será considerada a energia de deformação de uma estrutura submetida a várias cargas e ela será expressa em termos das cargas e das deflexões resultantes.

Considere uma viga elástica AB submetida a duas forças concentradas $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$. A energia de deformação da viga é igual ao trabalho de $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$ quando elas são aplicadas lentamente à viga em C_1 e C_2, respectivamente (Fig. 11.36). No entanto, para avaliar esse trabalho, devemos primeiro expressar as deflexões x_1 e x_2 em termos das forças $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$.

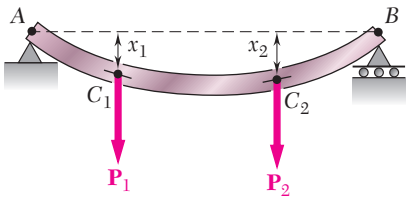


Fig. 11.36

Vamos considerar que somente $\mathbf{P}_1$ é aplicada à viga (Fig. 11.37). Notamos que C_1 e C_2 se deslocam e que suas deflexões são proporcionais à força P_1. Chamando essas deflexões de x_{11} e x_{21}, respectivamente, escrevemos

$$x_{11} = \alpha_{11}P_1 \qquad x_{21} = \alpha_{21}P_1 \tag{11.54}$$

em que α_{11} e α_{21} são constantes chamadas de *coeficientes de influência*. Essas constantes representam as deflexões de C_1 e C_2, respectivamente, quando uma força unitária é aplicada em C_1 e são características da viga AB.

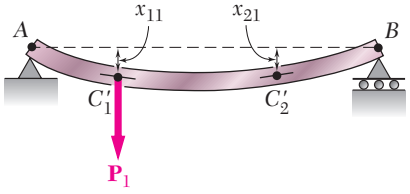


Fig. 11.37

Vamos considerar agora que somente $\mathbf{P}_2$ é aplicada à viga (Fig. 11.38). Chamando de x_{12} e x_{22}, respectivamente, as deflexões resultantes de C_1 e C_2, escrevemos

$$x_{12} = \alpha_{12}P_2 \qquad x_{22} = \alpha_{22}P_2 \tag{11.55}$$

em que α_{12} e α_{22} são os coeficientes de influência representando as deflexões de C_1 e C_2, respectivamente, quando uma força unitária é aplicada em C_2. Aplicando o princípio da superposição, expressamos as deflexões x_1 e x_2 de C_1 e C_2 quando ambas as forças são aplicadas (Fig. 11.36) como

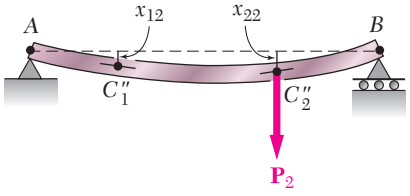


Fig. 11.38

$$x_1 = x_{11} + x_{12} = \alpha_{11}P_1 + \alpha_{12}P_2 \tag{11.56}$$

$$x_2 = x_{21} + x_{22} = \alpha_{21}P_1 + \alpha_{22}P_2 \tag{11.57}$$

Para calcular o trabalho feito por $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$, e portanto a energia de deformação da viga, é conveniente considerar que $\mathbf{P}_1$ é primeiro aplicada lentamente em C_1 (Fig. 11.39*a*). Recordando da primeira Equação (11.54), expressamos o trabalho de $\mathbf{P}_1$ como

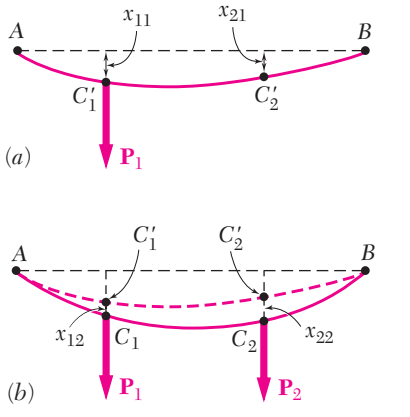


Fig. 11.39

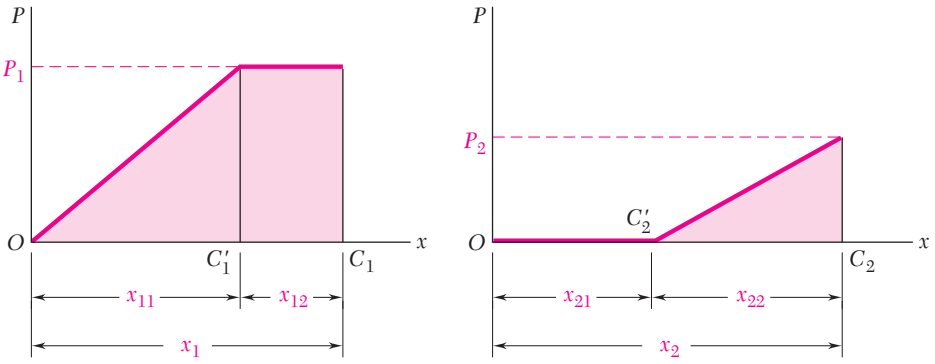
$$\tfrac{1}{2}P_1x_{11} = \tfrac{1}{2}P_1(\alpha_{11}P_1) = \tfrac{1}{2}\alpha_{11}P_1^2 \tag{11.58}$$

e note que $\mathbf{P}_2$ não executa trabalho enquanto C_2 se move de um valor x_{21}, pois ela ainda não foi aplicada à viga.

Agora aplicamos lentamente $\mathbf{P}_2$ em C_2 (Fig. 11.39*b*); recordando a segunda Equação (11.55), expressamos o trabalho de $\mathbf{P}_2$ como

$$\tfrac{1}{2}P_2x_{22} = \tfrac{1}{2}P_2(\alpha_{22}P_2) = \tfrac{1}{2}\alpha_{22}P_2^2 \tag{11.59}$$

Mas, como $\mathbf{P}_2$ é aplicada lentamente em C_2, o ponto de aplicação de $\mathbf{P}_1$ move-se de um valor x_{12} de C_1' a C_1, e a força $\mathbf{P}_1$ realiza trabalho. Como $\mathbf{P}_1$ é aplicada



(*a*) Diagrama força-deslocamento de C_1

(*b*) Diagrama força-deslocamento de C_2

Fig. 11.40

durante todo esse deslocamento (Fig. 11.40), seu trabalho é igual a P_1x_{12} ou, recordando da primeira das Equações (11.55),

$$P_1x_{12} = P_1(\alpha_{12}P_2) = \alpha_{12}P_1P_2 \tag{11.60}$$

Somando as expressões obtidas em (11.58), (11.59) e (11.60), expressamos a energia de deformação da viga quando atuam nela as forças $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$ como

$$U = \tfrac{1}{2}(\alpha_{11}P_1^2 + 2\alpha_{12}P_1P_2 + \alpha_{22}P_2^2) \tag{11.61}$$

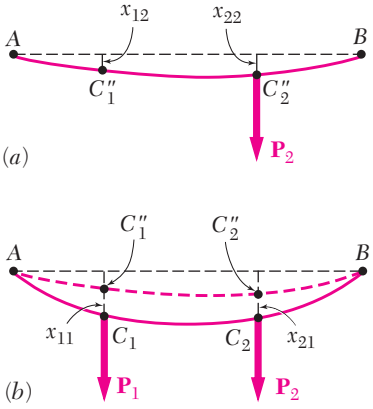
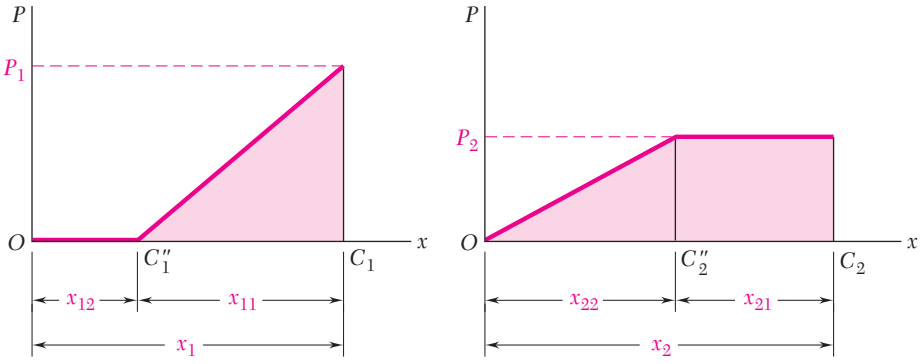


Fig. 11.41

Se a força $\mathbf{P}_2$ tivesse sido aplicada primeiro à viga (Fig. 11.41*a*) e depois a força $\mathbf{P}_1$ (Fig. 11.41*b*), o trabalho feito por cada força seria como mostra a Fig. 11.42. Cálculos similares àqueles que acabamos de fazer resultariam na seguinte expressão alternativa para a energia de deformação da viga:

$$U = \tfrac{1}{2}(\alpha_{22}P_2^2 + 2\alpha_{21}P_2P_1 + \alpha_{11}P_1^2) \tag{11.62}$$

Igualando os membros direitos das Equações (11.61) e (11.62), concluímos que $\alpha_{12} = \alpha_{21}$ e, portanto, a deflexão produzida em C_1 por uma força unitária aplicada em C_2 é igual à deflexão produzida em C_2 por uma força unitária aplicada em C_1. Isso é conhecido como *teorema da reciprocidade de Maxwell*, em homenagem ao físico inglês James Clerk Maxwell (1831–1879).



(*a*) Diagrama força-deslocamento de C_1

(*b*) Diagrama força-deslocamento de C_2

Fig. 11.42

Embora estejamos aptos agora para expressar a energia de deformação U de uma estrutura submetida a várias cargas em função dessas forças, não podemos usar o método da Seção 11.10 para determinar a deflexão da estrutura. Certamente, calculando a energia de deformação U pela integração da densidade de energia de deformação u ao longo da estrutura e substituindo em (11.61) a expressão obtida, resultaria em uma só equação, que não poderia ser resolvida para os vários coeficientes α.

*11.12. Teorema de Castigliano

Recordamos a expressão obtida na seção anterior para a energia de deformação de uma estrutura elástica submetida a duas forças $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$:

$$U = \tfrac{1}{2}(\alpha_{11}P_1^2 + 2\alpha_{12}P_1P_2 + \alpha_{22}P_2^2) \tag{11.61}$$

em que α_{11}, α_{12} e α_{22} são os coeficientes de influência associados aos pontos de aplicação C_1 e C_2 das duas forças. Derivando ambos os membros da Equação (11.61) em relação a P_1 e usando a Equação (11.56), escrevemos

$$\frac{\partial U}{\partial P_1} = \alpha_{11}P_1 + \alpha_{12}P_2 = x_1 \tag{11.63}$$

Derivando ambos os membros da Equação (11.61) em relação a P_2, usando a Equação (11.57) e tendo em mente que $\alpha_{12} = \alpha_{21}$, temos

$$\frac{\partial U}{\partial P_2} = \alpha_{12}P_1 + \alpha_{22}P_2 = x_2 \tag{11.64}$$

De um modo mais geral, se uma estrutura elástica é submetida a n cargas $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n$, a deformação x_j do ponto de aplicação de $\mathbf{P}_j$, medida ao longo da linha de ação de $\mathbf{P}_j$, pode ser expressa como a derivada parcial da energia de deformação da estrutura em relação à força $\mathbf{P}_j$. Escrevemos

$$x_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} \tag{11.65}$$

Esse é o *teorema de Castigliano*, em homenagem ao engenheiro italiano Alberto Castigliano (1847-1884), que primeiro formulou seu enunciado.†

†No caso de uma estrutura elástica submetida a n cargas $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n$, o deslocamento do ponto de aplicação de $\mathbf{P}_j$, medida ao longo da linha de ação de $\mathbf{P}_j$, pode ser expressa como

$$x_j = \sum_k \alpha_{jk}P_k \tag{11.66}$$

e a energia de deformação da estrutura será

$$U = \tfrac{1}{2}\sum_i \sum_k \alpha_{ik}P_iP_k \tag{11.67}$$

Derivando U em relação a P_j, e observando que P_j é determinada em termos correspondentes a $i = j$ ou $k = j$, escrevemos

$$\frac{\partial U}{\partial P_j} = \frac{1}{2}\sum_k \alpha_{jk}P_k + \frac{1}{2}\sum_i \alpha_{ij}P_i$$

ou, como $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$,

$$\frac{\partial U}{\partial P_j} = \frac{1}{2}\sum_k \alpha_{jk}P_k + \frac{1}{2}\sum_i \alpha_{ji}P_i = \sum_k \alpha_{jk}P_k$$

Lembrando da Equação (11.66), verificamos que

$$x_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} \tag{11.65}$$

Lembrando que o trabalho de um momento **M** é ½Mθ em que θ é o ângulo de rotação no ponto em que o momento é aplicado lentamente, observamos que o teorema de Castigliano pode ser usado para determinar a inclinação de uma viga no ponto de aplicação do momento $\mathbf{M}_j$. Temos

$$\theta_j = \frac{\partial U}{\partial M_j} \tag{11.68}$$

De maneira similar, o ângulo de torção ϕ_j em uma seção de um eixo em que um torque $\mathbf{T}_j$ é aplicado lentamente é obtido derivando-se a energia de deformação do eixo em relação a T_j:

$$\phi_j = \frac{\partial U}{\partial T_j} \tag{11.69}$$

*11.13. Deflexões pelo teorema de Castigliano

Nós vimos na seção anterior que a deformação x_j de uma estrutura no ponto de aplicação de uma carga $\mathbf{P}_j$ pode ser determinada calculando-se a derivada parcial $\partial U/\partial P_j$ da energia de deflexão U da estrutura. Conforme sabemos pelas Seções 11.4 e 11.5, a energia de deformação U é obtida integrando-se ou somando ao longo da estrutura a energia de deformação de cada um de seus elementos. O cálculo da deflexão x_j pelo teorema de Castigliano é simplificado se a derivada em relação à força P_j é feita antes da integração ou soma.

Por exemplo, no caso de uma viga, recordamos da Seção 11.4 que

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx \tag{11.17}$$

e determinamos a deformação x_j do ponto de aplicação da carga $\mathbf{P}_j$ escrevendo

$$x_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P_j} dx \tag{11.70}$$

No caso de uma treliça consistindo em n barras uniformes de comprimento L_i, área de seção transversal A_i e força interna F_i, usamos a Equação (11.14) e expressamos a energia de deformação U da treliça como

$$U = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_i^2 L_i}{2A_i E} \tag{11.71}$$

O deslocamento x_j do ponto de aplicação da carga $\mathbf{P}_j$ é obtido derivando-se em relação a P_j cada termo da soma. Escrevemos

$$x_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_i L_i}{A_i E} \frac{\partial F_i}{\partial P_j} \tag{11.72}$$

EXEMPLO 11.12

A viga em balanço AB suporta uma força w uniformemente distribuída e uma força concentrada **P** como mostra a Fig. 11.43. Sabendo que $L = 2\text{m}$, $w = 4\ \text{kN/m}$, $P = 6\ \text{kN}$ e $EI = 5\ \text{MN} \cdot \text{m}^2$, determine a deflexão de A.

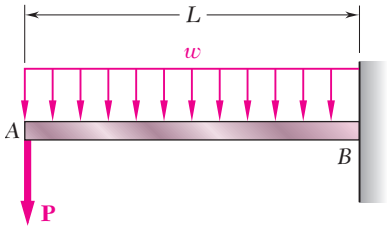


Fig. 11.43

A deflexão y_A do ponto de aplicação A em que a força **P** é aplicada é obtida da Equação (11.70). Como **P** é vertical e direcionada para baixo, y_A representa um deslocamento vertical e é positivo para baixo. Temos

$$y_A = \frac{\partial U}{\partial P} = \int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial P}dx \tag{11.73}$$

O momento fletor M na distância x a partir de A é

$$M = -(Px + \tfrac{1}{2}wx^2) \tag{11.74}$$

e sua derivada em relação a P é

$$\frac{\partial M}{\partial P} = -x$$

Substituindo M e $\partial M/\partial P$ na Equação (11.73), escrevemos

$$y_A = \frac{1}{EI}\int_0^L \left(Px^2 + \frac{1}{2}wx^3\right)dx$$

$$y_A = \frac{1}{EI}\left(\frac{PL^3}{3} + \frac{wL^4}{8}\right) \tag{11.75}$$

Substituindo os dados fornecidos, temos

$$y_A = \frac{1}{5 \times 10^6\ \text{N} \cdot \text{m}^2}\left[\frac{(6 \times 10^3\ \text{N})(2\ \text{m})^3}{3} + \frac{(4 \times 10^3\ \text{N/m})(2\ \text{m})^4}{8}\right]$$

$$y_A = 4{,}8 \times 10^{-3}\ \text{m} \qquad y_A = 4{,}8\ \text{mm} \downarrow$$

Observamos que o cálculo da derivada parcial $\partial M/\partial P$ *não poderia ter sido feito* se o valor numérico de P tivesse sido usado em lugar de P na expressão (11.74) para o momento fletor.

Podemos observar que a deflexão x_j de uma estrutura em um dado ponto C_j pode ser obtida pela aplicação direta do teorema de Castigliano apenas se uma força $\mathbf{P}_j$ for aplicada em C_j na direção na qual x_j deve ser determinada. Quando nenhuma carga é aplicada em C_j, ou quando uma carga é aplicada em uma direção que não a direção desejada, podemos ainda obter a deflexão x_j pelo teorema de Castigliano se usarmos o procedimento a seguir: aplicamos uma carga fictícia $\mathbf{Q}_j$ em C_j na direção na qual a deflexão x_j deve ser determinada e usamos o teorema de Castigliano para obtê-la

$$x_j = \frac{\partial U}{\partial Q_j} \tag{11.76}$$

em virtude de $\mathbf{Q}_j$ e as cargas reais. Fazendo $Q_j = 0$ na Equação (11.76), obtemos a deformação em C_j na direção desejada para o carregamento dado.

A inclinação θ_j de uma viga em um ponto C_j pode ser determinada de maneira similar aplicando-se um momento fictício $\mathbf{M}_j$ em C_j, calculando a derivada parcial $\partial U/\partial M_j$ e fazendo $M_j = 0$ na expressão obtida.

EXEMPLO 11.13

A viga em balanço AB suporta uma força w uniformemente distribuída (Fig. 11.44). Determine a deflexão e a inclinação em A.

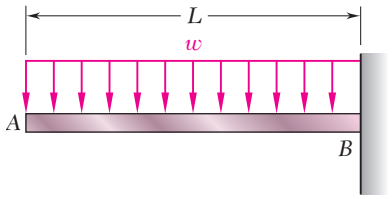


Fig. 11.44

Deflexão em A. Aplicamos uma força fictícia para baixo Q_A em A (Fig. 11.45) e escrevemos

$$y_A = \frac{\partial U}{\partial Q_A} = \int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial Q_A}\,dx \qquad (11.77)$$

O momento fletor M a uma distância x de A é

$$M = -Q_A x - \tfrac{1}{2}wx^2 \qquad (11.78)$$

e sua derivada em relação a Q_A é

$$\frac{\partial M}{\partial Q_A} = -x \qquad (11.79)$$

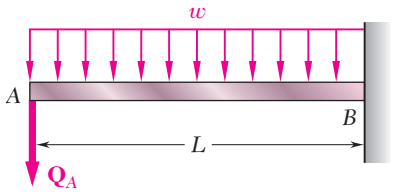


Fig. 11.45

Usando M e $\partial M/\partial Q_A$ de (11.78) e (11.79) na (11.77) e fazendo $Q_A = 0$, obtemos a deflexão em A para o carregamento dado:

$$y_A = \frac{1}{EI}\int_0^L (-\tfrac{1}{2}wx^2)(-x)\,dx = +\frac{wL^4}{8EI}$$

Como a força fictícia foi direcionada para baixo, o sinal positivo indica que

$$y_A = \frac{wL^4}{8EI}\downarrow$$

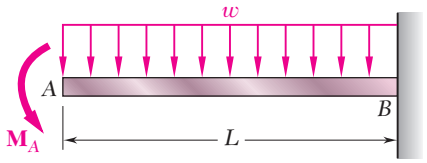


Fig. 11.46

Inclinação em A. Aplicamos um momento fictício $\mathbf{M}_A$ no sentido anti-horário em A (Fig. 11.46) e escrevemos

$$\theta_A = \frac{\partial U}{\partial M_A}$$

Usando a Equação (11.17), temos

$$\theta_A = \frac{\partial}{\partial M_A}\int_0^L \frac{M^2}{2EI}\,dx = \int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial M_A}\,dx \qquad (11.80)$$

O momento fletor M a uma distância x de A é

$$M = -M_A - \tfrac{1}{2}wx^2 \qquad (11.81)$$

e sua derivada em relação a M_A é

$$\frac{\partial M}{\partial M_A} = -1 \qquad (11.82)$$

Usando M e $\partial M/\partial M_A$ de (11.81) e (11.82) na (11.80) e fazendo $M_A = 0$, obtemos a inclinação em A para o carregamento dado:

$$\theta_A = \frac{1}{EI}\int_0^L (-\tfrac{1}{2}wx^2)(-1)\,dx = +\frac{wL^3}{6EI}$$

Como o momento fictício tinha o sentido anti-horário, o sinal positivo indica que o ângulo θ_A também é anti-horário:

$$\theta_A = \frac{wL^3}{6EI}\measuredangle$$

EXEMPLO 11.14

Uma força **P** é suportada em *B* por duas barras do mesmo material e com a mesma área *A* de seção transversal (Fig. 11.47). Determine os deslocamentos horizontal e vertical do ponto *B*.

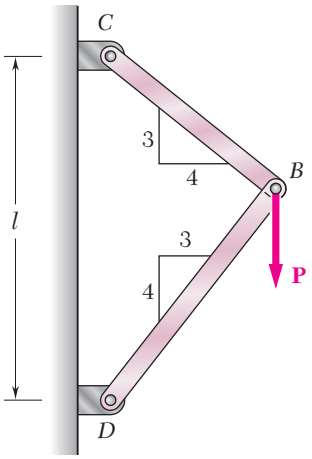


Fig. 11.47

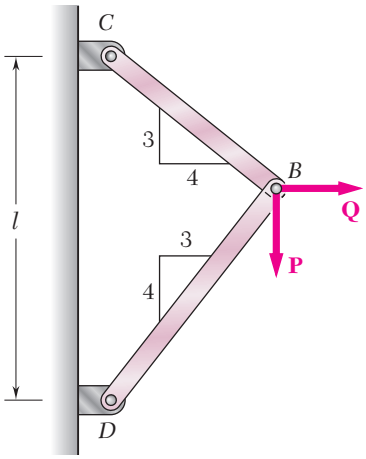


Fig. 11.48

Aplicamos uma força fictícia horizontal **Q** em *B* (Fig. 11.48). Pelo teorema de Castigliano temos

$$x_B = \frac{\partial U}{\partial Q} \qquad y_B = \frac{\partial U}{\partial P}$$

Recordando da Seção 11.4 a expressão (11.14) para a energia de deformação de uma barra, escrevemos

$$U = \frac{F_{BC}^2(BC)}{2AE} + \frac{F_{BD}^2(BD)}{2AE}$$

em que F_{BC} e F_{BD} representam as forças em *BC* e *BD*, respectivamente. Temos, portanto,

$$x_B = \frac{\partial U}{\partial Q} = \frac{F_{BC}(BC)}{AE}\frac{\partial F_{BC}}{\partial Q} + \frac{F_{BD}(BD)}{AE}\frac{\partial F_{BD}}{\partial Q} \qquad (11.83)$$

e

$$y_B = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{F_{BC}(BC)}{AE}\frac{\partial F_{BC}}{\partial P} + \frac{F_{BD}(BD)}{AE}\frac{\partial F_{BD}}{\partial P} \qquad (11.84)$$

Do diagrama de corpo livre do pino *B* (Fig. 11.49), obtemos

$$F_{BC} = 0{,}6P + 0{,}8Q \qquad F_{BD} = -0{,}8P + 0{,}6Q \qquad (11.85)$$

Derivando essas expressões em relação a *Q* e *P*, escrevemos

$$\frac{\partial F_{BC}}{\partial Q} = 0{,}8 \qquad \frac{\partial F_{BD}}{\partial Q} = 0{,}6$$
$$\frac{\partial F_{BC}}{\partial P} = 0{,}6 \qquad \frac{\partial F_{BD}}{\partial P} = -0{,}8 \qquad (11.86)$$

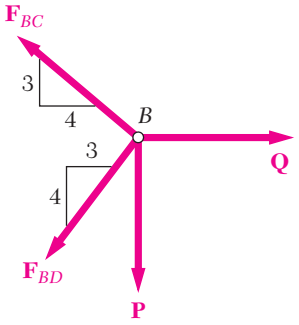


Fig. 11.49

Substituindo (11.85) e (11.86) em (11.83) e (11.84), fazendo $Q = 0$, e observando que $BC = 0{,}6l$ e $BD = 0{,}8l$, obtemos os deslocamentos horizontal e vertical do ponto *B* para a força dada **P**:

$$x_B = \frac{(0{,}6P)(0{,}6l)}{AE}(0{,}8) + \frac{(-0{,}8P)(0{,}8l)}{AE}(0{,}6)$$
$$= -0{,}096\frac{Pl}{AE}$$

$$y_B = \frac{(0{,}6P)(0{,}6l)}{AE}(0{,}6) + \frac{(-0{,}8P)(0{,}8l)}{AE}(-0{,}8)$$
$$= +0{,}728\frac{Pl}{AE}$$

Referindo-nos às direções das forças **Q** e **P**, concluímos que

$$x_B = 0{,}096\frac{Pl}{AE}\leftarrow \qquad y_B = 0{,}728\frac{Pl}{AE}\downarrow$$

Verificamos que a expressão obtida para o deslocamento vertical de *B* é a mesma que foi encontrada no Exemplo 11.9.

*11.14. Estruturas estaticamente indeterminadas

As reações nos apoios de uma estrutura elástica estaticamente indeterminada podem ser determinadas pelo teorema de Castigliano. No caso de uma estrutura indeterminada com um grau de hiperasticidade, por exemplo, escolhemos uma das reações como redundante e eliminamos ou modificamos adequadamente o apoio correspondente. A reação redundante é então tratada como uma carga desconhecida que, juntamente com as outras, deve produzir deformações compatíveis com os apoios originais. Primeiro calculamos a energia de deformação U da estrutura devido a ação combinada das cargas dadas e da reação redundante. Observando que a derivada parcial de U em relação à reação redundante representa a deflexão (ou inclinação) no apoio que foi eliminado ou modificado, fazemos então essa derivada igual a zero e resolvemos a equação obtida para a reação redundante.† As demais reações podem ser obtidas por meio das equações da estática.

†Isso vale no caso de um apoio rígido que não admite deflexão. Para outros tipos de apoio, a derivada parcial de U deverá ser igual à deflexão admitida.

EXEMPLO 11.15

Determine as reações nos apoios para a viga prismática e carregamento mostrados (Fig. 11.50).

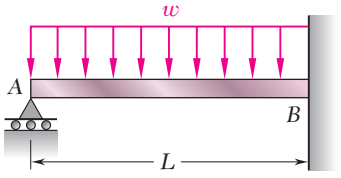


Fig. 11.50

A viga é estaticamente indeterminada com um grau de hiperasticidade. Consideramos a reação em A como redundante e liberamos a viga desse apoio. A reação $\mathbf{R}_A$ agora é considerada uma força desconhecida (Fig. 11.51) e será determinada com base na ideia de que a deflexão y_A em A deve ser zero. Pelo teorema de Castigliano $y_A = \partial U/\partial R_A$, em que U é a energia de deformação da viga produzida pela força distribuída e a reação redundante. Recordando da Equação (11.70), escrevemos

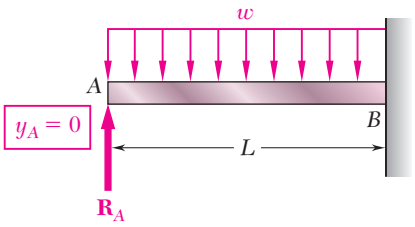


Fig. 11.51

$$y_A = \frac{\partial U}{\partial R_A} = \int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial R_A}\,dx \qquad (11.87)$$

Expressamos agora o momento fletor M para o carregamento da Fig. 11.51.

O momento fletor a uma distância x de A é

$$M = R_A x - \tfrac{1}{2}wx^2 \qquad (11.88)$$

e sua derivada em relação a R_A é

$$\frac{\partial M}{\partial R_A} = x \qquad (11.89)$$

Substituindo M e $\partial M/\partial R_A$ de (11.88) e (11.89) na (11.87), escrevemos

$$y_A = \frac{1}{EI}\int_0^L \left(R_A x^2 - \frac{1}{2}wx^3\right)dx = \frac{1}{EI}\left(\frac{R_A L^3}{3} - \frac{wL^4}{8}\right)$$

Colocando $y_A = 0$ e resolvendo para R_A, temos

$$R_A = \tfrac{3}{8}wL \qquad \mathbf{R}_A = \tfrac{3}{8}wL\uparrow$$

Das condições de equilíbrio para a viga, verificamos que a reação em B consiste na seguinte força e momento:

$$\mathbf{R}_B = \tfrac{5}{8}wL\uparrow \qquad \mathbf{M}_B = \tfrac{1}{8}wL^2\circlearrowleft$$

EXEMPLO 11.16

Uma força **P** é suportada em *B* por três barras do mesmo material e com a mesma seção transversal de área *A* (Fig. 11.52). Determine a força em cada barra.

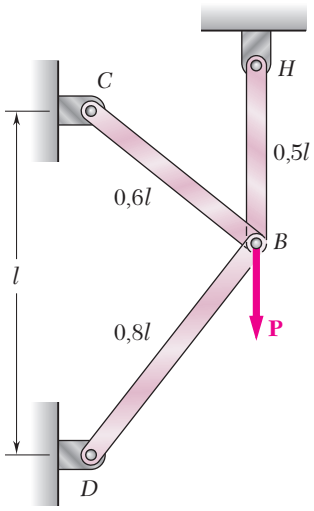


Fig. 11.52

A estrutura é estaticamente indeterminada com um grau de indeterminação. Consideramos a reação em *H* como redundante e liberamos a barra *BH* de seu apoio em *H*. A reação $\mathbf{R}_H$ é agora considerada uma força desconhecida (Fig. 11.53) e será determinada com base na condição de que o deslocamento y_H do ponto *H* deve ser zero. Pelo teorema de Castigliano $y_H = \partial U/\partial R_H$, em que *U* é a energia de deformação do sistema, constituído pelas três barras, submetido a uma força **P** e a reação redundante $\mathbf{R}_H$. Lembrando da Equação (11.72), escrevemos

$$y_H = \frac{F_{BC}(BC)}{AE}\frac{\partial F_{BC}}{\partial R_H} + \frac{F_{BD}(BD)}{AE}\frac{\partial F_{BD}}{\partial R_H} + \frac{F_{BH}(BH)}{AE}\frac{\partial F_{BH}}{\partial R_H} \qquad (11.90)$$

Notamos que a força na barra *BH* é igual a R_H e escrevemos

$$F_{BH} = R_H \qquad (11.91)$$

Então, do diagrama de corpo livre do nó *B* (Fig. 11.54), obtemos

$$F_{BC} = 0{,}6P - 0{,}6R_H \qquad F_{BD} = 0{,}8R_H - 0{,}8P \qquad (11.92)$$

Derivando em relação a R_H a força em cada barra, escrevemos

$$\frac{\partial F_{BC}}{\partial R_H} = -0{,}6 \qquad \frac{\partial F_{BD}}{\partial R_H} = 0{,}8 \qquad \frac{\partial F_{BH}}{\partial R_H} = 1 \qquad (11.93)$$

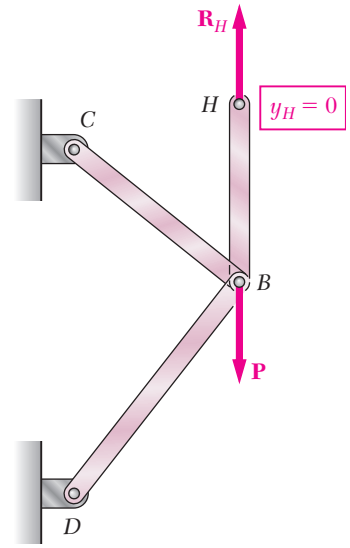


Fig. 11.53

Substituindo (11.91), (11.92) e (11.93) na (11.90) e observando que os comprimentos *BC*, *BD* e *BH* são, respectivamente, iguais a 0,6*l*, 0,8*l* e 0,5*l*, escrevemos

$$y_H = \frac{1}{AE}[(0{,}6P - 0{,}6R_H)(0{,}6l)(-0{,}6) + (0{,}8R_H - 0{,}8P)(0{,}8l)(0{,}8) + R_H(0{,}5l)(1)]$$

Usando $y_H = 0$, obtemos

$$1{,}228R_H - 0{,}728P = 0$$

e, resolvendo para R_H,

$$R_H = 0{,}593P$$

Usando esse valor nas Equações (11.91) e (11.92), obtemos as forças nas três barras:

$$F_{BC} = +0{,}244P \qquad F_{BD} = -0{,}326P \qquad F_{BH} = +0{,}593P$$

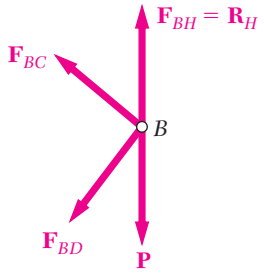
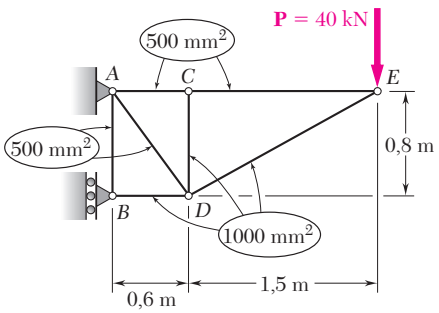


Fig. 11.54

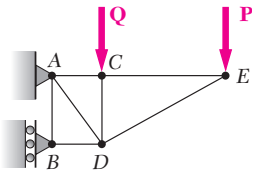


PROBLEMA RESOLVIDO 11.5

Para a treliça e o carregamento do Problema Resolvido 11.4, determine o deslocamento vertical do nó *C*.

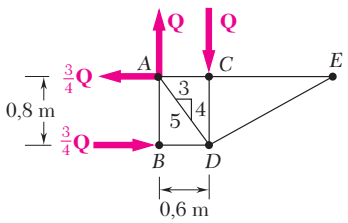
SOLUÇÃO

Teorema de Castigliano. Como não existe força vertical aplicada no nó *C*, aplicamos uma força fictícia **Q** como mostra a figura. Usando o teorema de Castigliano e chamando de F_i a força em uma barra *i* provocada pelas forças combinadas **P** e **Q**, e lembrando que o módulo de elasticidade E é constante, temos,

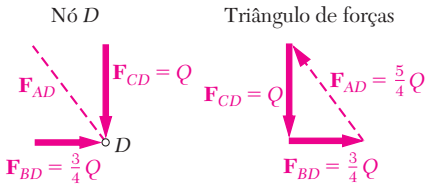


$$y_C = \sum \left(\frac{F_i L_i}{A_i E}\right)\frac{\partial F_i}{\partial Q} = \frac{1}{E}\sum \left(\frac{F_i L_i}{A_i}\right)\frac{\partial F_i}{\partial Q} \tag{1}$$

Forças nas barras. Considerando na sequência o equilíbrio dos nós *E*, *C*, *B* e *D*, determinamos a força em cada barra provocada pela força **Q**.



Nó *E*: $F_{CE} = F_{DE} = 0$
Nó *C*: $F_{AC} = 0; F_{CD} = -Q$
Nó *B*: $F_{AB} = 0; F_{BD} = -\frac{3}{4}Q$



A força em cada barra provocada pela força **P** foi determinada anteriormente no Problema Resolvido 11.4. A força total em cada barra sob a ação combinada de **Q** e **P** é mostrada na tabela a seguir. Determinando $\partial F_i/\partial Q$ para cada barra, calculamos então $(F_i L_i/A_i)(\partial F_i/\partial Q)$ conforme indicado na tabela.

Barra	F_i	$\partial F_i/\partial Q$	L_i, m	A_i, m²	$\left(\frac{F_i L_i}{A_i}\right)\frac{\partial F_i}{\partial Q}$
AB	0	0	0,8	500×10^{-6}	0
AC	$+15P/8$	0	0,6	500×10^{-6}	0
AD	$+5P/4 + 5Q/4$	$\frac{5}{4}$	1,0	500×10^{-6}	$+3125P + 3125Q$
BD	$-21P/8 - 3Q/4$	$-\frac{3}{4}$	0,6	1000×10^{-6}	$+1181P + 338Q$
CD	$-Q$	-1	0,8	1000×10^{-6}	$+800Q$
CE	$+15P/8$	0	1,5	500×10^{-6}	0
DE	$-17P/8$	0	1,7	1000×10^{-6}	0

$$\sum \left(\frac{F_i L_i}{A_i}\right)\frac{\partial F_i}{\partial Q} = 4306P + 4263Q$$

Deflexão de *C*. Substituindo na Equação (1), temos

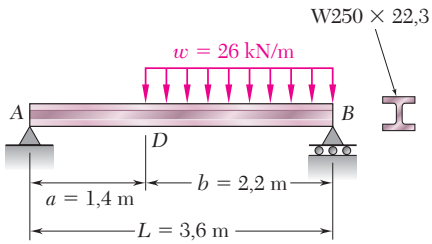
$$y_C = \frac{1}{E}\sum \left(\frac{F_i L_i}{A_i}\right)\frac{\partial F_i}{\partial Q} = \frac{1}{E}(4306P + 4263Q)$$

Como a força **Q** não faz parte do carregamento original, usamos $Q = 0$. Substituindo os dados fornecidos, $P = 40$ kN e $E = 73$ GPa, encontramos

$$y_C = \frac{4306(40 \times 10^3\ \text{N})}{73 \times 10^9\ \text{Pa}} = 2{,}36 \times 10^{-3}\ \text{m} \qquad y_C = 2{,}36\ \text{mm} \downarrow \blacktriangleleft$$

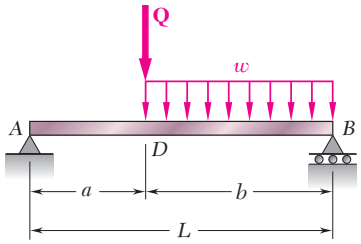
PROBLEMA RESOLVIDO 11.6

Para a viga e carregamento mostrados, determine a deflexão no ponto D. Use $E = 200$ GPa.



SOLUÇÃO

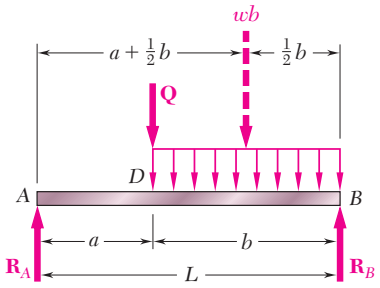
Teorema de Castigliano. Como o carregamento dado não inclui uma força vertical aplicada no ponto D, aplicamos uma força fictícia Q como mostra a figura. Usando o teorema de Castigliano e observando que EI é constante, escrevemos



$$y_D = \int \frac{M}{EI}\left(\frac{\partial M}{\partial Q}\right)dx = \frac{1}{EI}\int M\left(\frac{\partial M}{\partial Q}\right)dx \tag{1}$$

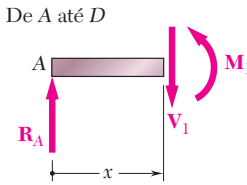
A integração será feita separadamente para as partes AD e DB.

Reações. Usando o diagrama de corpo livre da viga toda, encontramos



$$\mathbf{R}_A = \frac{wb^2}{2L} + Q\frac{b}{L}\uparrow \qquad \mathbf{R}_B = \frac{wb(a + \frac{1}{2}b)}{L} + Q\frac{a}{L}\uparrow$$

Parte* AD *da viga. Usando o diagrama de corpo livre mostrado, encontramos



$$M_1 = R_A x = \left(\frac{wb^2}{2L} + Q\frac{b}{L}\right)x \qquad \frac{\partial M_1}{\partial Q} = +\frac{bx}{L}$$

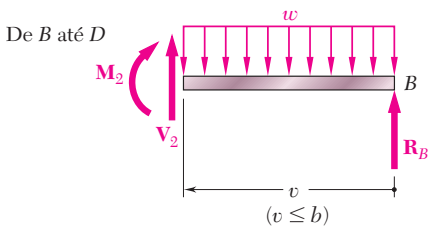
Substituindo na Equação (1) e integrando de A a D temos

$$\frac{1}{EI}\int M_1\frac{\partial M_1}{\partial Q}dx = \frac{1}{EI}\int_0^a R_A x\left(\frac{bx}{L}\right)dx = \frac{R_A a^3 b}{3EIL}$$

Substituímos R_A e depois usamos a força fictícia Q igual a zero.

$$\frac{1}{EI}\int M_1\frac{\partial M_1}{\partial Q}dx = \frac{wa^3b^3}{6EIL^2} \tag{2)}$$

Parte* DB *da viga. Usando o diagrama de corpo livre mostrado, vemos que o momento fletor a uma distância v da extremidade B é



$$M_2 = R_B v - \frac{wv^2}{2} = \left[\frac{wb(a + \frac{1}{2}b)}{L} + Q\frac{a}{L}\right]v - \frac{wv^2}{2} \qquad \frac{\partial M_2}{\partial Q} = +\frac{av}{L}$$

Substituindo na Equação (1) e integrando do ponto B em que $v = 0$, até o ponto D em que $v = b$, escrevemos

$$\frac{1}{EI}\int M_2\frac{\partial M_2}{\partial Q}dv = \frac{1}{EI}\int_0^b\left(R_B v - \frac{wv^2}{2}\right)\left(\frac{av}{L}\right)dv = \frac{R_B ab^3}{3EIL} - \frac{wab^4}{8EIL}$$

Substituindo R_B e fazendo $Q = 0$,

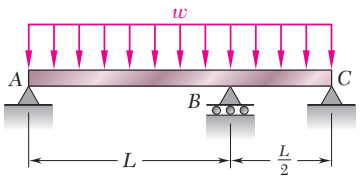
$$\frac{1}{EI}\int M_2\frac{\partial M_2}{\partial Q}dv = \left[\frac{wb(a + \frac{1}{2}b)}{L}\right]\frac{ab^3}{3EIL} - \frac{wab^4}{8EIL} = \frac{5a^2b^4 + ab^5}{24EIL^2}w \tag{3}$$

***Deflexão do ponto* D.** Lembrando das Equações (1), (2) e (3), temos

$$y_D = \frac{wab^3}{24EIL^2}(4a^2 + 5ab + b^2) = \frac{wab^3}{24EIL^2}(4a + b)(a + b) = \frac{wab^3}{24EIL}(4a + b)$$

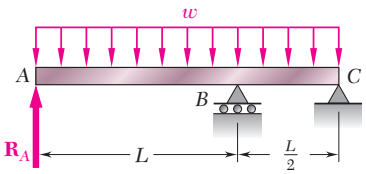
Do Apêndice C, verificamos que $I = 28{,}9 \times 10^6$ mm^4 para um perfil W250 × 22,3. Substituindo I, w, a, b e L por seus valores numéricos, obtemos

$$y_C = 6{,}05 \text{ mm} \downarrow \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESOLVIDO 11.7

Para a viga uniforme e carregamento mostrados, determine as reações nos apoios.



SOLUÇÃO

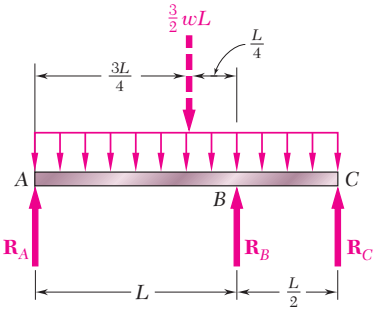
Teorema de Castigliano. A viga é indeterminada com um grau de indeterminação e escolhemos a reação $\mathbf{R}_A$ como redundante. Usando o teorema de Castigliano, determinamos a deflexão em A provocada pela ação combinada de $\mathbf{R}_A$ e à força distribuída. Como EI é constante, escrevemos

$$y_A = \int \frac{M}{EI}\left(\frac{\partial M}{\partial R_A}\right)dx = \frac{1}{EI}\int M\frac{\partial M}{\partial R_A}\,dx \tag{1}$$

A integração será feita separadamente para as partes AB e BC da viga. Finalmente, $\mathbf{R}_A$ é obtida fazendo-se y_A igual a zero.

Diagrama de corpo livre: viga inteira. Expressamos as reações em B e C em termos de R_A e da força distribuída

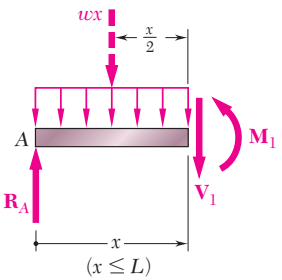
$$R_B = \tfrac{9}{4}wL - 3R_A \qquad R_C = 2R_A - \tfrac{3}{4}wL \tag{2}$$



Parte* AB *da viga. Usando o diagrama de corpo livre mostrado, encontramos

$$M_1 = R_A x - \frac{wx^2}{2} \qquad \frac{\partial M_1}{\partial R_A} = x$$

De A até B



Substituindo na Equação (1) e integrando de A até B, temos

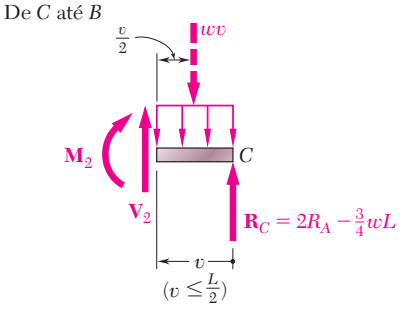
$$\frac{1}{EI}\int M_1\frac{\partial M}{\partial R_A}\,dx = \frac{1}{EI}\int_0^L\left(R_A x^2 - \frac{wx^3}{2}\right)dx = \frac{1}{EI}\left(\frac{R_A L^3}{3} - \frac{wL^4}{8}\right) \tag{3}$$

Parte* BC *da viga. Temos

$$M_2 = \left(2R_A - \frac{3}{4}wL\right)v - \frac{wv^2}{2} \qquad \frac{\partial M_2}{\partial R_A} = 2v$$

Substituindo na Equação (1) e integrando de C, em que $v = 0$, até B, em que $v = \frac{1}{2}L$, temos

De C até B



$$\frac{1}{EI}\int M_2\frac{\partial M_2}{\partial R_A}\,dv = \frac{1}{EI}\int_0^{L/2}\left(4R_A v^2 - \frac{3}{2}wLv^2 - wv^3\right)dv$$

$$= \frac{1}{EI}\left(\frac{R_A L^3}{6} - \frac{wL^4}{16} - \frac{wL^4}{64}\right) = \frac{1}{EI}\left(\frac{R_A L^3}{6} - \frac{5wL^4}{64}\right) \tag{4}$$

***Reação em* A.** Somando as expressões obtidas em (3) e (4), determinamos y_A e consideramos seu valor igual a zero

$$y_A = \frac{1}{EI}\left(\frac{R_A L^3}{3} - \frac{wL^4}{8}\right) + \frac{1}{EI}\left(\frac{R_A L^3}{6} - \frac{5wL^4}{64}\right) = 0$$

Resolvendo para R_A,

$$R_A = \frac{13}{32}wL \qquad R_A = \frac{13}{32}wL\uparrow \blacktriangleleft$$

***Reações em* B *e* C.** Substituindo R_A nas Equações (2), obtemos

$$R_B = \frac{33}{32}wL\uparrow \qquad R_C = \frac{wL}{16}\uparrow \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

11.77 até 11.79 Usando as informações no Apêndice D, calcule o trabalho das cargas quando elas são aplicadas à viga (*a*) se a força **P** for aplicada primeiro e (*b*) se o momento **M** for aplicado primeiro.

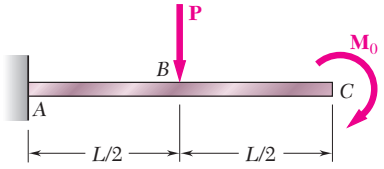


Fig. P11.77

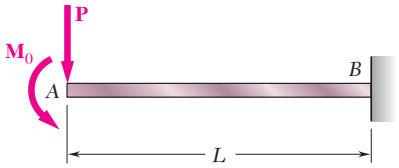


Fig. *P11.78*

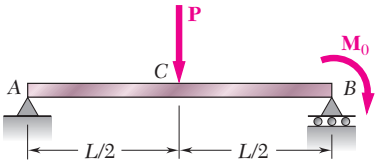


Fig. P11.79

***11.80* até 11.82** Para a viga e carregamento mostrados, (*a*) calcule o trabalho das forças quando elas são aplicadas sucessivamente à viga, usando as informações fornecidas no Apêndice D, (*b*) calcule a energia de deformação da viga pelo método da Seção 11.4 e mostre que ela é igual ao trabalho obtido na parte *a*.

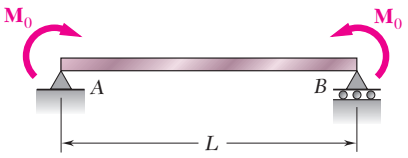


Fig. *P11.80*

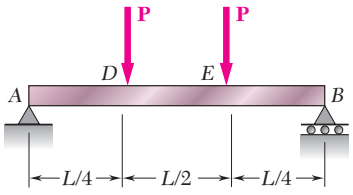


Fig. P11.81

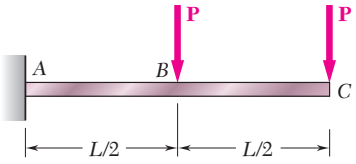


Fig. P11.82

11.83 e 11.84 Para a viga prismática mostrada, determine a deflexão no ponto *D*.

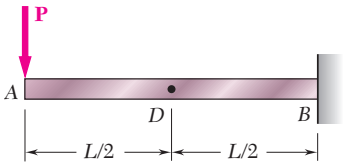


Fig. P11.83 e P11.85

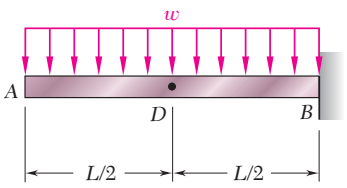


Fig. P11.84 e *P11.86*

11.85 e *11.86* Para a viga prismática mostrada, determine a inclinação no ponto *D*.

11.87 Para a viga prismática mostrada, determine a inclinação no ponto *B*.

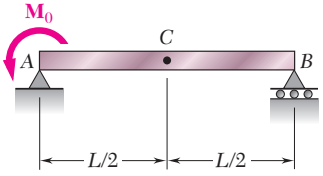


Fig. P11.87

11.88 e 11.89 Para a viga prismática mostrada, determine a deflexão no ponto D.

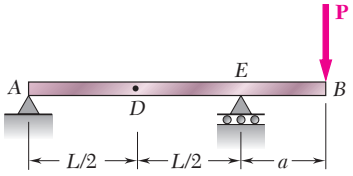


Fig. P11.88 e *P11.90*

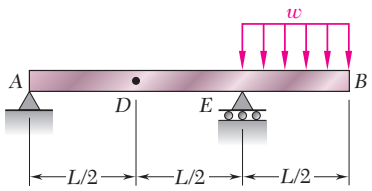


Fig. P11.89 e P11.91

***11.90* e 11.91** Para a viga prismática mostrada, determine a inclinação no ponto D.

11.92 Para a viga e carregamento mostrados, determine a deflexão do ponto A. Use $E = 200$ GPa.

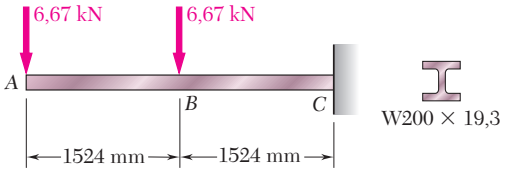


Fig. P11.92 e *P11.93*

11.93 Para a viga e carregamento mostrados, determine a deflexão do ponto B. Use $E = 200$ GPa.

11.94 e 11.95 Para a viga e carregamento mostrados, determine a deflexão no ponto B. Use $E = 200$ GPa.

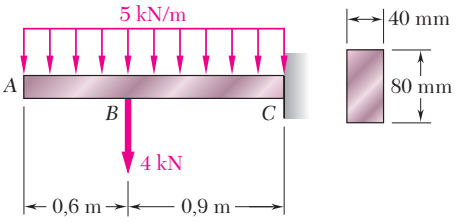


Fig. P11.94

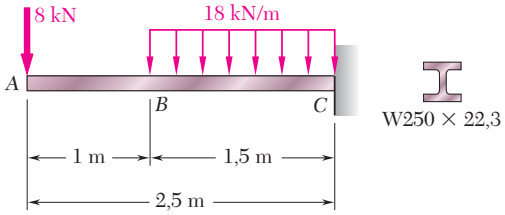


Fig. P11.95

11.96 Para a viga e carregamento mostrados, determine a inclinação na extremidade A. Use $E = 200$ GPa.

11.97 Para a viga e carregamento mostrados, determine a deflexão no ponto C. Use $E = 200$ GPa.

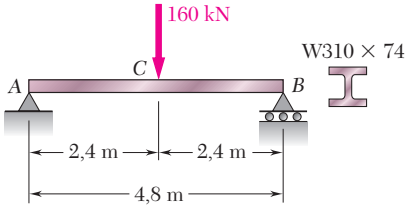


Fig. P11.96

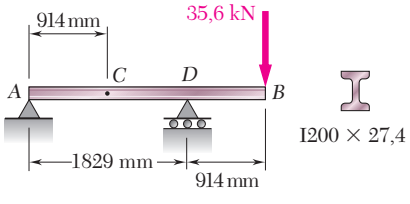


Fig. P11.97 e *P11.98*

11.98 Para a viga e carregamento mostrados, determine a inclinação na extremidade A. Use $E = 200$ GPa.

11.99 e *11.100* Cada barra de treliça da figura é feita de aço e tem seção transversal com a área indicada. Usando $E = 200$ GPa, determine o deslocamento indicado.

11.99 Deslocamento vertical do nó C.

11.100 Deslocamento horizontal do nó C.

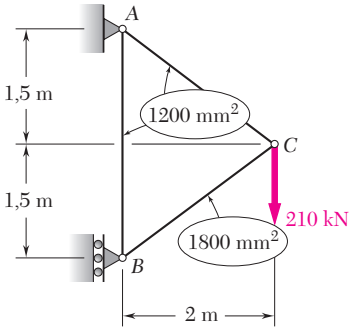


Fig. P11.99 e *P11.100*

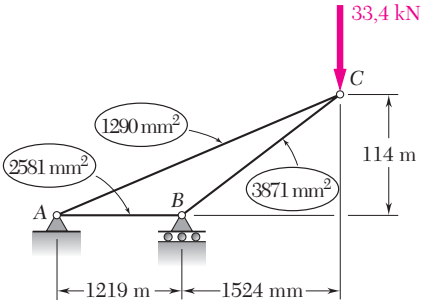


Fig. P11.101 e P11.102

11.101 e *11.102* Cada barra de treliça mostrada é feita de aço e tem a seção transversal com a área indicada. Usando $E = 200$ GPa, determine o deslocamento indicado.

11.101 Deslocamento vertical do nó C.

11.102 Deslocamento horizontal do nó C.

11.103 e *11.104* Cada barra de treliça mostrada é feita de aço e tem a seção transversal com a área de 500 mm^2. Usando $E = 200$ GPa, determine o deslocamento indicado.

11.103 Deslocamento vertical do nó B.

11.104 Deslocamento horizontal do ponto B.

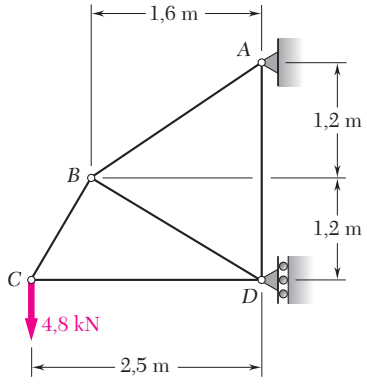


Fig. P11.103 e *P11.104*

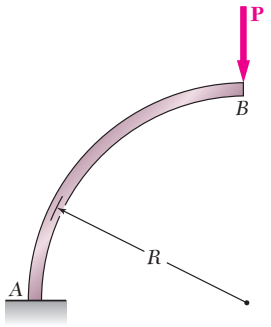


Fig. P11.105

11.105 Para a viga e carregamento mostrados e usando o teorema de Castigliano, determine (*a*) a deflexão horizontal B e (*b*) a delfexão vertical do ponto B.

11.106 Para a barra de seção uniforme e o carregamento mostrados e usando o teorema de Castigliano, determine a deflexão do ponto B.

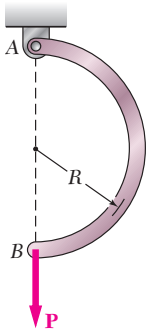


Fig. P11.106

11.107 Duas barras AB e BC de mesma rigidez à flexão *EI* são soldadas juntas em B. Para o carregamento mostrado, determine (*a*) a deflexão do ponto C e (*b*) a inclinação do elemento BC no ponto C.

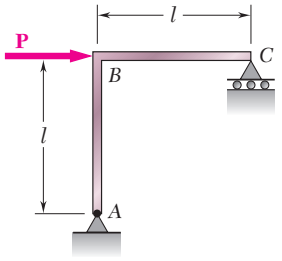


Fig. P11.107

11.108 Uma barra de seção uniforme com rigidez à flexão *EI* é dobrada e carregada conforme mostra a figura. Determine (*a*) a deflexão horizontal do ponto *D* e (b) a inclinação no ponto *D*.

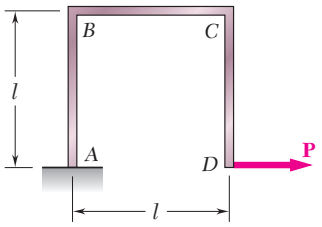


Fig. *P11.108* e P11.109

11.109 Uma barra de seção uniforme com rigidez à flexão *EI* é dobrada e carregada conforme mostra a figura. Determine (*a*) a deflexão vertical do ponto *D* e (b) a inclinação da barra BC no ponto *C*.

11.110 Uma barra de seção uniforme com rigidez à flexão *EI* é dobrada e carregada conforme mostra a figura. Determine (*a*) a deflexão vertical *A* e (*b*) a deflexão horizontal do ponto *A*.

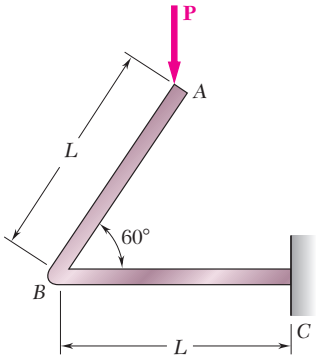


Fig. *P11.110*

11.111 até 11.114 Determine a reação no apoio móvel e trace o diagrama do momento fletor para a viga e carregamento mostrados.

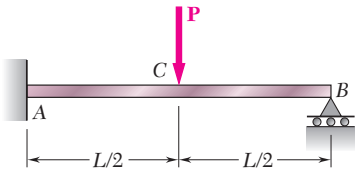


Fig. P11.111

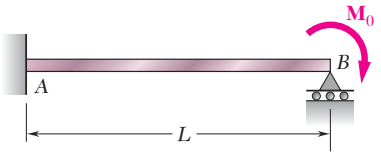


Fig. P11.112

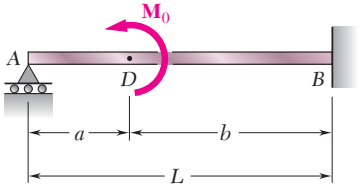


Fig. P11.113

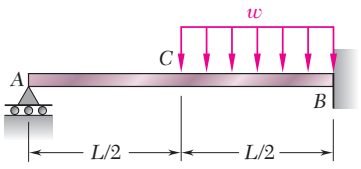


Fig. P11.114

11.115 Determine a reação no apoio móvel e trace o diagrama do momento fletor para a viga e carregamento mostrados.

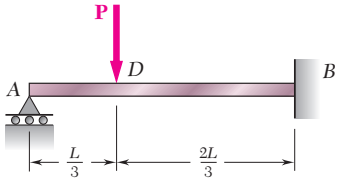


Fig. *P11.115*

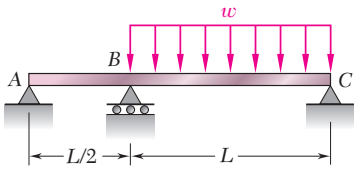


Fig. P11.116

11.116 Para a viga de seção uniforme e carregamento mostrados, determine a reação em cada apoio.

11.117 até *11.120* Três barras do mesmo material e mesma área de seção transversal são usadas para suportar a força **P**. Determine o esforço na barra *BC*.

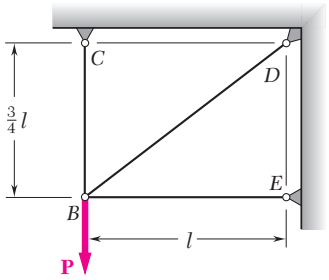


Fig. P11.117

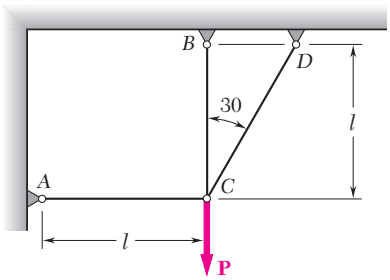


Fig. P11.118

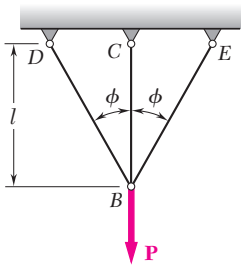


Fig. P11.119

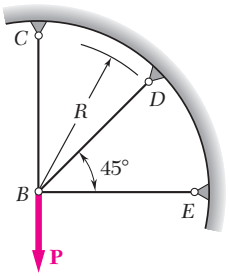


Fig. *P11.120*

11.121 e 11.122 Sabendo que as oito barras da treliça indeterminada mostradas nas figuras têm a mesma área de seção transversal, determine o esforço na barra *AB*.

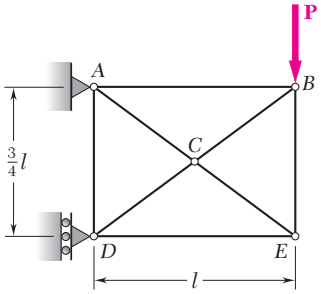


Fig. P11.121

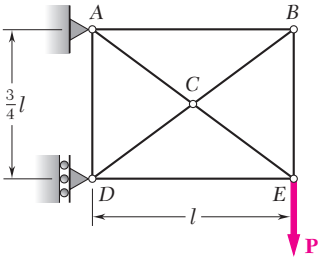


Fig. P11.122

REVISÃO E RESUMO DO CAPÍTULO 11

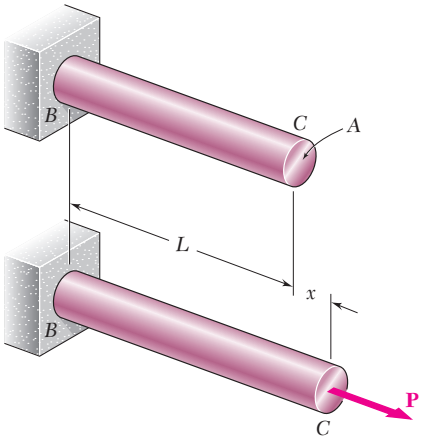


Fig. 11.1

Esse capítulo foi dedicado ao estudo da energia de deformação e às maneiras pelas quais ela pode ser usada para determinar as tensões e as deformações em estruturas submetidas a carregamentos estáticos e de impacto.

Na Seção 11.2 consideramos uma barra uniforme submetida a uma força axial **P** aumentando lentamente (Fig. 11.1). Notamos que a área abaixo da

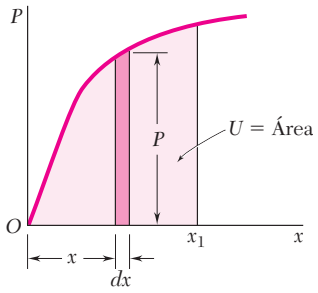


Fig. 11.3

Energia de deformação

curva da força em função da deformação (Fig. 11.3) representa o trabalho feito por **P**. Esse trabalho é igual à energia de deformação da barra associada com a deformação provocada pela força **P**:

$$\text{Energia de deformação} = U = \int_0^{x_1} P\,dx \tag{11.2}$$

Densidade de energia de deformação

Como a tensão é uniforme em toda a barra, pudemos dividir a energia de deformação pelo volume da barra e obter a energia de deformação por unidade de volume, que definimos como *densidade de energia de deformação* do material [Seção 11.3]. Vimos que

$$\text{Densidade de energia de deformação} = u = \int_0^{\epsilon_1} \sigma_x\,d\epsilon_x \tag{11.4}$$

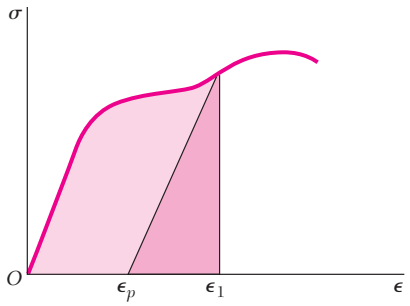


Fig. 11.6

e observamos que a densidade de energia de deformação é igual à área abaixo da curva da tensão em função da deformação do material (Fig. 11.6). Conforme vimos na Seção 11.4, a Equação (11.4) permanece válida quando as tensões não são uniformemente distribuídas, mas a densidade de energia de deformação variará de um ponto a outro. Se o material é descarregado, há uma deformação específica permanente $_p$ e somente a densidade de energia de deformação correspondente à área triangular será recuperada, sendo o restante da energia dissipado na forma de calor durante a deformação do material.

Módulo de tenacidade

A área abaixo de toda a curva da tensão em função da deformação foi definida como o *módulo de tenacidade* e é uma medida da energia total que pode ser absorvida pelo material.

Se a tensão normal σ permanece dentro do limite de proporcionalidade do material, a densidade de energia de deformação u é expressa como

$$u = \frac{\sigma^2}{2E}$$

A área abaixo da curva da tensão em função da deformação desde a deformação zero até a deformação ϵ_E no escoamento (Fig. 11.9) é chamada de *módulo de resiliência* do material e representa a energia por unidade de volume que o material pode absorver sem escoar. Escrevemos

Módulo de resiliência

$$u_E = \frac{\sigma_E^2}{2E} \tag{11.8}$$

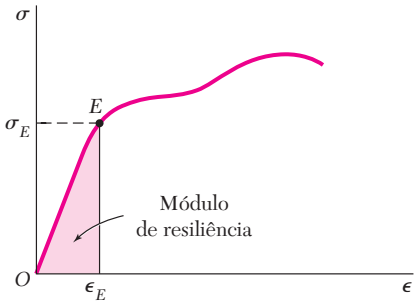


Fig. 11.9

Na Seção 11.4 consideramos a energia de deformação associada às *tensões normais*. Vimos que se uma barra de comprimento L e *seção transversal variável de área* A(a área A é uma função de x) está submetida em sua extremidade a uma força axial centrada **P**, a energia de deformação da barra será

Energia de deformação devido a força axial

$$U = \int_0^L \frac{P^2}{2AE}\,dx \tag{11.13}$$

Se a barra tiver *seção transversal uniforme* de área A, a energia de deformação será

$$U = \frac{P^2L}{2AE} \tag{11.14}$$

Nós vimos que para uma viga submetida a forças transversais (Fig. 11.15) a energia de deformação associada às tensões normais é

Energia de deformação devido a flexão

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI}\,dx \tag{11.17}$$

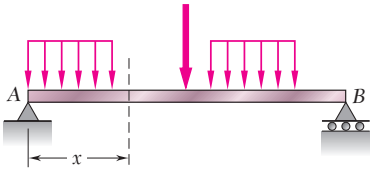


Fig. 11.15

em que M é o momento fletor e EI a rigidez à flexão da viga.

A energia de deformação associada às *tensões de cisalhamento* foi considerada na Seção 11.5. Vimos que a densidade de energia de deformação para um material em cisalhamento puro é

Energia de deformação devido a tensões de cisalhamento

$$u = \frac{\tau_{xy}^2}{2G} \tag{11.19}$$

em que τ_{xy} é a tensão de cisalhamento e G o módulo de elasticidade transversal do material.

Para um eixo de comprimento L e seção transversal uniforme submetido em suas extremidades a torques de intensidade T (Fig. 11.19), a energia de deformação era

Energia de deformação devido a torção

$$U = \frac{T^2L}{2GJ} \tag{11.22}$$

na qual J é o momento polar de inércia da área da seção transversal do eixo.

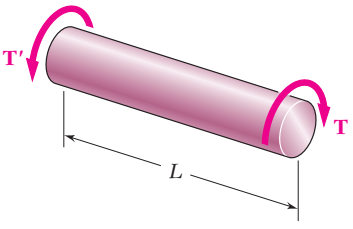


Fig. 11.19

Estado geral de tensão

Na Seção 11.6 consideramos a energia de deformação de um material elástico e isotrópico sob um estado geral de tensão e expressamos a densidade de energia de deformação em um dado ponto nos termos das tensões principais σ_a, σ_b e σ_c nesse ponto:

$$u = \frac{1}{2E}[\sigma_a^2 + \sigma_b^2 + \sigma_c^2 - 2\nu(\sigma_a\sigma_b + \sigma_b\sigma_c + \sigma_c\sigma_a)] \tag{11.27}$$

A densidade de energia de deformação em um dado ponto estava dividida em duas partes: u_v, associada à variação de volume do material naquele ponto, e u_d, associada à distorção do material no mesmo ponto. Escrevemos $u = u_v + u_d$, em que

$$u_v = \frac{1 - 2\nu}{6E}(\sigma_a + \sigma_b + \sigma_c)^2 \tag{11.32}$$

e

$$u_d = \frac{1}{12G}[(\sigma_a - \sigma_b)^2 + (\sigma_b - \sigma_c)^2 + (\sigma_c - \sigma_a)^2] \tag{11.33}$$

Usando a expressão obtida para u_d, deduzimos o critério da máxima energia de distorção, que foi utilizado na Seção 7.7 para prever se um material dúctil escoaria sob um dado estado plano de tensão.

Carregamento de impacto

Força estática equivalente

Na Seção 11.7 consideramos o *carregamento de impacto* de uma estrutura elástica sendo atingida por uma massa em movimento com uma dada velocidade. Consideramos que a energia cinética da massa é transferida inteiramente para a estrutura e definimos a *força estática equivalente* como a força que provocaria as mesmas deformações e tensões provocadas pelo carregamento de impacto.

Após discutirmos vários exemplos, notamos que uma estrutura projetada para resistir efetivamente a uma força de impacto deveria ser construída de tal forma que as tensões fossem distribuídas uniformemente ao longo da estrutura, e o material utilizado deveria ter um baixo módulo de elasticidade e uma alta tensão de escoamento [Seção 11.8].

Elementos submetidos a uma única força

A energia de deformação de elementos estruturais submetidos a uma *única força* foi considerada na Seção 11.9. No caso da viga e carregamento da Fig. 11.27, concluímos que a energia de deformação da viga é

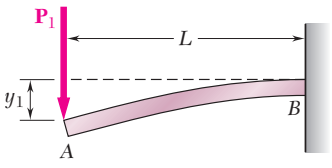


Fig. 11.27

$$U = \frac{P_1^2 L^3}{6EI} \tag{11.46}$$

Observando que o trabalho feito pela força **P** é igual a $\frac{1}{2}P_1y_1$, igualamos o trabalho da força com a energia de deformação da viga e determinamos a deflexão y_1 do ponto de aplicação da força [Seção 11.10 e Exemplo 11.10].

O método que acabamos de descrever tem aplicação limitada, porque está restrito a estruturas submetidas a uma única força concentrada e à determinação da deflexão no ponto de aplicação dessa força. Nas demais seções do capítulo, apresentamos um método mais geral, que pode ser usado para determinar deflexões em vários pontos de estruturas submetidas a várias forças.

Teorema de Castigliano

Na Seção 11.11 discutimos a energia de deformação de uma estrutura submetida a várias forças, e na Seção 11.12 introduzimos o *teorema de Castigliano*, segundo o qual a deflexão x_j, do ponto de aplicação de uma força $\mathbf{P}_j$, medida ao longo da linha de ação de $\mathbf{P}_j$, é igual à derivada parcial da energia de deformação da estrutura com relação à força $\mathbf{P}_j$. Escrevemos

$$x_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} \tag{11.65}$$

Concluímos também que podíamos usar o teorema de Castigliano para determinar a *inclinação* de uma viga no ponto de aplicação de um momento $\mathbf{M}_j$ escrevendo

$$\theta_j = \frac{\partial U}{\partial M_j} \tag{11.68}$$

e o ângulo de *rotação* em uma seção de um eixo em que é aplicado um torque $\mathbf{T}_j$ escrevendo

$$\phi_j = \frac{\partial U}{\partial T_j} \tag{11.69}$$

Na Seção 11.13, o teorema de Castigliano foi aplicado à determinação das deflexões e inclinações em vários pontos de uma dada estrutura. O uso de forças "fictícias" nos permitiu incluir pontos nos quais nenhuma força real era aplicada. Observamos também que o cálculo de uma deflexão x_j era simplificado se a derivada com relação à força P_j fosse feita antes da integração. No caso de uma viga, usando a Equação (11.17), escrevemos

$$x_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} = \int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial P_j}\,dx \tag{11.70}$$

Analogamente, para uma treliça consistindo em n barras, o deslocamento x_j no ponto de aplicação da força $\mathbf{P}_j$ foi determinado escrevendo

$$x_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_i L_i}{A_i E}\frac{\partial F_i}{\partial P_j} \tag{11.72}$$

Estruturas indeterminadas

O capítulo foi concluído [Seção 11.14] com a aplicação do teorema de Castigliano à análise de *estruturas estaticamente indeterminadas* [Problema Resolvido 11.7, Exemplos 11.15 e 11.16].

PROBLEMAS DE REVISÃO

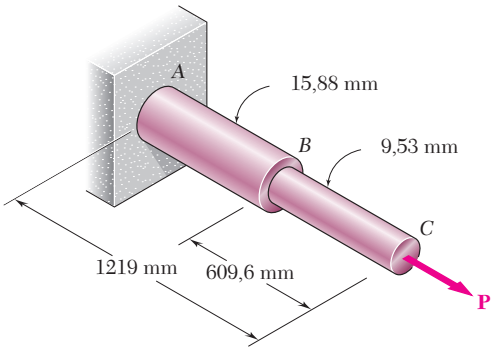


Fig. P11.123

11.123 A barra *AB* é feita de um aço para o qual a tensão de escoamento é $\sigma_E = 448$ MPa e o módulo de elasticidade é $E = 200$ GPa. Sabendo que uma energia de deformação de 6,78 N · m deve ser adquirida pela barra quando a força axial **P** é aplicada, determine o coeficiente de segurança da barra em relação à deformação permanente.

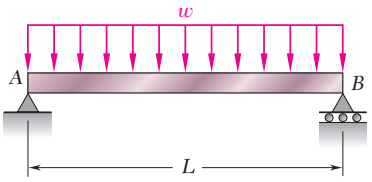


Fig. *P11.124*

11.124 Levando em consideração apenas o efeito das tensões normais, determine a energia de deformação da viga prismática AB para o carregamento mostrado.

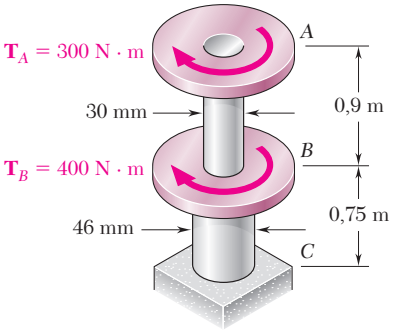


Fig. P11.125

11.125 No conjunto da figura, os torques $\mathbf{T}_A$ e $\mathbf{T}_B$ são aplicados aos discos *A* e *B*, respectivamente. Sabendo que ambos os eixos tem seção transversal cheia e feitos de alumínio ($G = 73$ GPa), determine a energia de deformação total adquirida pelo conjunto.

11.126 Um único pino de aço em B, com 6 mm de diâmetro, é usado para conectar a tira de aço DE a duas tiras de alumínio, cada uma com largura de 20 mm e espessura de 5 mm. O módulo de elasticidade é 200 GPa para o aço e 70 GPa para o alumínio. Sabendo que para o pino em B a tensão de cisalhamento admissível é $\tau_{adm} = 85$ MPa, determine, para o carregamento mostrado, a energia máxima de deformação que pode ser adquirida pelas tiras montadas.

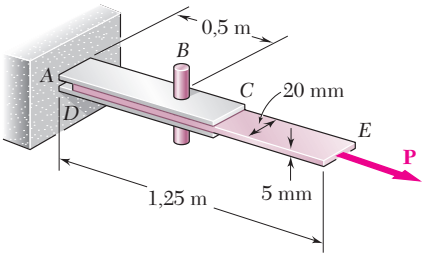


Fig. *P11.126*

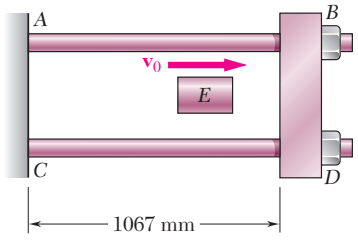


Fig. P11.127

11.127 O bloco cilíndrico *E* tem uma velocidade $v_0 = 4{,}88$ m/s quando se choca perpendicularmente com o suporte *BD* que está preso às barras *AB* e *CD* de 22,2 mm de diâmetro. Sabendo que as barras são feitas de um aço para o qual $\sigma_E = 344{,}8$ MPa e $E = 200$ GPa, determine o peso do bloco *E* para o qual o coeficiente de segurança é 5 em relação à deformação permanente das barras.

11.128 Um bloco de peso W é colocado em contato com uma viga em um certo ponto D e liberado. Mostre que a deflexão máxima resultante no ponto D é duas vezes maior do que a deflexão provocada por uma força estática W aplicada em D.

11.129 A barra de aço ABC de 12 mm de diâmetro foi dobrada na forma mostrada na figura. Sabendo que $E = 200$ GPa e $G = 77{,}2$ GPa, determine a deflexão da extremidade C provocada pela força de 150 N.

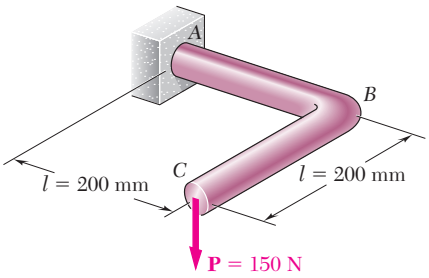


Fig. P11.129

11.130 A barra de aço ABC tem seção transversal quadrada com 19,05 mm de lado e é submetida a uma carga P de 222,4 kN. Usando $E = 200$GPa, determine a deflexão no ponto C.

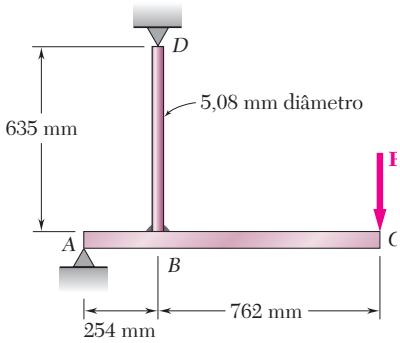


Fig. *P11.130*

11.131 As barras de treliça mostradas na figura são feitas de aço; a área da seção transversal da barra BC é de 800 mm^2 e, para todas as outras barras, a área da seção transversal é de 400 mm^2. Usando $E = 200$ GPa, determine o deslocamento do ponto D provocada pela força de 60 kN.

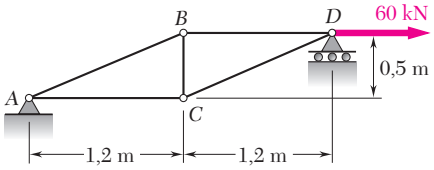


Fig. P11.131

11.132 Um disco de raio a foi soldado à extremidade B do eixo de aço de seção cheia AB. Um cabo é enrolado ao redor do disco e uma força vertical **P** é aplicada à extremidade C do cabo. Sabendo que o raio do eixo é r e desprezando as deformações do disco e do cabo, mostre que a deflexão do ponto C provocada pela aplicação de **P** é

$$\delta_C = \frac{PL^2}{3EI}\left(1 + 1{,}5\frac{Er^2}{GL^2}\right)$$

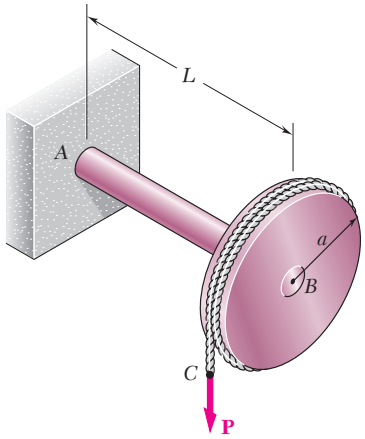


Fig. P11.132

11.133 Para a viga prismática mostrada, determine a deflexão do ponto D.

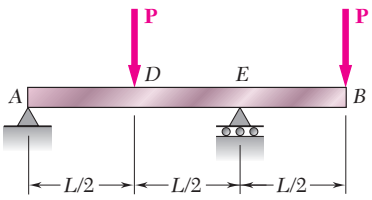


Fig. *P11.133*

11.134 Três barras, cada uma delas com rigidez à flexão EI, são soldadas para formar o pórtico $ABCD$. Para o carregamento mostrado, determine o ângulo formado no ponto D.

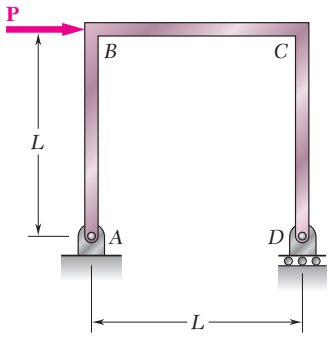


Fig. P11.134

PROBLEMAS PARA COMPUTADOR

Os problemas a seguir devem ser resolvidos com um computador.

11.C1 Uma barra consistindo em n elementos, sendo cada um deles homogêneo e de seção transversal uniforme, está submetida a uma força **P** aplicada à sua extremidade livre. O comprimento do elemento i é representado por L_i e seu diâmetro é d_i. (*a*) Chamando de E o módulo de elasticidade do material usado na barra, elabore um programa de computador que possa ser usado para determinar a energia de deformação armazenada pela barra e a deformação medida em sua extremidade livre. (*b*) Use esse programa para determinar a energia de deformação e a deformação das barras dos Problemas 11.9 e 11.10.

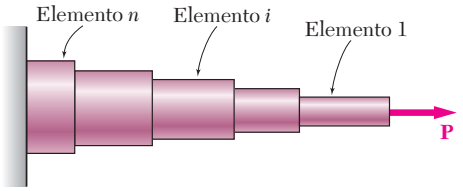


Fig. P11.C1

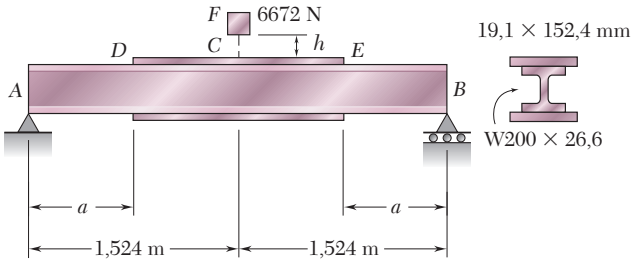


Fig. P11.C2

11.C2 Duas placas de reforço de 19,1 × 152,4 mm são soldadas a um perfil de aço laminado W200 × 26,6. O bloco de 680 kg cai da altura $h = 50{,}8$ mm sobre a viga. (*a*) Elabore um programa de computador para calcular a tensão normal máxima em seções transversais logo à esquerda de D e no centro da viga para valores de a, de 0 até 1524 mm, usando incrementos de 127 mm. (*b*) Com base nos valores considerados na parte a, selecione a distância a para a qual a tensão normal máxima seja a menor possível. Use $E = 200$ GPa.

11.C3 O bloco D de 16 kg cai da altura h sobre a extremidade livre da barra de aço AB. Para o aço utilizado, $\sigma_{adm} = 120$ MPa e $E = 200$ GPa. (*a*) Elabore um programa de computador para calcular a altura máxima admissível h para valores do comprimento L de 100 mm até 1,2 m, usando incrementos de 100 mm. (*b*) Com base nos valores considerados na parte a, selecione o comprimento correspondente à maior altura admissível.

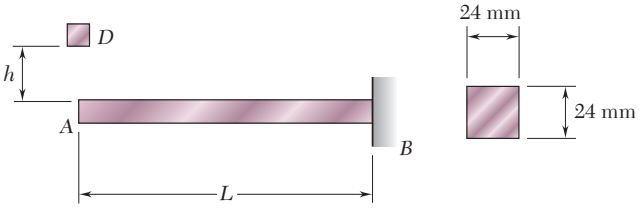


Fig. P11.C3

11.C4 O bloco D de massa $m = 8$ kg é solto de uma altura $h = 750$ mm sobre o perfil de aço laminado AB. Sabendo que $E = 200$ GPa, elabore um programa de computador para calcular a deflexão máxima do ponto E e a tensão normal máxima na viga para valores de a, de 100 até 900 mm, usando incrementos de 100 mm.

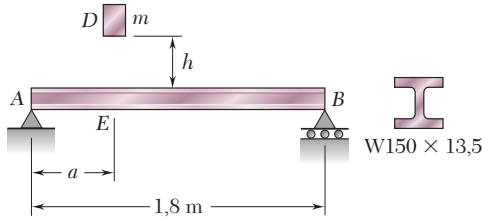


Fig. P11.C4

11.C5 As barras de aço AB e BC são feitas de um aço para o qual $\sigma_E = 300$ MPa e $E = 200$ GPa. (*a*) Elabore um programa de computador para calcular os valores de a, de 0 até 6 m, usando incrementos de 1 m, a energia de deformação máxima que pode ser armazenada pelo conjunto sem provocar qualquer deformação permanente. (*b*) Para cada valor de a considerado, calcule o diâmetro de uma barra uniforme de comprimento de 6 m e com a mesma massa do conjunto original, e a máxima energia de deformação que poderia ser armazenada por essa barra uniforme sem provocar deformação permanente.

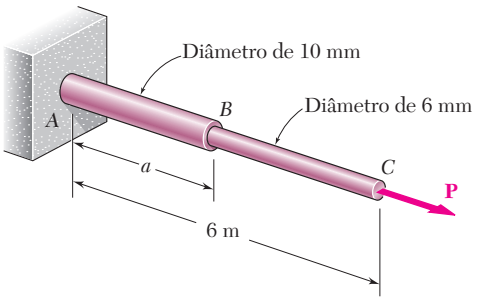


Fig. P11.C5

11.C6 Um mergulhador de 711,7 N salta de uma altura de 0,508 m sobre a extremidade C de um trampolim que tem a seção transversal mostrada na figura. Elabore um programa de computador para calcular os valores de a, de 0,254 m até 1,27 m, usando incrementos de 0,254 m, (*a*) a deflexão máxima do ponto C, (*b*) o momento fletor máximo no trampolim, (*c*) a força estática equivalente. Considere que as pernas do mergulhador permanecem rígidas e use $E = 12{,}4$ GPa.

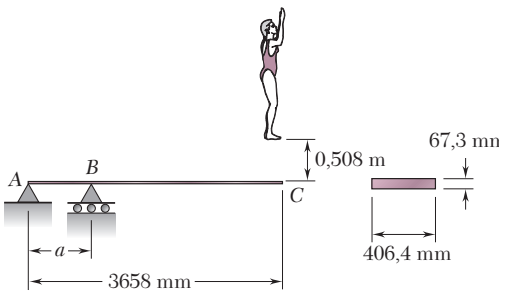


Fig. P11.C6

Apêndices

APÊNDICE A	Momentos de áreas	756
APÊNDICE B	Propriedades típicas de materiais mais usados na engenharia	766
APÊNDICE C	Propriedades de perfis de aço laminado†	768
APÊNDICE D	Deflexões e inclinações de vigas	774

†Cortesia do American Institute of Steel Construction, Chicago, Illinois.

APÊNDICE A

Momentos de áreas

A.1. Momento estático de uma área; centroide de uma área

Considere uma área A localizada no plano xy (Fig. A.1). Chamando de x e y as coordenadas de um elemento de área dA, definimos o *momento estático da área A em relação ao eixo x* como a integral

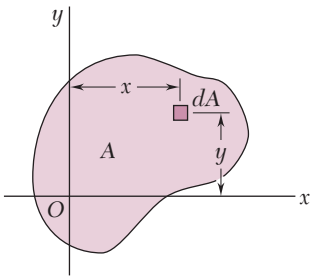


Fig. A.1

$$Q_x = \int_A y\,dA \tag{A.1}$$

De modo semelhante, o *momento estático da área A em relação ao eixo y* é definido como a integral

$$Q_y = \int_A x\,dA \tag{A.2}$$

Observamos que cada uma dessas integrais pode ser positiva, negativa ou zero, dependendo da posição dos eixos de coordenadas. Se forem usadas as unidades SI, os momentos estáticos Q_x e Q_y serão expressos em m^3 ou mm^3; se forem usadas as unidades inglesas, os momentos serão expressos em $pés^3$ ou pol^3.

O *centroide da área A* é definido como o ponto C de coordenadas $\bar{x}$ e $\bar{y}$ (Fig. A.2), que satisfaz as relações

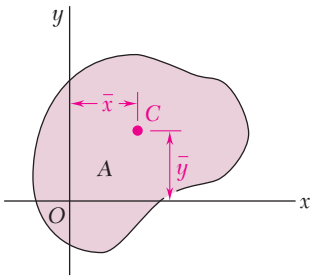


Fig. A.2

$$\int_A x\,dA = A\bar{x} \qquad \int_A y\,dA = A\bar{y} \tag{A.3}$$

Comparando as Equações (A.1) e (A.2) com as Equações (A.3), notamos que os momentos estáticos da área A podem ser expressos como os produtos da área pelas coordenadas de seu centroide:

$$Q_x = A\bar{y} \qquad Q_y = A\bar{x} \tag{A.4}$$

Quando uma área possui um *eixo de simetria*, seu momento estático em relação ao eixo será zero. De fato, considerando a área A da Fig. A.3, que é simétrica em relação ao eixo y, observamos que para cada elemento de área dA de abscissa x corresponde um elemento de área dA' de abscissa $-x$. Conclui-se que a integral na Equação (A.2) é zero e portanto, $Q_y = 0$. Conclui-se também da primeira das relações (A.3) que $\bar{x} = 0$. Assim, se uma área A possui um eixo de simetria, seu centroide C está localizado nesse eixo.

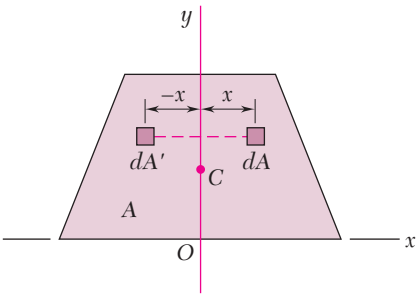


Fig. A.3

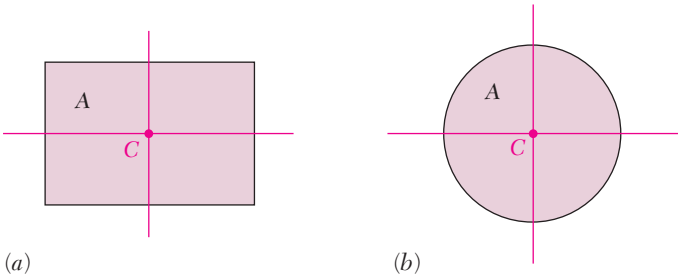


Fig. A.4

Como um retângulo possui dois eixos de simetria (Fig. A.4*a*), o centroide C de uma área retangular coincide com seu centro geométrico. Da mesma forma, o centroide de uma área circular coincidirá com o centro do círculo (Fig. A.4*b*).

Quando uma área possui um *centro de simetria* O, o momento estático da área em relação a qualquer eixo que passe pelo ponto O é zero. De fato, considerando a área A da Fig. A.5, observamos que para cada elemento de área dA de coordenadas x e y corresponde um elemento de área dA' de coordenadas $-x$ e $-y$. Conclui-se que as integrais nas Equações (A.1) e (A.2) são ambas iguais a zero, e que $Q_x = Q_y = 0$. Segue-se também das Equações (A.3) que $\bar{x} = \bar{y} = 0$, ou seja, o centroide da área coincide com seu centro de simetria.

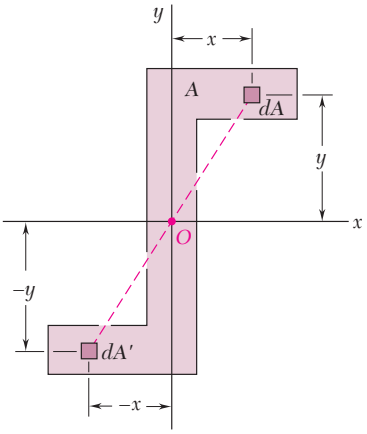


Fig. A.5

Quando o centroide C de uma área pode ser localizado por simetria, o momento estático dessa área em relação a qualquer eixo pode ser facilmente obtido das Equações (A.4). Por exemplo, no caso da área retangular da Fig. A.6, temos

$$Q_x = A\bar{y} = (bh)(\tfrac{1}{2}h) = \tfrac{1}{2}bh^2$$

e

$$Q_y = A\bar{x} = (bh)(\tfrac{1}{2}b) = \tfrac{1}{2}b^2h$$

Em muitos casos, no entanto, é necessário executar as integrações indicadas nas Equações (A.1) até (A.3) para determinar os momentos estáticos e o centroide de uma área. Embora cada uma das integrais envolvidas seja na realidade uma integral dupla, é possível em muitas aplicações selecionar os elementos de área dA na forma de faixas estreitas horizontais ou verticais, e assim reduzir os cálculos das integrações a uma única variável. Isso está ilustrado no Exemplo A.1. Os centroides de formas geométricas mais usadas estão indicados em uma tabela nas guardas.

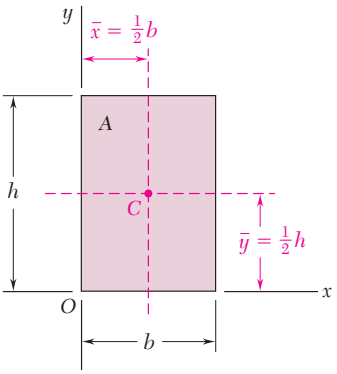


Fig. A.6

EXEMPLO A.1

Para a área triangular da Fig. A.7, determine (*a*) o momento estático Q_x da área em relação ao eixo x e (*b*) a ordenada $\bar{y}$ do centroide da área.

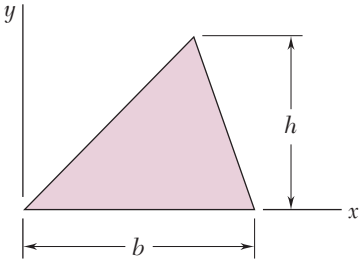


Fig. A.7

(a) Momento Estático Q_x. Selecionamos, como um elemento de área, uma faixa horizontal de comprimento u e espessura dy, e notamos que todos os pontos dentro do elemento estão à mesma distância y do eixo x (Fig. A.8). Por semelhança de triângulos, temos

$$\frac{u}{b} = \frac{h - y}{h} \qquad u = b\frac{h - y}{h}$$

e

$$dA = u\,dy = b\frac{h - y}{h}\,dy$$

O momento estático da área em relação ao eixo x é

$$Q_x = \int_A y\,dA = \int_0^h yb\frac{h - y}{h}\,dy = \frac{b}{h}\int_0^h (hy - y^2)\,dy$$

$$= \frac{b}{h}\left[h\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^h \qquad Q_x = \tfrac{1}{6}bh^2$$

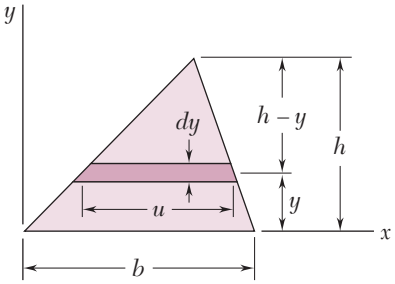
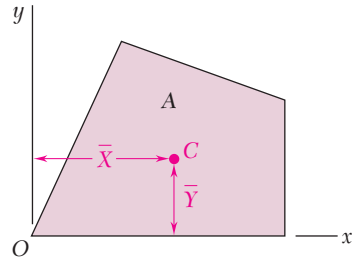


Fig. A.8

(b) Ordenada do centroide. Recordando a primeira das Equações (A.4) e observando que $A = \frac{1}{2}bh$, temos

$$Q_x = A\bar{y} \qquad \tfrac{1}{6}bh^2 = (\tfrac{1}{2}bh)\bar{y}$$

$$\bar{y} = \tfrac{1}{3}h$$



=

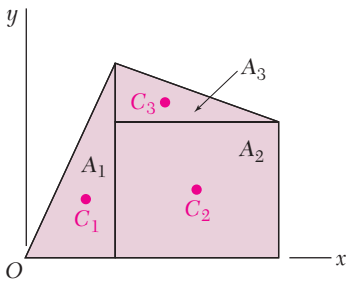


Fig. A.9

A.2. Determinação do momento estático e centroide de uma área composta

Considere uma área A, como a área trapezoidal mostrada na Fig. A.9, que pode ser dividida em formas geométricas simples. Como vimos na seção anterior, o momento estático Q_x da área em relação ao eixo x é representado pela integral $\int y\,dA$, que se estende sobre toda a área A. Dividindo A em suas partes componentes A_1, A_2, A_3, escrevemos

$$Q_x = \int_A y\,dA = \int_{A_1} y\,dA + \int_{A_2} y\,dA + \int_{A_3} y\,dA$$

ou, lembrando da segunda das Equações (A.3),

$$Q_x = A_1\bar{y}_1 + A_2\bar{y}_2 + A_3\bar{y}_3$$

em que $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$ e $\bar{y}_3$ representam as ordenadas dos centroides das áreas componentes. Estendendo esse resultado para um número arbitrário de áreas

componentes, e observando que pode ser obtida uma expressão similar para Q_y, escrevemos

$$Q_x = \sum A_i \bar{y}_i \qquad Q_y = \sum A_i \bar{x}_i \tag{A.5}$$

Para obter as coordenadas $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ do centroide C da área composta A, substituímos $Q_x = A\bar{Y}$ e $Q_y = A\bar{X}$ nas Equações (A.5). Temos

$$A\bar{Y} = \sum_i A_i \bar{y}_i \qquad A\bar{X} = \sum_i A_i \bar{x}_i$$

Resolvendo para $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ e lembrando que a área A é a soma das áreas componentes A_i, escrevemos

$$\bar{X} = \frac{\sum_i A_i \bar{x}_i}{\sum_i A_i} \qquad \bar{Y} = \frac{\sum_i A_i \bar{y}_i}{\sum_i A_i} \tag{A.6}$$

EXEMPLO A.2

Localize o centroide C da área A mostrada na Fig. A.10.

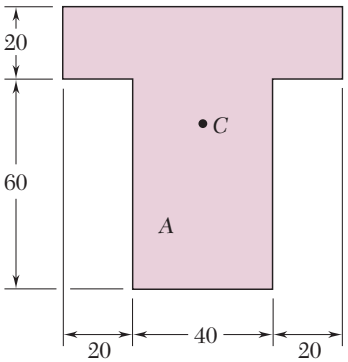


Fig. A.10

Selecionando os eixos de coordenadas mostrados na Fig. A.11, notamos que o centroide C deve estar localizado no eixo y, pois esse é um eixo de simetria; portanto $\bar{X} = 0$.

Dividindo A em suas partes componentes A_1 e A_2, usamos a segunda das Equações (A.6) para determinar a ordenada $\bar{Y}$ do centroide. O cálculo é feito mais facilmente construindo uma tabela.

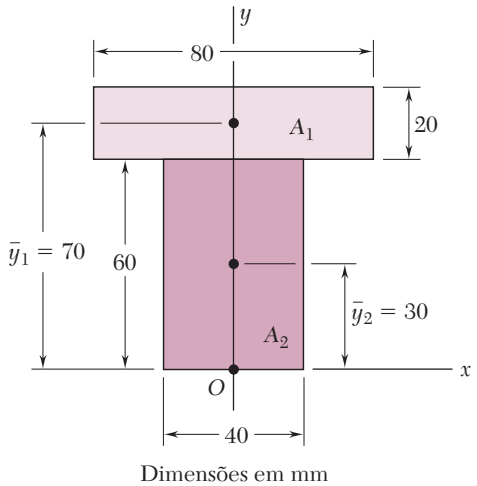


Fig. A.11

	Área, mm²	$\bar{y}_i$, mm	$A_i\bar{y}_i$, mm³
A_1	$(20)(80) = 1600$	70	112×10^3
A_2	$(40)(60) = 2400$	30	72×10^3
	$\sum_i A_i = 4000$		$\sum_i A_i\bar{y}_i = 184 \times 10^3$

$$\bar{Y} = \frac{\sum_i A_i \bar{y}_i}{\sum_i A_i} = \frac{184 \times 10^3 \text{ mm}^3}{4 \times 10^3 \text{ mm}^2} = 46 \text{ mm}$$

EXEMPLO A.3

Com referência a área A do Exemplo A.2, consideramos o eixo horizontal x' passando pelo centroide C. (Um eixo assim é chamado de *eixo central.*) Chamando de A' a parte de A localizada acima desse eixo (Fig. A.12), determine o momento estático de A' em relação ao eixo x'.

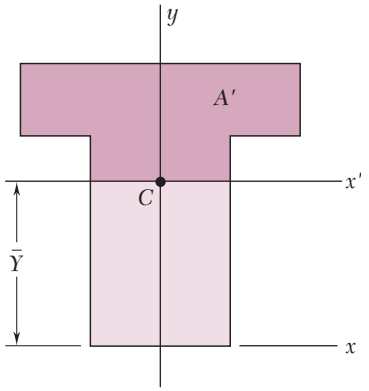


Fig. A.12

Solução. Dividimos a área A' em seus componentes A_1 e A_3 (Fig. A.13). Lembrando do Exemplo A.2 que C está localizado 46 mm acima da borda inferior de A, determinamos as ordenadas $\bar{y}'_1$ e $\bar{y}'_3$ de A_1 e A_3 e expressamos o $Q'_{x'}$ momento estático de A' em relação a x' da seguinte maneira:

$$Q'_{x'} = A_1\bar{y}'_1 + A_3\bar{y}'_3$$
$$= (20 \times 80)(24) + (14 \times 40)(7) = 42{,}3 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

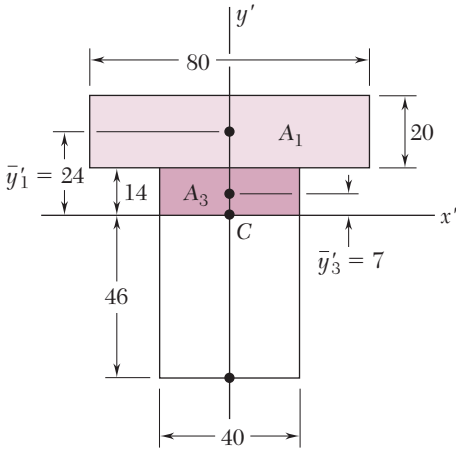


Fig. A.13

Solução alternativa. Primeiro observamos que, como o centroide C de A está localizado no eixo x', o momento estático $Q_{x'}$ da *área inteira* A em relação a esse eixo é zero:

$$Q_{x'} = A\bar{y}' = A(0) = 0$$

Chamando de A'' a parte de A localizada abaixo do eixo x' e de $Q''_{x'}$ seu momento estático em relação a esse eixo, temos portanto

$$Q_{x'} = Q'_{x'} + Q''_{x'} = 0 \qquad \text{ou} \qquad Q'_{x'} = -Q''_{x'}$$

que mostra que os momentos estáticos de A' e A'' têm o mesmo valor e sinais contrários. Referindo-nos à Fig. A.14, escrevemos

$$Q''_{x'} = A_4\bar{y}'_4 = (40 \times 46)(-23) = -42{,}3 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

e

$$Q'_{x'} = -Q''_{x'} = +42{,}3 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

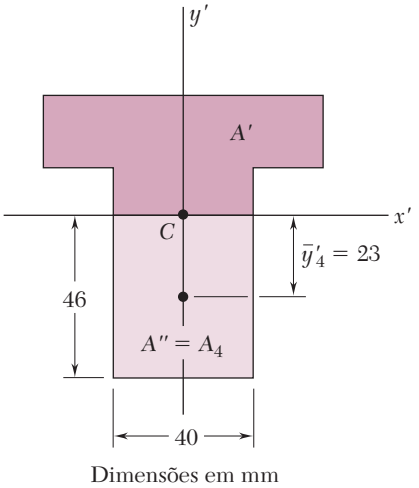


Fig. A.14

A.3. Momento de segunda ordem ou momento de inércia de uma área; raio de rotação

Considere novamente uma área A localizada no plano xy (Fig. A.1) e o elemento de área dA de coordenadas x e y. O *momento de segunda ordem*, ou *momento de inércia*, da área A em relação ao eixo x, e o momento de segunda ordem, ou momento de inércia, de A em relação ao eixo y são definidos, respectivamente, como

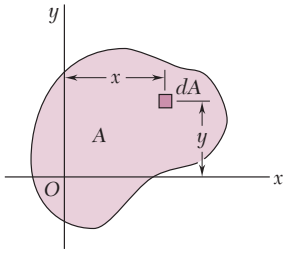


Fig. A.1 (*repetida*)

$$I_x = \int_A y^2\,dA \qquad I_y = \int_A x^2\,dA \tag{A.7}$$

Essas integrais são chamadas de *momentos retangulares de inércia*, pois elas são calculadas por meio das coordenadas retangulares do elemento dA. Embora cada integral seja realmente uma integral dupla, é possível em muitas aplicações selecionar os elementos de área dA na forma de faixas estreitas horizontais ou verticais, e assim reduzir os cálculos das integrações a uma única variável. Isso está ilustrado no Exemplo A.4.

Definimos agora o *momento polar de inércia* da área A em relação ao ponto O (Fig. A.15) como a integral

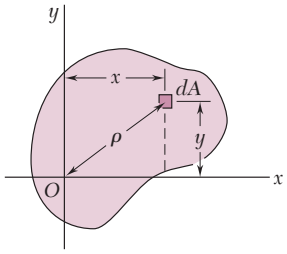


Fig. A.15

$$J_O = \int_A \rho^2\,dA \tag{A.8}$$

em que ρ é a distância de O ao elemento dA. Embora essa integral seja novamente uma integral dupla, é possível, no caso de uma área circular, selecionar elementos de área dA na forma de finos anéis circulares, e assim reduzir os cálculos de J_O a uma única integração (ver o Exemplo A.5).

Observamos com as Equações (A.7) e (A.8) que os momentos de inércia de uma área são valores positivos. Se forem usadas as unidades SI, os momentos de inércia serão expressos em m^4 ou mm^4; se forem usadas as unidades inglesas, eles serão expressos em $pé^4$ ou pol^4.

Pode ser estabelecida uma importante relação entre o momento polar de inércia J_O de uma dada área e os momentos retangulares de inércia I_x e I_y da mesma área. Observando que $\rho^2 = x^2 + y^2$, escrevemos

$$J_O = \int_A \rho^2\,dA = \int_A (x^2 + y^2)\,dA = \int_A y^2\,dA + \int_A x^2\,dA$$

ou

$$J_O = I_x + I_y \tag{A.9}$$

O *raio de rotação* de uma área A em relação ao eixo x é definido como o valor r_x, que satisfaz a relação

$$I_x = r_x^2 A \tag{A.10}$$

em que I_x é o momento de inércia de A em relação ao eixo x. Resolvendo a Equação (A.10) para r_x, temos

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \tag{A.11}$$

De maneira similar, definimos os raios de rotação em relação ao eixo y e à origem O. Escrevemos

$$I_y = r_y^2 A \qquad r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \tag{A.12}$$

$$J_O = r_O^2 A \qquad r_O = \sqrt{\frac{J_O}{A}} \tag{A.13}$$

Substituindo J_O, I_x e I_y em termos dos raios de rotação correspondentes na Equação (A.9), observamos que

$$r_O^2 = r_x^2 + r_y^2 \tag{A.14}$$

EXEMPLO A.4

Para a área retangular da Fig. A.16, determine (*a*) o momento de inércia I_x da área em relação ao eixo central x e (*b*) o raio de rotação correspondente r_x.

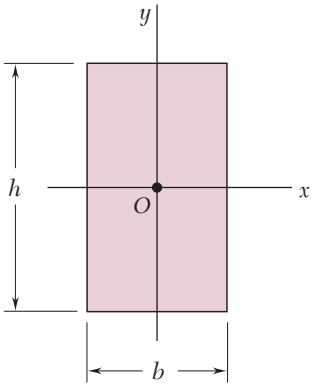


Fig. A.16

(a) Momento de inércia I_x. Selecionamos, como um elemento de área, uma faixa horizontal de comprimento b e espessura dy (Fig. A.17). Como todos os pontos dentro da faixa estão à mesma distância y do eixo x, o momento de inércia da faixa em relação a esse eixo é

$$dI_x = y^2\, dA = y^2(b\, dy)$$

Integrando de $y = -h/2$ até $y = +h/2$, escrevemos

$$I_x = \int_A y^2\, dA = \int_{-h/2}^{+h/2} y^2(b\, dy) = \tfrac{1}{3}b\left[y^3\right]_{-h/2}^{+h/2}$$

$$= \tfrac{1}{3}b\left(\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8}\right)$$

ou

$$I_x = \tfrac{1}{12}bh^3$$

(b) Raio de rotação r_x. Da Equação (A.10), temos

$$I_x = r_x^2 A \qquad \tfrac{1}{12}bh^3 = r_x^2(bh)$$

e, resolvendo para r_x,

$$r_x = h/\sqrt{12}$$

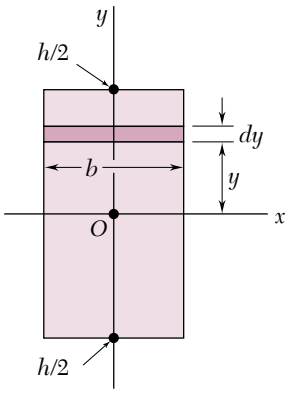


Fig. A.17

EXEMPLO A.5

Para a área circular da Fig. A.18, determine (*a*) o momento polar de inércia J_O e (*b*) os momentos retangulares de inércia I_x e I_y.

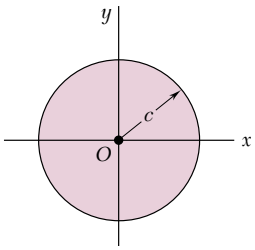


Fig. A.18

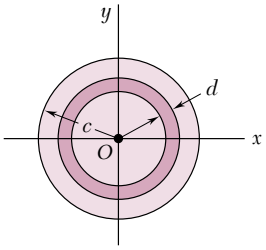


Fig. A.19

(a) Momento polar de inércia. Selecionamos como um elemento de área um anel de raio ρ e espessura $d\rho$ (Fig. A.19). Como todos os pontos dentro do anel estão à mesma distância ρ da origem O, o momento polar de inércia do anel é

$$dJ_O = \rho^2\, dA = \rho^2(2\pi\rho\, d\rho)$$

Integrando em ρ de 0 a c, escrevemos

$$J_O = \int_A \rho^2\, dA = \int_0^c \rho^2(2\pi\rho\, d\rho) = 2\pi \int_0^c \rho^3\, d\rho$$

$$J_O = \tfrac{1}{2}\pi c^4$$

(b) Momentos retangulares de inércia. Por causa da simetria da área circular, temos $I_x = I_y$. Lembrando da Equação (A.9), escrevemos

$$J_O = I_x + I_y = 2I_x \qquad \tfrac{1}{2}\pi c^4 = 2I_x$$

e, portanto,

$$I_x = I_y = \tfrac{1}{4}\pi c^4$$

Os resultados obtidos nos dois exemplos anteriores e os momentos de inércia de outras formas geométricas mais usadas estão listados em uma tabela na contracapa ao final deste volume.

A.4. Teorema dos eixos paralelos

Considere o momento de inércia I_x de uma área A em relação a um eixo arbitrário x (Fig. A.20). Chamando de y a distância de um elemento de área dA até esse eixo, lembramos da Equação A.3 que

$$I_x = \int_A y^2\, dA$$

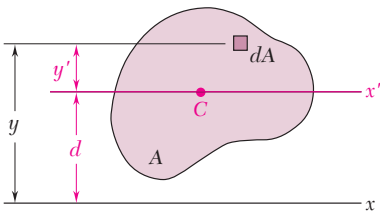


Fig. A.20

Vamos agora traçar o *eixo central* x', isto é, o eixo paralelo ao eixo x que passa pelo centroide C da área. Chamando de y' a distância do elemento dA até esse eixo, escrevemos $y = y' + d$, em que d é a distância entre os dois eixos. Substituindo y na integral que representa I_x, escrevemos

$$I_x = \int_A y^2\, dA = \int_A (y' + d)^2 dA$$

$$I_x = \int_A y'^2\, dA + 2d \int_A y'\, dA + d^2 \int_A dA \qquad \text{(A.15)}$$

A primeira integral na Equação (A.15) representa o momento de inércia $\overline{I}_{x'}$ da área em relação ao eixo central x'. A segunda integral representa o momento

estático $Q_{x'}$ da área em relação ao eixo x' e é igual a zero, porque o centroide C da área está localizado nesse eixo. De fato, lembramos da Seção A.1 que

$$Q_{x'} = A\bar{y}' = A(0) = 0$$

Finalmente, observamos que a última integral na Equação (A.15) é igual à área total A. Temos portanto

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad^2 \tag{A.16}$$

Essa fórmula expressa o fato de que o momento de inércia I_x de uma área em relação a um eixo x arbitrário é igual ao momento de inércia $\bar{I}_{x'}$ da área em relação ao eixo central x' paralelo ao eixo x, *mais* o produto Ad^2 da área A e do quadrado da distância d entre os dois eixos. Esse resultado é conhecido como *teorema dos eixos paralelos*. Ele permite determinar o momento de inércia de uma área em relação a um eixo, quando é conhecido seu momento de inércia em relação a um eixo central de mesma direção. Reciprocamente, ele permite determinar o momento de inércia $\bar{I}_{x'}$ de uma área A em relação a um eixo central x', quando é conhecido o momento de inércia I_x de A em relação a um eixo paralelo, *subtraindo* de I_x o produto Ad^2. Devemos notar que o teorema dos eixos paralelos pode ser usado *somente se um dos dois eixos envolvidos for um eixo central*.

Pode ser deduzida uma fórmula similar, que relaciona o momento polar de inércia J_O de uma área em relação a um ponto arbitrário O e o momento polar de inércia $\bar{J}_C$ da mesma área em relação ao seu centroide C. Chamando de d a distância entre O e C, escrevemos

$$J_O = \bar{J}_C + Ad^2 \tag{A.17}$$

A.5. Determinação do momento de inércia de uma área composta

Considere uma área composta A formada por várias partes A_1, A_2 etc. Como a integral que representa o momento de inércia A pode ser subdividida em integrais que se estendem sobre A_1, A_2 etc., o momento de inércia de A em relação a um eixo será obtido somando-se os momentos de inércia das áreas A_1, A_2 etc., em relação ao mesmo eixo. O momento de inércia de uma área composta por várias formas mais usadas, mostradas no Apêndice E, pode então ser obtido por meio de fórmulas dadas naquela tabela. No entanto, antes de somar os momentos de inércia das áreas componentes, deverá ser usado o teorema dos eixos paralelos para transferir cada um dos momentos de inércia para o eixo desejado. Isso está ilustrado no Exemplo A.06.

EXEMPLO A.6

Determine o momento de inércia $\bar{I}_x$ da área mostrada em relação ao eixo central x (Fig. A.21).

Localização do centroide. Primeiro deve ser localizado o centroide C da área. No entanto, isso já foi feito no Exemplo A.2 para a área dada. Recordamos daquele exemplo que C está localizado 46 mm acima da borda inferior da área A.

Cálculo do momento de inércia. Dividimos a área A nas duas áreas retangulares A_1 e A_2 (Fig. A.22), e calculamos o momento de inércia de cada área em relação ao eixo x.

Área Retangular A_1. Para obtermos o momento de inércia $(I_x)_1$ de A_1 em relação ao eixo x, primeiro calculamos o momento de inércia de A_1 *em relação ao seu próprio eixo central* x'. Lembrando da fórmula deduzida na parte *a* do Exemplo A.04 para o momento central de inércia de uma área retangular, temos

$$(\bar{I}_{x'})_1 = \tfrac{1}{12}bh^3 = \tfrac{1}{12}(80\text{ mm})(20\text{ mm})^3 = 53{,}3 \times 10^3\text{ mm}^4$$

Usando o teorema dos eixos paralelos, transferimos o momento de inércia de A_1 de seu eixo central x' para o eixo paralelo x:

$$(I_x)_1 = (\bar{I}_{x'})_1 + A_1 d_1^2 = 53{,}3 \times 10^3 + (80 \times 20)(24)^2$$
$$= 975 \times 10^3\text{ mm}^4$$

Área retangular A_2. Calculando o momento de inércia de A_2 em relação ao seu eixo central x'', e usando o teorema dos eixos paralelos para transferi-lo para o eixo x, temos

$$(\bar{I}_{x''})_2 = \tfrac{1}{12}bh^3 = \tfrac{1}{12}(40)(60)^3 = 720 \times 10^3\text{ mm}^4$$
$$(I_x)_2 = (\bar{I}_{x''})_2 + A_2 d_2^2 = 720 \times 10^3 + (40 \times 60)(16)^2$$
$$= 1334 \times 10^3\text{ mm}^4$$

Área total A. Somando os valores calculados para os momentos de inércia de A_1 e A_2 em relação ao eixo x, obtemos o momento de inércia $\bar{I}_x$ da área total:

$$\bar{I}_x = (I_x)_1 + (I_x)_2 = 975 \times 10^3 + 1334 \times 10^3$$
$$\bar{I}_x = 2{,}31 \times 10^6\text{ mm}^4$$

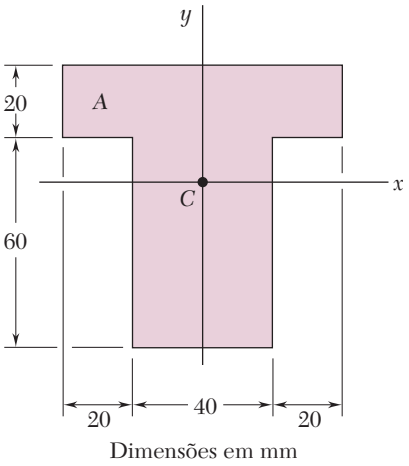


Fig. A.21

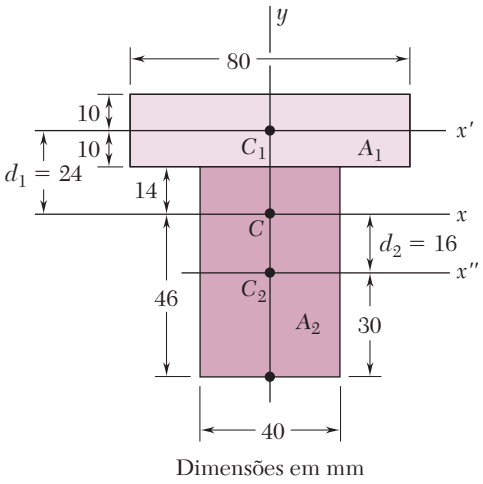


Fig. A.22

Apêndice B. Propriedades típicas de materiais mais usados na engenharia[1,5] (Unidades SI)

Material	Densidade kg/m³	Limite de resistência: Tração, MPa	Limite de resistência: Compressão[2], MPa	Limite de resistência: Cisalhamento, MPa	Tensão de escoamento[3]: Tração, MPa	Tensão de escoamento[3]: Cisalhamento, MPa	Módulo de elasticidade, GPa	Módulo de elasticidade transversal, GPa	Coeficiente de expansão térmica, $10^{-6}/^{o}F$	Ductilidade, porcentagem de alongamento em 50 mm
Aço										
Estrutural (ASTM-A36)	7860	400			250	145	200	77,2	11,7	21
Baixa liga e alta resistência										
ASTM-A709 Classe 345	7860	450				345	200	77,2	11,7	21
ASTM-A913 Classe 450	7860	550				450	200	77,2	11,7	17
ASTM-A992 Classe 345	7860	450				345	200	77,2	11,7	21
Temperado e revenido ASTM-A709 Classe 690	7860	760				690	200	77,2	11,7	18
Inoxidável, AISI 302										
Laminado a frio	7920	860	520				190	75	17,3	12
Recozido	7920	655	260			150	190	75	17,3	50
Aço de Reforço Média resistência	7860	480	275	200	77	11,7				
Alta resistência	7860	620	415	200	77	11,7				
Ferro fundido										
Ferro fundido cinzento 4,5% C, ASTM A-48	7200	170	655	240			69	28	12,1	0,5
Ferro fundido maleável 2% C, 1% Si, ASTM A-47	7300	345	620	330	230		165	65	12,1	10
Alumínio										
Liga 1100-H14 (99% Al)	2710	110		70	95	55	70	26	23,6	9
Liga 2014-T6	2800	455		275	400	230	75	27	23,0	13
Liga 2024-T4	2800	470		280	325		73		23,2	19
Liga 5456-H116	2630	315		185	230	130	72		23,9	16
Liga 6061-T6	2710	260		165	240	140	70	26	23,6	17
Liga 7075-T6	2800	570		330	500		72	28	23,6	11
Cobre										
Cobre livre de oxigênio (99,9% Cu)										
Recozido	8910	220		150	70		120	44	16,9	45
Trefilado a frio	8910	390		200	265		120	44	16,9	4
Latão amarelo (65% Cu, 35% Zn)										
Laminado a frio	8470	510		300	410	250	105	39	20,9	8
Recozido	8470	320		220	100	60	105	39	20,9	65
Latão vermelho (85% Cu, 15% Zn)										
Laminado a frio	8740	585		320	435		120	44	18,7	3
Recozido	8740	270		210	70		120	44	18,7	48
Liga bronze + estanho (88% Cu, 8% Sn, 4% Zn)	8800	310			145		95		18,0	30
Liga bronze + nanganês (63% Cu, 25% Zn, 6% Al, 3% Mn, 3% Fe)	8360	655			330		105		21,6	20
Liga bronze + alumínio (81% Cu, 4% Ni, 4% Fe, 11% Al)	8330	620	900		275		110	42	16,2	6

(continua)

Apêndice B. Propriedades típicas de materiais mais usados na engenharia[1,5]

(Unidades SI)

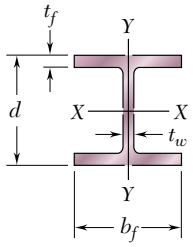
Continuação

Material	Densidade kg/m³	Limite de resistência: Tração, MPa	Limite de resistência: Compressão[2], MPa	Limite de resistência: Cisalhamento, MPa	Tensão de escoamento[3]: Tração, MPa	Tensão de escoamento[3]: Cisalhamento, MPa	Módulo de elasticidade, GPa	Módulo de elasticidade transversal, GPa	Coeficiente de expansão térmica, 10^{-6}/°F	Ductilidade, porcentagem de alongamento em 50 mm
Ligas de magnésio										
Liga AZ80 (forjado)	1800	345		160	250		45	16	25,2	6
Liga AZ31(extrudado)	1770	255		130	200		45	16	25,2	12
Titânio										
Liga (6% Al, 4% V)	4730	900			830		115		9,5	10
Liga Monel 400 (Ni-Cu)										
Trabalhado a frio	8830	675			585	345	180		13,9	22
Recozido	8830	550			220	125	180		13,9	46
Cobre-níquel (90% Cu, 10% Ni)										
Recozido	8940	365			110		140	52	17,1	35
Trabalhado a frio	8940	585			545		140	52	17,1	3
Madeira, seca ao ar*										
Douglas fir	470	100	50	7,6			13	0,7	Varia	
Spruce, sitka	415	60	39	7,6			10	0,5	3,0 a 4,5	
Shortleaf pine	500		50	9,7			12			
Western white pine	390		34	7,0			10			
Ponderosa pine	415	55	36	7,6			9			
White oak	690		51	13,8			12			
Red oak	660		47	12,4			12			
Western hemlock	440	90	50	10,0			11			
Shagbark hickory	720		63	16,5			15			
Redwood	415	65	42	6,2			9			
Concreto										
Média resistência	2320		28				25		9,9	
Alta resistência	2320		40				30		9,9	
Plásticos										
Náilon, tipo 6/6 (composto moldado)	1140	75	95		45		2,8		144	50
Policarbonato	1200	65	85		35		2,4		122	110
Poliéster PBT (termoplástico)	1340	55	75		55		2,4		135	150
Elastômero termoplástico de poliéster	1200	45		40			0,2			500
Poliestireno	1030	55	90		55		3,1		125	2
Vinil, PVC rígido	1440	40	70		45		3,1		135	40
Borracha	910	15							162	600
Granito (valores médios)	2770	20	240	35			70	4	7,2	
Mármore (valores médios)	2770	15	125	28			55	3	10,8	
Arenito (valores médios)	2300	7	85	14			40	2	9,0	
Vidro, 98% sílica	2190		50				65	4,1	80	

[1] As propriedades dos metais variam muito em função das diferenças na composição, no tratamento térmico e no trabalho mecânico.
[2] Para metais dúcteis, a resistência à compressão geralmente é considerada como idêntica à resistência à tração.
[3] Deslocamento de 0,2%.
[4] As propriedades das madeiras são para carregamentos paralelos às fibras.
[5] Ver também Mark's *Mechanical Engineering Handbook*, 10th ed., McGraw-Hill, New York, 1996; *Annual Book os ASTM*, American Society for Testing Materials, Filadélfia, Pa.; *Metals Handbook*, American Society for Metals, Metals Park, Ohio; e *Aluminum Design Manual*, The American Association, Washington, DC.
**N. de R.T. – Manteve-se os nomes das madeiras em inglês por se tratarem de madeiras típicas do hemisfério norte, com características diferentes das madeiras encontradas no Brasil.*

Apêndice C. Propriedades de perfis de aço laminado
(Unidades SI)

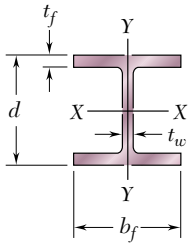
Perfis W
(Perfis de mesas largas)



			Mesa			Eixos X-X			Eixos Y-Y		
Designação†	Área A, mm²	Altura d, mm	Largura b_f, mm	Espessura t_f, mm	Espessura da alma t_w, mm	I_x 10⁶ mm⁴	W_x 10³ mm³	r_x mm	I_y 10⁶ mm⁴	W_y 10³ mm³	r_y mm
W920 × 446	57000	933	423	42,70	24,0	8470	18200	385	540	2550	97,3
201	25600	903	304	20,10	15,2	3250	7200	356	94,4	621	60,7
W840 × 299	38100	855	400	29,20	18,2	4790	11200	355	312	1560	90,5
176	22400	835	292	18,80	14,0	2460	5890	331	78,2	536	59,1
W760 × 257	32600	773	381	27,10	16,6	3420	8850	324	250	1310	87,6
147	18700	753	265	17,00	13,2	1660	4410	298	52,9	399	53,2
W690 × 217	27700	695	355	24,80	15,4	2340	6730	291	185	1040	81,7
125	16000	678	253	16,30	11,7	1190	3510	273	44,1	349	52,5
W610 × 155	19700	611	324	19,00	12,7	1290	4220	256	108	667	74,0
101	13000	603	228	14,90	10,5	764	2530	242	29,5	259	47,6
W530 × 150	19200	543	312	20,30	12,7	1010	3720	229	103	660	73,2
92	11800	533	209	15,60	10,2	552	2070	216	23,8	228	44,9
66	8370	525	165	11,40	8,9	351	1340	205	8,57	104	32,0
W460 × 158	20100	476	284	23,90	15,0	796	3340	199	91,4	644	67,4
113	14400	463	280	17,30	10,8	556	2400	196	63,3	452	66,3
74	9450	457	190	14,50	9,0	333	1460	188	16,6	175	41,9
52	6630	450	152	10,80	7,6	212	942	179	6,34	83,4	30,9
W410 × 114	14600	420	261	19,30	11,6	462	2200	178	57,2	438	62,6
85	10800	417	181	18,20	10,9	315	1510	171	18,0	199	40,8
60	7580	407	178	12,80	7,7	216	1060	169	12,1	136	40,0
46,1	5890	403	140	11,20	7,0	156	774	163	5,14	73,4	29,5
38,8	4990	399	140	8,80	6,4	127	637	160	4,04	57,7	28,5
W360 × 551	70100	455	418	67,60	42,0	2260	9930	180	825	3950	108
216	27600	375	394	27,70	17,3	712	3800	161	283	1440	101
122	15500	363	257	21,70	13,0	365	2010	153	61,5	479	63,0
101	12900	357	255	18,30	10,5	302	1690	153	50,6	397	62,6
79	10100	354	205	16,80	9,4	227	1280	150	24,2	236	48,9
64	8140	347	203	13,50	7,7	178	1030	148	18,9	186	48,2
57,8	7220	358	172	13,10	7,9	161	899	149	11,1	129	39,2
44	5730	352	171	9,80	6,9	122	693	146	8,18	95,7	37,8
39	4980	353	128	10,70	6,5	102,0	578	143	3,75	58,6	27,4
32,9	4170	349	127	8,50	5,8	82,7	474	141	2,91	45,8	26,4

†Um perfil de mesa larga é designado pela letra W seguida pela altura nominal em milímetros e a massa em quilogramas por metro.

(continua)



Apêndice C. Propriedades de perfis de aço laminado
(Unidades SI)
Continuação

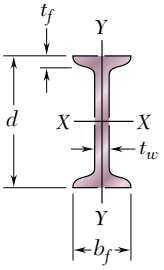
Perfis W
(Perfis de mesas largas)

			Mesa			Eixos *X-X*			Eixos *Y-Y*		
Designação†	Área A, mm²	Altura d, mm	Largura b_f, mm	Espessura t_f, mm	Espessura da alma t_w, mm	I_x 10^6 mm⁴	W_x 10^3 mm³	r_x mm	I_y 10^6 mm⁴	W_y 10^3 mm³	r_y mm
W310 × 143	18200	323	309	22,9	14,0	348	2150	138	113	731	78,8
107	13600	311	306	17,0	10,9	248	1590	135	81,2	531	77,3
74	9480	310	205	16,3	9,4	165	1060	132	23,4	228	49,7
60	7590	303	203	13,1	7,5	129	851	130	18,3	180	49,1
52	6670	318	167	13,2	7,6	119	748	134	10,3	123	39,3
44,5	5690	313	166	11,2	6,6	99,2	634	132	8,55	103	38,8
38,7	4940	310	165	9,7	5,8	85,1	549	131	7,27	88,1	38,4
32,7	4180	313	102	10,8	6,6	65,0	415	125	1,92	37,6	21,4
23,8	3040	305	101	6,7	5,6	42,7	280	119	1,16	23,0	19,5
W250 × 167	21300	289	265	31,8	19,2	300	2080	119	98,8	746	68,1
101	12900	264	257	19,6	11,9	164	1240	113	55,5	432	65,6
80	10200	256	255	15,6	9,4	126	984	111	43,1	338	65,0
67	8580	257	204	15,7	8,9	104	809	110	22,2	218	51,0
58	7420	252	203	13,5	8,0	87,3	693	108	18,8	185	50,3
49,1	6250	247	202	11,0	7,4	70,6	572	106	15,1	150	49,2
44,8	5720	266	148	13,0	7,6	71,1	535	111	7,03	95,0	35,1
32,7	4180	258	146	9,1	6,1	48,9	379	108	4,73	64,8	33,7
28,4	3630	260	102	10,0	6,4	40,0	308	105	1,78	34,9	22,1
22,3	2850	254	102	6,9	5,8	28,9	228	101	1,23	24,1	20,8
W200 × 86	11000	222	209	20,6	13,0	94,7	853	92,4	31,4	300	53,2
71	9100	216	206	17,4	10,2	76,6	709	91,7	25,4	247	52,8
59	7560	210	205	14,2	9,1	61,1	582	89,9	20,4	199	51,9
52	6660	206	204	12,6	7,9	52,7	512	89,0	17,8	175	51,7
46,1	5860	203	203	11,0	7,2	45,5	448	87,9	15,3	151	51,1
41,7	5310	205	166	11,8	7,2	40,9	399	87,8	9,01	109	41,2
35,9	4580	201	165	10,2	6,2	34,4	342	86,7	7,64	92,6	40,8
31,3	4000	210	134	10,2	6,4	31,4	299	88,6	4,1	61,2	32,0
26,6	3390	207	133	8,4	5,8	25,8	249	87,2	3,3	49,6	31,2
22,5	2860	206	102	8,0	6,2	20,0	194	83,6	1,42	27,8	22,3
19,3	2480	203	102	6,5	5,8	16,6	164	81,8	1,15	22,5	21,5
W150 × 37,1	4730	162	154	11,6	8,1	22,2	274	68,5	7,07	91,8	38,7
29,8	3790	157	153	9,3	6,6	17,2	219	67,4	5,56	72,7	38,3
24,0	3060	160	102	10,3	6,6	13,4	168	66,2	1,83	35,9	24,5
18,0	2290	153	102	7,1	5,8	9,17	120	63,3	1,26	24,7	23,5
13,5	1730	150	100	5,5	4,3	6,87	91,6	63,0	0,918	18,4	23,0
W150 × 28,1	3580	131	128	10,9	6,9	10,9	166	55,2	3,81	59,5	32,6
23,8	3010	127	127	9,1	6,1	8,80	139	54,1	3,11	49,0	32,1
W100 × 19,3	2480	106	103	8,8	7,1	4,77	90,0	43,9	1,61	31,3	25,5

†Um perfil de mesa larga é designado pela letra W seguida pela altura nominal em milímetros e a massa em quilogramas por metro.

Apêndice C. Propriedades de perfis de aço laminado
(Unidades SI)

Perfis I
(Perfis de padrão americano)

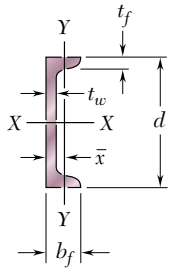


Designação†	Área A, mm²	Altura d, mm	Mesa: Largura b_f, mm	Mesa: Espessura t_f, mm	Espessura da alma t_w, mm	Eixos X-X: I_x 10^6 mm⁴	Eixos X-X: W_x 10^3 mm³	Eixos X-X: r_x mm	Eixos Y-Y: I_y 10^6 mm⁴	Eixos Y-Y: W_y 10^3 mm³	Eixos Y-Y: r_y mm
I610 × 180	22900	622	204	27,7	20,3	1320	4240	240	34,9	341	39,0
158	20100	622	200	27,7	15,7	1230	3950	247	32,5	321	39,9
149	19000	610	184	22,1	18,9	995	3260	229	20,2	215	32,3
134	17100	610	181	22,1	15,9	938	3080	234	19,0	206	33,0
119	15200	610	178	22,1	12,7	878	2880	240	17,9	198	34,0
I510 × 143	18200	516	183	23,4	20,3	700	2710	196	21,3	228	33,9
128	16400	516	179	23,4	16,8	658	2550	200	19,7	216	34,4
112	14200	508	162	20,2	16,1	530	2090	193	12,6	152	29,5
98,3	12500	508	159	20,2	12,8	495	1950	199	11,8	145	30,4
I460 × 104	13300	457	159	17,6	18,1	385	1685	170	10,4	127	27,5
81,4	10400	457	152	17,6	11,7	333	1460	179	8,83	113	28,8
I380 × 74	9500	381	143	15,6	14,0	201	1060	145	6,65	90,8	26,1
64	8150	381	140	15,8	10,4	185	971	151	6,15	85,7	27,1
I310 × 74	9480	305	139	16,7	17,4	126	826	115	6,69	93,2	26,1
60,7	7730	305	133	16,7	11,7	113	741	121	5,73	83,6	26,8
52	6650	305	129	13,8	10,9	95,3	625	120	4,19	63,6	24,8
47,3	6040	305	127	13,8	8,9	90,5	593	122	3,97	61,1	25,3
I250 × 52	6670	254	126	12,5	15,1	61,2	482	95,8	3,59	55,7	22,9
37,8	4820	254	118	12,5	7,9	51,1	402	103	2,86	47,5	24,1
I200 × 34	4370	203	106	10,8	11,2	26,8	264	78,3	1,83	33,8	20,2
27,4	3500	203	102	10,8	6,9	23,9	235	82,6	1,60	30,6	21,1
I150 × 25,7	3270	152	91	9,1	11,8	10,8	142	57,5	1,00	21,3	17,2
18,6	2370	152	85	9,1	5,8	9,11	120	62,0	0,782	18,0	18,0
I130 × 15	1890	127	76	8,3	5,4	5,07	79,8	51,8	0,513	13,2	16,3
I100 × 14,1	1800	102	71	7,4	8,3	2,82	55,3	39,6	0,383	10,5	14,4
11,5	1460	102	68	7,4	4,9	2,53	49,6	41,6	0,328	9,41	14,8
I75 × 11,2	1430	76	64	6,6	8,9	1,20	31,6	29,0	0,254	7,72	13,1
8,5	1070	76	59	6,6	4,3	1,03	27,1	31,0	0,190	6,44	13,3

†Um perfil I é designado pela letra I seguida pela altura nominal em milímetros e a massa em quilogramas por metro.

Apêndice C. Propriedades de perfis de aço laminado
(Unidades SI)

Perfis U
(Perfis de padrão americano)

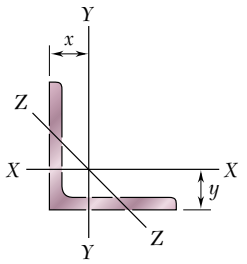


Designação†	Área A, mm²	Altura d, mm	Mesa: Largura b_f, mm	Mesa: Espessura t_f, mm	Espessura da alma t_w, mm	Eixos X-X: I_x 10^6 mm⁴	Eixos X-X: W_x 10^3 mm³	Eixos X-X: r_x mm	Eixos Y-Y: I_y 10^6 mm⁴	Eixos Y-Y: W_y 10^3 mm³	Eixos Y-Y: r_y mm	Eixos Y-Y: $\bar{x}$ mm
U380 × 74	9480	381	94	16,5	18, 2	167	877	133	4,54	61,5	21,9	20,2
60	7570	381	89	16,5	13,2	144	756	138	3,79	54,7	22,4	19,7
50,4	6430	381	86	16,5	10,2	134	688	143	3,34	50,5	22,8	19,9
U310 × 45	5690	305	80	12,7	13,0	67,2	441	109	2,09	33,2	19,2	17,0
37	4720	305	77	12,7	9,8	59,7	391	112	1,83	30,5	19,7	17,0
30,8	3920	305	74	12,7	7,2	53,4	350	117	1,57	27,7	20,0	17,4
U250 × 45	5670	254	76	11,1	17,1	42,7	336	86,8	1,58	26,5	16,7	16,3
37	4750	254	73	11,1	13,4	37,9	298	89,3	1,38	24,0	17,0	15,6
30	3780	254	69	11,1	9,6	32,6	257	92,9	1,14	21,2	17,4	15,3
22,8	2880	254	65	11,1	6,1	27,7	218	98,1	0,912	18,5	17,8	15,8
U230 × 30	3800	229	67	10,5	11,4	25,4	222	81,8	0,997	19,1	16,2	14,7
22	2840	229	63	10,5	7,2	21,2	185	86,4	0,796	16,5	16,7	14,9
19,9	2530	229	61	10,5	5,9	19,8	173	88,5	0,708	15,4	16,7	15,0
U200 × 27,9	3560	203	64	9,9	12,4	18,2	179	71,5	0,817	16,4	15,1	14,3
20,5	2660	203	59	9,9	7,7	14,9	147	75,7	0,620	13,7	15,4	13,9
17,1	2170	203	57	9,9	5,6	13,4	132	78,6	0,538	12,6	15,7	14,4
U180 × 18,2	2310	178	55	9,3	8,0	10,0	112	65,8	0,470	11,2	14,3	13,1
14,6	1850	178	53	9,3	5,3	8,83	99,2	69,1	0,400	10,2	14,7	13,7
U150 × 19,3	2450	152	54	8,7	11,1	7,11	93,6	53,9	0,420	10,2	13,1	12,9
15,6	1980	152	51	8,7	8,0	6,21	81,7	56,0	0,347	9,01	13,2	12,5
12,2	1540	152	48	8,7	5,1	5,35	70,4	58,9	0,276	7,82	13,4	12,7
U130 × 13	1710	127	48	8,1	8,3	3,70	58,3	46,5	0,264	7,37	12,4	12,2
10,4	1310	127	47	8,1	4,8	3,25	51,2	49,8	0,229	6,74	13,2	13,0
U100 × 10,8	1370	102	43	7,5	8,2	1,90	37,3	37,2	0,172	5,44	11,2	11,4
8,0	1020	102	40	7,5	4,7	1,61	31,6	39,7	0,130	4,56	11,3	11,5
U75 × 8,9	1130	76,2	40	6,9	9,0	0,850	22,3	27,4	0,122	4,25	10,4	11,3
7,4	936	76,2	37	6,9	6,6	0,751	19,7	28,3	0,0948	3,62	10,1	10,8
6,1	765	76,2	35	6,9	4,3	0,671	17,6	29,6	0,0765	3,16	10,0	10,8

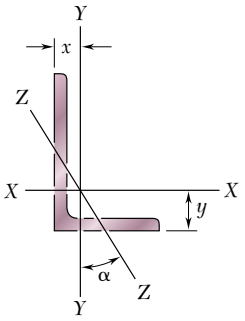
†Um perfil U é designado pela letra U seguida pela altura nominal em milímetros e a massa em quilogramas por metro.

Apêndice C. Propriedades de perfis de aço laminado
(Unidades SI)

Cantoneira
(Abas iguais)



Tamanho e espessura, mm	Massa por metro, kg/m	Área, mm²	Eixos *X-X* e Eixos *Y-Y*				Eixos *Z-Z*
			I 10^6 mm⁴	*W* 10^3 mm³	*r* mm	x ou y mm	*r* mm
L203 × 203 × 25,4	75,9	9670	36,9	258	61,8	60,0	39,7
19,0	57,9	7350	28,9	199	62,7	57,8	40,0
12,7	39,3	4990	20,2	137	63,6	55,5	40,4
L152 × 152 × 25,4	55,7	7080	14,6	139	45,4	47,2	29,5
19,0	42,7	5420	11,6	108	46,3	44,9	29,7
15,9	36,0	4580	10,0	92,5	46,7	43,9	29,9
12,7	29,2	3700	8,22	75,2	47,1	42,7	30,0
9,5	22,2	2800	6,34	57,4	47,6	41,5	30,2
L127 × 127 × 19,0	35,1	4470	6,54	74,0	38,3	38,6	24,7
15,9	29,8	3790	5,66	63,2	38,6	37,5	24,8
12,7	24,1	3060	4,68	51,7	39,1	36,5	25,0
9,5	18,3	2320	3,63	39,6	39,6	35,3	25,1
L102 × 102 × 19,0	27,5	3520	3,23	46,3	30,3	32,3	19,9
15,9	23,4	2990	2,81	39,7	30,7	31,3	19,9
12,7	19,0	2430	2,34	32,6	31,0	30,2	19,9
9,5	14,6	1850	1,83	25,1	31,5	29,0	20,0
6,4	9,8	1260	1,29	17,4	32,0	28,0	20,3
L89 × 89 × 12,7	16,5	2100	1,52	24,5	26,9	26,9	17,4
9,5	12,6	1600	1,19	18,8	27,3	25,8	17,4
6,4	8,6	1100	0,845	13,1	27,7	24,6	17,6
L76 × 76 × 12,7	14,0	1770	0,915	17,5	22,7	23,6	14,8
9,5	10,7	1350	0,725	13,6	23,2	22,5	14,9
6,4	7,3	932	0,517	9,50	23,6	21,4	15,0
L64 × 64 × 12,7	11,4	1460	0,524	12,1	18,9	20,6	12,5
9,5	8,7	1130	0,419	9,40	19,3	19,4	12,5
6,4	6,1	778	0,302	6,62	19,7	18,4	12,6
4,8	4,6	591	0,235	5,09	19,9	17,8	12,7
L51 × 51 × 9,5	7,0	879	0,202	5,80	15,2	16,2	9,95
6,4	4,7	612	0,147	4,09	15,5	15,1	9,94
3,2	2,4	316	0,0806	2,17	16,0	13,9	10,1

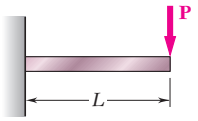
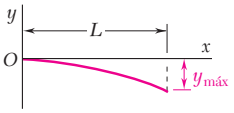
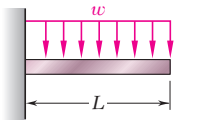
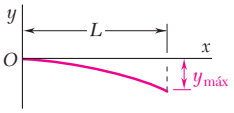
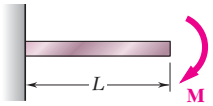
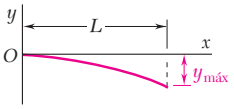
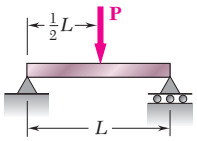
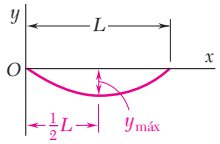
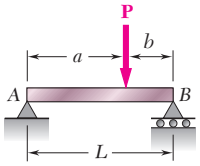
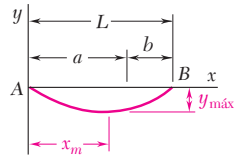
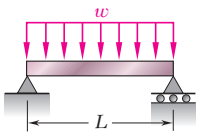
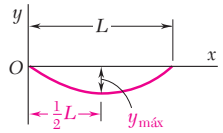
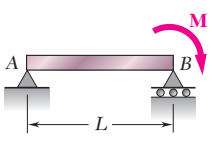
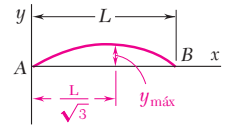


Apêndice C. Propriedades de perfis de aço laminado
(Unidades SI)

Cantoneira
(Abas desiguais)

Tamanho e espessura, mm	Massa por metro, kg/m	Área, mm^2	Eixos *X-X* e Eixos *Y-Y*				Eixos *X-X* e Eixos *Y-Y*				Eixos *Z-Z*	
			I_x 10^6 mm^4	W_x 10^3 mm^3	r_x mm	y mm	I_y 10^6 mm^4	W_y 10^3 mm^3	r_y mm	x mm	r_z mm	tg α
L203 × 152 × 25,4	65,5	8370	33,5	247	63,3	67,4	16,0	145	43,7	41,9	32,4	0,541
19,0	50,1	6380	26,2	190	64,1	65,1	12,7	113	44,6	39,6	32,7	0,551
12,7	34,1	4350	18,4	131	65,0	62,7	8,96	78,1	45,4	37,3	33,0	0,556
L152 × 102 × 19,0	35,0	4470	10,1	102	47,5	52,5	3,65	49,0	28,6	27,5	21,9	0,435
12,7	24,0	3060	7,20	70,8	48,5	50,3	2,64	34,4	29,4	25,3	22,2	0,446
9,5	18,2	2320	5,56	54,0	49,0	49,1	2,06	26,4	29,8	24,1	22,4	0,452
L127 × 76 × 12,7	19,0	2420	3,93	47,6	40,3	44,4	1,06	18,6	20,9	19,0	16,3	0,355
9,5	14,5	1840	3,06	36,6	40,8	43,3	0,841	14,5	21,4	17,8	16,6	0,362
6,4	9,8	1260	2,14	25,2	41,2	42,1	0,598	10,1	21,8	16,6	16,8	0,369
L102 × 76 × 12,7	16,4	2100	2,12	31,1	31,8	33,9	1,00	18,1	21,8	20,9	16,2	0,536
9,5	12,6	1600	1,66	24,0	32,2	32,8	0,792	14,1	22,2	19,8	16,3	0,545
6,4	8,6	1100	1,17	16,6	32,6	31,6	0,564	9,83	22,6	18,6	16,5	0,552
L89 × 64 × 12,7	13,9	1780	1,36	23,3	27,6	30,6	0,581	12,7	18,1	18,1	13,7	0,491
9,5	10,7	1360	1,07	18,0	28,0	29,5	0,463	9,83	18,5	16,9	13,8	0,503
6,4	7,3	938	0,759	12,5	28,4	28,3	0,333	6,91	18,8	15,8	13,9	0,512
L76 × 51 × 12,7	11,5	1450	0,795	16,4	23,4	27,4	0,283	7,84	14,0	14,9	10,9	0,420
9,5	8,8	1120	0,632	12,7	23,8	26,2	0,228	6,11	14,3	13,7	10,9	0,434
6,4	6,1	772	0,453	8,90	24,2	25,1	0,166	4,32	14,7	12,6	11,1	0,446
L64 × 51 × 9,5	7,9	1000	0,388	9,10	19,5	21,3	0,217	5,99	14,7	14,8	10,8	0,610
6,4	5,4	695	0,280	6,39	20,1	20,2	0,158	4,24	15,1	13,7	10,8	0,621

Apêndice D. Deflexões e inclinações de vigas

Viga e carregamento	Linha elástica	Deflexão máxima	Inclinação e extremidade	Equação da linha elástica
1 		$-\frac{PL^3}{3EI}$	$-\frac{PL^2}{2EI}$	$y = \frac{P}{6EI}(x^3 - 3Lx^2)$
2 		$-\frac{wL^4}{8EI}$	$-\frac{wL^3}{6EI}$	$y = -\frac{w}{24EI}(x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2)$
3 		$-\frac{ML^2}{2EI}$	$-\frac{ML}{EI}$	$y = -\frac{M}{2EI}x^2$
4 		$-\frac{PL^3}{48EI}$	$\pm\frac{PL^2}{16EI}$	Para $x \le \frac{1}{2}L$: $y = \frac{P}{48EI}(4x^3 - 3L^2x)$
5 		Para $a > b$: $-\frac{Pb(L^2 - b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}EIL}$ a $x_m = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}}$	$\theta_A = -\frac{Pb(L^2 - b^2)}{6EIL}$ $\theta_B = +\frac{Pa(L^2 - a^2)}{6EIL}$	Para $x < a$: $y = \frac{Pb}{6EIL}[x^3 - (L^2 - b^2)x]$ Para $x = a$: $y = -\frac{Pa^2b^2}{3EIL}$
6 		$-\frac{5wL^4}{384EI}$	$\pm\frac{wL^3}{24EI}$	$y = -\frac{w}{24EI}(x^4 - 2Lx^3 + L^3x)$
7 		$\frac{ML^2}{9\sqrt{3}EI}$	$\theta_A = +\frac{ML}{6EI}$ $\theta_B = -\frac{ML}{3EI}$	$y = -\frac{M}{6EIL}(x^3 - L^2x)$

Crédito de Fotos

Página 21: © Construction Photography/CORBIS; p. 27: © Vince Streano/CORBIS; p. 30: © John DeWolf.

Página 66: © Construction Photography/CORBIS; p. 70: © John DeWolf; p. 71: Cortesia de Tinius Olsen Testing Machine Co., Inc.; p. 71: © John DeWolf; p. 72: © John DeWolf; p. 73: © John DeWolf.

Página 151: © Brownie Harris/CORBIS; p. 152: © 2008 Ford Motor Company and Wieck Media Services, Inc.; p. 162: © John DeWolf; p. 170: Cortesia de Tinius Olsen Testing Machine Co., Inc.

Página 228: © Lawrence Manning/CORBIS; p. 229: Cortesia de Flexifoil; p. 230: © Tony Freeman/Photo Edit; p. 238: © Peter Vandermark/Stock Boston; p. 253: © Kevin R. Morris/CORBIS; p. 280: © Tony Freeman/Photo Edit; p. 280: © John DeWolf.

Página 327: Cortesia de Christoph Kreutzenbeck/Demag Cranes; p. 328: © David Papazian/CORBIS; p. 375: Godden Collection, National Information Service for Earthquake Engineering, University of California, Berkeley.

Página 391: Godden Collection, National Information Service for Earthquake Engineering, University of California, Berkeley; p. 393: © John DeWolf; p. 410: Cortesia de Nucor-Yamato Steel Company; p. 410: Cortesia de Leavitt Tube Company.

Página 442: NASA photo by Tony Landis; p. 445: © John DeWolf; p. 445: © Spencer C. Grant/Photo Edit; p. 482: © Nancy D. Antonio; p. 482: © Spencer C. Grant/Photo Edit.

Página 515: © Mark Read/CORBIS.

Página 549: © Construction Photography/CORBIS; p. 556: Royalty-Free/CORBIS; p. 569: © John DeWolf; p. 580: © John DeWolf; p. 589: Cortesia de Aztec Galvenizing Services; p. 604: Royalty-Free/CORBIS.

Página 626: Cortesia de Fritz Engineering Laboratory; p. 628: © John DeWolf; p. 658: Godden Collection, National Information Service for Earthquake Engineering, University of California, Berkeley; p. 658: © Peter Marlow/Magnum Photos.

Página 689: © Corbis Super RF/Alamy; p. 693: © Bruce Harmon/ Gunderson Communications; p. 713: © Tony Freeman/Photo Edit Inc.; p. 717: Cortesia de LIER Laboratory, France.

Respostas aos Problemas

As respostas aos problemas com número em redondo/sem itálico são dadas nesta e nas páginas seguintes. As respostas aos problemas com o número em itálico não estão listadas.

CAPÍTULO 1

1.1 125,4 kN.
1.2 (*a*) 87,7 MPa. (*b*) 19,51 MPa.
1.3 $d_1 = 22{,}6$ mm; $d_2 = 15{,}96$ mm.
1.4 (*a*) 35,7 MPa. (*b*) 42,4 MPa.
1.7 (*a*) 101,6 MPa. (*b*) −21,7 MPa.
1.8 33,1 kN.
1.11 93,6 MPa.
1.12 2,6 cm^2.
1.13 (*a*) 17,86 kN. (*b*) −41,4 MPa.
1.14 −4,97 MPa.
1.15 292 mm.
1.16 5,93 MPa.
1.18 67,9 kN.
1.19 178,6 mm.
1.20 63,3 mm.
1.21 (*a*) 3,33 MPa. (*b*) 525 mm.
1.23 (*a*) 23,0 MPa. (*b*) 24,1 MPa. (*c*) 21,7 MPa.
1.25 (*a*) 3,1 MPa. (*b*) 19,1 mm. (*c*) 16,5 MPa.
1.26 (*a*) 68,5 MPa. (*b*) 43,1 MPa.
1.27 (*a*) 80,8 MPa. (*b*) 127,0 MPa. (*c*) 203 MPa.
1.29 $\sigma = 482{,}7$ kPa; $\tau = 278{,}6$ kPa.
1.31 $\sigma = 489$ kPa; $\tau = 489$ kPa.
1.32 (*a*) 12,6 kN. (*b*) 560 kPa.
1.33 (*a*) 800,6 N. (*b*) 45º. (*c*) −17,2 kPa. (*d*) −34,5 kPa.
1.35 833 kN.
1.36 −21,6 MPa; 7,87 MPa.
1.37 15,08 kN.
1.38 3,45.
1.40 2,35.
1.41 3,25 cm.
1.43 146,8 mm.
1.44 3,40.
1.47 (*a*) 3,68. (*b*) 35,4 mm. (*c*) 78 mm.
1.48 16,4 kN.
1.49 3,02.
1.51 13,97 kN.
1.53 1,683 kN.
1.54 2,06 kN.
1.55 3,72 kN.
1.56 3,97 kN.
1.57 (*a*) 362 kg. (*b*) 1,718.
1.58 (*a*) 2798 N. (*b*) 1689.
1.59 (*a*) 76,5 MPa. (*b*) −82,7 MPa.
1.60 (*a*) 100 MPa. (*b*) −68,7 MPa.
1.61 (*a*) 61,5 MPa. (*b*) 154,4 MPa. (*c*) 77,3 MPa.
1.63 (*a*) 94,1 MPa. (*b*) 44,3 MPa.
1.65 11,98 kN.
1.67 (*a*) 49,9 mm. (*b*) 257 mm.
1.68 $21{,}3º \le \theta \le 32{,}3$ °.
1.70 $L_{\min} = \sigma_{\text{adm}} d/4\tau_{\text{adm}}$.
1.C2 (*c*) 16 mm $\le d \le$ 22 mm.
(*d*) 18 mm $\le d \le$ 22 mm.
1.C3 (*c*) 17,78 mm. $\le d \le$ 27,94 mm.
(*d*) 21,6 mm. $\le d \le$ 31,75 mm.
1.C4 (*b*) Para $\beta = 38{,}66°$, $\tan\beta = 0{,}8$; *BD* é perpendicular a *BC*.
(*c*) C.S. = 3,58 para $\alpha = 26{,}6°$; **P** é perpendicular a reta *AC*.
1.C5 (*b*) *Elemento da Fig. P 1.29, para* $\alpha = 60°$:
(1) 482,7 kPa; (2) 278,6 kPa; (3) 2,14; (4) 5,30; (5) 2,14.
Elemento da Fig. P 1.31, para $\alpha = 45°$:
(1) 489 kPa; (2) 489 kPa; (3) 2,58; (4) 3,07; (5) 2,58.
1.C6 (*d*) $P_{\text{adm}} = 5{,}79$ kN; a tensão nas barras é crítica.

CAPÍTULO 2

2.1 73,7 GPa
2.3 (*a*) 6,91 mm. (*b*) 160,0 MPa.
2.5 (*a*) 17,25 MPa. (*b*) 2,82 mm.
2.6 (*a*) 5,32 mm. (*b*) 1,75 m.
2.7 (*a*) 62,7 MPa. (*b*) 1,760.
2.8 (*a*) 2,45 kN. (*b*) 50,0 mm.
2.10 9,77 mm.
2.11 $d_{\min} = 4{,}32$ mm., $L_{\min} = 932$ mm.
2.13 10,9 mm.
2.14 1,988 kN.
2.15 (*a*) 0,01427 mm. (*b*) 0,02164 mm ↓.
(*c*) 112,4 MPa.
2.16 (*a*) 42,4 kN. (*b*) $3{,}185 \times 10^{-2}$ mm.
2.19 (*a*) 32,8 kN. (*b*) 0,0728 mm ↓.
2.20 (*a*) 0,01819 mm ↑. (*b*) 0,0919 mm ↓.
2.21 $\delta_{AB} = -2{,}11$ mm, $\delta_{AD} = 2{,}03$ mm.
2.23 206,9 MPa.
2.24 (*a*) 1176 mm. (*b*) 217,9 MPa.
2.25 (*a*) 80,4 μm ↑. (*b*) 209 μm ↓. (*b*) 390 μm ↓.
2.27 0,1095 mm ↓.
2.28 $x = 92{,}6$ mm.
2.29 (*a*) $\delta = \rho g L^3/2E$. (*b*) $F = \frac{1}{2}W$.
2.30 $\delta_A = Ph/\pi Eab$ ↓.
2.35 (*a*) $\sigma_s = -124{,}2$ MPa, $\sigma_c = -43{,}2$ MPa.
(*b*) −0,01577 mm.
2.36 (*a*) 164,7 MPa. (*b*) 100,0 MPa.
2.37 $\sigma_s = 67{,}1$ MPa, $\sigma_c = 8{,}38$ MPa.
2.38 3330 kN.
2.39 (*a*) 0,0762 mm. (*b*) $\sigma_{AB} = 30{,}5$ MPa, $\sigma_{EF} = 38{,}1$ MPa.
2.41 (*a*) em *A*: 62,8 kN ←; em *E*: 37,2 kN ←.
(*b*) 46,3 μm →.

2.42 (*a*) em *A*: 45,5 kN ←; em *E*: 54,5 kN ←. (*b*) 48,8 μm →.
2.43 (*a*) em *A*: 101,5 MPa →; em *D*: 87,7 MPa ←. (*b*) −0,040 mm.
2.44 (*a*) em *A*: 62,3 MPa →; em *D*: 48,5 MPa ←. (*b*) $-6{,}12 \times 10^{23}$ mm.
2.46 $T_A = \frac{1}{10}P$, $T_B = \frac{1}{5}P$, $T_C = \frac{3}{10}P$, $T_D = \frac{2}{5}P$.
2.47 −8,15 MPa.
2.48 −56,2 MPa.
2.50 75,4 °C.
2.51 142,6 kN.
2.52 (*a*) $\sigma_{AB} = -44{,}4$ MPa, $\sigma_{BC} = -100{,}0$ MPa. (*b*) $\delta_B = 0{,}50$ mm ↓.
2.54 (*a*) −123,5 MPa. (*b*) −16,69 MPa.
2.55 (*a*) 21,4 °C. (*b*) 3,68 MPa.
2.56 5,70 kN.
2.58 (*a*) 201,6 °F. (*b*) 457,5 mm.
2.59 (*a*) 232,6 kN. (*b*) 0,252 mm.
2.62 $E = 205$ MPa; $\upsilon = 0{,}455$; $G = 70{,}3$ MPa.
2.63 (*a*) 0,03363 mm. (*b*) $-2{,}52 \times 10^{-3}$ mm. (*c*) −315,2 mm. (*d*) -8×10^{-3} mm^2.
2.64 (*a*) −1,046 mm. (*b*) $5{,}232 \times 10^{-2}$ mm. (*c*) $-2{,}182 \times 10^{-3}$ mm.
2.65 422 kN.
2.67 (*a*) 0,1303 mm . (*b*) −0,01448 mm.
2.68 (*a*) 34 kN. compressão. (*b*) 20,4 kN. compressão.
2.69 (*a*) 0,0754 mm. (*b*) 0,1028 mm. (*c*) 0,1220 mm.
2.70 (*a*) −63,0 MPa. (*b*) −13,5 mm^2. (*c*) −540 mm^3.
2.75 0,475 mm.
2.76 $a = 20{,}8$ mm; $b = 61{,}5$ mm.
2.77 1,091 mm ↓.
2.78 302 kN.
2.81 (*a*) 262 mm. (*b*) 21,4 mm.
2.82 $G = 1{,}080$ MPa; $\tau = 431$ kPa.
2.83 (*a*) 0,01494 mm. (*b*) 544,1 mm^3. (*c*) 0,0294 %.
2.84 (*a*) $\Delta h = -0{,}0746$ mm; $\Delta V = -143{,}9$ mm^3. (*b*) $\Delta h = -0{,}0306$ mm; $\Delta V = -521$ mm^3.
2.86 (*a*) 0,2712 mm^3. (*b*) 0,2710 mm^3.
2.88 3,00.
2.89 (*a*) 0,0303 mm. (*b*) $\sigma_x = 40{,}6$ MPa; $\sigma_y = \sigma_z = 5{,}48$ MPa.
2.90 (*a*) $\sigma_x = 44{,}6$ MPa; $\sigma_y = 0$; $\sigma_z = 3{,}45$ MPa. (*b*) −0,0129 mm.
2.95 22,2 mm.
2.96 (*a*) 10,8 mm. (*b*) 32,2 kN.
2.97 (*a*) 12 mm. (*b*) 62,1 kN.
2.98 (*a*) 135,3 MPa. (*b*) 135,3 MPa.
2.99 (*a*) 92,3 kN, 0,791 mm. (*b*) 180,0 kN, 1,714 mm.
2.100 189,6 MPa.
2.101 18,3 MPa, 2,8372 mm.
2.102 25,4 MPa, 3,9421 mm.
2.105 176,7 kN; 3,84 mm.
2.106 176,7 kN; 3,16 mm.
2.107 (*a*) 0,292 mm. (*b*) $\sigma_{AC} = 250$ MPa, $\sigma_{CB} = -307$ MPa. (*c*) 0,027 mm.
2.108 (*a*) 990 kN. (*b*) $\sigma_{AC} = 250$ MPa, $\sigma_{CB} = -316$ MPa. (*c*) 0,031 mm.
2.111 (*a*) 772,9 MPa. (*b*) 571,6 MPa. (*c*) 0,2301 mm.
2.112 (*a*) 0,7849 mm. (*b*) 441,3 MPa. (*c*) 0,09830 mm.
2.113 (*a*) *AD*: 250 MPa, *BE*: 124,3 MPa, (*b*) 0,622 mm ↓.
2.114 (*a*) *AD*: 233 MPa, *BE*: 250 MPa, (*b*) 1,322 mm ↓.
2.115 (*a*) *AD*: −4,70 MPa, *BE*: 19,34 MPa, (*b*) 0,0967 mm ↓.
2.116 (*a*) −248,2 MPa. (*b*) 109,2 MPa.
2.117 (*a*) *AC*: −150 MPa; *CB*: −250 MPa. (*b*) 0,1069 mm →.
2.118 (*a*) *AC*: 56,5 MPa; *CB*: 94,1 MPa. (*b*) 0,0424 mm →.
2.119 (*a*) 0,1042 mm. (*a*) *AC*: −65,2 MPa; *CB*: −65,2 MPa.
2.120 (*a*) 0,00788 mm. (*a*) *AC*: −6,06 MPa; *CB*: −6,06 MPa.
2.123 (*a*) 431,6 °C, (*b*) 829,7 °C.
2.124 31 mm.
2.125 4,67 °C.
2.127 24,2 MPa.
2.131 $\sigma_s = -9{,}47$ MPa, $\sigma_c = 0{,}391$ MPa.
2.132 18,49 kN/mm.
2.133 41,7 kN.
2.135 (*a*) $A\sigma_y/\mu g$. (*b*) EA/L.
2.C1 *Prob. 2.126:* (*a*) 0,302 mm. ↓. (*b*) 0,1438 mm.
2.C3 *Prob. 2.60:* (*a*) −116,2 MPa. ↓. (*b*) 0,363 mm.
2.C5 $r = 6{,}35$ mm; 26,8 MPa.
$r = 19{,}1$ mm; 19,2 MPa.
2.C6 (*a*) −0,40083. (*b*) −0,10100. (*c*) −0,00405.

CAPÍTULO 3

3.1 89,7 MPa.
3.2 133,8 kN · m.
3.3 85,8 MPa.
3.5 (*a*) 125,7 N · m. (*b*) 181,4 N · m.
3.6 (*a*) 70,7 MPa. (*b*) 35,4 MPa. (*c*) 6,25%.
3.8 14 kN · cm.
3.9 (*a*) 56,6 MPa. (*b*) 36,6 MPa.
3.11 (*a*) 81,2 MPa. (*b*) 64,5 MPa. (*c*) 23,0 MPa.
3.13 (*a*) 57,6 MPa. (*b*) 41,0 MPa.
3.14 (*a*) 3,282 cm. (*b*) 4,056 cm.
3.15 (*a*) 3,818 cm. (*b*) 4,707 cm.
3.16 1035,1 N · μ.
3.19 (*a*) 50,3 mm. (*b*) 63,4 mm.
3.20 (*a*) 15,18 mm. (*b*) 132,5 N · m.
3.21 (*a*) 60,7 mm. (*b*) 44,7 mm.
3.23 (*a*) 45,1 mm. (*b*) 65,0 mm.
3.24 1,129 kN · m.
3.26 (*a*) 3,663 cm. (*b*) 3,132 cm.
3.27 (*a*) 20,1 mm. (*b*) 26,9 mm. (*c*) 36,6 mm.
3.28 (*a*) 55,0 MPa. (*b*) 45,3 MPa. (*c*) 47,7 MPa.
3.29 1.000, 1.025, 1.120, 1.200, 1.000.
3.30 (*a*) $(T/w) = (c_1^2 = c_2^2)\tau_{adm}/2\rho g c_2$. (*b*) $(T/w) = (T/w)_0(1 + c_1^2/c_2^2)$.
3.31 (*a*) 2,19 kN · m. (*b*) 9,11°.
3.33 64,7 MPa.
3.34 1.247 cm.
3.36 (*a*) 8,87°. (*b*) 0,450°.
3.37 (*a*) 14,43°. (*b*) 46,9°.
3.38 6,02°.
3.40 3,77°.
3.41 12,22°.
3.42 13,23°.
3.44 53,8°.
3.45 36,1 mm.
3.46 22,5 mm.
3.47 32,6 mm.
3.48 37,7 mm.
3.49 62,9 mm.
3.50 42,1 mm.
3.53 (*a*) 17,45 MPa. (*b*) 27,6 MPa. (*c*) 2,05°.

3.54 (*a*) 688 N · m. (*b*) 2.35°.
3.57 $\tau_{AB} = 68{,}6$ MPa, $\tau_{CD} = 12{,}75$ MPa.
3.58 $\tau_{AB} = 7{,}49$ MPa, $\tau_{CD} = 48{,}1$ MPa.
3.59 12,24 MPa.
3.60 6,12 mm.
3.61 (*a*) $\tau_{máx} = T/2\pi tr^2$ em $\rho = r_1$.
3.62 (*a*) 82,5 MPa. (*b*) 0,273°.
3.64 (*a*) 65,57 MPa. (*b*) 32,82 MPa.
3.65 (*a*) 46,9 MPa. (*b*) 23,5 MPa.
3.66 (*a*) 20,1 mm. (*b*) 15,94 mm.
3.68 (*a*) 18,80 kW. (*b*) 24,3 MPa.
3.69 (*a*) 51,7 kW. (*b*) 6,17°.
3.71 (*a*) 20,1 MPa. (*b*) 1,148°.
3.72 $t = 8$ mm.
3.74 30,4 Hz.
3.76 (*a*) 2,029 cm. (*b*) 2,405 cm.
3.77 (*a*) 28,13 MPa. (*b*) 46,82 MPa.
3.78 (*a*) 16,02 Hz. (*b*) 27,2 Hz.
3.79 1917 rpm.
3.80 50,0 kW.
3.83 23,4 mm.
3.86 63,5 kW.
3.87 5,1 mm.
3.88 42,6 Hz.
3.89 (*a*) 203 N · m. (*b*) 165,8 N · m.
3.90 31,9 W.
3.91 (*a*) 18,0 MPa. (*b*) 13,9 MPa.
3.92 (*a*) 9,64 kN · m. (*b*) 9,91 kN · m.
3.93 252 N · m.
3.94 (*a*) 131,7 MPa, 2,540 cm. (*b*) 137,9 MPa, 1,435 cm.
3.96 13,32 mm.
3.98 (*a*) 2,47°. (*b*) 4,34°.
3.99 (*a*) 6,72°. (*b*) 18,71°.
3.100 (*a*) 8,17 mm. (*b*) 42,1°.
3.101 (*a*) 124 MPa. (*b*) 15,63°.
3.103 (*a*) 1,126 ϕ_Y. (*b*) 1,587 ϕ_Y. (*c*) 2,15 ϕ_Y.
3.105 (*a*) 977 N · m. (*b*) 8,61 mm.
3.106 (*a*) 11,71 kN · m, 3.44°. (*b*) 14,12 kN · m, 4,81°.
3.107 (*a*) 8,02°. (*b*) 14,89 kN · m.
3.108 (*a*) 2,515 cm. (*b*) 9,398 cm.
3.109 (*a*) 9,71 kN · m. (*b*) 6,30 cm.
3.112 (*a*) 1,876 kN · m. (*b*) 17,19°.
3.113 (*a*) 1,900 kN · m. (*b*) 17,19°.
3.114 38,8 MPa.
3.115 14,62°.
3.118 (*a*) 33,5 MPa em $\rho = 16$ mm. (*b*) 1,032°.
3.119 (*b*) 0,221 $\tau_Y c^3$.
3.120 3,10° para carregamento invertido, 4,04° para carregamento original.
3.121 (*a*) 189,2 N · m, 9,05°. (*b*) 228 N · m, 7,91°.
3.122 (*a*) 74,0 MPa, 9,56°. (*b*) 61,5 MPa, 6,95°.
3.123 (*a*) 1410,2 N · m, 0.908°. (*b*) 1144.7 N · m, 0,942°.
3.124 (*a*) 29,0 MPa, 0,509°. (*b*) 35,8 MPa, 0,651°.
3.125 59,2 MPa.
3.126 5,07 MPa.
3.129 (*a*) 29,8 mm. (*b*) 30,4 mm. (*c*) 27,6 mm.
3.130 (*a*) 382 mm. (*b*) 283 mm. (*c*) 429 mm.
3.131 (*a*) 516,4 N · m. (*b*) 487,0 N · m. (*c*) 652,0 N · m.
3.132 (*a*) 27,7 cm. (*b*) 20,5 cm. (*c*) 31,1 cm.
3.135 (*a*) 59,7 MPa. (*b*) 8,51°.
3.136 (*a*) 70,8 N · m. (*b*) 8,77°.
3.137 (*a*) 31,5 MPa. (*b*) 20,4 MPa. (*c*) 5,08°.
3.138 (*a*) 925 N · m. (*b*) 5,77°.
3.141 8,47 MPa nos pontos *a* e *b*.
3.142 4,73 MPa no ponto *a*; 9.46 MPa no ponto *b*.
3.143 9,95 kN · m.
3.144 8,45 N · m.
3.145 4,41 cm.
3.147 (*a*) $T = T_0(1 - e/t)$. (*b*) 10%, 50%, 90%.
3.148 (*a*) 12,76 MPa. (*b*) 5,40 kN · m.
3.150 (*a*) $\tau_{med}/\tau_m = \phi_2/\phi_1 = 1 + t^2/4c^2{}_m$. (*b*) 0,25%, 1%, 4%.
3.151 (*a*) Eixo *AB*. (*b*) 58,5 MPa.
3.153 (*a*) 199,5 N · m. (*b*) 10,40°.
3.156 39,3 MPa.
3.159 934 rpm.
3.160 1,221.
3.162 0,944.
3.C1 *Prob. 3.35:* (*a*) 1,384°. (*b*) 3,22°.
3.C3 *Prob. 3.155:* (*a*) $T_A = 1105$ N · m; $T_C = 295$ N · m (*b*) 45,0 MPa. (*c*) 27,4 MPa.
3.C5 (*a*) −3,282%. (*b*) −0,853%. (*c*) −0,138%. (*d*) −0,00554%.
3.C6 (*a*) −1,883%. (*b*) −0,484%. (*c*) −0,078%. (*d*) −0,00313%.

CAPÍTULO 4

4.1 (*a*) −45,0 MPa. (*b*) 67,4 MPa.
4.3 5,28 kN · m.
4.4 4,51 kN · m.
4.5 129,6 kN · m.
4.6 34,2 kN · m.
4.7 60,8 MPa, −101,4 MPa.
4.9 73,2 MPa, −102,4 MPa.
4.11 9,65 kN.
4.12 12,85 kN.
4.13 58,8 kN.
4.15 4,85 kN · m.
4.16 106,1 N · m.
4.18 3,79 kN · m.
4.20 523,2 N · m.
4.21 448,9 MPa.
4.22 (*a*) 28,25 N · m. (*b*) 383,54 cm.
4.23 (*a*) 965 MPa. (*b*) 20,5 N · m.
4.25 (*a*) 75,0 MPa, 26,7 m. (*b*) 125,0 MPa, 9,60 m.
4.27 0,950.
4.28 0,949.
4.29 (*a*) 139,6 m. (*b*) 481 m.
4.30 (*a*) 2557,8 cm. (*b*) 8813,8 cm. (*c*) 0,01320°.
4.31 (*a*) 101,8 m. (*b*) 0,0464°.
4.32 (*a*) $(\sigma_x)_{max}\,(y^2 - c^2)/2\rho c$. (*b*) $-(\sigma_x)_{max}\,c/2\rho$.
4.33 2,22 kN · m.
4.35 1,933 kN · m.
4.37 37,3 kN · m.
4.38 22,1 kN · m.
4.39 (*a*) 44,5 MPa. (*b*) −80,1 MPa.
4.40 *a*) 51,2 MPa. (*b*) −119,5 MPa.
4.41 (*a*) −13,2 MPa. (*b*) 87,7 MPa.
4.43 23,6 m.
4.44 18,45 m.
4.45 211 m.
4.47 43,9 kN · m.
4.48 (*a*) 212 MPa. (*b*) −15,59 MPa.
4.49 (*a*) 210 MPa. (*b*) −14,08 MPa.
4.51 (*a*) 200 MPa. (*b*) 146 MPa.

4.53 (*a*) 1674 mm^2. (*b*) 90.8 kN · m.
4.55 (*a*) 29,6 MPa (alumínio), 26.7 MPa (latão), 17,78 MPa (aço). (*b*) 88.6 m.
4.56 (*a*) 38,7 MPa (aço), 7,74 MPa (alumínio), 3,87 MPa (latão). (*b*) 203 m.
4.57 (*a*) 53,1 MPa. (*b*) 133,6 MPa.
4.58 (*a*) 40,7 MPa. (*b*) 146,1 MPa.
4.59 (*a*) 6,15 MPa. (*b*) −8,69 MPa.
4.61 (*a*) 471,2 N · m. (*b*) 523,2 N · m.
4.62 (*a*) 74,3 MPa. (*b*) 59,6 MPa.
4.64 (*a*) 704 N · m. (*b*) 580 N · m.
4.66 (*a*) 1,25 kN · m. (*b*) 1,53 kN · m.
4.67 (*a*) 38.4 N · m. (*b*) 52,8 N · m.
4.68 (*a*) 57,6 N · m. (*b*) 83,2 N · m.
4.69 (*a*) 0,655 mm. (*b*) 2,014 mm.
4.71 (*a*) 13,23 mm. (*b*) 5,334 mm.
4.73 (*a*) 19,44 kN · m. (*b*) 28,1 kN · m.
4.74 (*a*) 10,08 kN · m. (*b*) 16,12 kN · m.
4.75 (*a*) 36,4 kN · m. (*b*) 49,0 kN · m.
4.76 (*a*) 34,8 kN · m. (*b*) 45,9 kN · m.
4.77 (*a*) 29,2 kN · m. (*b*) 1,500.
4.79 (*a*) 52,2 kN · m. (*b*) 1,435.
4.80 (*a*) 47,5 kN · m. (*b*) 1,364.
4.82 911 N · m.
4.84 48,6 kN · m.
4.85 12,5 kN · m.
4.86 23,8 kN · m.
4.87 120 MPa.
4.88 145,7 MPa.
4.89 (*a*) −81,8 MPa. (*b*) 125,9 MPa.
4.90 (*a*) −92,1 MPa. (*b*) 105,3 MPa.
4.91 (*a*) 106,7 MPa. (*b*) −31,15 mm, 0, 31.15 mm. (*c*) 24,1 m.
4.95 (*a*) 292 MPa. (*b*) 7,01 mm.
4.97 (*a*) 296,5 MPa. (*b*) 1,21 kN · m.
4.99 (*a*) $\sigma_A = \sigma_B = -12{,}9$ Mpa.
(*b*) $\sigma_A = -24{,}8$ Mpa, $\sigma_B = -7{,}5$ Mpa.
4.100 (*a*) $\sigma_A = \sigma_B = -12{,}9$ Mpa.
(*b*) $\sigma_A = -20{,}5$ Mpa, $\sigma_B = -11{,}8$ Mpa.
4.101 (*a*) $-2P/\pi r^2$. (*b*) $-5P/\pi r^2$.
4.103 (*a*) 112,8 MPa. (*b*) −96,0 MPa.
4.105 (*a*) 1281 N. (*b*) 930 N.
4.106 (*a*) −139,3 MPa. (*b*) −152,3 MPa.
4.107 14,40 kN.
4.108 16,04 mm.
4.110 1,156 cm.
4.113 (*a*) 52,7 MPa. (*b*) −67,2 MPa. (*c*) 11,20 mm acima *D*.
4.114 (*a*) 1125 kN. (*b*) 817 kN.
4.116 102,3 kN.
4.118 (*a*) 40,3 kN. (*b*) 56,3 mm a partir da face esquerda.
4.119 (*a*) 69,6 kN. (*b*) 41,9 mm a partir da face esquerda.
4.120 9,30 kN.
4.121 $P = 196.6$ kN, $Q = 395.1$ kips.
4.122 (*a*) 30 mm. (*b*) 94.5 kN.
4.125 (*a*) 150 mm. (*b*) −10 MPa.
4.126 (*a*) −2,80 MPa. (*b*) 0,452 MPa. (*c*) 2,80 MPa.
4.127 (*a*) 52,2 MPa. (*b*) −14,0 MPa. (*c*) −52,2 MPa.
4.129 (*a*) 2,21 MPa. (*b*) −738 kPa. (*c*) 2,94 MPa.
4.131 (*a*) 65,8 MPa. (*b*) −164,5 MPa. (*c*) −65,8 MPa.
4.132 (*a*) 57,3°. (*b*) 75,1 MPa.
4.134 (*a*) 18,28°. (*b*) 93,7 MPa.
4.135 (*a*) 27,5°. (*b*) $\sigma_D = 35{,}0$ MPa.
4.136 (*a*) 32,9°. (*b*) $\sigma_E = 61{,}4$ MPa.
4.137 −16,0 MPa.
4.138 113,0 MPa.
4.140 (*a*) $\sigma_A = 288$ kPa, $\sigma_B = 2{,}01$ MPa.
(*b*) Intercepta *AB* em 12,7 mm a partir de *A* e intercepta *BD* a 19,05 mm em *D*.
4.141 (*a*) $\sigma_A = -431$ kPa, $\sigma_B = -1{,}869$ MPa.
(*b*) Não interepta *AB*. Intercepta *BD* a 19,81 mm de *B*.
4.142 (*a*) $\sigma_A = 31{,}5$ MPa, $\sigma_B = -10{,}39$ MPa
(*b*) 94,0 mm acima do ponto *A*.
4.144 36,8 mm.
4.146 3,29 kN · m.
4.148 733 N · m.
4.149 1,323 kN · m.
4.150 900 N · m.
4.151 4,70°.
4.156 (*a*) −38,7 MPa. (*b*) 36,3 MPa.
4.157 $\sigma_A = -37{,}2$ MPa, $\sigma_B = 28{,}4$ MPa.
4.158 $\sigma_A = -65{,}1$ MPa, $\sigma_B = 39{,}7$ MPa.
4.160 60,9 mm.
4.162 (*a*) −82,4 MPa. (*b*) 36,6 MPa.
4.163 2913,4 N.
4.166 (*a*) 21,1 MPa. (*b*) −19,4 MPa. (*c*) 3,6 MPa.
4.167 (*a*) −64,1 MPa. (*b*) 65,2 MPa.
4.168 (*a*) −106,1 MPa. (*b*) 38,9 MPa.
4.169 (*a*) −45,2 MPa. (*b*) 17,40 MPa.
4.170 (*a*) −43,3 MPa. (*b*) 14,43 MPa.
4.171 (*a*) 110,7 MPa. (*b*) −67,8 MPa.
4.172 (*a*) 48,7 MPa. (*b*) −23,2 MPa.
4.174 (*a*) 63,9 MPa. (*b*) −52,6 MPa.
4.176 (*a*) −46,3 MPa. (*b*) 22,3 MPa.
4.177 (*a*) −25,2 MPa. (*b*) 25,6 MPa.
4.184 29,3 kN · m.
4.186 (*a*) 1,333 GPa. (*b*) 5,46 N · mm.
4.187 887 N · m.
4.189 (*a*) 33,6 MPa. (*b*) 35,6 MPa.
4.190 (*a*) 56,7 kN · m. (*b*) 20,0 m.
4.192 (*a*) $-P/2at$. (*b*) $2\ P/at$. (*c*) $-P/2at$.
4.193 (*a*) 57,8 MPa. (*b*) −56,8 MPa. (*c*) 25,9 MPa.
4.195 5,22 MPa, −12,49 MPa.
4.C1 $a = 4$ *mm:* $\sigma_a = 50{,}6$ MPa, $\sigma_s = 107{,}9$ MPa;
$a = 14$ *mm:* $\sigma_a = 89{,}7$ MPa, $\sigma_s = 71{,}8$ MPa.
(*a*) 111,6 MPa. (*b*) 6,61 mm.
4.C3 $\beta = 30°$: $\sigma_A = -54{,}0$ MPa, $\sigma_B = -36{,}3$ MPa,
$\sigma_C = 49{,}6$ MPa, $\sigma_D = 40{,}7$ MPa;
$\beta = 120°$: $\sigma_A = 10{,}7$ MPa, $\sigma_B = 41{,}4$ MPa,
$\sigma_C = -18{,}4$ MPa, $\sigma_D = -33{,}7$ MPa.
4.C4 $r_1/h = 0{,}529$ para 50% de aumento de $\sigma_{máx}$.
4.C5 *Prob. 4.8:* 106,2 MPa; −71,6 MPa.
4.C6 $y_Y = 20{,}3$ *mm.:* 9.0 kN · m., 1402 cm.;
$y_Y = 5{,}0$ *mm.:* 10.8 kN · m., 350,8 cm.
4.C7 $a = 5{,}0$*mm.:* −50,1 MPa, $a = 20{,}3$ *MPa.:* −45,6 MPa.
Para $a = 15{,}88$ mm., $\sigma = -310$ MPa.

CAPÍTULO 5

5.1 (*a*) $|V|_{máx} = wL/2$, $|M|_{máx} = wL^2/8$.
(b) $V = w(L/2 - x)$, $M = w(Lx - x^2)/2$.
5.2 (*a*) e (*b*) $(0 < x < a)$, $V = Pb/L$
$M = Pbx/L$; $(a < x < L)$,
$V = -Pa/L$, $M = Pa(L - x)/L$.
5.3 (*a*) e (*b*) $(0 < x < a)$, $V = -P$,
$M = Px/L$; $(a < x < L)$,
$V = -2P$, $M = -2Px + Pa$.

5.4 (*a*) $|V|_{máx} = w_0L/2$, $|M|_{máx} = w_0L^2/6$.
(*b*) $V = w_0x^2/2L$, $M = -w_0x^3/6L$

5.5 *A* até *B*: $V = P$, $M = Px$; *B* até *C*: $V = O$, $M = Pa$;
C até *D*: $V = -P$, $M = P(L - x)$.

5.6 (*a*) $|V|_{máx} = w(L - 2a)/2$, $|M|_{máx} = w(L^2/8 - a^2/2)$
(*b*) *A* to *B*: $V = w(L - 2a)/2$, $M = w(L - 2a)x/2$;
B até *C*: $V = w(L/2 - x)$,
$M = w[(L - 2a)x - (x - a)^2]/2$.
C até *D*: $V = -w(L - 2a)/2$,
$M = w(L - 2a)(L - x)/2$.

5.7 (*a*) 31,1 N. (*b*) 6440 N · mm.

5.8 (*a*) 42,0 kN. (*b*) 27,0 kN · m.

5.9 (*a*) 72,0 kN. (*b*) 96,0 kN · m.

5.10 (*a*) 133,4 kN. (*b*) 122,0 kN · m.

5.12 (*a*) 3,45 kN. (*b*) 1125 N · m.

5.13 (*a*) 900 N. (*b*) 112.5 N · m.

5.15 6,98 MPa.

5.17 72,3 MPa.

5.18 139.0 MPa.

5.20 75.8 MPa.

5.21 $|V|_{máx} = 122{,}3$ kN, $|M|_{máx} = 61{,}0$ kN · m,
$\sigma_{máx} = 97{,}5$ MPa.

5.22 $|V|_{máx} = 66.8$ kN, $|M|_{máx} = 30{,}7$ kN · m,
$\sigma_{máx} = 56.0$ MPa.

5.24 $|V|_{máx} = 342$ N, $|M|_{máx} = 51{,}6$ N · m,
$\sigma_{máx} = 17.19$ MPa.

5.25 $|V|_{máx} = 25{,}7$ kN, $|M|_{máx} = 33{,}9$ kN · m,
$\sigma_{máx} = 71{,}3$ MPa.

5.27 (*a*) 10,67 kN. (*b*) 9,52 MPa.

5.28 (*a*) 866 mm. (*b*) 99,2 MPa.

5.29 (*a*) 819 mm. (*b*) 89,5 MPa.

5.31 (*a*) 942 mm. (*b*) 89,3 MPa.

5.32 25,9 mm.

5.33 (*a*) 33,3 mm. (*b*) 66,6 mm.

5.50 (*a*) $V = w_0(L^2 - 3x^2)/6L$, $M = w_0(Lx - x^3/L)/6$.
(*b*) 0,0642 w_0L^2

5.52 (*a*) $V = w_0(x - x^2/L)$, $M = w_0(x^2/2 - x^3/3L)$, $w_0L^2/6$.
(*b*) $V = w_0(x/2 - 3x^2/4L)$, $M = w_0(x^2/4 - x^3/4\text{L}, w_0L^2/27$.

5.54 (*a*) $|V|_{máx} = 16{,}80$ kN, $|M|_{máx} = 8{,}82$ kN · m.
(*b*) 73,5 MPa.

5.55 (*a*) $|V|_{máx} = 66{,}7$ kN, $|M|_{máx} = 50{,}8$ kN · m.
(*b*) 62,1 MPa.

5.56 (*a*) $|V|_{máx} = 128.0$ kN, $|M|_{máx} = 89.6$ kN · m.
(*b*) 156 MPa.

5.58 (*a*) $|V|_{máx} = 136{,}1$ kN, $|M|_{máx} = 81{,}3$ kN· m.
(*b*) 149 MPa.

5.59 $|V|_{máx} = 6{,}50$ kN, $|M|_{máx} = 5{,}04$ kN · m, 30,3 MPa.

5.60 $|V|_{máx} = 48{,}0$ kN, $|M|_{máx} = 12{,}00$ kN · m, 61,9 MPa.

5.62 $P = 500$ N, $Q = 250$ N, $|V|_{máx} = 1150$ N,
$|M|_{máx} = 221$ N · m

5.64 (*a*) $|V|_{máx} = 109.0$ kN, $|M|_{máx} = 49.2$ kN · m.
(*b*) 109,1 MPa.

5.65 $h = 173{,}2$ mm.

5.68 $h = 38{,}3$ mm.

5.69 $h = 203$ mm.

5.70 $b = 48{,}0$ mm.

5.71 W410 × 60.

5.72 W690 × 125.

5.73 W250 × 28.4.

5.74 W530 × 66.

5.76 S510 × 98,3.

5.77 S510 × 98,3.

5.79 9,5 mm.

5.80 $b = 298$ mm.

5.81 C180 × 14.6.

5.82 L102 × 76 × 12,7, $t_{min} = 12{,}7$ mm.

5.83 W610 × 101.

5.84 W610 × 101.

5.85 176,8 kN/m.

5.86 108,8 kN/m.

5.89 (*a*) 1,485 kN/m.
(*b*) 1,935 m.

5.90 (*a*) 4,01 kN. (*b*) 3,27 m.

5.92 (*a*) W410 × 60.
(*b*) W530 × 66.
(*c*) W360 × 44.

5.94 383 mm.

5.95 336 mm.

5.96 W690 × 125

5.97 23,2%.

5.98 (*a*) $V = -w_0x - w_0\langle x - a\rangle^1$,
$M = -w_0x^2/2 + w_0\langle x - a\rangle^2/2$.
(*b*) $-3w_0a^2/2$.

5.100 (*a*) $V = -w_0x + w_0x^2/2a - w_0\langle x - a\rangle^2/2a$,
$M = -w_0x^2/2 + w_0x^3/6a - w_0\langle x - a\rangle^3/6a$.
(*b*) $-5w_0a^2/6$.

5.101 (*a*) $V = 1.25\,P - P\langle x - a\rangle^0 - P\langle x - 2a\rangle^0$,
$V = 1.25\,Px - P\langle x - a\rangle^1 - P\langle x - 2a\rangle^1$.

5.102 (*a*) $V = -w_0x + w_0\langle x - a\rangle^1 + 3w_0a/2$,
$M = -w_0x^2/2 + w_0\langle x - 2a\rangle^2/2 + 3w_0ax/2$.
(*b*) $w_0a^2/2$.

5.104 (*a*) $V = -P - P\langle x - 2L/3\rangle^0$,
$M = -Px + PL/3 - P\langle x - 2L/3\rangle^1$
$PL\langle x - 2L/3\rangle^0/3$.
(*b*) $-4PL/3$.

5.105 (*a*) $V = -P\langle x - a\rangle^0\, M = -P\langle x - a\rangle^1 - Pa\langle x - a\rangle^0$,
(*b*) $-Pa$.

5.106 (*a*) $V = 40 - 48\langle x - 1{,}5\rangle^0 - 60\langle x - 3.0\rangle^0$
$- 60\langle x - 3.6\rangle^0$ kN
$M = 40x - 48\langle x - 1.5\rangle^1$
$- 60\langle x - 3{,}0\rangle^1 + 60\langle x - 3{,}6\rangle^1$ kN · m.
(*b*) 60,0 kN · m.

5.107 (*a*) $V = -13{,}34 + 43{,}4\langle x - 0{,}914\rangle^0 - 26{,}7\langle x - 2{,}13\rangle^0$
$- 26{,}7\langle x - 3{,}35\rangle^0$ kN,
$M = -13{,}34x + 43{,}4\langle x - 0{,}914\rangle^1$
$- 26{,}7\langle x - 2{,}13\rangle^1 + 26{,}7\langle x - 3{,}35\rangle^1$ kN · m.
(*b*) 28,5 kN · m.

5.108 (*a*) $V = -1{,}5x + 3\langle x - 0{,}8\rangle^0 + 3\langle x - 3{,}2\rangle^0$ kN,
$M = -0{,}75x^2 + 3\langle x - 0{,}8\rangle^1 + 3\langle x - 3{,}2\rangle^1$ kN · m.
(*b*) 600 N · m.

5.109 (*a*) $V = 57{,}8 - 43{,}8x + 43{,}8\langle x - 0{,}914\rangle^1 - 35{,}6\langle x - 2{,}13\rangle^0$
$- 43{,}8\langle x - 3{,}35\rangle^1$ kN,
$M = 57{,}8x - 21{,}9x^2 + 21{,}9\langle x - 0{,}914\rangle^2 - 35{,}6\langle x - 2{,}13\rangle^1$
$+ 21{,}9\langle x - 3{,}35\rangle^2$ kN · m.
(*b*) 56,3 kN · m.

5.110 (*a*) $V = 30 - 24\langle x - 0{,}75\rangle^0 - 24\langle x - 1{,}5\rangle^0$
$- 24\langle x - 2.25\rangle^0 + 66\langle x - 3\rangle^0$ kN,
$M = 30x - 24\langle x - 0.75\rangle^1 - 24\langle x - 1{,}5\rangle^1$
$- 24\langle x - 2{,}25\rangle^1 - 66\langle x - 3\rangle^1$ kN · m.
(*b*) 87,7 MPa.

5.114 (*a*) 108,5 kN · m, (*b*) W360 × 44.

5.115 (*a*) 164,7 kN · m a 1,83 m de *A*. (*b*) W410 × 60.

5.116 (*a*) 0,872 kN · m a 2,09 m de *A*.
(*b*) $h \times 130$ mm.
5.118 $|V|_{máx} = 35{,}6$ kN, $|M|_{máx} = 25{,}0$ kN · m.
5.119 $|V|_{máx} = 89{,}0$ kN, $|M|_{máx} = 178{,}0$ kN · m.
5.121 $|V|_{máx} = 47{,}8$ kN, $|M|_{máx} = 71{,}2$ kN · m.
5.122 (*a*) $|V|_{máx} = 13.80$ kN, $|M|_{máx} = 16{,}16$ kN · m.
(*b*) 83,3 MPa.
5.123 (*a*) $|V|_{máx} = 40.0$ kN, $|M|_{máx} = 30{,}0$ kN · m. (*b*) 40,0 MPa.
5.124 (*a*) $|V|_{máx} = 17{,}08$ kN, $|M|_{máx} = 5{,}15$ kN · m.
(*b*) 6,56 MPa.
5.126 (*a*) $h = h_0[x(L - x)/L^2]^{1/2}$.
(*b*) 7,78 kN/cm.
5.127 (*a*) $h = h_0(x/L)^{1/2}$. (*b*) 89,0 kN.
5.128 (*a*) $h = h_0(2x/L)^{1/2}$ for $0 < x < L/2$
(*b*) 60,0 kN.
5.131 (*a*) $h = h_0(x/L)^{3/2}$. (*b*) 167,7 mm.
5.132 $l_1 = 1{,}83$ m, $l_2 = 1{,}22$ m.
5.134 $l = 1{,}800$ m.
5.135 $l = 1{,}900$ m.
5.137 $d = d_0[4x(L - x)/L^2]^{1/2}$
5.138 (*a*) $b = b_0(1 - x/L)$
(*b*) 20,8 mm.
5.140 (*a*) 155,2 MPa. (*b*) 142,4 MPa.
5.142 (*a*) 2,24 m. (*b*) 29,3 cm.
5.143 193,8 kN.
5.144 (*a*) 152,6 MPa. (*b*) 133,6 MPa.
5.145 (*a*) 4,49 m. (*b*) 211 mm.
5.146 (*a*) 165,5 MPa. (*b*) 202,0 MPa.
5.148 (*a*) $x_m = 38.1$ cm.
(*b*) 560.4 N/cm.
5.149 (*a*) $x_m = 76.2$ cm.
(*b*) 56,9 kN.
5.151 (*a*) $x_m = 0{,}240$ m. (*b*) 150,0 kN/m.
5.152 (*a*) 85,0 N. (*b*) 21,3 N · m.
5.154 (*a*) 600 N. (*b*) 180 N · m.
5.155 $|V|_{max} = 35{,}6$ kN, $|M|_{max} = 21{,}7$ kN · m, 48,1 MPa.
5.158 $d = 216$ mm.
5.160 7,32 kN.
5.161 (*a*) $V = 177{,}9 - 89{,}0\langle x - 0{,}610\rangle^0 - 89{,}0\langle x - 1{,}219\rangle^0 - 89{,}0\langle x - 1{,}829\rangle^0$ kN,
$M = 177{,}9x - 89{,}0\langle x - 0{,}610\rangle^1 - 89{,}0\langle x - 1{,}219\rangle^1 - 89{,}0\langle x - 1{,}829\rangle^1$ kN· m.
(*b*) 162,7 kN · m.
5.163 (*a*) $b = b_0(1 - x/L)^2$. (*b*) 63,2 N/mm.
5.C1 *Prob. 5.18:* Em $x = 2$ m: $V = 0$,
$M = 104{,}0$ kN · m, $\sigma = 139{,}0$ MPa.
5.C4 *Para x = 4.11 m;* $M_1 = 177{,}9$ kN · m;
$M_2 = 211{,}8$ kN · m; $M_C = 203{,}4$ kN · m.
5.C5 *Prob. 5.72:* $V_A = 213.5$ kN, $M_B = 434{,}7$ · m.
5.C6 *Prob. 5.112:* $V_A = 29.5$ kN, $M_{máx} = 28{,}3$ kN · m, a 1,938 m de *A*.

CAPÍTULO 6

6.1 (*a*) 1,387 kN. (*b*) 380 kPa.
6.2 (*a*) 155,8 N. (*b*) 329 kPa.
6.3 1450 N.
6.5 51,3 kN.
6.7 193,5 kN.
6.8 217 kN.
6.9 (*a*) 8,97 MPa. (*b*) 8,15 MPa.
6.11 (*a*) 91,8 MPa. (*b*) 83,2 MPa.
6.12 (*a*) 21,9 MPa. (*b*) 16,55 MPa.
6.13 177,9 kN.
6.15 1334,4 kN.
6.16 178,7 kN.
6.18 35,69 cm.
6.19 (*a*) 320 mm. (*b*) 97,7 mm.
6.21 (*a*) 31,0 MPa. (*b*) 23,2 MPa.
6.22 (*a*) 12,03 MPa. (*b*) 19,44 MPa.
6.23 32,7 MPa.
6.24 22,1 MPa.
6.25 1,500.
6.27 1,333.
6.29 4,25 cm.
6.31 843,3 N.
6.32 (*a*) 239 N. (*b*) 549 N.
6.34 (*a*) 146,1 kN/m. (*b*) 19,99 MPa.
6.35 (*a*) 38,0 MPa. (*b*) 38,0 MPa.
6.37 $\tau_a = 8.05$ MPa, $\tau_b = 3.54$ MPa, $\tau_c = 27{,}79$ MPa, $\tau_d = 57{,}92$ MPa.
6.39 $\tau_a = 33{,}7$ MPa, $\tau_b = 75.0$ MPa, $\tau_c = 43{,}5$ MPa.
6.40 $\tau_a = 75{,}0$ MPa, $\tau_b = 58.0$ MPa, $\tau_c = 15{,}13$ MPa.
6.41 (*a*) 4,55 MPa. (*b*) 3,93 MPa.
6.42 (*a*) 41,3 mm. (*b*) 3,98 MPa.
6.43 20,6 MPa.
6.44 138,6 MPa.
6.45 83,3 MPa.
6.46 371,6 MPa.
6.48 (*a*) 50,9 MPa. (*b*) 62,4 MPa.
6.49 $q_{solda} = 266$ kN/cm^2, $q_m = 848$ kN/m.
6.51 (*a*) 2.08. (*b*) 2.10.
6.52 (*a*) 2,25. (*b*) 2.12.
6.53 (*a*) $V\text{sen}\theta/\pi r_m t$.
6.54 19,7 mm.
6.57 (*a*) 6,12 MPa. (*b*) 10,02 MPa.
6.59 (*a*) 17,86 MPa. (*b*) 6,67 MPa.
6.61 $3(b^2 - a^2)/[6(a + b) + h]$.
6.62 1,250 *a*.
6.63 0,345 *a*.
6.64 0,714 *a*.
6.67 (*a*) 29,4 mm. (*b*) 104,1 MPa (máximo).
6.68 (*a*) 19,06 mm. (*b*) 59,0 MPa (máximo).
6.69 11,0 mm.
6.70 20,2 mm.
6.71 0,482 in.
6.72 6,14 mm.
6.75 60,2 mm.
6.76 56,1 mm.
6.77 0, 40,0 mm.
6.78 75,0 mm.
6.81 (*a*) $V = 2{,}22$ kN, $M_0 = 4496{,}6$ N · cm. (*b*) 20,5 MPa.

6.82 (*a*) $V = 2{,}22$ kN, $M_0 = 4496{,}6$ N · cm. (*b*) 42,0 MPa.
6.85 $\tau_m = P/at$.
6.86 $\tau_m = 1{,}333\ P/at$.
6.87 (*a*) 144,6 N · m. (*b*) 65,9 MPa.
6.88 (*a*) 144,6 N · m. (*b*) 106,6 MPa.
6.89 411,9 N.
6.91 (*a*) 17,63 MPa. (*b*) 13,01 MPa.
6.92 (*a*) 9,05 MPa. (*b*) 15,51 MPa.
6.94 (*a*) 379 kPa. (*b*) 0.
6.96 9,42 mm.
6.97 (*a*) 23,2 MPa. (*b*) 35,2 MPa.
6.98 (*a*) 10,22 mm. (*b*) 81,1 MPa (máximo)
6.100 32,1 mm.
6.C1 (*a*) $h = 173{,}2$ mm. (*b*) $h = 379$ mm.
6.C2 (*a*) $L = 95{,}3$ cm.; $b = 3{,}18$cm.
(*b*) $L = 178{,}6$ cm.; $b = 2{,}98$ cm.
(*c*) $L = 151{,}89$ cm.; $b = 3{,}55$ cm.
6.C3 *Prob. 6.10:* (*a*) 920 kPa. (*b*) 765 kPa.
6.C4 (*a*) $\tau_{máx} = 14{,}0$ MPa; $\tau_B = 12{,}41$ MPa. (*b*) 1,338 MPa.
6.C5 *Prob. 6.66:* (*a*) 67,8 mm. (*b*) $\tau_B = 6{,}32$ MPa;
$\tau_D = 23{,}2$ MPa; $\tau_{máx} = 29{,}5$ MPa.

CAPÍTULO 7

7.1 $\sigma = -49{,}2$ MPa, $\tau = 2{,}41$ MPa.
7.2 $\sigma = 37{,}9$ MPa, $\tau = 81{,}6$ MPa.
7.3 $\sigma = 14{,}19$ MPa, $\tau = 15{,}19$ MPa.
7.4 $\sigma = -538$ MPa, $\tau = 58{,}3$ MPa.
7.5 (*a*) −37,0°, 53.0°. (*b*) −13,60 MPa, −86,4 MPa.
7.8 (*a*) 18,4°, 108,4°. (*b*) 33,0 MPa, 3,00 MPa.
7.9 (*a*) 8,0°, 98,0°. (*b*) 36,4 MPa, −50,0 MPa.
7.10 (*a*) 14,0°, 104,0°. (*b*) 117,2 MPa, −4.00°.
7.11 (*a*) −31,0°, 59,0°. (*b*) 58,6 MPa, 10,34 MPa.
7.12 (*a*) −26,6°, 63,4°. (*b*) 15,00 MPa, 18,00 MPa.
7.14 (*a*) 62,2 MPa; −89,8 MPa; 26,2 MPa.
(*b*) 36,8 MPa; −64,4 MPa; −62,5 MPa.
7.16 (*a*) −16,55 MPa; 71,1 MPa; 1,034 MPa.
(*b*) 13,45 MPa; 41,7 MPa; 41,9 MPa.
7.17 (*a*) 3,59 MPa. (*b*) −2,07 MPa.
7.18 (*a*) −0,250 MPa. (*b*) −2,43 MPa.
7.20 $\sigma = -32{,}8$ MPa, $\tau = -3{,}22$ MPa.
7.22 16,58 kN.
7.23 73,9 MPa, −9,53 MPa; 41,7 MPa.
7.24 6,45 MPa, −140.0 MPa; 73,3 MPa.
7.25 (*a*) 17,4°, 107.4°; −143,4 MPa, 14,1 MPa.
(*b*) 79,8 MPa.
7.26 (*a*) −17,0°, 73,0°; 1,41 MPa, 15,10 MPa.
(*b*) 8,25 MPa.
7.27 205 MPa.
7.29 (*a*) −2,89 MPa. (*b*) 12,77 MPa, 1,226 MPa.
7.55 24,6°, 114,6°; 145,8 MPa, 54,2 MPa.
7.56 33,7°, 123,7°; 165,5 MPa, −13,79 MPa.
7.57 0, 90,0°; σ_0, $-\sigma_0$
7.58 0, 90,0°; 1.732 σ_0, −1,732 σ_0.
7.61 $-5{,}2° \le \theta \le 132{,}0°$.
7.62 $16{,}5° \le \theta \le 110{,}1°$.
7.63 (*a*) 33,7°, 123,7°. (*b*) 124,1 MPa. (*c*) 44,8 MPa.
7.65 (*b*) $|\tau_{xy}| = \sqrt{\sigma_x\sigma_y - \sigma_{max}\sigma_{min}}$.
7.66 (*a*) 59,3 MPa. (*b*) 74,5 MPa.
7.68 (*a*) 94,3 MPa. (*b*) 726 MPa.
7.69 (*a*) 100,0 MPa. (*b*) 110,0 MPa.
7.70 (*a*) 39,0 MPa. (*b*) 54,0 MPa. (*c*) 42,0 MPa.
7.71 (*a*) 39,0 MPa. (*b*) 45,0 MPa. (*c*) 39,0 MPa.
7.72 (*a*) 127,6 MPa. (*b*) 89,6 MPa. (*c*) 75,8 MPa.
7.74 (*a*) 40,0 MPa. (*b*) 72,0 MPa.
7.75 (*a*) 55,2 MPa. (*b*) 31,0 MPa.
7.76 6,90 MPa; 53,8 MPa.
7.78 −60,0 MPa to 60.0 MPa.
7.80 (*a*) 45,7 MPa. (*b*) 92.9 MPa.
7.81 (*a*) 1,228. (*b*) 1,098. (*c*) escoamento.
7.82 (*a*) 1,083. (*b*) escoamento. (*c*) escoamento.
7.83 (*a*) 1,279. (*b*) 1,091. (*c*) escoamento.
7.84 (*a*) 1,149. (*b*) escoamento. (*c*) escoamento.
7.85 235,3 kN.
7.86 280,2 kN.
7.89 ruptura.
7.90 não ruptura.
7.91 ruptura.
7.92 ruptura.
7.94 $\tau_0 = \pm\ 49.1$ MPa.
7.95 $\tau_0 = \pm\ 50.0$ MPa.
7.96 196,9 N · m.
7.98 2,94 MPa.
7.100 35,3 MPa.
7.101 (*a*) 1,290 MPa. (*b*) 0,853 mm.
7.102 (*a*) 85,4 MPa. (*b*) 1,38 mm.
7.104 13,2 m.
7.105 114,6 MPa, 57,3 MPa.
7.108 103,5 MPa, 51,8 MPa.
7.109 1,676 MPa.
7.110 89,0 MPa, 44,5 MPa.
7.111 12,55 mm.
7.112 39,0 MPa, 13,6 MPa.
7.113 56,8°.
7.116 (*a*) 419 kPa. (*b*) 558 kPa.
7.117 (*a*) 33,2 MPa. (*b*) 9,55 MPa.
7.118 2,17 MPa.
7.119 −27,0° até 27,0° e 63,0° até 117,0°.
7.122 (*a*) 21,7 MPa. (*b*) 13,7 MPa.
7.123 (*a*) 10,2 MPa. (*b*) 21,8 MPa.
7.124 77,4 MPa, 38,7 MPa.
7.125 73,1 MPa, 51,9 MPa.
7.126 (*a*) 38,9 MPa. (*b*) 1,94 MPa.
7.127 (*a*) 15,7 MPa. (*b*) 1,57 MPa.
7.128 93,6 μ, −13.58 μ; 641 μ.
7.129 115,0 μ, 285 μ; −5,72 μ.
7.131 36,7 μ, 283 μ; 227 μ.
7.132 93,6 μ, −13,6 μ; 641 μ.
7.133 115,0 μ, 285 μ; −5.7 μ.
7.135 36,7 μ, 283 μ; 227 μ.
7.136 (*a*) 64,4°, −26,6°; 750 μ, −150,0 μ, −300 μ.
(*b*) 900 μ. (*c*) 1050 μ.
7.138 (*a*) −30,1°, 59,9°; −298 μ, −702 μ, 500 μ.
(*b*) 500 μ. (*c*) 1202 μ.
7.139 (*a*) −33,7°, 56.3°; 100 μ, −420 μ, 160 μ.
(*b*) 520 μ. (*c*) 580 μ.
7.140 (*a*) 31,0°, 121,0°; 513 μ, 87,5 μ, 0.
(*b*) 425 μ.
(*c*) 513 μ.
7.142 (*a*) 97,8°, 7.8°; 243 μ, 56,6 μ, 0. (*b*) 186,8 μ.
(*c*) 243 μ.
7.143 (*a*) 11,3°, 101,3°; 310 μ, 50 μ, 0. (*b*) 260 μ.
(*c*) 310 μ.
7.146 (*a*) $-\ 300 \times 10^{-6}$ mm/mm.

(*b*) 435×10^{-6} mm/mm, -315×10^{-6} mm/mm; 750×10^{-6} mm/mm.

7.147 (*a*) 30,0°, 120.0°; 560×10^{-6} mm/mm, -140×10^{-6} mm/mm. (*b*) 700×10^{-6} mm/mm.

7.150 309,6 kN, 134,8 kN.

7.151 154,8 kN, 170,8 kN.

7.154 1,421 MPa.

7.155 1,761 MPa.

7.156 (*a*) −22,5°, 67.5°; 426 μ, −952 μ, −224 μ. (*b*) O mesmo que em *a*.

7.157 (*a*) 57,9°, −32,1°; −29,8 MPa, −70,9 MPa. (*b*) O mesmo que em *a*.

7.158 (*a*) −0,300 MPa. (*b*) −2,92 MPa.

7.160 35,4 MPa, −35,4 MPa; 35,4 MPa.

7.161 12,18 MPa, −48,7 MPa; 30,5 MPa.

7.162 $\sigma_0 (1 + \cos\theta)$, $\sigma_0 (1 - \cos\theta)$.

7.164 ±413,7 MPa.

7.166 (*a*) 34,3 MPa. (*b*) 17,2 MPa.

7.168 2,70 MPa (tração), 21,6 MPa (compressão).

7.169 415×10^{-6} mm/mm.

7.C1 *Prob. 7.13:* (*a*) 24,0 MPa., −104,0 MPa., −1,50 MPa. (*b*) −19,51 MPa, −60,5 MPa, −60,7 MPa.
Prob. 7.15: (*a*) −56,2 MPa., 86,2 MPa., −38,2 MPa. (*b*) −45,2 MPa, 75,2 MPa, 53,8 MPa.

7.C3 *Prob. 7.165:* (*a*) 1,286. (*b*) 1,018. (*c*) escoamento.

7.C4 *Prob. 7.93:* Ruptura ocorre com $\tau_0 = 25{,}3$ MPa.

7.C7 *Prob. 7.141:* $\theta_p = 37{,}9°$; $\epsilon_a = -57{,}5\mu$; $\epsilon_b = -383\mu$; $\epsilon_c = 0$.
$\gamma_{máx} = 325$ micro radianos (no plano);
$\gamma_{máx} = 383$ micro radianos

7.C8 *Prob. 7.144:* $\epsilon_x = 253\mu$; $\epsilon_y = 307$; $\gamma_{xy} = -893$. $\epsilon_a = 727\mu$; $\epsilon_b = -167.2$; $\gamma_{máx} = -894$.
Prob. 7.145: $\epsilon_x = 725\mu$; $\epsilon_y = -75.0$; $\gamma_{xy} = 173.2$. $\epsilon_a = 734\mu$; $\epsilon_b = -84.3$; $\gamma_{máx} = 819$.

CAPÍTULO 8

8.1 (*a*) 73,7 MPa. (*b*) 132,2 MPa. (*c*) não admissível.

8.2 (*a*) 73,7 MPa. (*b*) 90,2 MPa. (*c*) admissível.

8.3 (*a*) 96,2 MPa. (*b*) 657,8 MPa. (*c*) admissível.

8.4 (*a*) 93,4 MPa. (*b*) 96,6 MPa. (*c*) admissível.

8.7 (*a*) W690 × 125. (*b*) 128,2 MPa; 47,3 MPa; 124,0 MPa.

8.8 (*a*) W360 × 32.9. (*b*) 146,1 MPa; 27,6 MPa; 118,4 MPa.

8.9 (*a*) 134,3 MPa. (*b*) 129,5 MPa.

8.10 (*a*) 155,8 MPa. (*b*) 143,8 MPa.

8.12 (*a*) 130,8 MPa. (*b*) 137,3 MPa.

8.14 (*a*) 153,8 MPa. (*b*) 142,0 MPa no centro do vão, 112,9 MPa em *C* e *D*.

8.15 21,7 mm para *BC*, 33.4 mm para *CD*.

8.16 44,4 MPa em *BC*, 48.0 MPa em *CD*.

8.19 40,1 mm.

8.20 43,1 mm.

8.25 46,5 mm.

8.26 45,9 mm.

8.27 37,0 mm.

8.28 43,9 mm.

8.29 46,3 mm.

8.30 45,5 mm.

8.31 2,08 MPa e 0 em *a*; −2,72 MPa e 0 em *b*; −3,20 MPa e 0,500 MPa em *c*.

8.32 (*a*) 76,3 MPa, 0. (*b*) −3,7 MPa, 11,1 MPa. (*c*) −83,6 MPa, 0.

8.33 (*a*) −85,1 MPa, 0. (b) −7,4 MPa, 5,6 MPa. (*c*) 70,3 MPa, 0.

8.35 (*a*) −37,9 MPa, 14.06 MPa. (*b*) −131,6 MPa, 0.

8.37 −146,9 MPa, 43,0 MPa.

8.38 (*a*) 79,6 MPa, 7,96 MPa. (*b*) 0, 13,26 MPa.

8.40 (*a*) 20,4 MPa, 14,34 MPa. (*b*) −21,5 MPa, 19,98 MPa.

8.41 (*a*) 30,0 MPa, −30,0 MPa, 30,0 MPa. (*b*) 7,02 MPa, −96.0 MPa, 51,5 MPa.

8.42 (*a*) 26,1 MPa, −58.6 MPa. (*b*) 42,4 MPa.

8.44 55,0 MPa, −55,0 MPa, 55.0 MPa.

8.46 (*a*) 23,9 MPa, 7,18 MPa. (*b*) 53,8 MPa, 5,38 MPa. (*c*) 83,8 MPa, 0.

8.47 (*a*) 18,39 MPa, 0,391 MPa. (*b*) 21,3 MPa, 0,293 MPa. (*c*) 24,1 MPa, 0.

8.48 (*a*) −7,98 MPa, 0,391 MPa. (*b*) −5,11 MPa, 0,293 MPa. (*c*) −2.25 MPa, 0.

8.49 25,2 MPa, −0.87 MPa, 13,06 MPa.

8.50 34,6 MPa, −10,18 MPa; 22,4 MPa.

8.52 12,40 MPa, −41,4 kPa; 6,22 MPa.

8.53 86,5 MPa e 0 em *a*; 57,0 MPa e 9,47 MPa em *b*.

8.55 25,4 MPa, −0,1 MPa; 12,7 MPa.

8.56 1,7 MPa, −45,4 MPa; 23,6 MPa.

8.57 29,8 MPa, −0,09 MPa; 14,92 MPa.

8.60 (*a*) 51,4 kN. (*b*) 39,7 kN.

8.62 (*a*) 88,9 MPa, −2,21 MPa; 45,6 MPa. (*b*) 44,3 MPa, −44,3 MPa; 44,3 MPa.

8.64 3,3 MPa, −308,2 MPa; 155,8 MPa.

8.65 (*a*) W460 × 52. (*b*) 151,0 MPa; 21,1 MPa; 144,8 MPa em *C*, 136,6 MPa em *B*.

8.67 41,3 mm.

8.69 −27,3 MPa e 6,5 MPa.

8.71 $P(2R + 4r/3)/\pi r^3$.

8.72 65,5 MPa, −21,8 MPa; 43,8 MPa.

8.74 30,1 MPa, −0,62 MPa, 15,37 MPa.

8.75 −113,1 MPa e 0 em *a*; −107,8 MPa e 0.047 ksi em *b*; −690 kPa e 8,66 MPa em *c*.

8.76 (*a*) 7,50 MPa. (*b*) 11,25 MPa. (*c*) 56,3°, 13,52 MPa.

8.C5 *Prob. 8.45:* $\sigma = 41{,}4$ MPa; $\tau = 5{,}38$ MPa.

CAPÍTULO 9

9.1 (*a*) $y = M_0x^2/2\,EI$. (*b*) $M_0L^2/2\,EI\uparrow$. (*c*) $M_0L/EI\,\angle$.

9.2 (*a*) $y = -Px^2(3L - x)/6\,EI$. (*b*) $PL^3/3\,EI\downarrow$. (*c*) $PL^2/2\,EI\,\curvearrowright$.

9.3 (*a*) $y = -w(x^4 - 4L^3x + 3L^4)/24\,EI$. (*b*) $wL^4/8\,EI\downarrow$. (*c*) $wL^3/6\,EI\,\angle$.

9.4 (*a*) $y = -w_0(2x^5 - 5Lx^4 + 10L^4x - 7L^5)/120\,EIL$. (*b*) $7w_0L^4/120\,EI\uparrow$. (*c*) $w_0L^3/12\,EI\,\curvearrowright$.

9.6 (*a*) $-w(x^4 - 4Lx^3 + 4L^2/x^2)/24\,EI$. (*b*) $wL^4/24\,EI\downarrow$. (*c*) 0.

9.7 (*a*) $y = w(12Lx^3 - 5x^4 - 6L^2x^2 - L^3x)/120\,EI$. (*b*) $13wL^4/1920\,EI\downarrow$. (*c*) $wL^3/120\,EI\,\curvearrowright$.

9.9 (*a*) $6{,}55 \times 10^{-3}$ rad $\curvearrowright$. (*b*) 5,7 mm. ↓.

9.10 (*a*) $2{,}77 \times 10^{-3}$ rad $\curvearrowright$. (*b*) 1,156 mm ↓.

9.11 (*a*) $0{,}00652\,wL^4/EI\downarrow$ em $x = 0{,}519\,L$. (*b*) 7,61 mm ↓.

9.12 (*a*) $0{,}01604\,M_0L^2/EI$ em $x = 0{,}211\,L$. (*b*) 6,55 m.

9.13 10,1 mm. ↓.

9.16 (*a*) $y = P(3ax^2 - 3aLx + a^3)/6\,EI$.
(*b*) 1,976 mm ↓.

9.17 (*a*) $y = -w_0(5L^2x^4 - 4Lx^5 + x^6 - 5L^4x^2)/24\,EIL^2$.
(*b*) $w_0L^4/40\,EI$ ↓.

9.18 (*a*) $y = w_0(x^6 - 15L^2x^4 + 25L^3x^3 - 11L^5x)/360\,EIL^2$.
(*b*) $11w_0L^3/360\,EI$ ↘. (*c*) $0{,}00916\,w_0L^4/EI$ ↓.

9.19 $3wL/8$ ↑.

9.20 $3M_0/2L$ ↑.

9.23 14,44 kN ↑.

9.24 13,5 kN ↑.

9.25 $R_B = 5P/16$ ↑; $M_A = -3PL/16$, $M_c = 5PL/32$, $M_B = 0$.

9.26 $R_A = 41wL/128$ ↑; $M_A = 0$, $M_m = 0.0513wL^2$, $M_c = 0{,}0351wL^2$, $M_B = -7wL^2/128$.

9.27 $R_A = 21w_0L/160$ ↑; 0 em *A*, $0{,}0317w_0L^2$ (posição do máximo), $0{,}0240w_0L^2$ em *C*, $-0{,}0354w_0L^2$ em *B*.

9.28 $R_B = 9M_0/8L$; $M_0/8$ em *A*, $-7M_0/16$ a esquerda de *C*, $9M_0/16$ a direita de *C*, 0 em *B*.

9.29 $7wL/128$ ↑, $13wL^4/6144\,EI$ ↓.

9.32 $5M_0/6L$ ↓, $7M_0L^2/486\,EI$ ↑.

9.33 $R_A = P/2$ ↑, $M_A = PL/8$ ↰; $-PL/8$ em *A* e *C*, $PL/8$ em *B*.

9.34 $R_A = wL/2$ ↑, $M_A = wL^2/12$ ↰;
$M = w(6xL - 6x^2 - L^2)/12$.

9.35 (*a*) $y = P[bx^3 - L\langle x - a\rangle^3 - b(L^2 - b^2)x]/6\,EIL$. (*b*) $Pb(L^2 - b^2)/6\,EIL$ ↘. (*c*) $Pa^2b^2/3\,EIL$ ↓.

9.36 (*a*) $y = M_0[x^3 - 3L\langle x - a\rangle^2 + (3b^2 - L^2)x]/6\,EIL$.
(*b*) $M_0(3b^2 - L^2)/6\,EIL$ ↘. (*c*) $M_0ab(b - a)/3\,EIL$ ↑.

9.37 (*a*) $5Pa^3/2\,EI$ ↓. (*b*) $49\,Pa^3/6\,EI$ ↓. (*c*) $15\,Pa^3/EI$ ↓.

9.39 (*a*) $Pa^2/12\,EI$ ∠. (*b*) $Pa^3/12\,EI$ ↑. (*c*) $3\,Pa^3/4\,EI$ ↓.

9.41 (*a*) $y = w_0[-5L^3x^2/48 + L^2x^3/24 - \langle x - L/2\rangle^5/60]/EIL$.
(*b*) $w_0L^4/48\,EI$ ↓. (*c*) $121w_0L^4/1920\,EI$ ↓.

9.42 (*a*) $y = w[Lx^3/27 - \langle x - L/3\rangle^4/24 - 7L^3x/243]/EI$.
(*b*) $7wL^3/243\,EI$ ↘. (*c*) $2wL^4/243\,EI$ ↓.

9.44 (*a*) $w[ax^3/6 - x^4/24 + \langle x - a\rangle^4/24 - \langle x - 3a\rangle^4/24 - 5a^3x/6]/EI$.
(*b*) $23wa^4/24\,EI$ ↓.

9.45 (*a*) $14{,}00 \times 10^{-3}$ rad ↘. (*b*) 8,64 mm. ↓.

9.47 (*a*) $0{,}873 \times 10^{-3}$ rad ↘. (*b*) 1,641 mm ↓.

9.48 (*a*) $5{,}46 \times 10^{-3}$ rad ↘. (*b*) 3,09 mm ↓.

9.49 (*a*) $5P/16$ ↑. (*b*) $7PL^3/168\,EI$ ↓.

9.50 (*a*) $9M_0/8L$ ↑. (*b*) $M_0L^2/128\,EI$ ↓.

9.51 (*a*) $2P/3$ ↑. (*b*) $5PL^3/486\,EI$ ↓.

9.53 (*a*) 11,54 kN ↑. (*b*) 4,18 mm ↓.

9.54 (*a*) 33,3 kN ↑. (*b*) 3,19 mm ↓.

9.56 (*a*) 32,8 kN ↑. (*b*)1,34 mm. ↓.

9.57 (*a*) $3wL/32$ ↑, $5wL^2/192$ ↰. (*b*) $wL^4/768\,EI$ ↓.

9.58 (*a*) $20P/27$ ↑, $4PL/27$ ↰. (*b*) $5PL^3/1296\,EI$ ↓.

9.59 (*a*) 8,66 mm. ↓ e 1.02 m a partir da extremidade esquerda.

9.60 3,86 mm. ↓ e 671 mm. a partir da extremidade esquerda.

9.61 1,648 mm ↓ e 2.86 m a partir da extremidade esquerda.

9.62 3,10 mm ↓ e 0.942 m a partir da extremidade esquerda.

9.65 (*a*) $5PL^3/162\,EI$ ↓. (*b*) $PL^2/9\,EI$ ↘.

9.66 (*a*) $Pa^3(L - a)/6\,EIL$ ↑. (*b*) $Pa^2(3L - a)/6\,EIL$ ∠.

9.67 (*a*) $M_0L^2/8\,EI$ ↑. (*b*) $M_0L/2\,EI$ ∠.

9.68 (*a*) $wL^4/384\,EI$ ↓. (*b*) 0.

9.71 $13wa^3/6\,EI$ ↘; $29wa^4/24\,EI$ ↓.

9.72 $wL^3/48\,EI$ ↘; $wL^4/384\,EI$ ↓.

9.73 $6{,}30 \times 10^{-3}$ rad ↘; 5,53 mm ↓.

9.75 $12{,}55 \times 10^{-3}$ rad ↘; 9,24 mm. ↓.

9.76 $12{,}08 \times 10^{-3}$ rad ↘; 6,10 mm. ↓.

9.77 (*a*) $0{,}601 \times 10^{-3}$ rad ↘. (*b*) 3,67 mm ↓.

9.79 (*a*) $R_A = 3M_0(L^2 - a^2)/2L^3$ ↑; $M_A = 0$.
(*b*) $R_B = 3M_0(L^2 - a^2)/2L^3$ ↓; $M_B = M_0(L^2 - 3a^2)/2L^2$ ↰.

9.80 (*a*) $R_A = 7wL/128$ ↑, $M_A = 0$.
(*b*) $R_B = 57wL/128$ ↑; $M_B = 9wL^2/128$ ↲.

9.81 $R_A = 3P/8$ ↑, $R_C = 7P/8$ ↑, $R_D = P/4$ ↓.

9.83 $R_B = 3M_0/2L$ ↓; $M_B = M_0/4$ ↰.

9.85 (*a*) 5,94 mm ↓. (*b*) 6,75 mm ↓.

9.86 (*a*) 5,61 mm. ↓. (*b*) 9,35 mm. ↓.

9.87 (*a*) $5{,}06 \times 10^{-3}$ rad ↘. (*b*) 1,21 mm. ↓.

9.88 121,5 N/m.

9.89 (*a*) $R_A = 10{,}86$ kN ↑; $M_A = 1{,}942$ kN · m ↰.
(*b*) $R_D = 1{,}144$ kN ↑; $M_D = 0{,}286$ kN · m ↲.

9.92 43,9 kN.

9.93 7,06 mm. ↓.

9.94 9,31 mm ↓.

9.95 (*a*) M_0L/EI ↘. (*b*) $M_0L^2/2\,EI$ ↑.

9.96 (*a*) $PL^2/2\,EI$ ∠. (*b*) $PL^3/3\,EI$ ↓.

9.97 (*a*) $wL^3/6\,EI$ ∠. (*b*) $wL^4/8\,EI$ ↓.

9.100 (*a*) $3Pa^2/2\,EI$ ↘, $11Pa^3/6\,EI$ ↓.
(*b*) Pa^2/EI ↘, $Pa^3/2\,EI$ ↓.

9.101 (*a*) $16{,}56 \times 10^{-3}$ rad ↘. (*b*) 9,63 mm. ↓.

9.102 (*a*) $2{,}55 \times 10^{-3}$ rad ∠. (*b*) 6,25 mm ↓.

9.103 (*a*) $4{,}98 \times 10^{-3}$ rad ∠; 3,99 mm. ↓.
(*b*) $4{,}59 = 10^{-3}$ rad ∠; 2,14 mm. ↓.

9.104 (*a*) $5{,}22 = 10^{-3}$ rad ∠. (*b*) 10,88 mm ↓.

9.106 (*a*) $11PL^2/24\,EI$ ↘. (*b*) $11PL^3/36\,EI$ ↓.

9.107 (*a*) $6{,}10 \times 10^{-3}$ rad ∠. (*b*) 6,03 mm ↓.

9.109 (*a*) $Pa(L - a)/2\,EI$ ↘. (*b*) $Pa(3L^2 - 4a^2)/24\,EI$ ↓.

9.110 (*a*) $PL^2/16\,EI$ ↘. (*b*) $PL^3/48\,EI$ ↓.

9.111 (*a*) $5PL^2/32\,EI$ ↘. (*b*) $19PL^3/384\,EI$ ↓.

9.112 (*a*) $M_0(L - 2a)/2\,EI$ ↘. (*b*) $M_0(L^2 - 4a^2)/8\,EI$ ↓.

9.114 (*a*) $wa^2(3L - 2a)/12\,EI$ ↘. (*b*) $wa^2(3L^2 - 2a^2)/48\,EI$ ↓.

9.115 (*a*) $5Pa^2/8\,EI$ ↘. (*b*) $3Pa^3/4\,EI$ ↓.

9.118 (*a*) $4{,}72 \times 10^{-3}$ rad ↘. (*b*) 5,85 mm ↓.

9.119 (*a*) $4{,}50 \times 10^{-3}$ rad ↘. (*b*) 8,26 mm ↓.

9.121 (*a*) 5.17×10^{-3} rad ↘. (*b*) 21,0 mm ↓.

9.122 3,84 kN/m.

9.123 0,211 *L*.

9.124 0,223 *L*.

9.125 (*a*) $3M_0/L^2/64\,EI$ ↓. (*b*) $5M_0L/32\,EI$ ↘.

9.126 (*a*) $4PL^3/243\,EI$ ↓. (*b*) $4PL^2/81\,EI$ ↘.

9.127 (*a*) $5wL^4/768\,EI$ ↓. (*b*) $3wL^3/128\,EI$ ↘.

9.129 (*a*) $8{,}70 \times 10^{-3}$ rad ↘. (*b*) 15,03 mm ↓.

9.130 (*a*) $5{,}31 \times 10^{-3}$ rad ↘. (*b*) 5,18 mm. ↓.

9.132 (*a*) $7{,}48 \times 10^{-3}$ rad ↘. (*b*) 5,35 mm ↓.

9.134 (*a*) $Pa(2L + 3a)/6\,EI$ ↘. (*b*) $Pa^2(L + a)/3\,EI$ ↓.

9.135 (*a*) $5{,}33 \times 10^{-3}$ rad ∠. (*b*) 0,36 mm. ↓.

9.136 (*a*) $3{,}61 \times 10^{-3}$ rad ↘. (*b*) 0,960 mm ↑.

9.137 (*a*) $2{,}34 \times 10^{-3}$ rad ↘. (*b*) 4,48 mm. ↓.

9.139 (*a*) $9wL^3/256\,EI$ ↘. (*b*) $7wL^3/256\,EI$ ∠.
(*c*) $5wL^4/512\,EI$ ↓.

9.140 (*a*) $17PL^3/972\,EI$ ↓. (*b*) $19PL^3/972\,EI$ ↓.

9.141 $0{,}01792PL^3/EI$ ↓ e 0,544 *L* a partir da extremidade esquerda.

9.144 5,38 mm. ↓ e 1,57 m a partir da extremidade esquerda.

9.145 2,66 mm.

9.146 46,8 mm.

9.147 $9M_0/8L$ ↑.

9.148 $5P/16$ ↑.

9.150 $7wL/128$ ↑.

9.152 $3P/32$ ↓ em *A*, $13P/32$ ↑ em *B*, $11P/16$ ↑ em *C*.

9.153 (*a*) 6,95 mm ↑. (*b*) 46,3 kN ↑.

9.154 $R_B = 45{,}3$ kN ↑; $-119{,}2$ kN · m em *A*, 62,8 kN · m em *D*, 62,1 kN · m em *E*, 0 em *B*.

9.155 $48\,EI/7L^3$.

9.156 $144\,EI/L^3$.

9.157 (*a*) $y = -w_0(x^5 - 5L^4x + 4L^5)/120\,EIL$.
(*b*) $w_0L^4/30\,EI \downarrow$. (*c*) $w_0L^3/24\,EI \measuredangle$.
9.159 (*a*) $y = w_0(x^6 - 3Lx^5 + 5L^3x^3 - 3L^5x)/90\,EIL^2$.
(*b*) $w_0L^3/30\,EI \searrow$. (*c*) $61w_0L^4/5760\,EI \downarrow$.
9.160 $R_A = Pb^2(3a + b)/L^3 \uparrow$; $M_A = Pab^2/L^2 \curvearrowleft$; $-Pab^2/L^2$ em A, $2Pa^2b^2/L^3$ em D, $-Pa^2b/L^2$ em B.
9.161 (*a*) $9{,}51 \times 10^{-3}$ rad $\searrow$. (*b*) 5,80 mm $\downarrow$.
9.163 5,33 mm. $\downarrow$.
9.165 (*a*) $5{,}84 \times 10^{-3}$ rad $\searrow$. (*b*) 7,62 mm. $\downarrow$.
9.167 $0{,}00677\,PL^3/EI \downarrow$ a 0.433 L a contra da extremidade esquerda.
9.168 $R_A = 65{,}2$ kN $\uparrow$; 0 em A, 58,7 kN · m em D. 55,8 kN · m em E, −82,8 kN · m em B.
9.C1 *Prob. 9.74:* 5.56×10^{-3} rad $\searrow$; 2.50 mm $\downarrow$.
9.C2 *a = 1,83 m:* (*a*) $3{,}14 \times 10^{-3}$ rad $\searrow$, 7,42 mm. $\downarrow$; (*b*) 10,08 mm. $\downarrow$ a 3,44 m a direita de A.
9.C3 *x = 1,6 m:* (*a*) $7{,}90 \times 10^{-3}$ rad $\searrow$, 8,16 mm $\downarrow$;
(*b*) $6{,}05 \times 10^{-3}$ rad $\searrow$, 5,79 mm $\downarrow$;
(*c*) $1{,}021 \times 10^{-3}$ rad $\searrow$, 0,314 mm $\downarrow$.
9.C5 (*a*) *a = 0,91 m:* $1{,}586 \times 10^{-3}$ rad $\searrow$; 3,48 mm. $\downarrow$;
(*b*) *a = 1,0 m:* $0{,}293 \times 10^{-3}$ rad $\searrow$, 0,479 mm $\downarrow$.
9.C7 *x = 2,5 m:* 5,31 mm $\downarrow$; *x* × *5,0 m:* 12,28 mm $\downarrow$.

CAPÍTULO 10

10.1 K/L.
10.2 kL.
10.3 $2kL/9$.
10.4 K/L.
10.7 $k >$ 4,91 kN/ m.
10.8 $8K/L$.
10.9 81,2 N.
10.11 $d = 21{,}56$ mm.; aço $P_{cr} = 2878$ N, alumínio $P_{cr} = 8327$ N.
10.12 (*a*) 2878 N. (*b*) 16.54 mm. (*c*) 58,8%
10.13 (*a*) 6,25%. (*b*) 17,17 kN.
10.15 2,81.
10.16 66,8 kN.
10.17 111,6 kN.
10.20 4,00 kN.
10.21 5,37 kN.
10.24 (*a*) $L_{BC} = 1{,}28$ m, $L_{CD} = 0{,}32$ m. (*b*) 18,73 kN.
10.25 657 mm.
10.26 (*a*) $b/d = 0{,}500$. (*b*) $d = 28{,}3$ m, $b = 14{,}15$ mm.
10.27 (1) 2,64 kN, (2) 0,661 kN, (3) 10,57 kN, (4) 5,39 kN, (5) 2,64 kN.
10.28 (*a*) 2,29.
(*b*) (2) 44,91 mm.; (3) 31,75 mm.; (4) 26,57 mm.
10.29 (*a*) 10,41 mm. (*b*) 99,5 MPa.
10.30 (*a*) 4,84 mm. (*b*) 135,7 MPa.
10.32 (*a*) 1,013 mm. (*b*) 137,1 MPa.
10.33 (*a*) 1,552 mm. (*b*) 47,8 MPa.
10.35 (*a*) 347,8 kN. (*b*) 189,6 MPa.
10.36 (*a*) 235,3 kN. (*b*) 140,7 MPa.
10.39 (*a*) 368 kN. (*b*) 103,8 MPa.
10.40 (*a*) 223 kN. (*b*) 62,8 MPa.
10.41 37,2°C.
10.42 5,81 mm.
10.43 (*a*) 142,8 kN. (*b*) 175,3 kN.
10.45 (*a*) 195,4 kN. (*b*) 0,596.
10.46 (*a*) 247 kN. (*b*) 0,437.
10.47 1,337 m.
10.48 2,92 m.
10.50 (*a*) 8,31 m. (*b*) 2,54 m.
10.51 W200 × 26,6.
10.52 W200 × 35,9.
10.53 54,0 mm.
10.54 66,7 mm.
10.57 (*a*) 114,7 kN. (*b*) 208 kN.
10.58 426,1 kN.
10.59 (*a*) 220 kN. (*b*) 839 kN.
10.61 35,9 kN.
10.63 (*a*) 26,4 kN. (*b*) 32,4 kN.
10.64 340,7 kN.
10.65 1600 kN.
10.68 773,1 kN.
10.69 107,7 kN.
10.70 173,0 kN.
10.71 165,9 mm.
10.73 123,1 mm.
10.74 22,45 mm.
10.75 44,9 mm.
10.78 W250 × 67.
10.79 W360 × 122.
10.80 W200 × 46.1.
10.81 L89 × 64 × 12,7 mm.
10.82 L89 × 64 × 12,7 mm.
10.84 L89 × 64 × 9,5 mm.
10.85 249,5 kN.
10.86 (*a*) 433 kN, 321 kN. (*b*) 896 kN, 664 kN.
10.87 7,94 mm.
10.88 W310 × 74.
10.89 (*a*) 320 kN. (*b*) 273 kN.
10.91 (*a*) 81,2 kN. (*b*) 63.2 kN.
10.92 (*a*) 93,9 kN. (*b*) 80.1 kN.
10.93 35,3 kN.
10.95 5873 mm.
10.97 1,016 m.
10.98 1,159 m.
10.99 (*a*) 11,89 mm. (*b*) 6,56 mm.
10.100 7,78 mm.
10.102 (*a*) 10,82 mm. (*b*) 32,4 mm.
10.103 139,7 mm.
10.105 70,0 mm.
10.106 80,4 mm.
10.107 48,1 mm.
10.109 83,4 mm.
10.110 87,2 mm.
10.111 12 mm.
10.113 W360 × 101.
10.114 W360 × 101.
10.115 W200 × 59.
10.117 1,02 kN.
10.119 (*a*) 94,8 kN. (*b*) 449 kN.
10.120 2,85.
10.121 18,73 kN.
10.123 (*a*) 2,73 mm. (*b*) 100,8 MPa.
10.124 (*a*) 1532 kN. (*b*) 638 kN.
10.126 W250 × 80.
10.128 W200 × 59.
10.C1 *r = 8 mm:* 9.07 kN. *r = 16 mm:* 70.4 kN.
10.C2 *b = 25,4 mm.:* 17,12 kN. *b = 34,93 mm.:* 27,0 kN.
10.C3 *h = 5,0 m:* 9819 kg. *h = 7,0 m:* 13,255 kg.
10.C4 *P = 155,7 kN:* (*a*) 2,18 mm.; (*b*) 32,3 MPa.

P = 244,6 kN: (*a*) 3,71 mm.; (*b*) 52,7 MPa.

10.C5 *Prob. 10.60:* (*a*) 385,6 kN. (*b*) 392,3 kN.

10.C6 *Prob. 10.113:* $P_{adm} = 1257$ kN.
Prob. 10.114: $P_{adm} = 622{,}3$ kN.

CAPÍTULO 11

11.1 (*a*) 21,6 kJ/m^3. (*b*) 336 kJ/m^3. (*c*) 163,0 kJ/m^3.

11.2 (*a*) 297,1 m · kN/m^3. (*b*) 501,9 m · kN/m^3.
(*c*) 1188.6 m · kN/m^3.

11.4 (*a*) 177,9 kJ/m^3. (*b*) 712 kJ/m^3. (*c*) 160,3 kJ/m^3.

11.5 (*a*) 400,0 m · kN/m^3. (*b*) 137.9 MN · m/m^3.

11.6 (*a*) 1296 kJ/m^3. (*b*) 90 MJ/m^3.

11.7 (*a*) 150,0 kJ/m^3. (*b*) 63 MJ/m^3.

11.9 (*a*) 19,9 m · N. (*b*) 80,8 m · kN/m^3, 38,9 m · kN/m^3.

11.10 (*a*) 12,18 J. (*b*) 15,83 kJ/m^3, 38,6 kJ/m^3.

11.11 (*a*) 29,8 m · N. (*b*) 9,50 m · kN/m^3, 60,9 m · kN/m^3.

11.13 (*a*) 44,0 J. (*b*) 31,4 J.

11.15 11,60 m · N.

11.17 1,398 P^2l/EA.

11.18 3,81 P^2l/EA.

11.20 2,37 P^2l/EA.

11.21 1015 J.

11.23 $w^2L^5/40\ EI$.

11.24 $M_0^2(a^3 + b^3)/6\ EIL^2$

11.26 $P^2a^2\ (a + L)/6\ EI$.

11.29 1048 J.

11.30 101 m · N.

11.31 662 J.

11.33 276.8 m · kN.

11.34 14,70 J.

11.37 −2,65 MPa até 122,6 MPa.

11.38 (*a*) 2,33. (*b*) 2,02.

11.40 $2\ M_0^2 L\ (1 + 3Ed^2/10GL^2)/Ebd^3$

11.41 $(Q^2/4\pi\ GL)\ \ln\ (R_2/R_1)$.

11.42 (*a*) 79,8 kN. (*b*) 254 MPa. (*c*) 1,523 mm.

11.44 292,1 mm.

11.45 199,9 mm.

11.46 4,76 kg.

11.48 2,59 m/s.

11.50 (*a*) 21,0 kN. (*b*) 171,7 MPa. (*c*) 8,58 mm.

11.51 (*a*) 7,67 kN. (*b*) 312 MPa. (*c*) 23,5 mm.

11.52 (*a*) 2,70 mm. (*b*) 138,6 MPa.

11.53 (*a*) 15,63 mm. (*b*) 83,8 N · m. (*c*) 208 MPa.

11.54 (*a*) 23,6 mm. (*b*) 64,4 N · m. (*c*) 157,6 MPa.

11.56 (*b*) 7,12

11.57 (*b*) erro relativo 0,152, $y'_m/2h = 0{,}166$.

11.58 $Pa^2b^2/3\ EIL\downarrow$.

11.59 $Pa^2(a + L)/3\ EI\downarrow$.

11.61 $M_0\ (L + 3a)/3\ EI\measuredangle$.

11.62 $3PL^3/16\ EI\downarrow$.

11.63 $3Pa^3/4\ EI\downarrow$.

11.64 $5M_0L/16\ EI\measuredangle$.

11.67 386 mm.

11.69 5,28°.

11.71 2,375 $Pl/EA\rightarrow$.

11.73 1,14 mm. ↓.

11.74 9,30 mm. ↓.

11.75 3,19 mm ↓.

11.77 (*a*) e (*b*) $P^2L^3/96\ EI - PM_0L^2/16\ EI + M_0^2L/6\ EI$.

11.79 (*a*) e (*b*) $P^2L^3/48\ EI + PM_0L^2/8\ EI + M_0^2L/2\ EI$.

11.81 (*a*) e (*b*) $P^2L^3/48\ EI$.

11.82 (*a*) e (*b*) $7P^2L^3/24\ EI$.

11.83 $5PL^3/48\ EI\downarrow$.

11.84 $0{,}0443wL^4/EI\downarrow$.

11.85 $3PL^2/8\ EI\measuredangle$.

11.87 $M_0L/6\ EI\measuredangle$.

11.88 $PaL^2/16\ EI\uparrow$.

11.89 $wL^4/128\ EI\uparrow$.

11.91 $wL^3/192\ EI\measuredangle$.

11.92 25,1 mm. ↓.

11.94 7,25 mm ↓.

11.95 5,08 mm ↓.

11.96 $0{,}698 \times 10^{-3}$ rad $\measuredangle$.

11.98 $2{,}07 \times 10^{-3}$ rad $\measuredangle$.

11.99 3,19 mm ↓.

11.101 5,92 mm. ↓.

11.102 3,82 mm. →.

11.103 0,1459 mm ↓.

11.105 (*a*) $PR^3/2\ EI\rightarrow$. (*b*) $\pi PR^3/4\ EI\downarrow$.

11.106 $\pi PR^3/2\ EI\downarrow$.

11.107 (*a*) $2Pl^3/3\ EI\rightarrow$. (*b*) $Pl^2/6\ EI\measuredangle$.

11.109 (*a*) $Pl^3/EI\uparrow$. (*b*) $3Pl^2/2\ EI\measuredangle$.

11.111 $5P/16\uparrow$; $-3PL/16$ em A, 0 em B, $5PL/32$ em C.

11.112 $3M_0/2L\uparrow$; $M_0/2$ em A, $-M_0$ em B.

11.114 $7wL/128\uparrow$; $7wLx/128 - w\langle x - L/2\rangle^2/2$.

11.116 $wL/6\downarrow$ em A, $3wL/4\uparrow$ em B, $5wL/12\uparrow$ em C.

11.117 $7\ P/8$.

11.118 0,652 P.

11.119 $P/(1 + 2\cos^3\phi)$.

11.121 $2\ P/3$.

11.122 $7\ P/12$.

11.123 2,09.

11.125 12,70 J.

11.127 40,57 N.

11.129 11,57 mm ↓.

11.131 1,030 mm →.

11.134 $PL^2/6\ EI\nwarrow$.

11.C2 (*a*) *a = 381 mm.*: $\sigma_D = 118{,}5$ MPa, $\sigma_C = 144{,}8$ MPa;
a = 1143 mm.: $\sigma_D = 249{,}6$ MPa, $\sigma_C = 101{,}6$ MPa.
(*b*) *a = 465,8 mm.*, $\sigma = 142{,}5$ MPa.

11.C3 (*a*) *L = 200 mm*: *h* = 2,27 mm;
L = 800 mm: *h* = 1,076 mm.
(*b*) *L = 440 mm*: *h* = 3,23 mm.

11.C4 *a = 300 mm*: 1,795 mm, 179,46 MPa;
a = 600 mm: 2,87 mm, 179,59 MPa.

11.C5 *a = 2 m*: (*a*) 30,0 J; (*b*) 7,57 mm, 60,8 J.
a = 4 m: (*a*) 21.9 J; (*b*) 8,87 mm, 83,4 J.

11.C6 *a = 508 mm*: (*a*) 336,8 mm.;
(*b*) 11,24 kN · m.; (*c*) 3,57 kN.
a = 1270 mm: (*a*) 240,3 mm.;
(*b*) 10,59 kN · m.; (*c*) 4,43 kN.

Índice

A

Ação elástica, 135
Aço. *Veja também* Perfis de aço laminados; Aço estrutural
  propriedades do, 766-767
  tensões no, 256
Aço estrutural
  fatores de projeto para carregamento e resistência, para colunas sob carregamento centrado, 663
  tensão admissível de projeto, para colunas sob carregamento centrado, 658-660
Alongamento
  máxima, 131
  percentual, 74
Alongamento máximo, 131
Alumínio
  projeto de colunas submetidas a uma força centrada, 660-661
  propriedades do, 766-767
American Forest and Paper Association, 661
American Institute of Steel Construction, 658, 663
Análise e projeto de estruturas simples, 32-34
  determinação da tensão de cisalhamento, 33-34
  determinação da tensão normal, 32-33
  determinação das tensões de esmagamento, 34
Análise e projeto de vigas em flexão, 327, 390
  diagramas de força cortante e de momento fletor, 331-341, 383-384
  introducão, 328-330
  problemas de revisão, 387-388
  problemas para computador, 389-390
  projeto de vigas prismáticas em flexão, 352-362, 383, 385
  relações entre carregamento, força cortante, e momento fletor, 342-352, 384
  revisão e resumo, 383-386
  usando funções de singularidade para determinar força cortante e momento fletor em vigas, 363-374, 385-386
  vigas não prismáticas, 374-382, 386
Análise tridimensional de deformações, 495-498
Analogia de membrana, 207-208
Ângulo de torção, 154, 156, 197
  no regime elástico, 170-171, 219
  somando-se algebricamente, 171
Ângulo de torção permanente, 199, 201
Áreas. *Veja* Momentos de áreas
Axissimetria de barras circulares, 206

B

Barras
  barra simples, 22-24
  com apenas dois planos de simetria, 270
  curvas, 305-317, 321
  de material elastoplástico, 266-270
  de parede fina, 422-423, 433
  de seção não circular, 206-209
  estabilidade das, 26
  simétricas, 264, 290, 292
Barras curvas, flexão de, 305-317, 321
Barras de duas forças, 22-24
Barras de paredes finas, tensões de cisalhamento em, 440-441
Barras de seção transversal retangular, torsão de, 207, 222
Barras simétricos, flexão pura de, 232-235, 318

C

Cálculo,
  erros de, 35
Cantoneira de aço
  Abas desiguais, 773
  Abas iguais, 772-773
  propriedades da, 772
Cantoneiras de aço com abas desiguais, 773
Cantoneiras de aço de abas iguais, 772
Carga centrada, 28, 280
  axial, 58
  projeto de colunas submetidas sob uma força centrada, 656-671
Carga-limite, 48, 60
Carregamento admissível e tensão admissível, 22
  coeficiente de segurança, 48, 49, 60
  tensões de cisalhamento, 167-169
Carregamento axial
  centrada, 58
  cresce lentamente, 690
  deformações sob, 81-89, 112-114
  excêntrico, 296, 321

tensão de cisalhamento, 29, 31, 59
tensão de esmagamento em conexões, 31, 59
tensão e deformação – carregamento axial, 66, 150
tensão e deformação no, 149-150
tensão normal, 27-29, 58
Carregamento axial excêntrico, 58, 231
caso geral de, 296, 305, 321
em um plano de simetria, 280-290, 320
Carregamento de impacto, 690, 713-714, 758
Carregamento de reação redundante, 583, 600
Carregamento distribuído, 583, 610
Carregamento estaticamente equivalente, 718, 748
Carregamento excêntrico, 230, 280
colunas sob, 645-656, 683
projeto de colunas sob, 672, 683
Carregamento multiaxial, 115
lei de Hooke generalizada, 105-107, 144
Carregamento não simétrico
barras de paredes finas, 422-423
centro de cisalhamento, 420-423, 436
distribuição de tensões na seção, 425-426
sistema força-momento equivalente no centro de cisalhamento, 426
tensões de cisalhamento na alma, 425
tensões de cisalhamento na alma, 425
tensões devidas a flexão por, 426
tensões devidas a torção por, 426
Carregamento torsional, 522
Carregamento transversal, 240, 328
deformações de uma viga sob, 59, 552-553, 605
Carregamentos. *Veja também* Descarregamento
axial, 27, 58-59, 66-150, 296-305, 321
centrado, 280, 656-671, 683
combinado, 528-540, 542, 610
concentrada, 328
condições gerais de, 44-47, 60
desconhecidos, 91-92
distribuído, 328, 583, 610
excêntrico, 230, 280-290, 296-305, 320-321, 645-656, 672-681, 683
impacto, 690, 713-714, 748
limite, 48, 50, 57
multiaxial, 105-107, 144
não simétricos, 422-423, 426, 602-603, 620-621
parciais equivalente, combinação de, 386
reação redundante, 583, 610
relação com a força cortante, 342
repetidos, 79-80, 142
simétricos, 591-592, 620
torção, 521
transversais, 230, 328, 552-553, 615
visualização, 241
Carregamentos combinados, tensões sob, 528-540, 542, 610
Carregamentos de extremidade aberta equivalente, 386
Carregamentos incógnitos, 92
Carregamentos repetidos, fadiga por, 79-80, 142
Carregamentos simétricos, vigas em balanço e vigas com, 591-592, 620
Castigliano, Alberto, 731
Centro de cisalhamento, 393, 412, 422-423, 436
sistema força-momento equivalente no, 426
Centro de simetria, 428, 757
Centróide, 243
de uma área, 756-758
de uma área composta, 758-760
Círculo de Mohr
análise tridimensional da tensão, 468-470
construção do, 459, 462-463
plano de deformação plana, 445, 510-511
plano de tensão, 444, 445-466, 493-495, 510
Clebsch, A. 367
Cobre, propriedades do, 766-767
Coeficiente de esbeltez, 632, 665, 682
Coeficiente de Poisson, 68, 104-105, 116, 144
Coeficientes
de específica térmica, 94, 143
de influência, 729
Coeficientes de influência, 729
Colchetes de Macaulay, 367
Colunas, 626-688
a fórmula da secante, 627, 645-656, 683
carregadas excentricamente, 645-656
coeficiente de esbeltez, 682
comprimento de flambagem, 627, 683
estabilidade das estruturas, 628-630
extensão da fórmula de Euler's para colunas com outras condições de extremidade, 634-655
força crítica, 682
fórmula de Euler para colunas biarticuladas, 630, 633
introdução, 627
problemas de revisão, 684-686
problemas para computador, 687-688
projeto de colunas submetidas a uma força centrada, 656-673, 683
projeto de colunas submetidas a uma força excêntrica, 672-681
revisão e resumo, 682-683
Combinação de carregamentos parciais equivalente, 386

Componentes da tensão, 22, 44-46
Comportamento elástico *versus* comportamento plástico de um material, 77-79, 142
Compressão, 234
módulo de, 108
Comprimento das amarras, 66
Comprimento de flambagem, de colunas, 627, 683
Conceito de tensão, 21-65
problemas para computador, 63-65
Concentração de tensões, 68, 127-128, 146, 187, 231, 235-263, 319
eixos circulares, 187
Concreto
máxima tensão no, 257
propriedades do, 768-769
vigas reforçadas de, 253
Condições de contorno, 554, 556-564, 572, 574, 615
Considerações de projeto, 47-57. *Veja também* Análise e projeto
carregamento admissível e tensão admissível, 48-49, 60
de vigas prismáticas em flexão, 252-262, 383, 385
determinação da resistência última de um material, 47-48
eixos de transmissão, 154, 185-186, 220, 520-528, 542
especificações de, 50
fator de segurança, 48-49
fatores de carregamento e resistência, 50, 60, 354-356
para carregamentos de impacto, 715-716
para os carregamentos, 48
seleção de fatores de segurança apropriados, 49-50
Constantes de integração, determinação de, 557
Corte simples, 31, 59
Coulomb, Charles Augustin de, 474
Critério da máxima energia de distorção, 444, 472-473, 476, 690
Critério da máxima tensão de cisalhamento, 444, 450-451, 460, 470-472, 476, 509
Critério da máxima tensão normal, 444, 473-474
Critério de Coulomb's, 474
Critério de fluência para materiais dúcteis sob tensão plana, 444, 471-473, 508
critério da máxima energia de distorção, 472-473
critério da máxima tensão de cisalhamento, 471-472
Critério de fratura para materiais frágeis sob tensão plana, 444, 473-481, 509
critério da máxima-tensão-normal, 473-474
critério de Mohr, 474-475
Critério de Mohr, 444, 474-475, 509
Curva elástica
determinação direta a partir da distribução do carregamento, 559
equação da, 553-557, 562-563, 572-574
Curvatura, 238
anticlástica, 240, 319
raio de, 231, 272
Curvatura Anticlastica, 240

D

Deflexão máxima, 553, 604-605, 621, 721
Deflexões e inclinações de vigas, 584, 716, 774
Deformação absoluta máxima, 235
Deformação de cisalhamento máximo, 495-498
Deformação específica normal, 491
sob carregamento axial, 68-70, 141
Deformação lateral, 104, 144
Deformação máxima, 713
Deformação medidor de, 425
Deformação real, 106, 110
Deformação térmica, 143
Deformação total, 96
Deformações, 67, 97-98, 124, 177, 232, 560, 607. *Veja também* Deformações elásticas; Deformações plásticas
calculando, 35
de uma viga sob carregamento transversal, 552-523, 615
em eixo de seção circular, 155-159
em um elemento simétrico em flexão pura, 233-234
em uma seção transversal, 240-259, 319
máximas, 713
permanentes, 231
reais, 106, 110
sob carregamento axial, 81-89, 112-114
totais, 96
Deformações. *Veja também* Distribução de tensão e deformação sob carregamento axial; Relação tensão-deformação; Tensão verdadeira e deformação verdadeira
análise de, 124
análise tridimensional de, 495-498
distribução de, 195
lateral, 104, 144
normais, sob carregamento axial, 68-70, 141
planas, 141
térmica, 143
Deformações elásticas, 236-239, 319
sob carregamento axial, 142
Deformações permanentes, 78, 131, 142, 236, 271
Deformações plásticas, 68, 79, 129-132, 134, 146, 231, 263-265, 320, 412, 436
de barras com um único plano de simetria, 270
em eixos de seção circular, 154, 192, 220
módulo de ruptura, 221

Deformações por tensões de cisalhamento, 109-112, 145, 491
distribuição de, 153-154, 158
Densidade de energia de deformação, 690, 703
Descarregamento, 135
elástico, 201
Descarregamento elástico, 201, 274
Descontinuidade, 363
Deslocamento, relativo, 82, 92
Deslocamento de, 83-84, 57-58
aplicação as vigas em balanço e as vigas com carregamento simétrico, 591-592, 620
aplicação da superposição em vigas estaticamente indeterminadas, 580-588, 618
aplicação dos teoremas de momento-área em vigas com carregamentos não simétricos, 602-603, 620-621
através do teorema de Castigliano's, 731-732, 749
condições de contorno, 615
determinação direta da linha elástica com bsae na força distribuída, 558-559
diagramas de momento de flexão por partes, 593-601, 620
equação da curva elástica, 553-557
introdução, 550-552
máximo, 604-605, 621, 718, 721
método da superposição, 578-580, 618
pelo método do trabalho-energia, 718-728
por única carga, 718-728
problemas de revisão, 622-623
problemas para computador, 624-625
revisão e resumo, 594-621
sob carregamento transversal, 552-553, 615
teorema do momento de área, 589-591, 618-619
usando funções de singularidade para determinar, 569-578, 617
uso do teorema do momento de área em vigas estaticamente indeterminadas, 606-614, 621
vigas estaticamente indeterminadas, 560-569, 616-617
Desviação tangencial, 590
Deterioração, 49
Determinação
da linha elástica, 558-559
da resistência última de um material, 47-48, 80
da tensão normal, 32-33
das forças, 124, 428
das tensões de cisalhamento, 33-34
das tensões de cisalhamento em uma vigas, 396-397, 435
das tensões de contato, 36
de constantes de integração, 550
do momento de inércia de área composta, 764-765
do momento estático, 758-760
Diagrama de carregamento, modificado, 370
Diagramas
carregamento, 370
corpo livre, 22, 35-36, 51-52, 58, 83-84
de força cortante, 331-334, 345-347, 353-356, 383-384
de força cortante e momento fletor, 331-351, 383-384, 593-601, 620
de relação tensão-deformação, 67, 69, 141, 196, 713
Diagramas de corpo livre, 22, 35-36, 51-52, 58, 83-84
Diagramas de força cortante, 331-341, 345-347, 355-356, 383-384
Diagramas de momento fletor, 330, 340, 345,-347, 384
por partes, 551, 573-601, 620
Dilatação, 108, 144
módulo de compressibilidade volumétrica, 107-109, 144
Distribuição de carregamento, determinação direta da curva elástica para, 558-559
Distribuição de tensões
em viga de seção retangular estreita, 400-407, 425, 435
estaticamente indeterminada, 28
na seção, 426-427
Distribuição de tensões e deformações sob carregamento axial, 66-150
carregamento multiaxial, 105-107, 144
carregamentos repetidos , fadiga, 79-80, 142
coeficiente de Poisson, 101-105, 144
comportamento elástico versus plástico de um material, 77-79, 142
concentrações de tensão, 147-128, 146
deformação normal sob, 68-70, 141
deformações plásticas, 129-132, 146
deformações sob, 81-89, 112-114, 142
dilatação, 144
introdução, 67
lei de Hooke, 76-77, 142
módulo de rigidez, 148
princípio de Saint-Venant na, 124-126, 146
problemas de revisão, 147-149
problemas envolvendo mudanças de temperatura, 94-93, 143
problemas estaticamente indeterminados, 90-93, 143
revisão e resumo, 141-146
sob o princípio de Saint-Venant, 124-126, 146
tensão verdadeira e deformação verdadeira, 75-76
tensões de cisalhamento, 109-112, 145
tensões residuais, 133-140, 146
Dupla força cortante, 31

E

Eixos
central, 760, 763-764
de simetria, 757

Eixos, estaticamente indeterminados, 173-184, 219
Eixos de seção circular
  axissimétrica, 157
  deformações em, 154-159, 218-220, 218, 220
  feitos de material elastoplastico, 194-197, 221
Eixos de transmissão, 152
  projeto de, 154
Eixos vazados de paredes finas, 209-217, 222
Elasticidade, módulo de, 46, 76-77, 142
Elastômero, 123
Energia cinética, 104, 144
Energia de deformação, 704, 714, 716, 722
  e métodos de energia, 690-692, 746
  na flexão, 696-697
  na torção, 698, 747
  para um estado geral de tensão, 700-702, 748
  sob carregamento axial, 695-696, 747
  sob carregamento transversal, 699
Energia de deformação elástica
  em flexão, 696-697, 747
  em tensões de cisalhamento, 697-699, 747
  em tensões normais, 694-697
  na torção, 698, 747
  sob carregamento axial, 695-696, 747
  sob carregamento transversal, 699
Ensaio de tração, 70
Equações
  da curva elástica, 553-557, 562-563, 572-574, 616, 774
  da estática, 163
  de equilíbrio, 59
Equações de equilíbrio, 59
Erros de, 35
Especificação Nacional para Projeto de Construções de Madeira, 661
Estabilidade de estruturas, colunas, 627-630
Estabilidade das barras, 26
Estado plano, 702
  transformação do, 490-492, 510
Estado plano de deformação, 121
Estado tridimensional de tensão, 444
Estática, 97-98
  equações da, 163
  exame dos métodos, 22-24
Estricção, 72-73
Estruturas estáticamente indeterminadas, métodos de energia em, 736-755, 749
Estruturas simples, projeto e análise de, 32-34
Euler, Leonhard, 631
Expansão térmica, coeficiente de, 94, 143

F

Fadiga, causada por carregamentos repetidos, 79-80, 142
Fator de resistência, 663. *Veja também* Fatores de Projeto sobre Carregamento e Resistência
Fator de segurança, 48-49, 60, 703
  seleção apropriada de, 49-50
Fator de segurança. *Veja* Margem de segurança
Fatores de forma, 268
Ferro fundido, propriedades do, 766-767
Flexão. *Veja também* Flexão pura
  análise e projeto de vigas em, 327, 390
  de barras constituídas por vários materiais, 250, 253, 319
  de barras curvas, 305-317, 321
  tensões devidas a, 426, 532, 486
Flexão assimétrica, 231, 290-295, 321
Flexão e torção, 412, 422
Flexão pura, 228-326
  barras feitos de material elastoplástico, 266-269
  carregamento axial excêntrico em um plano de simetria, 280-290, 320
  caso geral de carregamento axial excêntrico, 296
  concentração de tensões, 254-263, 319
  de barras curvas, 305, 321
  de barras constituídas de vários materiais, 250-253, 319
  deformações em barras simétricos, 234-245
  deformações na seção transversal, 240-249, 319
  deformações plásticas, 263-265, 270, 320
  em barras simétricos, 251-252, 318
  flexão assimétrica, 290-295, 321
  introdução, 229
  problemas de revisão, 387-388
  problemas para computador, 325-326
  revisão e resumo, 318
  tensões e deformações no regime elástico, 236-239, 318-319
  tensões residuais, 270
Fluência, 78
Fluxo de força cortante, 210, 393, 395, 411
Força cortante horizontal, 395
Força cortante longitudinal, em elemento de viga com seção arbitrária, 408-409, 435-436
Força crítica, em colunas, 682
Força de corte
  duplo, 31
  horizontal, 395
  relacionada ao carregamento, 345
  relacionada ao momento de flexão, 343-344
  simples, 31, 59

Forças
desconhecidas, 59
determinação das, 124
Forças concentradas, 328
único, 716
Forças incógnitas, 59
Fórmula da secante, 627, 645-656, 648, 683
Fórmula de Euler, 627, 631, 650
extensão a colunas com outras condições de extremidade, 634-635
para colunas com pinos de extremidade, 631-633, 683
Fórmula de Gordon-Rankine, 657
Fórmula de interação, 673-674
Fórmula para flexão elástica, 237, 318
Fórmulas
da secante, 627, 645-656, 683
de Euler, 627, 630, 649
de Gordon-Rankine, 657
de interação, 673-674
regime elástica, 237, 318
torção elástica, 195
Função degrau, 345, 385
Funções de singularidade, 330, 551
aplicação em programação para computador, 368
carregamentos equivalentes, 386
função degrau, 385
na determinação da força cortante e do momento fletor em uma viga, 363-364, 385-396
na determinação do giro das seções e nas deflexões de vigas, 569-578, 617

G

Giração, raio de, 761-763

H

Hertz (Hz), 185
Hooke, Robert, 76
Hz. *Veja* Hertz

I

Inércia. *Veja* Momentos de inércia
Instruções IF/THEN/ELSE, 368
Integração
constantes de, 557
métodos de, 624

J

Joule (J), 691

L

Lâmina, 77, 116
Lei de Hooke, 108, 129, 145, 159, 194
generalizada, 104-127
módulo de elasticidade, 76-97, 142
Liga de Cobre-Níquel, propriedades da, 767-768
Liga Monel, propriedades da, 767-769
Ligas de magnésio, propriedades das,768-769
Limite de fadiga, 80
Limite de fluência, superior e inferior, 73
Limite de proporcionalidade, 76, 142
Limite de resistência, 72
Limite de resistência à fadiga, 80, 142
Limite elástico, 77, 142
Load and Resistance Factor Design (LRFD), 50, 57, 354-356. *Veja também* Carregamento admissível e tensão admissível
LRFD. *Veja* Load and resistance factor design

M

Macaulay, W.H., 367
Madeira
projeto de colunas sob carregamento centrado, 661-662
Madeira, propriedades da, 767, 768
Máquina de ensaio para torção, 170
Margem de segurança, 48
Materiais. *Veja também* Materiais anisotrópicos; Materiais frágeis; Materiais Compostos; Materiais Dúcteis; Materiais elastômeros; Materiais elastoplásticos; Materiais homogêneos; Materiais isotrópicos; Materiais ortotrópicos
comportamento elástico versus plástico dos, 77-79
determinando a resistência última de, 47-48
flexão de barras feitas de vários, 250-253, 319
Materiais Anisotropicos, 77
Materiais Compostos, 231
reforçados com fibras, relações tensão-deformação para, 115-124, 146
Materiais compostos reforçados por fibras, relação tensão-deformação para, 115-124, 142, 146
Materiais dúcteis, 67, 51, 141
estado plano de tensão, critério de escoamento para, 471-473, 508
Materiais elastoplásticos, 129, 146, 231, 266-267, 320
barras constituídas de, 266-269
eixos de seção circular feitos de, 192-197, 222

Materiais frágeis, 71, 141
falha súbita em, 42
sob tensão plana, critério de falha para, 473-481, 509
Materiais homogêneos, 104
Materiais isotrópicos, 77, 104
Materiais ortotrópicos, 116
Materiais usados em engenharia, 766-769
aço, 766-767
alumínio, 766-767
cobre, 766-767
cobre-níquel, 767-769
concreto, 768-769
ferro fundido, 766-767
liga Monel, 767
ligas de magnésio, 767-769
madeira, 768-769
plásticos, 767
titânio, 768-769
Matriz, 77, 115
Máxima tensão, 53, 78, 725
Maxwell, James Clerk, 730
Medidas
comprimento, 70
deformação, 445
pressão, 482, 500
Medidas de deformação, roseta de deformações, 498-515, 510
Método da interação, projeto de colunas sob carregamento excêntrico, 673-674, 683
Métodos
da estática, revisão de, 22-24
da integração, 624
da superposição, 578-580, 618
de solução do problemas, 34-35, 59
Métodos de energia, 689-753
carregamento de impacto, 713-714, 748
deflexão sob carregamento único via método de trabalho-energia, 718-729
deflexões pelo teorema de Castigliano's, 732-735, 749
densidade de energia de deformação, 692-694, 746
energia de deformação, 690-692, 746
energia de deformação elástica em tensões normais, 694-697
energia de deformação elástica para tensões de cisalhamento, 697-699, 747
energia de deformação para um estado geral de tensão, 700-712, 748
equivalente estático do carregamento, 748
estruturas estáticamente indeterminadas, 736-745, 749
introdução, 690
módulo de resiliência, 747
módulo de tenacidade, 746-747
problemas de revisão, 750-751
problemas para computador, 752-753
projeto para carregamentos de impacto, 715-716
revisão e resumo, 746-749
teorema de Castigliano, 731-732, 749
trabalho e energia devido a várias cargas, 209-731
trabalho e energia em razão de uma única carga, 716-718, 50-51
Métodos de energia, 692-694
Módulo
de compressão, 117
de elasticidade, 67, 76-77, 142
de resiliência, 690, 693-694, 747
de rigidez, 68, 76, 111, 134, 148
de ruptura, 194, 221, 265
de tenacidade, 690, 693, 746
seção elástica, 269
seções plástica, 268-270
volumétrica, 68, 107-109, 144
Módulo de compressibilidade volumétrica, 68, 107-109, 144
Módulo de resistência, 227, 269, 319
Módulo de Young, 76
Módulo plástico de uma seção, 268-269
Momento de flexão, 221, 242, 272
relação com a força cortante, 353-354
Momento de inércia centroidal, 243, 409, 415, 518
Momento de primeira ordem, 395, 756-760
determinação do, 758-760
Momento elástico máximo, 231
Momento plástico, 273, 320
Momentos de áreas, 551
centroide de uma área, 756-758
centroide de uma área composta, 758-760
determinação do momento de inércia de uma área composta, 764-765
determinação do momento estático, 758-760
momento de segunda ordem ou momento de inércia de uma área, 193, 237
momento estático de uma área, 756-758
raio de giração, 632-638, 673
teorema dos eixos paralelos, 763-764
Momentos de inércia, 242. *Veja também* Momento de flexão
centroidal, 243, 257
de uma área composta, determinação, 764-765
polar, 160-161, 171, 218
Momentos polares de inércia, 175, 761
Mudanças de temperatura, problemas envolvendo, 94-103, 143

N

Núcleo elástico, raio de, 197

O

Otto, Mohr, 456, 474

P

Pa. *Veja* Pascal
Paralelepípedo
  oblíquo, 109
  rectangular, 106
Paralelepípedo oblíquos, 109
Paralelepípedo retangular, 106
Pascal (Pa), 25
Perfil C. *Veja* Perfis de aço padronizados
Perfis de aço com mesas largas (perfis W), propriedades dos, 768-777
Perfis de aço laminado, 768-770
  Cantoneiras, 772-773
  Padrão americano de perfis C, 770-771
  Perfil de padrão americano, 770-771
  Perfis de mesas largas, 768-769
Plano de simetria, deformações plásticas de barras com um único, 270
Planos perpendiculares, 43
Poisson, Siméon Denis, 104
Ponto de escoamento inferior, 73
Ponto de escoamento superior, 73
Potência, 185
Precisão, numérica, 35, 42, 60
Pressão hidrostática, 108
Primeiro teorema do momento de área, 551, 589, 594-597, 604, 619
Princípio de Saint-Venant, 124-126, 146, 158, 241, 296, 401, 519, 529, 552
Problemas de revisão
  análise e projeto de vigas em flexão, 388
  carregamento axial, 148-149
  colunas, 686
  conceito de tensão, 62-64
  deflexão de vigas, 622-623
  flexão pura, 322-324
  métodos de energia, 728-729
  tensões de cisalhamento em vigas e em barras de paredes finas, 438-439
  tensões principais sob um dado carregamento, 543-545
  torção, 224-225
  transformações de tensão e deformação, 512-513
Problemas estáticamente determinados, 329, 383
Problemas estáticamente indeterminados, 67, 90-93, 143, 329, 551
  com o uso dos teoremas de área momento, 60-61, 621
  de primeiro grau, 581, 607, 616, 618
  de segundo grau, 561, 607, 617-618
  distribução de tensões, 28
  eixos, 154-155, 173-174, 218-219
  método da superposição, 91-93
  vigas, 560-569, 616-618
Problemas para computador
  análise e projeto de vigas em flexão, 389-390
  aplicando funções de singularidade para determinar a força cortante e o momento fletor em uma viga, 367
  carregamento axial, 149-150
  colunas, 687-688
  conceito de tensão, 62-65
  deflexões em vigas, 624-625
  flexão pura, 325-326
  métodos de energia, 752-753
  tensões de cisalhamento em vigas e barras de paredes finas, 440-441
  tensões principais sob um carregamento dado, 546-548
  torção, 225-227
  transformacões de tensão e deformação, 513-514
Projeto de colunas
  aço estrutural, 658-660, 663
  alumínio, 660-661
  madeira, 661-662
  método da interação, 673-674, 683
  método das tensões admissíveis, 658-659, 672-673, 683
  para maior eficiência, 638
  sob força centrado, 656-657
  sob força excêntrico, 672-681, 683
  usando fatores de projeto no carregamento e na resistência, 663
Projeto eficiente, para colunas, 638
Propriedade de perfis de aço laminado, 768-769
Propriedades
  aço laminado, 522-523, 770-771
  de materiais selecionados usados em engenharia, 766

Q

Quantidades adimensional, 70

R

Raio de curvatura, 231, 272
  permanente, 274

Raio de rotação, 761-762
Reações redundantes, 91
Regime elástico, 236
  ângulo de torção na, 170-173, 219
Relações tensão-deformação, 193. *Veja também* Tensão verdadeira e deformação verdadeira
  diagramas de, 67, 69-75, 141, 196, 713
  para materiais compósitos reforçados com fibras, 115-124, 146
Resiliência, módulo de, 690, 693-694, 747
Resistência. *Veja também* Resistência última de um material
  à ruptura, 72
  constante, 330, 374, 386
  escoamento, 703
Resistência ao escoamento, 72, 141, 703
Resistência constante, 330, 374, 386
Resistência última de um material, 22, 72
  determinação do, 47, 60
Rigidez
  à flexão, 554, 592, 615
  módulo de, 68, 111, 116, 145
Rigidez à flexão, 554, 592, 615
Roseta de deformações, 445, 498, 510
Rotação, velocidade de, 165
Rótula plástica, 412
Ruptura, módulo de, 194, 221, 265

S

Saint-Venant, Adhémar Barré de, 126
Seção transversal, deformações na, 240-249, 319
Seções não circular, 209
Segundo momento, de áreas, 761-763
Segundo teorema do momento de área, 619
Simetria
  centro de, 428, 737
  eixos de, 757
Sistema força-momento, no centro de cisalhamento, equivalente, 426
Sistema força-momento equivalente, no centro de cisalhamento, 426
Solução de problemas, método de, 34-35, 59
Superfície neutra, 234, 236, 306, 308
Superfícies de contato, 59
Superposição
  aplicação da superposição para vigas estaticamente indeterminadas, 600, 638
  método de, 91-93, 618
  princípio da, 106

T

Tangente de referência, 591, 597, 602-603, 608, 622
Tenacidade, módulo de, 690, 693, 746-747
Tensão absoluta máxima, 236
Tensão admissível, 242
  projeto de colunas submetidas a uma força excêntrica, 672-673, 683
Tensão crítica, 632
Tensão de cisalhamento mínima, 161, 163
Tensão de engenharia, 75
Tensão longitudinal, 482-483
Tensão na flexão, 237
Tensão uniaxial, 234
Tensão verdadeira e deformação verdadeira, 75-76
Tensões. *Veja também* Carregamento admissível e tensão admissível; Distribuição de tensões; Tensões principais; Tensões de cisalhamento
  aplicação na análise e projeto de estruturas simples, 32
  calcular a, 35
  conceito de, 21
  considerações de projeto, 47-57
  críticas, 638
  de contato, 31, 59
  de engenharia, 75
  de flexão, 237
  determinação de, 124
  devidas à flexão, 426
  devidas à torção, 426
  em barras de uma estrutura, 25
  em eixos, 154-156
  em plano oblíquo sob carregamento axial, 43-44, 60
  em vasos de pressão de parede fina, 482-486
  estado geral de, 466-467, 508
  introdução, 22
  longitudinal,482-483
  máximas, 718, 721
  método de solução de problemas, 34-35, 59
  no aço, 256
  no regime elástico, 159, 218-219
  normal, 22, 29, 36, 38, 329, 466, 530, 720, 757
  precisão numérica, 35, 60
  problemas de revisão, 61-63
  projeto e análise, 26
  residuais, 133-150, 156, 197-205, 290
  revisão dos métodos da estática, 22
  revisão e resumo, 58
  sob carregamentos combinados, 528
  sob condições gerais de carregamento, 60

uniaxial, 234
valores médios de, 27, 58
Tensões combinadas, 426-428
Tensões centradas, 686
Tensões combinadas, 426-428
Tensões de cisalhamento, 22, 29-31, 36, 46-47, 59, 329, 402-403, 425, 720. *Veja também* Critério da máxima tensão de cisalhamento
admissível, 167-169, 177
componentes da, 46
deformações plásticas, 412-421, 436
determinação da, 33-34, 396-397, 436
em barras de paredes finas, 410-412, 436
em eixos de seção circular, 159
em viga de seção retangular estreita, 400, 435
energia de deformação elástica por, 697-376, 434-435
introdução, 392-393
longitudinal, em elemento de viga de seção arbitrária, 408-409, 435
média, 56, 59, 396, 435
mínima, 161, 163
na alma, 425
na face horizontal do elemento de viga, 394-396, 434-435
nas almas, 436
nas vigas, 397, 435
por carregamento assimétrico em barras de parede fina, 422-423, 436
problemas de revisão, 437-439
problemas para computador, 440-441
revisão e resumo, 434-436
Tensões de esmagamento, 22, 31, 34, 36, 59
determinação das, 34
médias, 42
nas conexões, 31
Tensões e deformações no regime elástico, 239, 318-319
fórmula da elástica na flexão, 318
Tensões Normais, 22, 27-29, 36, 43, 231, 329, 466, 530, 690, 720. *Veja também* Critério da máxima tensão normal
determinação das, 34, 47
energia de deformação elástica para, 694-697
Tensões principais, 444, 467, 507
em uma viga, 517-519, 541
introdução, 516
máximas tensões de cisalhamento, 448-456, 537
problemas de revisão, 543-545
problemas para computador, 546-548
projeto de eixos de transmissão, 520-528, 542
revisão e resumo,
sob carregamentos combinados, 528-540, 542
sob um carregamento dado, 515
Tensões residuais, 68, 133-150, 146, 270-279
em eixos de seção circular, 154, 197-205, 220, 222
Teorema da reciprocidade de Maxwell, 730
Teorema de Castigliano, 690, 731-732, 749
deflexões pelo, 732-739
Teorema dos eixos paralelos, 763-764
Teoremas do momento de área, 589, 602
aplicação nas vigas com carregamentos assimétricos, 602, 603, 620
aplicados à vigas estaticamente indeterminadas, 606-614, 621
Titânio, propriedades do, 768-769
Torção, 151-227
de barras com seção transversal retangular, 222
de barras de seção não circular, 206, 222
deformações plásticas em eixos de seção circular, 192-194, 220
introdução, 152-154
módulo de ruptura na, 194
problemas de revisão, 223-225
problemas para computador, 225-227
revisão e resumo, 218-222
Torção. *Veja também* Ângulo de giro; Giro permanente
tensões devidas a, 426, 532
Torçor plástico, 195
Torque elástico
fórmulas para, 160
máximo, 195
Torque elástico máximo, 195
Torques, 152. *Veja também* Torque elástico; Torque plástico
Internos, 173
máximos permitidos, 161, 176
Torques internos, 161, 173
Trabalho
elementar, 691
total, 691
Trabalho de um carregamento, 48
Trabalho e energia
princípio do, 721-722
sob carregamento único, 716-718
Trabalho elementar, 691
Trabalho total, 691
Tração, 234
Trajetórias das tensões, 519
Transformaçãos da tensão e da deformação, 442-514
análise tridimensional das deformações, 495-498

aplicação do círculo de Mohr na análise das tensões tridimensionais, 468-470
círculo de Mohr para as tensões planas, 456-466, 493-495, 507, 510
critério de falha para materiais frágeis sob tensão plana, 473-481, 209
critério de fluência para materiais dúcteis sob tensão plana, 471-473, 508
estado geral de tensão, 466-467, 508
introdução, 443-445
máximas tensões de cisalhamento, 448-456, 507
medidas de deformação, 498, 510
na tensão plana, 445-447, 490-492, 506, 510
problemas de revisão, 511-513
problemas para computador, 513-514
revisão e resumo, 506-510
tensões em vasos de pressão de parede fina, 482-489
tensões principais, 507

V

Valor médio, de tensões, 27, 58
Vasos de pressão cilíndricos com paredes finas, tensões em, 509
Vasos de pressão de paredes finas, 445, 509
Vasos de pressão esféricos de parede fina, tensões nos, 509
Velocidade de rotação, 185
Vigas
de seção qualquer, força cortante longitudinal em, 408-409, 435-436
força cortante na face horizontal dos, 394-396
Vigas. *Veja também* Análise e projeto de vigas em flexão
de resistência constante, 386
estaticamente indeterminadas, 560-569, 616-617
não prismáticas, 330, 374-382, 386
tensões de cisalhamento em, 460-461
Vigas de mesa larga (viga W), 238
propriedades de, 770
Vigas de padrão americano (viga I),
propriedades de, 771-772
Vigas de seção retangular, estreitas, distribução de tensões em, 402-407, 425
Vigas em balanço, 551, 591, 620
e vigas com carregamento simétrico, 591-592, 620
Vigas não prismática, 330, 374-382, 386
vigas de resistência constante, 374

W

Winkler, E., 305

Y

Young, Thomas, 76

Prefixos SI

Fator Multiplicador	Prefixo†	Símbolo
$1\,000\,000\,000\,000 = 10^{12}$	tera	T
$1\,000\,000\,000 = 10^{9}$	giga	G
$1\,000\,000 = 10^{6}$	mega	M
$1\,000 = 10^{3}$	kilo	k
$100 = 10^{2}$	hecto	h
$10 = 10^{1}$	deka	da
$0{,}1 = 10^{-1}$	deci	d
$0{,}01 = 10^{-2}$	centi	c
$0{,}001 = 10^{-3}$	milli	m
$0{,}000\,001 = 10^{-6}$	micro	μ
$0{,}000\,000\,001 = 10^{-9}$	nano	n
$0{,}000\,000\,000\,001 = 10^{-12}$	pico	p
$0{,}000\,000\,000\,000\,001 = 10^{-15}$	femto	f
$0{,}000\,000\,000\,000\,000\,001 = 10^{-18}$	atto	a

† Deve-se evitar o uso desses prefixos, exceto para medidas de áreas e volumes para usos não técnicos do centímetro, como altura das pessoas e medidas de roupas.

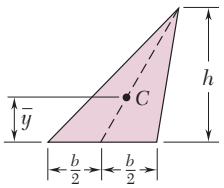
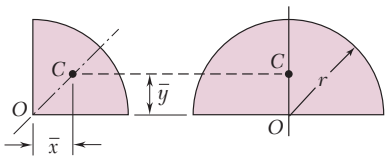
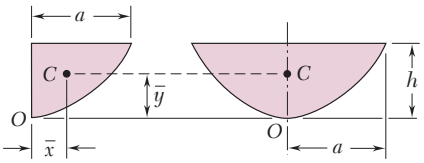
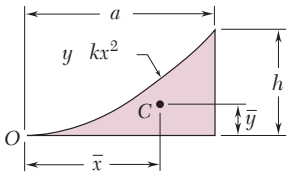
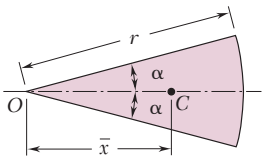
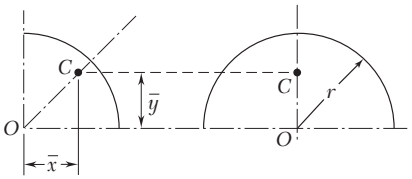
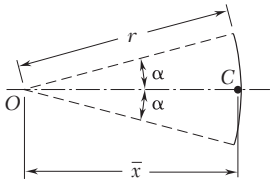
Principais unidades do SI usadas em mecânica

Grandeza	Unidade	Símbolo	Fórmula
Aceleração	Metro por segundo ao quadrado	...	m/s^2
Aceleração angular	Radianos por segundo ao quadrado	...	rad/s^2
Ângulo	Radiano	rad	
Área	Metro quadrado	...	m^2
Comprimento	Metro	m	
Densidade	Quilograma por metro cúbico	...	kg/m^3
Energia	Joule	J	$N \cdot m$
Força	Newton	N	$kg \cdot m/s^2$
Frequência	Hertz	Hz	s^{-1}
Impulso	Newton-segundo	...	$kg \cdot m/s$
Massa	Quilograma	kg	
Momento de uma força	Newton-metro	...	$N \cdot m$
Potência	Watt	W	J/s
Pressão	Pascal	Pa	N/m^2
Tempo	Segundo	s	
Tensão	Pascal	Pa	N/m^2
Trabalho	Joule	J	$N \cdot m$
Velocidade	Metros por segundo	...	m/s
Velocidade angular	Radianos por segundo	...	rad/s
Volume, líquidos	Litro	L	$10^{-3}\ m^3$
Volume, sólidos	Metro cúbico	...	m^3

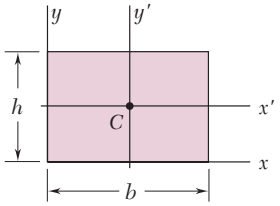
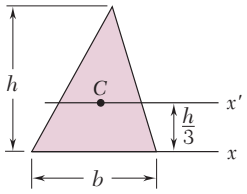
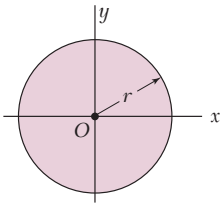
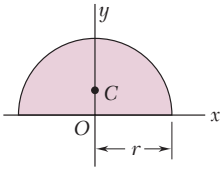
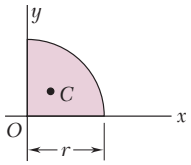
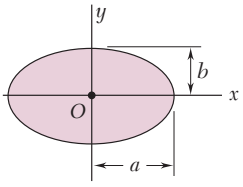
Unidades inglesas e seus equivalentes SI

Grandeza	Unidades Inglesas	Equivalente SI
Aceleração	ft/s^2	0,3048 m/s^2
	$in./s^2$	0,0254 m/s^2
Área	ft^2	0,0929 m^2
	in^2	645,2 mm^2
Energia	ft · lb	1,356 J
Força	kip	4,448 kN
	lb	4,448 N
	oz	0,2780 N
Impulso	lb · s	4,448 N · s
Comprimento	ft	0,3048 m
	in.	25,40 mm
	mi	1,609 km
Massa	oz mass	28,35 g
	lb mass	0,4536 kg
	slug	14,59 kg
	ton	907,2 kg
Momento de uma força	lb · ft	1,356 N · m
	lb · in.	0,1130 N · m
Momento de inércia		
de uma área	in^4	0,4162 × 10^6 mm^4
de uma massa	lb · ft · s^2	1,356 kg · m^2
Potência	ft · lb/s	1,356 W
	hp	745,7 W
Pressão ou tensão	lb/ft^2	47,88 Pa
	lb/in^2(psi)	6,895 kPa
Velocidade	ft/s	0,3048 m/s
	in./s	0,0254 m/s
	mi/h (mph)	0,4470 m/s
	mi/h (mph)	1,609 km/h
Volume, sólidos	ft^3	0,02832 m^3
	in^3	16,39 cm^3
Líquidos	gal	3,785 L
	qt	0,9464 L
Trabalho	ft · lb	1,356 J

Centroides de formas comuns de área e linha

Forma		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Área
Área de triângulo			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Área de quarto de círculo		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Área semicircular		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Área semiparabólica		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
Área parabólica		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$
Triângulo de hipotenusa parabólica		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
Setor circular		$\frac{2r\,\text{sen}\,\alpha}{3\alpha}$	0	αr^2
Arco de quarto de círculo		$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{\pi r}{2}$
Arco semicircular		0	$\frac{2r}{\pi}$	πr
Arco de círculo		$\frac{r\,\text{sen}\,\alpha}{\alpha}$	0	$2\alpha r$

Momentos de inércia de formas geométricas comuns

Retângulo		$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12}bh^3$ $\bar{I}_{y'} = \frac{1}{12}b^3h$ $I_x = \frac{1}{3}bh^3$ $I_y = \frac{1}{3}b^3h$ $J_C = \frac{1}{12}bh(b^2 + h^2)$
Triângulo		$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{36}bh^3$ $I_x = \frac{1}{12}bh^3$
Círculo		$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{2}\pi r^4$
Semicírculo		$I_x = I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{4}\pi r^4$
Quarto de círculo		$I_x = I_y = \frac{1}{16}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{8}\pi r^4$
Elipse		$\bar{I}_x = \frac{1}{4}\pi ab^3$ $\bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi a^3b$ $J_O = \frac{1}{4}\pi ab(a^2 + b^2)$

MECÂNICA DOS MATERIAIS

Ferdinand P. Beer / E. Russel Johnston, Jr. / John T. DeWolf / David F. Mazurek

QUINTA EDIÇÃO

Esta nova edição de *Mecânica dos Materiais* confirma o padrão de excelência desenvolvido pelos autores nas versões anteriores do livro. Utilizada por milhares de estudantes ao redor do mundo desde a sua primeira publicação, em 1981, a obra de Beer, Johnston, DeWolf e Mazurek é o clássico definitivo para o ensino e a aprendizagem da mecânica dos sólidos.

O estudo do tema está aqui fundamentado na explicação precisa de conceitos básicos e no uso de modelos simplificados. Exemplos detalhados e diversos exercícios completam essa abordagem, que permite desenvolver fórmulas de uma maneira racional e lógica e indicar as condições sob as quais elas podem ser aplicadas com segurança na análise e no projeto das estruturas reais de engenharia e componentes de máquinas.

Este livro é leitura obrigatória e indispensável nas disciplinas de mecânica dos materiais, mecânica dos sólidos ou ainda resistência dos materiais, parte do currículo dos cursos de engenharia nos dois primeiros anos da graduação.

Visite a Área do Professor no site www.bookman.com.br para acessar material exclusivo (em inglês) deste livro.

ENGENHARIAS

ISBN 978-85-8055-008-5

grupo a
Conhecimento que transforma.

Mc Graw Hill

bookman